SME0809 - Inferência Bayesiana - Distribuição Normal

Grupo 13 - Francisco Miranda - 4402962 - Heitor Carvalho - 11833351

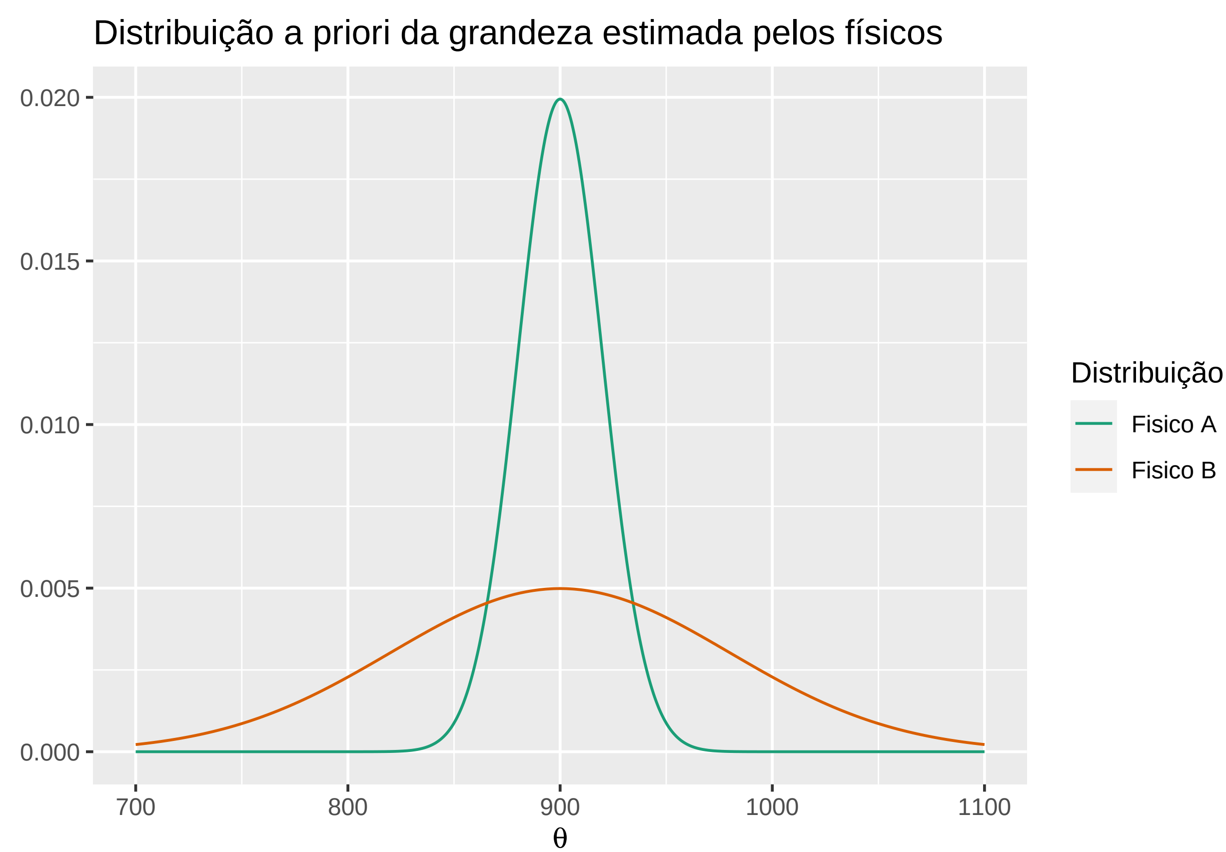
Outubro 2021

Caso 1: μ desconhecido e σ conhecido

$$f(x|\theta) = e^{-x^2}$$

- a) Faça um esboço do gráfico das distribuições prioris dos dois físicos em um mesmo sistema cartesiano.

Temos $\theta_A \sim N(900, 20^2)$ e $\theta_B \sim N(900, 80^2)$. Assim:



- b) Encontre a distribuição a posteriori para o físico A e para o físico B.

Como $X|\theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ com σ^2 conhecido e $\theta \sim N(\mu_0, \tau_0^2)$ então $\theta|x \sim N(\mu_1, \tau_1)$, sendo

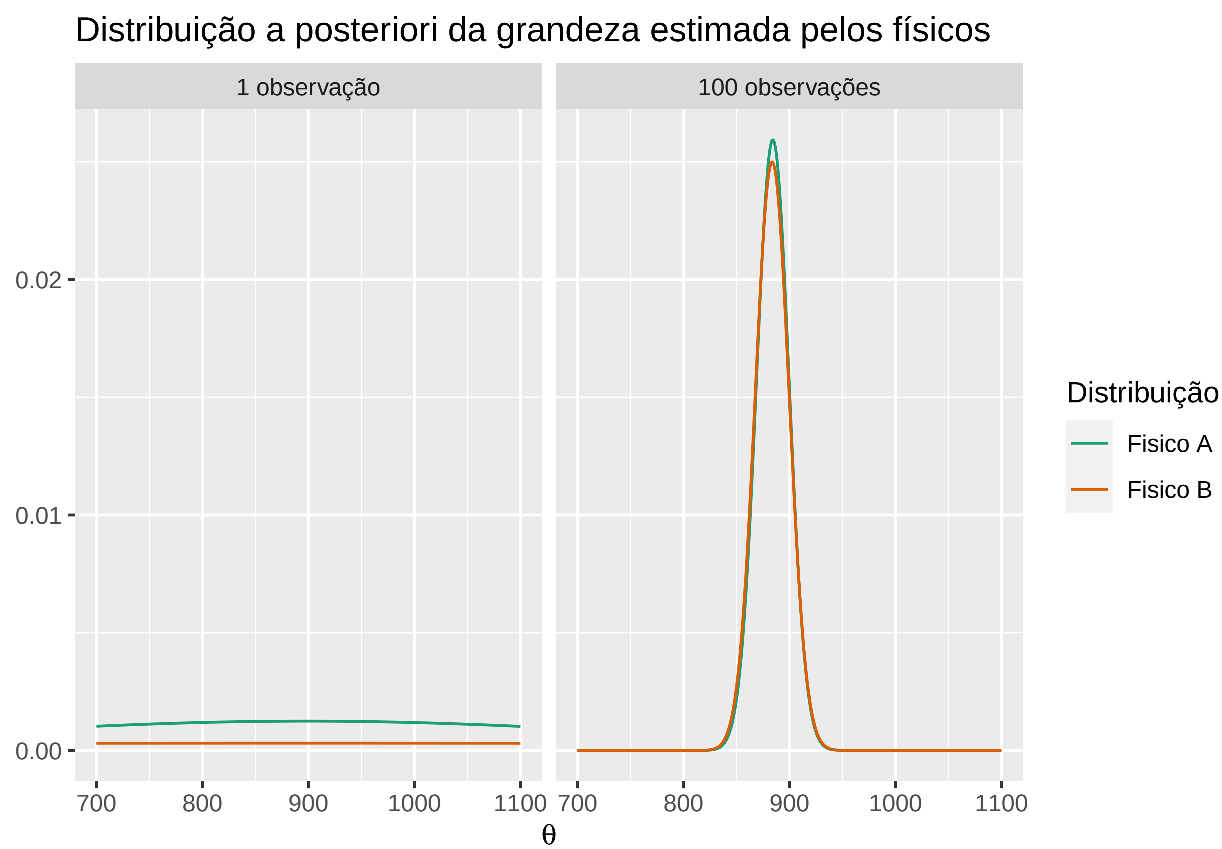
$$\mu_1 = \frac{\tau_0^2 \mu_0 + \sigma^{-2} x}{\tau_0^{-2} + \sigma^{-2}}, \quad \text{e} \quad \tau_1^{-2} = \tau_0^{-2} + \sigma^{-2}$$

Assim, para 100 observações temos:

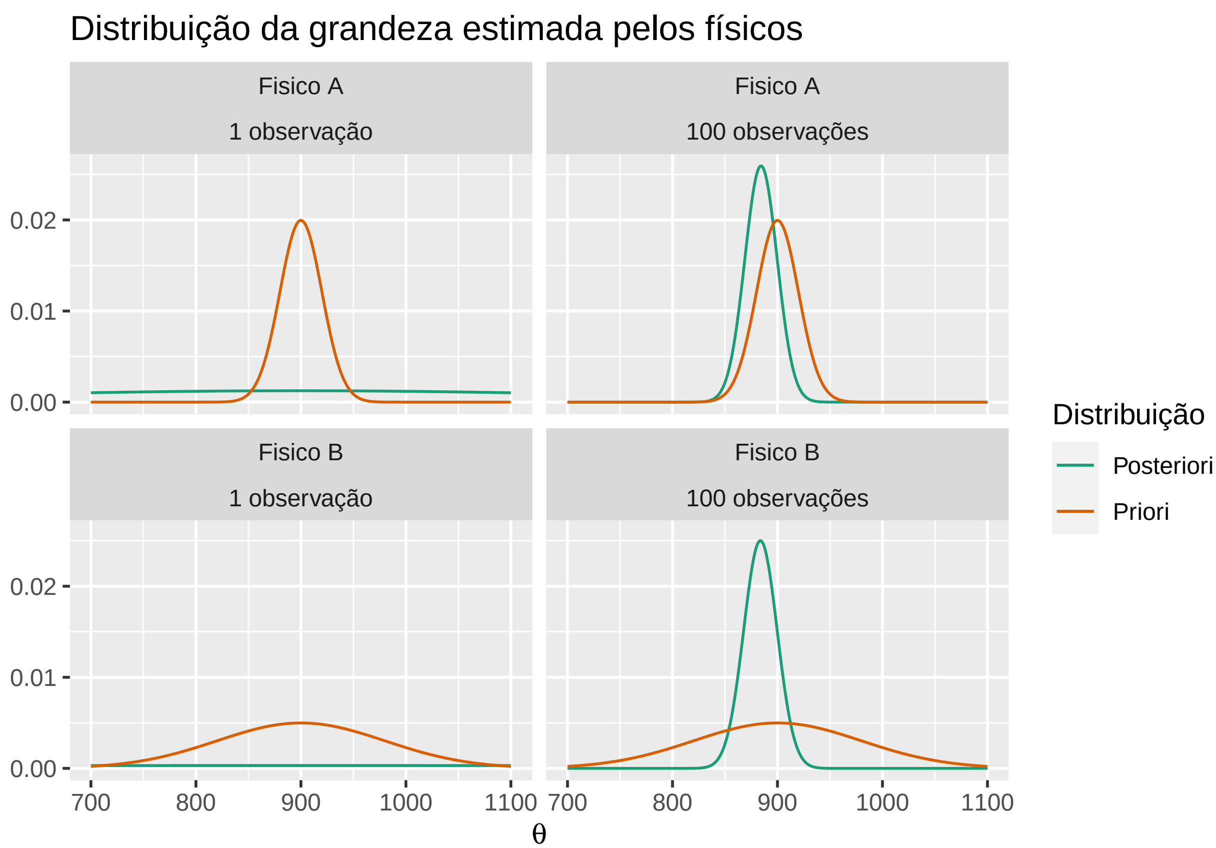
$$\theta_A \sim N(884.314, 15.3846), \quad \theta_B \sim N(883.7272, 15.9601)$$

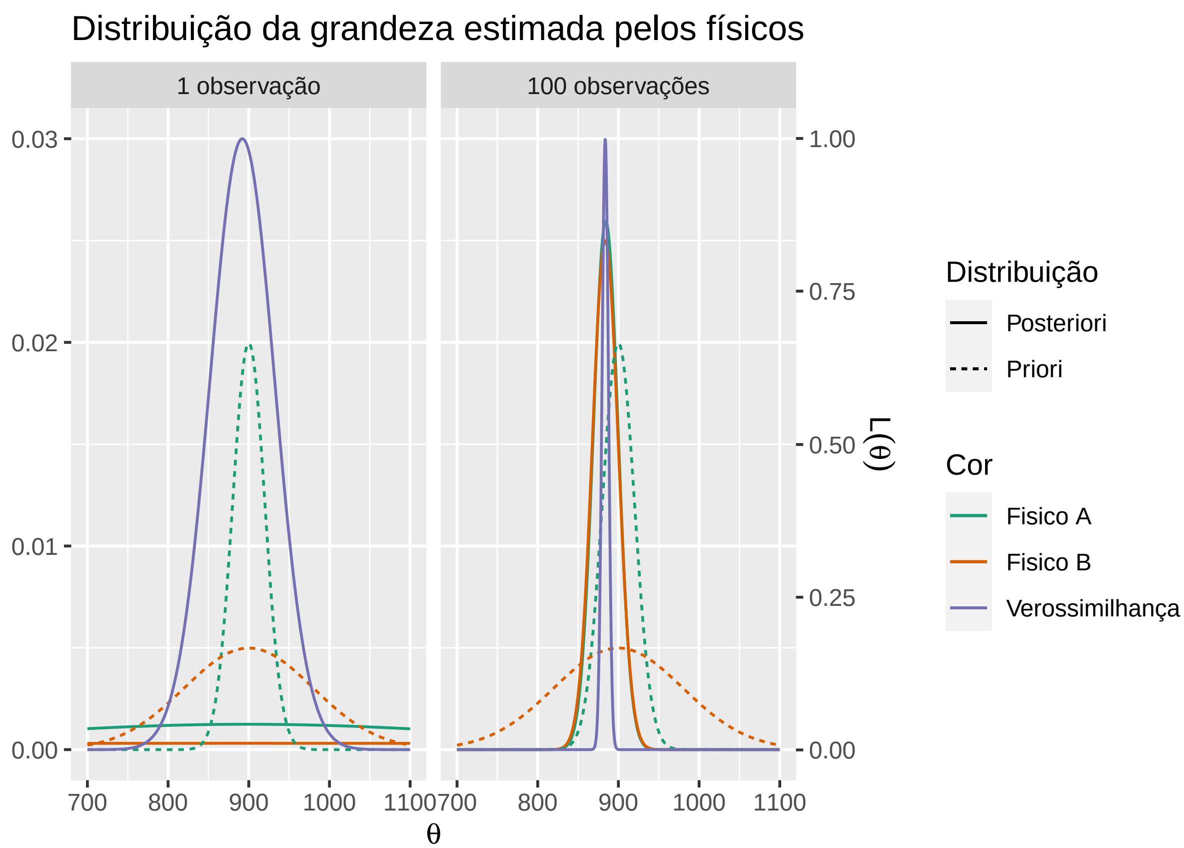
Enquanto que para uma única observação, a posteriori é:

$$\theta_A \sim N(898.4, 320), \quad \theta_B \sim N(893.6, 1280)$$



- c) Faça um esboço do gráfico das distribuições: a priori e a posteriori de cada um dos dois físicos em um mesmo sistema cartesiano.


Distribuição da grandeza estimada pelos físicos
Fisico A
1 observação
Fisico A
100 observações
Fisico B
1 observação
Fisico B
100 observações
0.00
0.01
0.02
700
800
900
1000
1100
θ
Distribuição
Posteriori
Priori



- d) Observando o gráfico, qual físico aprendeu mais com o experimento? Justifique.

Aumentos nas precisões a posteriori em relação às precisões a priori com 100 observações:

- para o físico A: precisão(θ) passou de $\tau_0^{-2} = 0.0025$ a $\tau_1^{-2} = 0.004225008$ (aumento de 70%).
- para o físico B: precisão(θ) passou de $\tau_0^{-2} = 0.00015625$ a $\tau_1^{-2} = 0.003926$ (aumento de 2500%)

Com 1 observação:

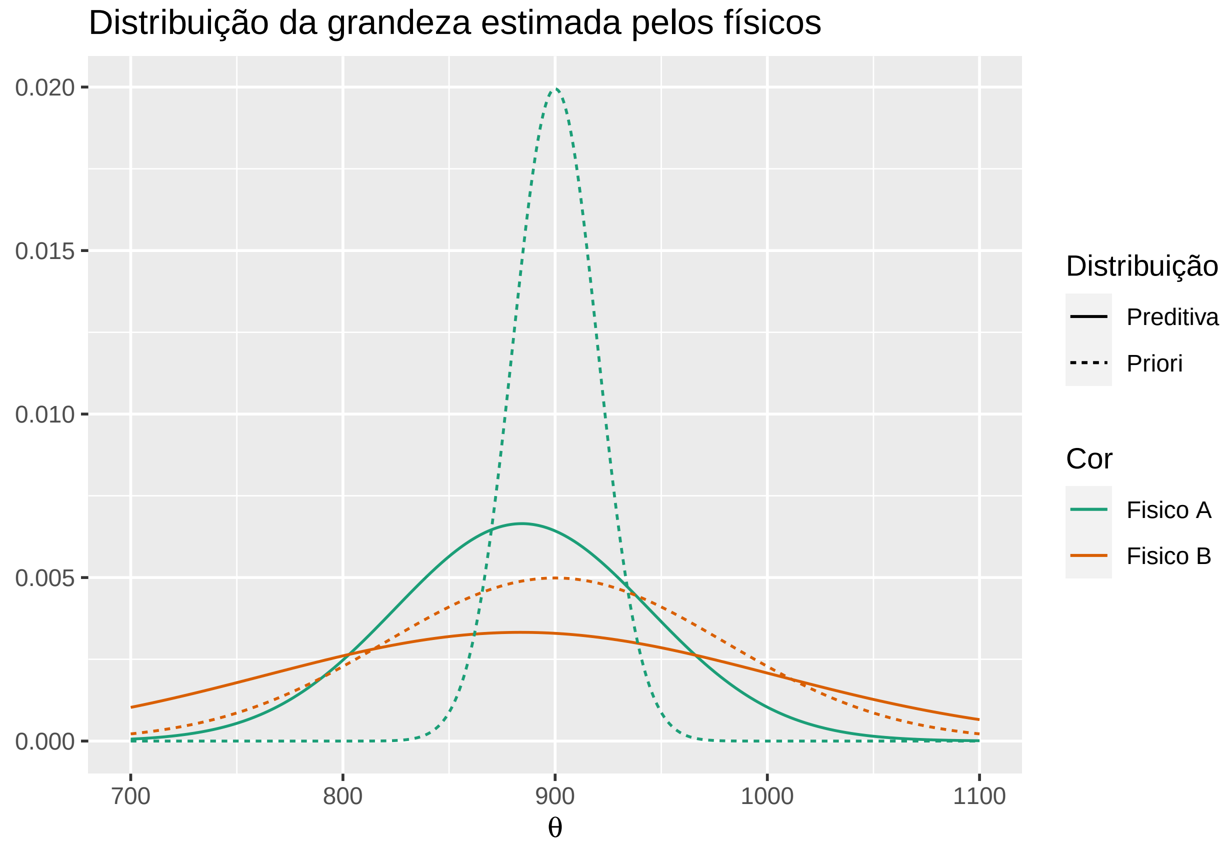
- para o físico A: precisão(θ) passou de $\tau_0^{-2} = 0.0025$ a $\tau_1^{-2} = 6.1035 * 10^{-7}$.
- para o físico B: precisão(θ) passou de $\tau_0^{-2} = 0.00015625$ a $\tau_1^{-2} = 9.7656 * 10^{-6}$.
- e) Construa uma tabela que contenha o resumo a priori e o resumo a posteriori.

Fisico	Media.pri	Media.pos.100	Media.pos.1	SD.pri	SD.pos.100	SD.pos.1
A	900	884.3140	898.4	20	15.3846	320
B	900	883.7272	893.6	80	15.9601	1280

- f) Encontre a distribuição preditiva e faça um esboço de seu gráfico.

A distribuição preditiva é dada por:

$$X \sim N(\mu_0, \tau_0^2 + \sigma^2)$$



Caso 2: μ conhecido e σ desconhecido

Distribuições a priori

Seja Y_i uma amostra aleatória simples de uma distribuição $Y \sim N(0, \sigma^2)$.

Primeiramente, vamos encontrar a função de verossimilhança de σ^2.

$$\mathcal{L}(y|\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sigma} e^{-1/2(y_i/\sigma)^2} \propto \frac{1}{\sigma^n} e^{-(\sum_{i=1}^n y_i/\sigma)^2} \propto \sigma^{-n} e^{-2\sigma^{-2} \sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$$\mathcal{L}(y|\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sigma} e^{-y_i^2/2\sigma^2} \propto \frac{1}{\sigma^n} e^{-2\sigma^{-2} \sum_{i=1}^n y_i^2} \propto \sigma^{-n} e^{-2\sigma^{-2} \sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Prioris Conjulgadas

O suporte de nosso parâmetro $\sigma > 0$ permite-nos adotar três distribuições de probabilidade estudadas durante o curso:

Note que, desprezadas as constantes não informativas, as três distribuições são da forma x elevado a uma potência vezes a exponencial de x. Dessa forma, as três distribuições servem como conjulgada natural da Normal, em nosso caso. Fazendo $x = \sigma$, temos que:

1.**Gama:**

Se $X_1 \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$ então

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \propto x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x}$$

$$\sigma^{(\alpha-1)} e^{-\beta\sigma} \Rightarrow \pi(\sigma) \sim \text{Gama}(\alpha_0, \beta_0)$$

2.**Gama-Inversa:**

Se $X \sim \text{Gama-Inv}(\alpha, \beta)$ então

$$f_{X_2}(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha x^{(\alpha-1)} e^{-\beta/x}}{\Gamma(\alpha)} \propto x^{(\alpha-1)} e^{-\beta/x}$$

3.**Qui-Quadrado:**

Se $X \sim \chi^2(\nu)$ então

$$f_{X_3}(x|\nu) = \frac{x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \propto x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}$$

$$\sigma^{(\nu/2)-1} e^{-\sigma/2} \Rightarrow \pi(\sigma) \sim \chi^2(\alpha_0, \beta_0)$$

Priori não informativa

$$\log(\mathcal{L}(y|\sigma^2)) \propto -n\log(\sigma) - 2\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

A distribuição a *priori* de Jeffreys é dada por $\pi(\sigma^2) \propto \sqrt{J(\sigma^2)}$.

$$\begin{aligned}
J(\sigma^2) \propto E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(\theta))\right) &= E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(-n\log(\sigma) - 2\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\right) \\
= E\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{-n}{\sigma} + 4\sigma^{-3}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\right) &= E\left(-\frac{n}{\sigma^2} + 12\sigma^{-4}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \\
&= -\frac{n}{\sigma^2} + 12\sigma^{-4}\sum_{i=1}^{n} E(y_i)^2 = -\frac{n}{\sigma^2} \propto \sigma^{-2}
\end{aligned}$$