SME0805 - Processos Estocásticos - Teste 1

Francisco Rosa Dias de Miranda - 4402962

setembro 2021

Exercício 1

A variável aleatória Y segue uma distribuição exponencial com parâmetro θ. Dado Y = y, a variável aleatória X tem distribução de Poisson com média y.

- a) Mostre que $P(X = k) = \frac{\theta}{(1+\theta)^(k+1)}, k = 0, 1, ...$

$$y \sim \exp(\theta) \Rightarrow f_y(y|\theta) = \theta e^{-\theta y}, y > 0$$

$$X|Y \sim \text{Poiss}(y) \Rightarrow P(X = k \mid Y = y) = \frac{e^{-y}y^k}{k!}, k = 0, 1, ...$$

Por definição, a f.d.p. conjunta de X e Y é dada por $f_{X,Y}(k, y \mid \theta) = P(X = k \mid Y = y)f_y(y|\theta)$. Para obtermos a distribuição marginal $P(X = k)$, basta resolvermos em y:

$$P(X = k) = \int_0^\infty \frac{e^{-y}y^k}{k!}\theta e^{-\theta y}dy = \frac{\theta}{k!}\int_0^\infty e^{-y(1+\theta)}y^k dy = \frac{\theta}{k!}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{(1+\theta)}\right)^k \frac{1}{(1+\theta)}du =$$

$$\frac{\theta}{k!(1+\theta)^{(k+1)}}\int_0^\infty e^{-u}u^k du = \frac{\theta\,\Gamma(k+1)}{k!(1+\theta)^{(k+1)}} = \frac{\theta}{(1+\theta)^{(k+1)}}.$$

- b) Determine $P(X = k)$ se Y tem distribuição gama.

$$y \sim \text{Gama}(\alpha, \beta) \Rightarrow f_y(y \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha y^{(\alpha-1)}e^{\beta y}}{\Gamma(\alpha)}, y > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

A distribuição conjunta de X e Y é obtida de forma análoga ao item anterior. Encontramos a distribuição marginal de X calculando:

$$P(X = k) = \int_0^\infty \frac{e^{-y}y^k}{k!}\frac{\beta^\alpha y^{(\alpha-1)}e^{\beta y}}{\Gamma(\alpha)}dy = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)k!}\int_0^\infty y^{k+\alpha-1}e^{-y(1+\beta)}dy =$$

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)k!}\int_0^\infty \left(\frac{u}{(1+\beta)}\right)^{k+\alpha-1} e^{-u}\frac{1}{(1+\beta)}du = \frac{\beta^\alpha\,\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)k!(1+\beta)^{(k+\alpha)}} =$$

$$\frac{1}{x!}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^k\frac{(\alpha+k-1)!}{(\alpha-1)!} = \binom{\alpha+k-1}{k}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^k.$$

Note que essa é a f.d.p. de uma distribuição Binomial Negativa. Assim, $X \sim BN(\alpha, \beta)$.