SME0820 - Modelos de Regressão e Aprendizado Supervisionado I - Exercício I

Brenda da Silva Muniz 11811603
Francisco Rosa Dias de Miranda 4402962
Heitor Carvalho Pinheiro 11833351
Mônica Amaral Novelli 11810453

Setembro 2021

Exercício 2

Queremos mostrar que os estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são não enviesados.

$$E(\hat{\beta}_1) = E\left(\frac{S_{XY}}{S_{XX}}\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})x_i}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})E(y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})x_i}$$

Temos que $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i,\ i = 1, ..., n.$ Assim

$$E(y_i) = E(\beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i) = E(\beta_0) + E(\beta_1 x_i) + E(\epsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

Voltando a expressão original, temos que:

$$E(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})x_i} = \frac{\beta_0 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})x_i} + \frac{\beta_1 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})x_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})x_i} = \beta_1.$$

Procedendo de forma análoga para β_0, temos que:

$$E(\hat{\beta}_0) = E(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) = E(\bar{y}) - \bar{x}E(\hat{\beta}_1)$$

Resta-nos obter

$$E(\bar{y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(y_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 x_i) =$$

$$\frac{n\beta_0}{n} + \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}$$

Segue que:

$$E(\hat{\beta}_0) = E(\bar{y}) - \bar{x}E(\hat{\beta}_1) = (\beta_0 + \beta_1 \bar{x}) - \beta_1 \bar{x} = \beta_0$$

Portanto, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_0$ são não enviesados.

Exercício 3

Exercício 4