

SMA0805 - Tópicos de Matemática

Francisco Rosa Dias de Miranda - 4402962

Segunda Avaliação - Parte 2

Em uma festa de fim de ano, foram n pessoas. Nessa festa, cada pessoa abraçou cada uma das outras pessoas exatamente uma vez. No total houve 2080 abraços nessa festa. Determine o valor de n , e justifique sua resposta.

Resolução

Vamos fixar a ordem das pessoas na festa para evitar de contar em duplicidade.

A pessoa (1) da festa abraçou $n - 1$ pessoas, de acordo com o enunciado. A pessoa (2) já teve seu abraço em (1) computado, então temos que (2) deu outros $n - 2$ abraços. Já a pessoa (3) abraçou $n - 3$ novas vezes, e assim por diante.

Quando chegamos ao $(n - 1)$ -ésimo convidado, só resta a ele abraçar a pessoa na posição (n) , que, assim, tem todos seus abraços contabilizados. Portanto, podemos determinar o total de abraços em função de n da seguinte forma:

Total de abraços = $\sum_{i=1}^n (n - i)$. (Prova: por indução, que aqui omitiremos).

Logo, segue que:

$$2080 = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 + 0$$

Utilizando a fórmula de soma dos n termos de uma P.A. de razão 1, temos:

$$2080 = \frac{n(0 + n - 1)}{2} \Leftrightarrow n^2 - n = 4160 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -64 \\ n = 65 \end{cases}$$

Desconsideramos a solução negativa, pois procuramos o número de pessoas na festa. Portanto, $n = 65$.