SME0809 - Inferência Bayesiana - Distribuição não informativa

Grupo 13 - Francisco Miranda - 4402962 - Heitor Carvalho - 11833351

Setembro 2021

```r
# pacotes do R utilizados
library(tidyverse)
library(ggpubr)
library(effectsize) #padronizacao
```

Seja $Y_1, ..., Y_n$ uma a.a de $Y \sim \text{Pois}(\theta)$. Pede-se:

- a) encontre a distribuição a *priori* não informativa de Jeffreys

Temos que

$$p(y|\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{y}}{y!},\ \theta > 0,\ y = 0, 1, 2, ...$$

Primeiramente, vamos obter a log-verossimilhança

$$\log(L(\theta)) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} p(y_i|\theta)\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{y_i}}{y_i!}\right) = \log\left(\frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}\right) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\theta) - \log\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right)$$

Tomando a segunda derivada, temos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(\theta)) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[-n\theta + \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\theta) - \log\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i\right] = -\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Assim, como $J(\theta) = E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(\theta))\right)$ então

$$J(\theta) = E\left(\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{\theta^2}E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{n\theta}{\theta^2} = \frac{n}{\theta} \propto \frac{1}{\theta}$$

A distribuição a *priori* de Jeffreys é dada por $\pi(\theta) \propto \sqrt{J(\theta)}$. Logo, $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}$.

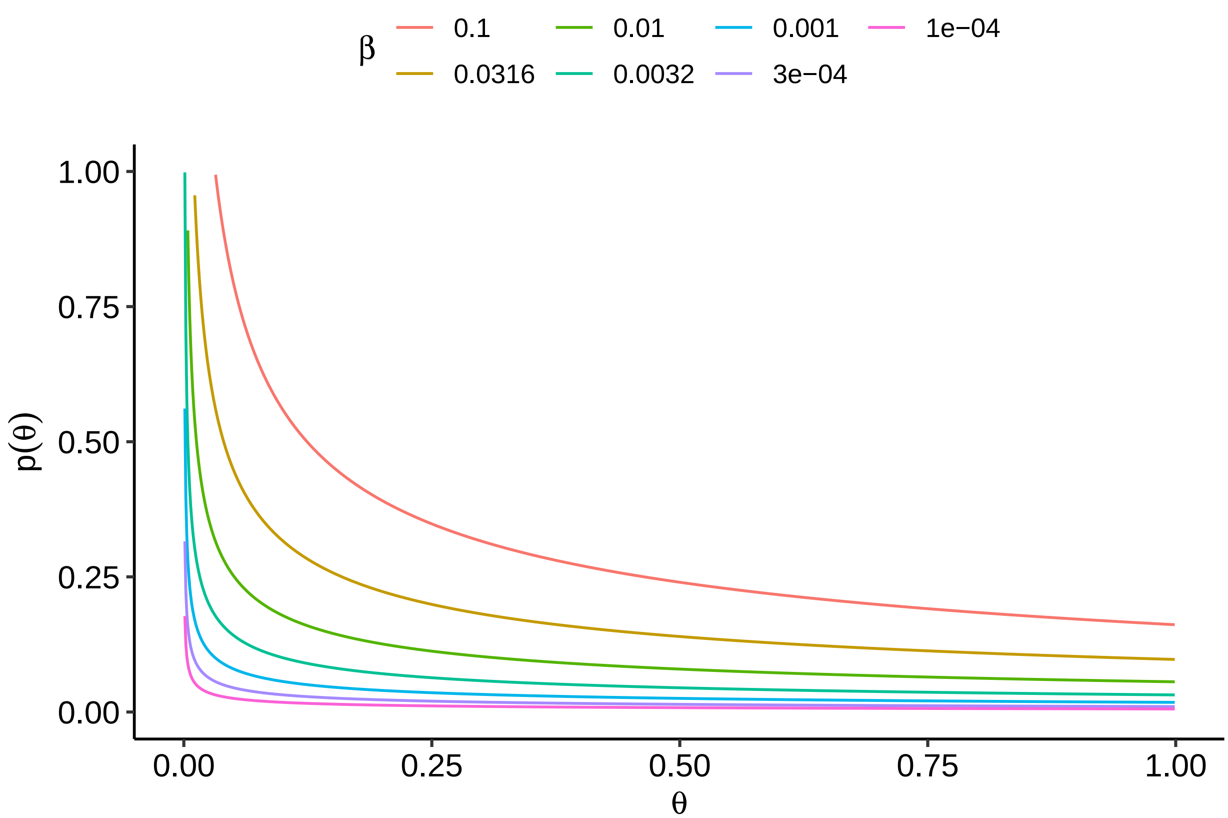
Note que esta *priori* pode ser obtida a partir da conjulgada natural Gama(α, β), com $\alpha = 1/2$ e $\beta \to 0$. Ilustramos o efeito de fixar α e diminuir β abaixo:

```
theta <- seq(0.00001, 1, 0.001)

b <- seq(1, 4, 0.5)

b %>% map_dfr( ~tibble( x = theta,
                        y = dgamma(theta, 1/2, 10^(-.x)),
                        beta = as.factor( round( 10^(-.x), 4)))) %>%

  ggplot() + geom_line(aes(x = x, y = y, color = beta)) +
  scale_y_continuous(limits = c(0,1)) + labs(color= expression(beta)) +
  xlab(expression(theta)) + ylab(expression(p(theta))) +
  theme_pubr()
```



Além disso, $\pi(\theta)$ é uma distribuição imprópria pois $\int_0^{+\infty} \theta^{-1/2} d\theta$ diverge.

- b) A função de verossimilhança na parametrização θ muda em locação e escala? Justificar graficamente

Já obtivemos em a)

$$\log(L(\theta)) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\theta) - \log\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right) \propto \log(\theta) \sum_{i=1}^{n} y_i - n\theta$$

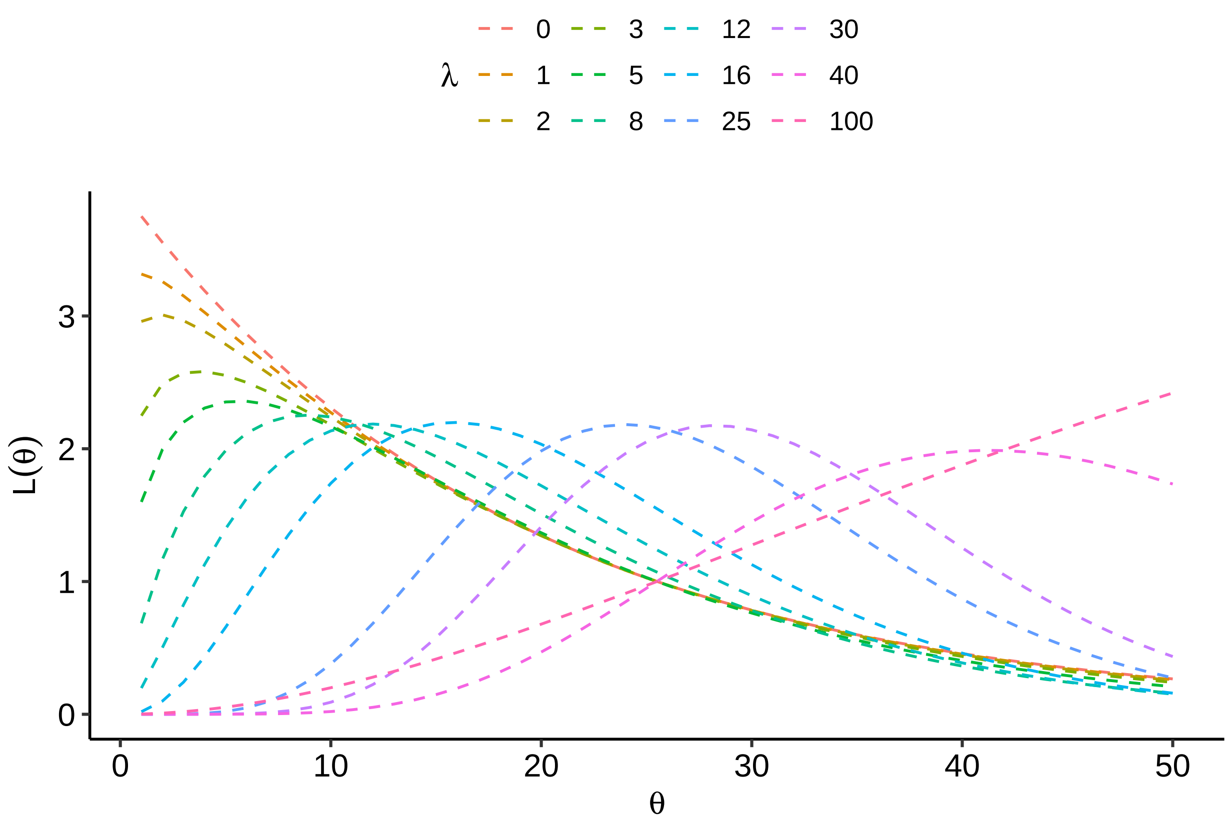
```
Ltheta <- function(theta,y){
  logl <- sum(y)*log(theta) - length(y)*theta
  exp( standardize(logl, robust = TRUE))
```

```r
}

theta <- 1:50


  a <- c(0:3,5, seq(8, 16, 4),25,30, 40, 100) %>%
    map_dfr(
            ~tibble(x = theta,
                    y = dpois(theta, lambda = .x),
                    L = Ltheta(theta, rpois(20, .x)),
                    lambda = as.factor(.x)))

  a %>%  ggplot(aes(x = x)) + #geom_line(aes(y = y, color = lambda)) +
    geom_line(aes(y = L, color = lambda), lty=2) +
  labs(color= expression(lambda)) +
  xlab(expression(theta)) + ylab(expression(L(theta))) +
  theme_pubr()
```



- c) caso a resposta ao item b) seja afirmativa, encontre a escala na qual a função de verossimilhança mude somente em locação. Mostre graficamente.

$$\phi \propto \int \pi(\theta) d\theta$$