EXERCÍCIOS

A.10 Dê os elementos dos seguintes conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é letra da palavra "matemática"$\}$
$B = \{x \mid x$ é cor da bandeira brasileira$\}$
$C = \{x \mid x$ é nome de estado que começa com "a"$\}$

Solução

$A = \{m, a, t, e, i, c\}$
$B = \{$branco, azul, amarelo, verde$\}$
$C = \{$amazonas, amapá, acre, alagoas$\}$

A.11 Descreva através de uma propriedade característica dos elementos cada um dos conjuntos seguintes:

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$
$B = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
$C = \{$brasília, rio de janeiro, salvador$\}$

Solução

$A = \{x \mid x$ é inteiro, par e não negativo$\}$
$B = \{x \mid x$ é algarismo arábico$\}$
$C = \{x \mid x$ é nome de cidade que já foi capital do Brasil$\}$

A.12 Escreva com símbolos:

a) conjunto dos múltiplos inteiros de 3, entre -10 e $+10$
b) conjunto dos divisores inteiros de 42
c) conjunto dos múltiplos inteiros de 0
d) conjunto das frações com numerador e denominador compreendidos entre 0 e 3
e) conjunto dos nomes das capitais da região centro-oeste do Brasil

A.13 Descreva por meio de uma propriedade dos elementos

$A = \{+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6\}$ $B = \{0, -10, -20, -30, -40, \ldots\}$
$C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$ $D = \{$Lua$\}$

A.14 Quais dos conjuntos abaixo são unitários?

$A = \{x \mid x < \frac{9}{4} \text{ e } x > \frac{6}{5}\}$ $B = \{x \mid 0 \cdot x = 2\}$
$C = \{x \mid x \text{ é inteiro e } x^2 = 3\}$ $D = \{x \mid 2x + 1 = 7\}$

A.15 Quais dos conjuntos abaixo são vazios?

$A = \{x \mid 0 \cdot x = 0\}$
$B = \{x \mid x > \frac{9}{4} \text{ e } x < \frac{6}{5}\}$
$C = \{x \mid x$ é divisor de zero$\}$
$D = \{x \mid x$ é divisível por zero$\}$

EXERCÍCIOS

A.16 Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4\}$, pede-se:

a) escrever com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

1ª) 3 é elemento de A   2ª) 1 não está em B
3ª) B é parte de A   4ª) B é igual a A
5ª) 4 pertence a B

b) classificar as sentenças anteriores em falsa ou verdadeira.

Solução

1ª) $3 \in A$ (V)
2ª) $1 \notin B$ (V)
3ª) $B \subset A$ (V)
4ª) $B = A$ (F)
5ª) $4 \in B$ (V)

A.17 Sendo $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classificar em V ou F cada sentença abaixo e justificar:

a) $A \subset D$ b) $A \subset B$ c) $B \subset C$
d) $D \supset B$ e) $C = D$ f) $A \not\subset C$

Solução

a) V pois $1 \in A$, $1 \in D$, $2 \in A$ e $2 \in D$
b) F pois $1 \in A$ e $1 \notin B$
c) F pois $2 \in B$ e $2 \notin C$
d) V pois $2 \in B$, $2 \in D$, $3 \in B$ e $3 \in D$
e) F pois $2 \in D$ e $2 \notin C$
f) V pois $2 \in A$ e $2 \notin C$

A.18 Quais das igualdades abaixo são verdadeiras?

a) $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$
b) $\{x \mid x^2 = 4\} = \{x \mid x \neq 0 \text{ e } x^3 - 4x = 0\}$
c) $\{x \mid 2x + 7 = 11\} = \{2\}$
d) $\{x \mid x < 0 \text{ e } x \geqslant 0\} = \varnothing$

A.19 Dizer se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo.

a) $0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ f) $a \in \{a, \{a\}\}$
b) $\{a\} \in \{a, b\}$ g) $\{a\} \subset \{a, \{a\}\}$
c) $\varnothing \in \{0\}$ h) $\varnothing \subset \{\varnothing, \{a\}\}$
d) $0 \in \varnothing$ i) $\varnothing \in \{\varnothing, \{a\}\}$
e) $\{a\} \subset \varnothing$ j) $\{a, b\} \in \{a, b, c, d\}$

A.20 Fazer um diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A, B, C, D são conjuntos não vazios, $D \subset C \subset B \subset A$.

A.21 Construir o conjunto das partes do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

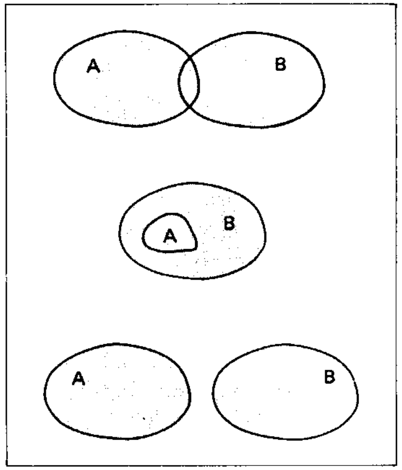
VII. REUNIÃO DE CONJUNTOS

47. Definição

Dados dois conjuntos A e B, chama-se *reunião* de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$\boxed{\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}}$$

O conjunto $A \cup B$ (lê-se "A reunião B" ou "A u B") é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B.



Notemos que x é elemento de $A \cup B$ se ocorrer ao menos uma das condições seguintes:

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B.$$

Exemplos

1) $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
2) $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
3) $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$
4) $\{a, b, c\} \cup \varnothing = \{a, b, c\}$
5) $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

48. Propriedades da reunião

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cup A = A$ (idempotente)
2ª) $A \cup \varnothing = A$ (elemento neutro)
3ª) $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
4ª) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

Demonstração

Fazendo $A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } p\}$ ou, simplesmente $A = \{x \mid p(x)\}$ e, ainda: $B = \{x \mid q(x)\}$, $C = \{x \mid r(x)\}$ e $\varnothing = \{x \mid f(x)\}$ onde f é proposição logicamente falsa, temos:

$$A \cup A = \{x \mid p(x) \text{ ou } p(x)\} = \{x \mid p(x)\} = A$$

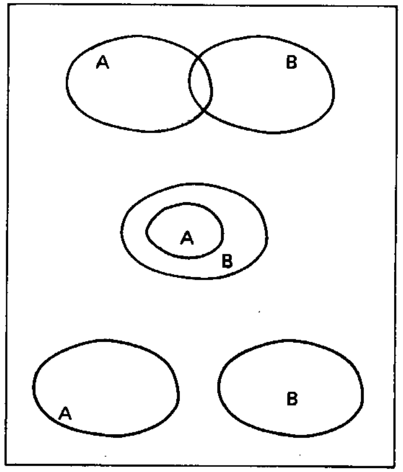
Analogamente, as demais decorrem das propriedades das proposições vistas no exercício A.6.

VIII. INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

49. Definição

Dados dois conjuntos A e B, chama-se *intersecção* de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$$



O conjunto $A \cap B$ (lê-se "A inter B") é formado pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos (A e B) *simultaneamente.*

Se $x \in A \cap B$, isto significa que *x* pertence a A e *também* *x* pertence a B. O *conectivo e* colocado entre duas condições significa que elas devem ser obedecidas *ao mesmo tempo.*

Exemplos

1) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$
2) $\{a, b\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}$
3) $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
4) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
5) $\{a, b\} \cap \emptyset = \emptyset$

50. Propriedades da intersecção

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cap A = A$ (idempotente)
2ª) $A \cap \mathbf{U} = A$ (elemento neutro)
3ª) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)
4ª) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

Como mostramos para a operação de reunião, estas propriedades são também demonstráveis com auxílio do exercício A.6.

51. Conjuntos disjuntos

Quando $A \cap B = \emptyset$, isto é, quando os conjuntos A e B não têm elemento comum, A e B são denominados *conjuntos disjuntos.*

IX. PROPRIEDADES

52. Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades, que inter-relacionam a reunião e a intersecção de conjuntos:

1ª) $A \cup (A \cap B) = A$
2ª) $A \cap (A \cup B) = A$
3ª) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(distributiva da reunião em relação à intersecção)
4ª) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(distributiva da intersecção em relação à reunião).

Demonstremos, por exemplo, a 1ª e a 3ª:

$$A \cup (A \cap B) = \{x \mid p(x) \vee (p(x) \wedge q(x))\} = \{x \mid (p(x))\} = A$$

$$A \cup (B \cap C) = \{x \mid p(x) \vee (q(x) \wedge r(x))\} = \{x \mid (p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee r(x))\} =$$
$$= \{x \mid p(x) \vee q(x)\} \cap \{x \mid p(x) \vee r(x)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EXERCÍCIOS

A.22 Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{c, e\}$, determinar $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ e $A \cup B \cup C$.

A.23 Provar que $A \subset (A \cup B)$, $\forall A$.

Solução

$x \in A \Longrightarrow x \in A$ ou $x \in B$

é uma implicação verdadeira, $\forall x$, portanto: $A \subset (A \cup B)$

A.24 Classificar em V ou F:

a) $\emptyset \subset (A \cup B)$ b) $(A \cup B) \subset A$
c) $A \in (A \cup B)$ d) $(A \cup B) \subset (A \cup B)$
e) $B \subset (A \cup B)$ f) $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$

admitindo que A, B e C são conjuntos quaisquer.

A.25 Determinar a reunião dos círculos de raio r, contidos num plano α e que têm um ponto comum $O \in \alpha$.

A.26 Determinar a reunião das retas de um plano α que são paralelas a uma dada reta r de α.

A.27 Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ e $C = \{c, e, f\}$, pede-se descrever $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ e $A \cap B \cap C$.

A.28 Provar que $(A \cap B) \subset A, \forall A$.

Solução

$x \in (A \cap B) \Longrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \Longrightarrow x \in A$

é uma implicação verdadeira, $\forall x$, portanto $(A \cap B) \subset A$.

A.29 Classificar em V ou F

a) $\varnothing \subset (A \cap B)$ b) $A \subset (A \cap B)$

c) $A \in (A \cap B)$ d) $(A \cap B) \subset (A \cap B)$

e) $(A \cap B) \subset B$ f) $(A \cap B) \supset (A \cap B \cap C)$

admitindo que A, B e C são conjuntos quaisquer.

A.30 Consideremos os conjuntos:

K = conjunto dos quadriláteros planos

$P = \{x \in K \mid x$ tem lados 2 a 2 paralelos$\}$
$L = \{x \in K \mid x$ tem 4 lados congruentes$\}$
$R = \{x \in K \mid x$ tem 4 ângulos retos$\}$
$Q = \{x \in K \mid x$ tem 2 lados paralelos e 2 ângulos retos$\}$

Pede-se determinar os conjuntos:

a) $L \cap P$ c) $L \cap R$ e) $L \cap Q$
b) $R \cap P$ d) $Q \cap R$ f) $P \cup Q$

A.31 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$, determinar o conjunto X tal que $X \cup B = A \cup C$ e $X \cap B = \varnothing$.

Solução

a) $X \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ então os possíveis elementos de X são: 1, 2, 3 e 4.

b) $X \cap B = \varnothing \Rightarrow 3 \notin X$ e $4 \notin X$

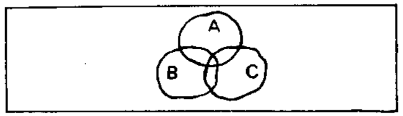
Conclusão $X = \{1, 2\}$

A.32 Determinar o conjunto X tal que

$\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\}$, $\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\}$ e
$\{b, c, d\} \cap X = \{c\}$.

A.33 Assinalar no diagrama ao lado, um de cada vez, os seguintes conjuntos:

a) $A \cap B \cap C$ c) $A \cup (B \cap C)$
b) $A \cap (B \cup C)$ d) $A \cup B \cup C$



X. DIFERENÇA DE CONJUNTOS

53. Definição

Dados dois conjuntos A e B, chama-se *diferença* entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

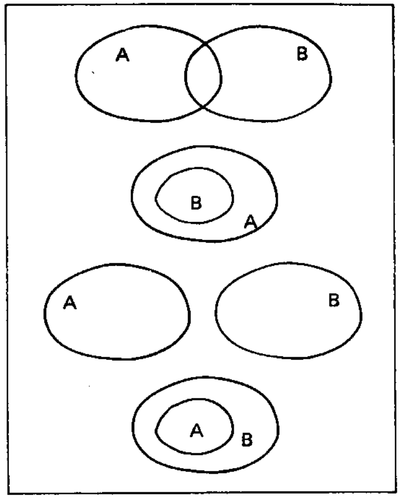
Exemplos

1) $\{a, b, c\} - \{b, c, d, e\} = \{a\}$

2) $\{a, b, c\} - \{b, c\} = \{a\}$

3) $\{a, b\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$

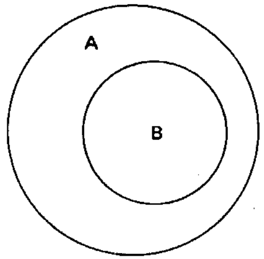
4) $\{a, b\} - \{a, b, c, d, e\} = \varnothing$



XI. COMPLEMENTAR DE B EM A

54. Definição

Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se *complementar de B em relação a A* o conjunto $A - B$, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.



Com o símbolo

$$\complement_A^B \quad \text{ou} \quad \bar{A}$$

indicamos o complementar de B em relação a A.

Notemos que $\complement_A^B$ só é definido para $B \subset A$ e aí temos:

$$\boxed{\complement_A^B = A - B}$$

Exemplos

1) Se $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{c, d, e\}$, então:

$$\complement_A^B = \{a, b\}$$

2) Se $A = \{a, b, c, d\} = B$, então:

$$\complement_A^B = \varnothing$$

3) Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \varnothing$, então:

$$\complement_A^B = \{a, b, c, d\} = A$$

55. Propriedades da complementação

Sendo B e C subconjuntos de A, valem as seguintes propriedades:

1ª) $\complement_A^B \cap B = \varnothing$ e $\complement_A^B \cup B = A$

2ª) $\complement_A^A = \varnothing$ e $\complement_A^{\varnothing} = A$

3ª) $\complement_A(\complement_A^B) = B$

4ª) $\complement_A^{(B \cap C)} = \complement_A^B \cup \complement_A^C$

5ª) $\complement_A^{(B \cup C)} = \complement_A^B \cap \complement_A^C$

Provemos, por exemplo, a 2ª e a 4ª:

$$\complement_A^A = \{x \in A \mid x \notin A\} = \varnothing$$

$$\complement_A^{\varnothing} = \{x \in A \mid x \notin \varnothing\} = A$$

$$\complement_A^{(B \cap C)} = \{x \in A \mid x \notin B \cap C\} = \{x \in A \mid x \notin B \text{ ou } x \notin C\} =$$
$$= \{x \in A \mid x \notin B\} \cup \{x \in A \mid x \notin C\} = \complement_A^B \cup \complement_A^C$$

EXERCÍCIOS

A.34 Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ e $C = \{b, d, e, g\}$. Determinar:

a) $A - B$
b) $B - A$
c) $C - B$
d) $(A \cup C) - B$
e) $A - (B \cap C)$
f) $(A \cup B) - (A \cap C)$

A.35 Provar que $(A - B) \subset A, \forall A$.

Solução

A implicação $x \in (A - B) \Longrightarrow (x \in A \text{ e } x \notin B) \Rightarrow x \in A$ é verdadeira para todo x, então $(A - B) \subset A$.

A.36 Classificar em V ou F as sentenças:

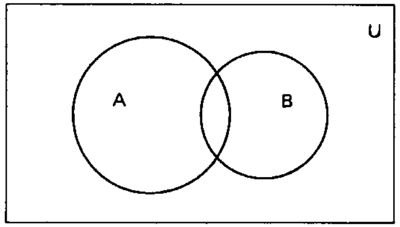
a) $(A - B) \supset \varnothing$
b) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
c) $(A - B) \subset B$
d) $(A - B) \subset (A \cup B)$

admitindo que A e B são conjuntos quaisquer.

A.37 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{2, 4, 5, 7\}$, obter um conjunto X tal que $X \subset A$ e $A - X = B \cap C$.

A.38 Assinalar no diagrama ao lado, um de cada vez, os seguintes conjuntos:

a) $\bar{A} - B$
b) $\bar{A} - A \cup B$
c) $\bar{B} \cup A$
d) $\overline{A \cup B}$
e) $\overline{A \cap B}$
f) $\bar{B} \cap A$



A.39 Provar que $A - \bar{B} = A \cap B$ onde A e B são conjuntos quaisquer do universo U.

Solução

A implicação

$x \in (A - \bar{B}) \Longrightarrow (x \in A \text{ e } x \notin \bar{B}) \Longrightarrow x \in A \text{ e } x \in \bar{B} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x \in A \cap \bar{B}$ é verdadeira, $\forall x$, portanto, está provado.

A.40 Classificar em V ou F as seguintes sentenças:

a) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
b) $A \subset B \Longrightarrow (\complement B) \subset (\complement A)$
c) $(A - B) \subset (\complement A)$
d) $(A - B) \subset (\complement B)$

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

A.41 Descrever os elementos dos conjuntos abaixo:

$A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0\}$
$B = \{x \mid x$ é letra da palavra "exercício"$\}$
$C = \{x \mid x^2 - 9 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 9\}$
$D = \{x \mid 2x + 1 = 0 \text{ e } 2x^2 - x - 1 = 0\}$
$E = \{x \mid x$ é algarismo do número 234 543$\}$

A.42 Seja $E = \{a, \{a\}\}$. Dizer quais das proposições abaixo são verdadeiras.

a) $a \in E$
b) $\{a\} \in E$
c) $a \subset E$
d) $\{a\} \subset E$
e) $\varnothing \in E$
f) $\varnothing \subset E$

A.43 Sejam A e B dois conjuntos finitos. Provar que

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}.$$

O símbolo n_X representa o número de elementos do conjunto X.

A.44 Em uma escola que tem 415 alunos, 221 estudam Inglês, 163 estudam Francês e 52 estudam ambas as línguas. Quantos alunos estudam Inglês ou Francês? Quantos alunos não estudam nenhuma das duas?

A.45 Sendo A, B e C conjuntos finitos, estabelecer uma fórmula para calcular $n_{A \cup B \cup C}$.

A.46 Uma população consome três marcas de sabão em pó: A, B e C. Feita uma pesquisa do mercado, colheram-se os resultados tabelados abaixo:

marca	A	B	C	A e B	B e C	C e A	A, B e C	nenhuma das três
número de consumidores	109	203	162	25	41	28	5	115

Pede-se:

a) número de pessoas consultadas
b) número de pessoas que só consomem a marca A
c) número de pessoas que não consomem as marcas A ou C
d) número de pessoas que consomem ao menos duas marcas.

A.47 Determinar os conjuntos A, B e C que satisfazem as seguintes seis condições:

1ª) $A \cup B \cup C = \{z, x, v, u, t, s, r, q, p\}$
2ª) $A \cap B = \{r, s\}$
3ª) $B \cap C = \{s, x\}$
4ª) $C \cap A = \{s, t\}$
5ª) $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$
6ª) $A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}$

A.48 Em certa comunidade há indivíduos de três raças: branca, preta e amarela. Sabendo que 70% são brancos e 210% não são pretos e 50% são amarelos, pergunta-se:

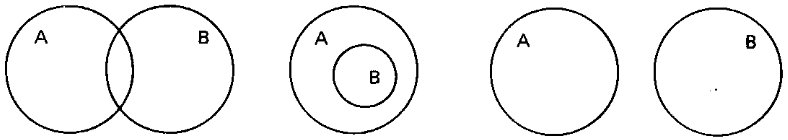
a) quantos indivíduos tem a comunidade?
b) quantos são os indivíduos amarelos?

A.49 Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença simétrica de A com B o conjunto $A \triangle B$ tal que:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

Pede-se:

a) determinar $\{a, b, c, d\} \triangle \{c, d, e, f, g\}$
b) provar que $A \triangle \varnothing = A$, para todo A
c) provar que $A \triangle A = \varnothing$, para todo A
d) provar que $A \triangle B = B \triangle A$, para A e B quaisquer
e) assinalar em cada diagrama abaixo o conjunto $A \triangle B$:



A.50 Desenhar um diagrama de Venn representando quatro conjuntos A, B, C e D não vazios de modo que se tenha

$$A \not\subset B,\ B \not\subset A,\ C \supset (A \cup B) \ \text{ e } \ D \subset (A \cap B)$$

80. Os números reais a e b são denominados, respectivamente, *extremo inferior* e *extremo superior* do intervalo.

81. Exemplos

1º) $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ é intervalo aberto

2º) $[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 4\}$ é intervalo fechado

3º) $[\frac{2}{5}, 7[= \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leqslant x < 7\}$ é intervalo fechado à esquerda

4º) $]-\frac{1}{3}, \sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x \leqslant \sqrt{2}\}$ é intervalo fechado à direita.

82. Também consideramos intervalos lineares os "intervalos infinitos" assim definidos:

a) $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
que podemos também indicar por $-\infty$ —— a.

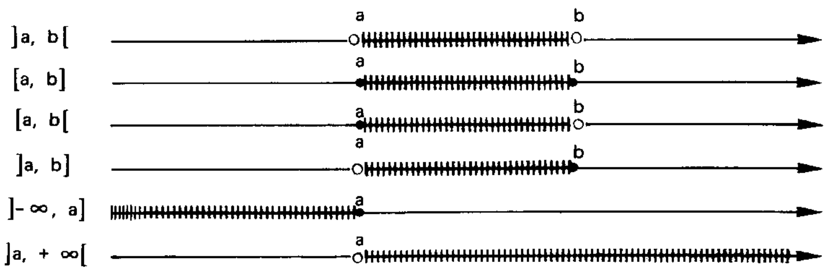
b) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$
que também podemos indicar por $-\infty$ ——┤a.

c) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
que também podemos indicar por a —— $+\infty$.

d) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$
que também podemos indicar por a├—— $+\infty$.

e) $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
que também podemos indicar por $-\infty$ —— $+\infty$.

83. Os intervalos têm uma representação geométrica sobre a reta real como segue:

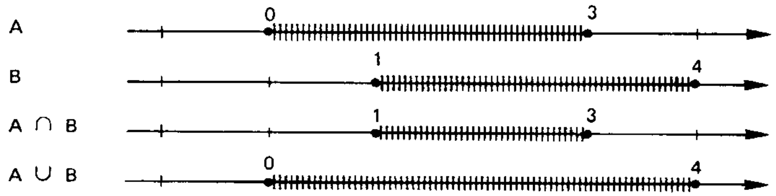


EXERCÍCIOS

A.67 Descrever, conforme a notação da teoria dos conjuntos, os seguintes intervalos:
$[-1, 3]$, $[0, 2[$, $]-3, 4[$, $]-\infty, 5[$ e $[1, +\infty[$.

A.68 Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determinar $A \cap B$ e $A \cup B$ sendo $A = [0, 3]$ e $B = [1, 4]$

Solução



então $A \cap B = [1, 3]$ e $A \cup B = [0, 4]$

A.69 Descrever os seguintes conjuntos:

a) $[0, 2] \cap [1, 3]$

b) $[0, 2] \cap]1, 3[$

c) $]-1, \frac{2}{5}[\cap]0, \frac{4}{3}[$

d) $]-\infty, 2] \cap [0, +\infty[$

e) $[-1, +\infty[\cap [-\frac{9}{2}, 2[$

f) $[1, 2] \cap [0, 3] \cap [-1, 4]$

A.70 Determinar os seguintes conjuntos:

a) $[-1, 3] \cup [0, 4]$

b) $]-2, 1] \cup]0, 5[$

c) $[-1, 3] \cup [3, 5]$

d) $[-\frac{1}{2}, 0[\cup]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}]$

A.71 Sendo $A = [0, 5[$ e $B =]1, 3[$, determinar $\complement_A^B$

2º) Dada a relação $y = -\frac{n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{3} + 3$, definida para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$n = 1 \Longrightarrow y = -\frac{1^3}{6} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{7 \cdot 1}{3} + 3 = \frac{-1 + 9 - 14 + 18}{6} = 2$$

$$n = 2 \Longrightarrow y = -\frac{2^3}{6} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{7 \cdot 2}{3} + 3 = \frac{-8 + 36 - 28 + 18}{6} = 3$$

$$n = 3 \Longrightarrow y = -\frac{3^3}{6} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} - \frac{7 \cdot 3}{3} + 3 = \frac{-27 + 81 - 42 + 18}{6} = 5$$

$$n = 4 \Longrightarrow y = -\frac{4^3}{6} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{7 \cdot 4}{3} + 3 = \frac{-64 + 144 - 56 + 18}{6} = 7$$

Poderíamos tirar a conclusão precipitada: "y é número primo, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$". Esta indução também é falsa pois:

$$n = 5 \Rightarrow y = -\frac{5^3}{6} + \frac{3 \cdot 5^2}{2} - \frac{7 \cdot 5}{3} + 3 = \frac{-125 + 225 - 70 + 18}{6} = 8$$

88. É necessário, portanto, dispor de um método com base lógica que permita decidir sobre a validade ou não de uma indução vulgar.

Consideremos, por exemplo, a igualdade:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

que expressa a propriedade: "a soma dos n primeiros números ímpares positivos é n^2."

Vamos verificar se ela é verdadeira:

$n = 1 \Longrightarrow 1 = 1^2$ (V)

$n = 2 \Longrightarrow 1 + 3 = 4 = 2^2$ (V)

$n = 3 \Longrightarrow 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ (V)

...

$n = 10 \Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + 19 = 100 = 10^2$ (V)

Mesmo que continuemos o trabalho fazendo a verificação até $n = 1\,000\,000$ não estará provado que a fórmula vale para todo n natural, pois poderá existir um $n > 1\,000\,000$ em que a fórmula falha.

89. Para provarmos que a relação é válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$ empregamos o princípio da indução finita (P.I.F.) cujo enunciado segue:

Uma proposição $P(n)$, aplicável aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, quando:

1º) $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$, e

2º) Se $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n_0$ e $P(k)$ é verdadeira, então $P(k + 1)$ também é verdadeira.

90. Provemos, por exemplo, que:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1º) Verifiquemos que $P(1)$ é verdadeira

$n = 1 \Longrightarrow 1 = 1^2$

2º) Admitamos que $P(k)$, com $k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ (*hipótese da indução*)

e provemos que decorre a validade de $P(k + 1)$, isto é:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

Temos:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)} + (2k + 1) = \underbrace{k^2} + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

EXERCÍCIOS

Demonstrar usando o princípio da indução finita.

A.72 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

A.73 $2 + 5 + 8 + \dots + (2 + 3n) = \frac{n(4 + 3n)}{2}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

A.74 $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

A.75 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

A.76 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

A.77 $8 \mid (3^{2n} - 1), \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

Solução

1º) $P(1)$ é verdadeira pois $8 \mid (3^2 - 1)$

2º) Admitamos que $P(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira

$8 \mid (3^{2k} - 1)$ (hipótese da indução)

e provemos que $8 \mid (3^{2(k+1)} - 1)$:

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k+2} - 1 = 3^{2k} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2k}(8+1) - 1 = 8 \cdot 3^{2k} + (3^{2k} - 1)$$

então

$$\left.\begin{array}{l} 8 \mid 8 \cdot 3^{2k} \\ 8 \mid (3^{2k} - 1) \end{array}\right\} \Longrightarrow 8 \mid (8 \cdot 3^{2k} + 3^{2k} - 1) \Longrightarrow 8 \mid (3^{2(k+1)} - 1)$$

A.78 $6 \mid n(n+1)(n+2), \forall\ n \in \mathbb{N}$.

A.79 $2 \mid (n^2 + n), \forall\ n \in \mathbb{N}$.

A.80 $3 \mid (n^3 + 2n), \forall\ n \in \mathbb{N}$.

A.81 $(1 + 1)(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{n}) = n + 1, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

A.82 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

A.83 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

A.84 $2n \geqslant n + 1, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

Solução

1º) $P(1)$ é verdadeira pois $2 \cdot 1 \geqslant 1 + 1$

2º) Admitamos que $P(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$2k \geqslant k + 1$ (hipótese da indução)

e provemos que $2(k+1) \geqslant (k+1) + 1$

Temos:

$2(k+1) = 2k + 2 \geqslant (k+1) + 2 > (k+1) + 1$

A.85 $2^n > n, \forall\ n \in \mathbb{N}$

A.86 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 > \frac{n^4}{4}, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

A.87 $(1 + a)^n \geqslant 1 + na, \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \forall\ a \in \mathbb{R},\ a \geqslant -1$

A.88 O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Solução

1º) $P(3)$ é verdadeira pois:

$$n = 3 \Longrightarrow d_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$$

e isto é verdade porque um triângulo não tem diagonais.

2º) Supondo válida a fórmula para um polígono de k lados $(k \geqslant 3)$:

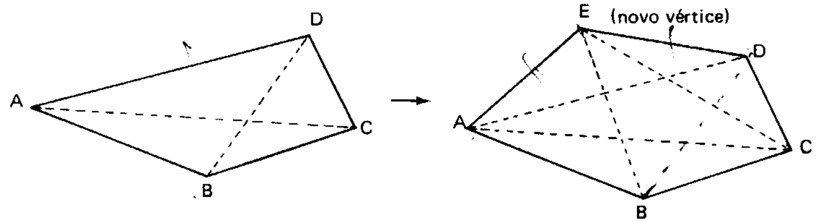
$d_k = \frac{k(k-3)}{2}$ (hipótese da indução)

provemos que ela vale para um polígono de $k + 1$ lados:

$$d_{k+1} = \frac{(k+1)[(k+1) - 3]}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

Quando passamos de um polígono com k vértices para um de $k + 1$ vértices, acrescentando mais um vértice, ocorre o seguinte:

(i) todas as diagonais do primeiro polígono continuam sendo diagonais do segundo;
(ii) um lado do primeiro se transforma em diagonal do segundo;
(iii) no segundo há $k - 2$ novas diagonais (as que partem do novo vértice).
Vejamos, por exemplo, a passagem de um quadrilátero para um pentágono



AC e BD são diagonais ⟶ AC e BD continuam diagonais
AD é lado ⟶ AD se transforma em diagonal
EB e EC são diagonais

Então:

$$d_{k+1} = d_k + 1 + (k-2) = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

A.89 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $S_n = (n-2) \cdot 180°$.

A.90 Se A é um conjunto finito com n elementos, então $\mathscr{P}(A)$, conjunto das partes de A, tem 2^n elementos.