SME0809 - Inferência Bayesiana - Distribuição não informativa

Grupo 13 - Francisco Miranda - 4402962 - Heitor Carvalho - 11833351

Setembro 2021

Seja $Y_1, ..., Y_n$ uma amostra aleatória de $Y \sim \text{Pois}(\theta)$. Pede-se:

(a) encontre a distribuição a *priori* não informativa de Jeffreys

Temos que

$$p(y|\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{y}}{y!},\ \theta > 0,\ y = 0, 1, 2, ...$$

Primeiramente, vamos obter a log-verossimilhança

$$\log(L(\theta)) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} p(y_i|\theta)\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{y_i}}{y_i!}\right) = \log\left(\frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}\right) =$$
$$-n\theta + \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\theta) - \log\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right)$$

Tomando a segunda derivada, temos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(\theta)) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[-n\theta + \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\theta) - \log\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i\right] = -\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Assim, como $J(\theta) = E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(\theta))\right)$ então

$$J(\theta) = E\left(\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{\theta^2}E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{n\theta}{\theta^2} = \frac{n}{\theta} \propto \frac{1}{\theta}$$

A distribuição a *priori* de Jeffreys é dada por $\pi(\theta) \propto \sqrt{J(\theta)}$. Logo, $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}$.

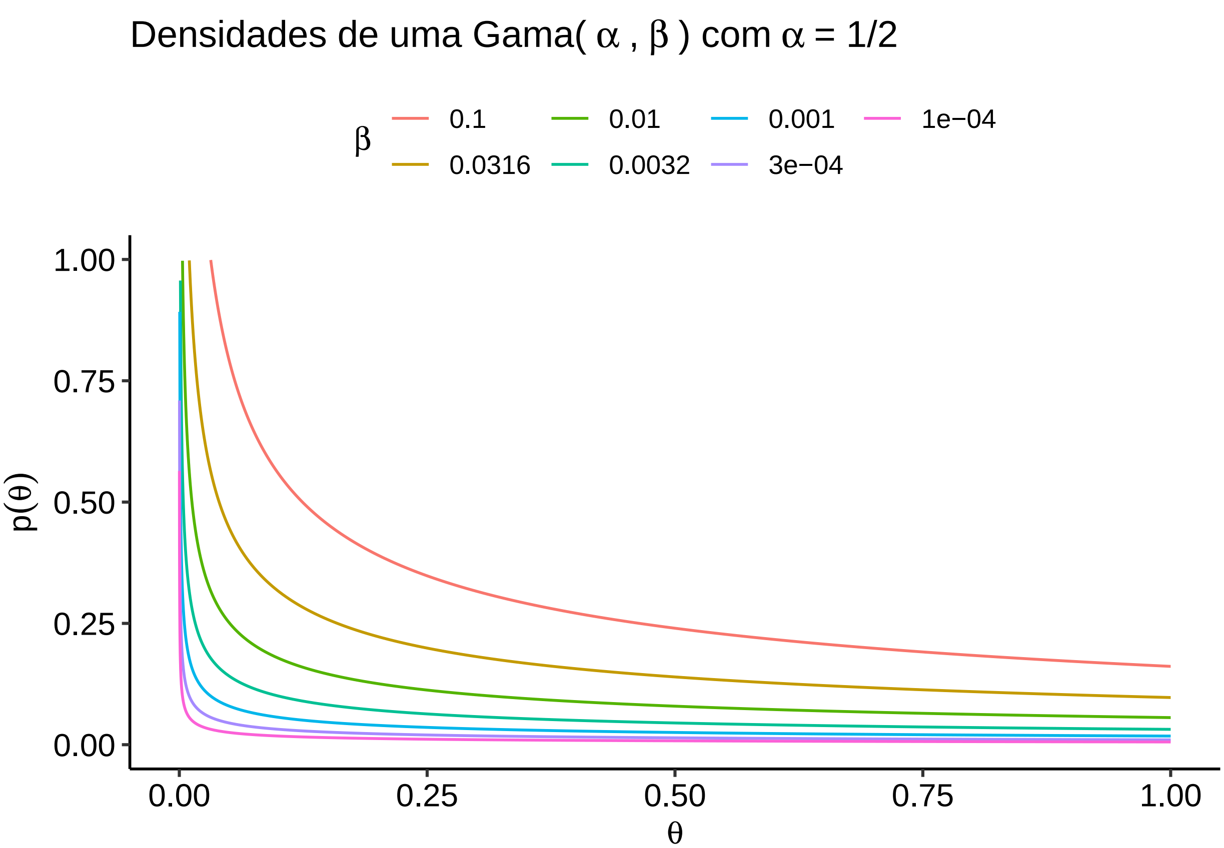
A equação acima expressa a chamada *Lei de Jeffreys* que afirma que a distribuição a *priori* para um único parâmetro θ é aproximadamente não informativa se tomada de modo proporcional à raiz quadrada da Informação de Fisher de θ.

Note que esta *priori* pode ser obtida a partir da conjulgada natural Gama(α, β), com $\alpha = 1/2$ e $\beta \to 0$. Ilustramos o efeito de fixar α e diminuir β abaixo:

```r
# pacotes do R utilizados
library(tidyverse)
library(ggpubr)
library(effectsize)
set.seed(42)
```

```r
theta <- seq(0.0001, 1, 0.0001)
  seq(1, 4, 0.5) %>%
  map_dfr( ~tibble( x = theta,
                    y = dgamma(theta, 1/2, 10^(-.x)),
                    beta = as.factor( round( 10^(-.x), 4)))) %>%

  ggplot() + geom_line(aes(x = x, y = y, color = beta)) +
  scale_y_continuous(limits = c(0,1)) +
  labs( title = expression("Densidades de uma Gama("~alpha~","~beta~") com"~alpha~"= 1/2"),
       color= expression(beta),
       x = expression(theta),
       y = expression(p(theta))) +
  theme_pubr()
```



Além disso, $\pi(\theta)$ é uma distribuição imprópria pois $\int_0^{+\infty} \theta^{-1/2} d\theta$ diverge.

(b) A função de verossimilhança na parametrização θ muda em locação e escala? Justificar graficamente

Já obtivemos a função de verossimilhança em (a):

$$\log(L(\theta)) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\theta) - \log\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right) \propto \log(\theta) \sum_{i=1}^{n} y_i - n\theta$$

Vamos agora realizar uma implementação e calcular a verossimilhança para diversas amostras aleatórias de tamanho 20 geradas de uma Poisson.

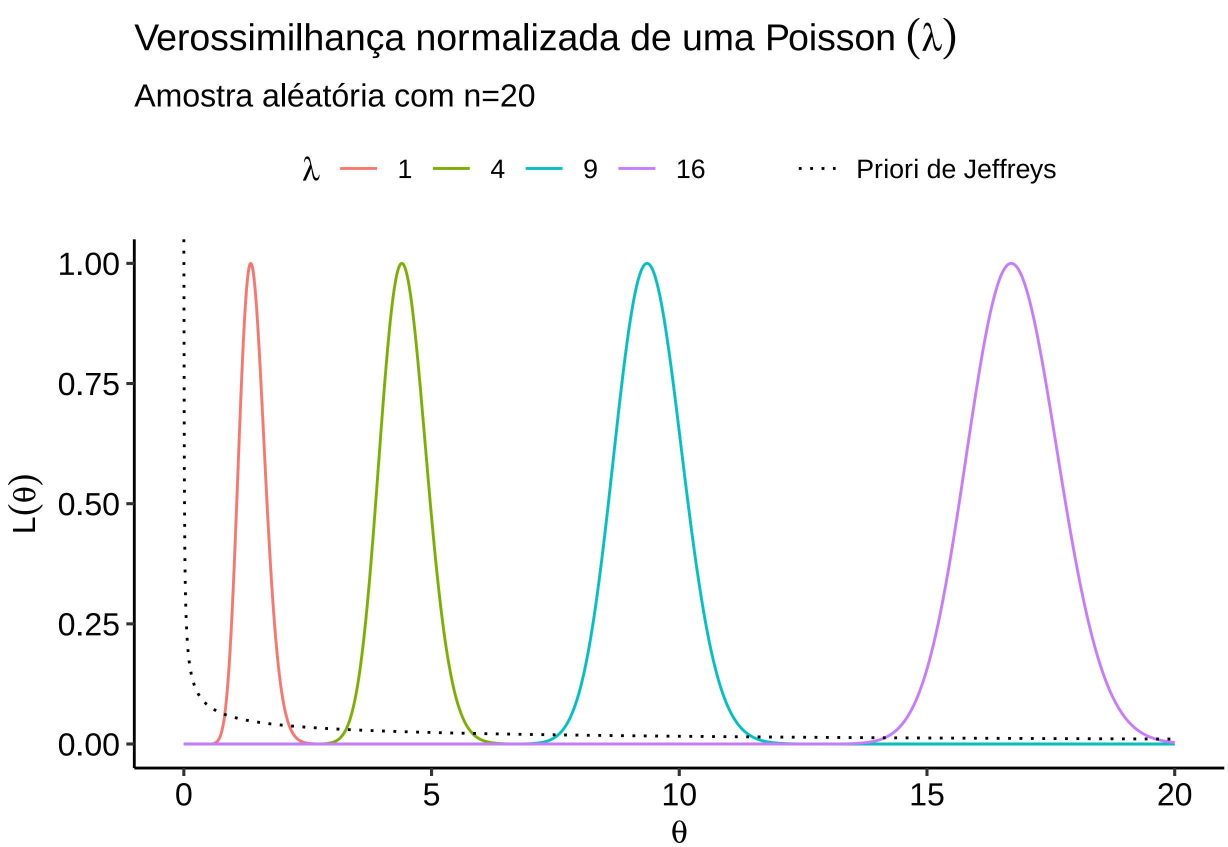
```r
Ltheta <- function(theta, y)( exp( sum(y)*log(theta) - length(y)*theta))

theta <- seq(0,24, 0.01)
df <- NULL

for (lambda in c(1, 4, 9, 16)) {
    df <- rbind(df, tibble(
                  L = normalize(map_dbl(theta, Ltheta, y = rpois(20,lambda))),
                  theta = theta,
                  lambda = as_factor(lambda)))
}
```

O gráfico com a verossimilhança normalizada fica:

```r
ggplot(df, aes(x = theta)) + geom_line(aes(y = L, color = lambda)) +
  geom_line(aes(y = dgamma(theta, 1/2, 0.01), linetype = "Priori de Jeffreys")) +
  labs(color= expression(lambda),
       title = expression("Verossimilhança normalizada de uma Poisson"~(lambda)),
       subtitle = "Amostra aléatória com n=20",
       x = expression(theta),
       y = expression(L(theta))) +
  scale_linetype_manual(name = " ", values = "dotted") +
  scale_x_continuous(limits = c(0, 20))+
  theme_pubr()
```



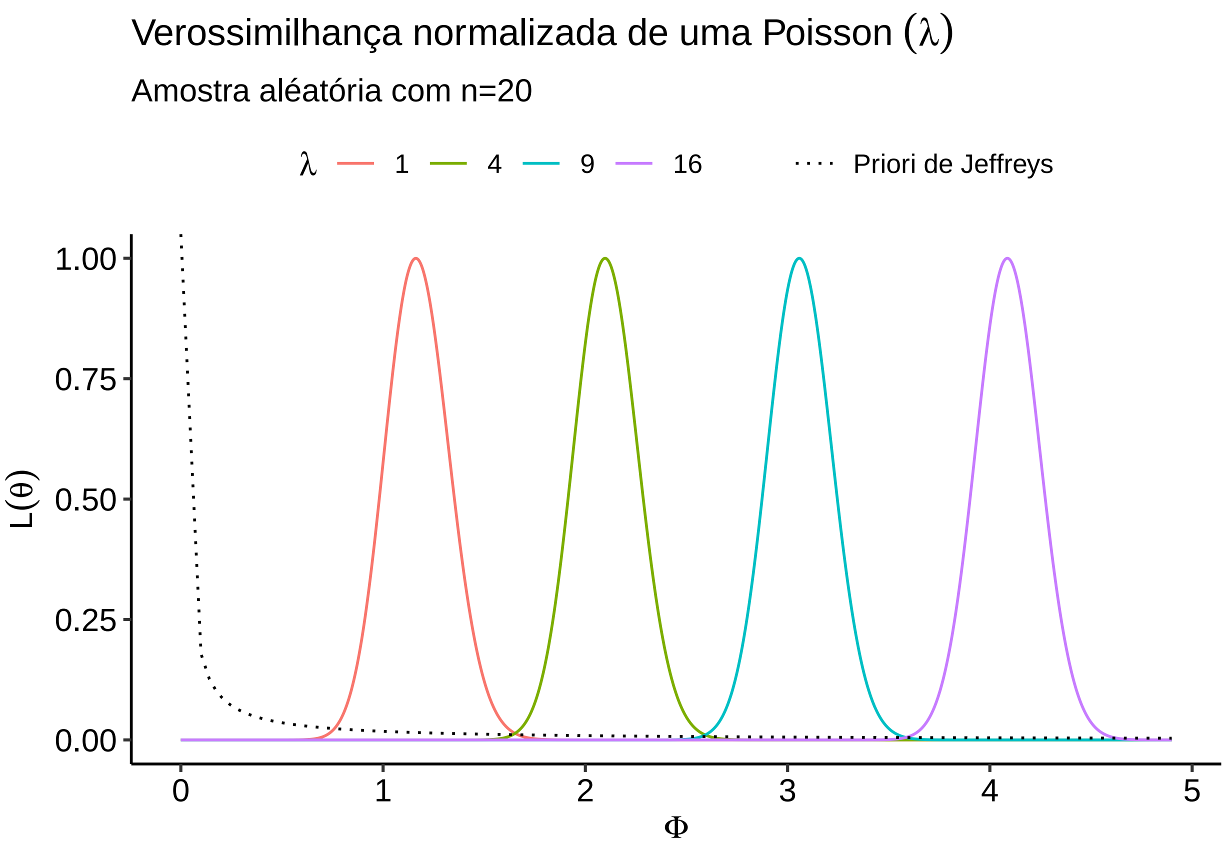
Dessa forma, vemos que a função de verossimilhança muda tanto em locação como escala, pois valores grandes de λ alocam a distribuição para direita, além de achatá-la.

(c) caso a resposta ao item b) seja afirmativa, encontre a escala na qual a função de verossimilhança mude somente em locação. Mostre graficamente.

$$\phi \propto \int \pi(\theta)d\theta = \int \theta^{-1/2}d\theta = 2\sqrt{\theta} + k \propto \sqrt{\theta}$$

Podemos visualizar o resultado de realizarmos a transformação $\phi = \sqrt{\theta}$ no gráfico abaixo:

```
ggplot(df, aes(x = sqrt(theta))) +
  geom_line(aes(y = sqrt(L), color = lambda)) +
  geom_line(aes(y = dgamma(theta, 1/2, 0.001), linetype = "Priori de Jeffreys")) +
  labs(color= expression(lambda),
       title = expression("Verossimilhança normalizada de uma Poisson"~(lambda)),
       subtitle = "Amostra aleatória com n=20",
       x = expression(Phi),
       y = expression(L(theta))) +
  scale_linetype_manual(name = " ", values = "dotted") +
  theme_pubr()
```



Dessa forma, podemos observar que a verossimilhança normalizada na escala ϕ apenas se desloca horizontalmente para valores diferentes de λ, sem achatar-se.