SME0809 - Inferência Bayesiana - Distribuição Normal

Grupo 13 - Francisco Miranda - 4402962 - Heitor Carvalho - 11833351

Outubro 2021

```r
library(tidyverse)
library(effectsize)
library(invgamma)
library(dados)
#remotes::install_github("cienciadedatos/dados")
set.seed(42)
```

Caso 1: μ desconhecido e σ conhecido

Verossimilhança da distribuição

$$\mathcal{L}(y|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i|\theta) = \prod_{i-1}^{n} e^{-1/2\sigma^2(y_i-\theta)^2}$$

A *priori* da distribuição

Nós parametrizamos $p(\theta)$ de modo que $\theta \sim \mathcal{N}(y_0, \tau_0^2)$ com média y_0 e variância τ_0^2

$$p(\theta) \propto e^{(-1/2\tau_0^2)(\theta-y_0)^2}$$

A priori não informativa de Jeffreys

A distribuição a *priori* de Jeffreys é dada por $p(\theta) \propto \sqrt{J(n/\sigma^2)} \propto 1$

Sabemos que a Informação de Fisher de θ através de $y = y_1, ..., y_n$ é definida como:

$$I(\theta) = E[-\frac{\partial^2 log\ p(y|\theta)}{\partial\theta^2}]$$

Segue que:

$$
\begin{aligned}
&-E[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(-log(2\pi\sigma^2)/2 - 1/2\sigma^2(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^2)] \\
&= -E[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(-log(2\pi\sigma^2)/2 - 1/2\sigma^2(\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2\theta n\overline{y} + n\theta^2)] \\
&= -E[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-1/2\sigma^2(-2n\overline{y} + 2n\theta)\right)] \\
&= -E[-1/2\sigma^2\,(2n)] \\
&= n/\sigma^2
\end{aligned}
$$

A *posteriori* da distribuição

A *posteriori* é computada assumindo-se que:

1. Cada observação é independentemente distribuída
2. Cada observação tem a mesma variância

$$
p(\theta|y) = p(\theta)\,p(y|\theta) = p(\theta)\prod_{i=1}^{n}p(y_i|\theta) = e^{(-1/2\tau_0^2)(\theta-\mu_0)^2}\prod_{i=1}^{n}e^{(-1/2\sigma^2)(y_i-\theta)^2} = e^{(\frac{-1}{2})(1/\tau_0^2(\theta-\mu_0)^2\;+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^2)}
$$

Desse modo, a distribuição a posteriori da média θ depende apenas da média amostral $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, sendo assim, $\overline{y}$ é uma estatística suficiente.

Portanto, para n observações, a posteriori apresenta a seguinte distribuição:

$$
p(\theta|y_1,...,y_n) = p(\theta \mid \overline{y}) = \mathcal{N}(\theta|y_n, \tau_n^2)
$$

Sendo,

$$
\mu_n = \frac{\tau_0^{-2}\mu_0 + n\sigma^{-2}\overline{y}}{\tau_0^{-2} + \sigma^{-2}}, \quad \text{e} \quad \tau_n^{-2} = \tau_0^{-2} + n\sigma^{-2}
$$

Podemos reescrever $p(\theta|y)$ como:

$$
p(\theta|y_n) \propto e^{(-1/2\tau_n^2)(\theta-\mu_n)^2}
$$

Logo, para uma distribuição Normal com variância conhecida, a média a *posteriori* μ_n pode ser interpretada como a média ponderada da média a *priori* e o valor observado $y = y_1, ..., y_n$, sendo os pesos proporcionais às precisões de cada um.

```
sample <- dados::pinguins%>%
  filter(especie == "Pinguim-de-barbicha")%>%
  select(comprimento_bico)%>%
  drop_na()
sample2 <- sample %>% sample_n(2) %>% pull()
sample5 <- sample %>% sample_n(5) %>% pull()
sample15 <- sample %>% sample_n(15) %>% pull()
sample30 <- sample %>% sample_n(30) %>% pull()
sample <- sample %>% pull()
```

```r
# gera a priori e a posteriori de uma normal com media desconhecida e sigma conhecido
norm <- function(samp, sigma = 40, mu, tau0 = 10000 ){

  n <- length(samp)
  xbar <- mean(samp)

  ver <- function(x) exp(- n/(2*sigma^2) * (xbar - x)^2)

  mu.post <- (tau0^(-2)*mu + n*sigma^(-2)*xbar)/ (tau0^(-2) + n * sigma^(-2))
  sigma.post <- (tau0^(-2) + n*sigma^(-2))^(-1)

  theta <- seq(20, 60, 0.02)


  tibble(theta = theta,
         priori = dnorm(theta,mu,tau0),
         post = dnorm(theta,mu.post,sigma.post),
         ver = ver(theta),
         pred = dnorm(theta,mu.post,tau0+sigma),
         tau1 = sigma.post,
         mu1 = mu.post)

}
```

Exemplo: Comprimento do bico dos pinguins

Escolheu-se o conjunto de dados *palmerpenguins* em sua versão traduzida. Como atributo de interesse escolhemos o comprimento do bico dos pinguis e nos limitamos a análise de uma espécie - nesse caso o **Pinguin-de-barbicha**. Existem 68 pinguins desta espécie em nosso dataset.

Sabe-se que para a distribuição do comprimento do bico dos pinguins tem-se que $\sigma = 3,34$ e a média $\theta = 48.8$.

Quatro amigos, Cleiton, Eduarda, Larissa e Robertinho resolvem tentar estimar a média do comprimento do bico dos pinguins de barbicha. Para tanto, cada integrante do grupo resolve dar um palpite em relação a média e variância da distribuição.

Desse modo, Cleiton, que nunca foi a um zoológico e nunca viu um pinguin pessoalmente acredita que a distribuição seja próxima a $\mathcal{N}(80, 12)$, Eduarda, que adora pinguins porém nunca viu um pessoalmente, acredita que $\mathcal{N}(30, 8)$, Larissa que visita zoológicos com frequência acredita que $\mathcal{N}(55, 5)$ e Robertinho - biólogo que trabalha com pinguis acredita que $\mathcal{N}(47, 3)$.

.

```r
tibble(      Prioris = c("Cleiton","Eduarda","Larissa", "Robertinho"),
             Media.pri = c(80, 30, 55, 47),
             SD.pri = c(20, 8, 5, 3),
             IC.025 = c(qnorm(0.025, mean = 80 , sd = 20),
                        qnorm(0.025, mean = 30 , sd = 17.2),
                        qnorm(0.025, mean = 55,  sd = 12.1),
                        qnorm(0.025, mean = 47,  sd = 6.51)),
             IC.975 = c(qnorm(0.975, mean = 50.6 , sd = 22.2),
                        qnorm(0.975, mean = 43.8 , sd = 17.2),
                        qnorm(0.975, mean = 51.8,  sd = 12.1),
```

```r
                        qnorm(0.975, mean = 47.5,  sd = 6.51)))%>%
  knitr::kable(digits = 2, caption = "Resumo apriori dos quatro amigos para n = 68")
```

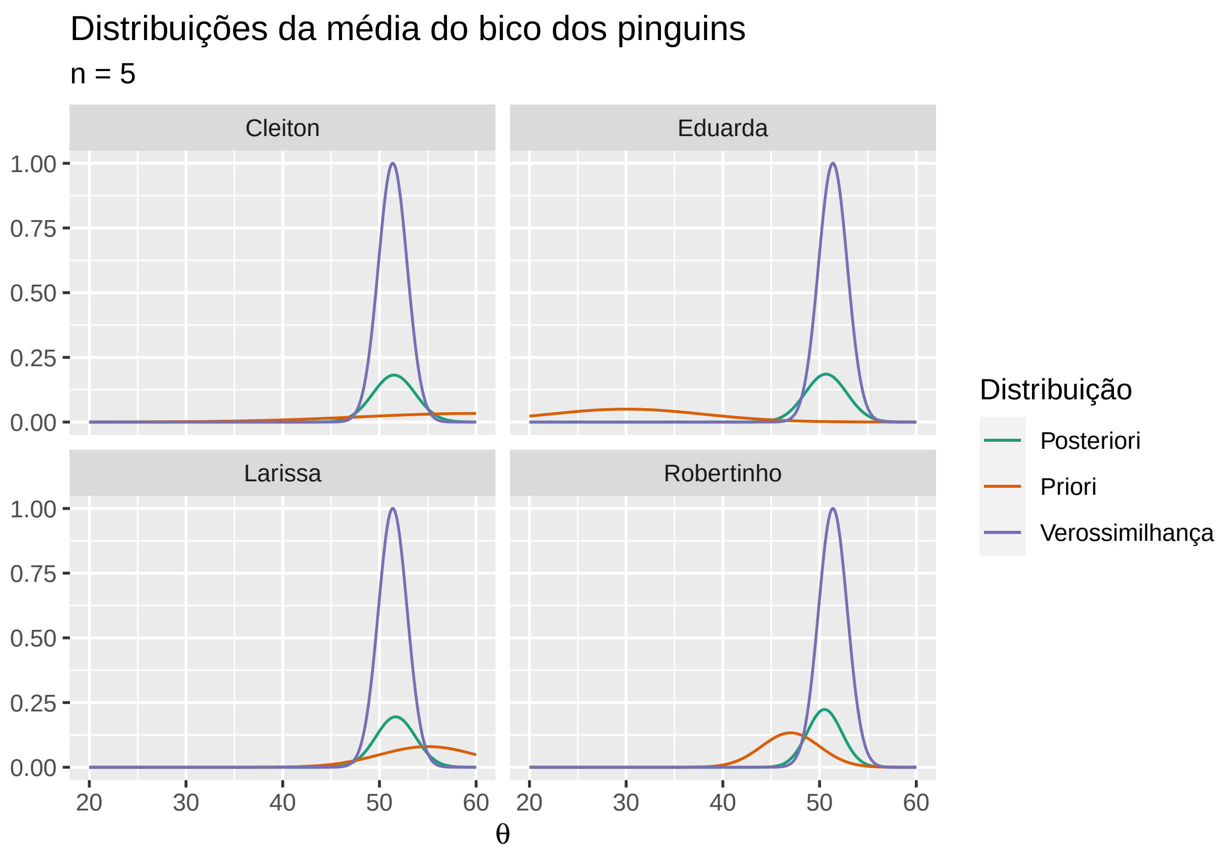
Table 1: Resumo apriori dos quatro amigos para n = 68

Prioris	Media.pri	SD.pri	IC.025	IC.975
Cleiton	80	20	40.80	94.11
Eduarda	30	8	-3.71	77.51
Larissa	55	5	31.28	75.52
Robertinho	47	3	34.24	60.26

Chegam duas amostras de bico de pinguins, uma com $n = 5$, outra com $n = 15$

Para a amostra com $n = 5$ teremos:

```r
a <- norm(samp = sample5,  sigma = sd(sample), tau0 = 12, mu = 60) %>% mutate(Priori = "Cleiton")
b <- norm(samp = sample5,  sigma = sd(sample), tau0 = 8, mu = 30) %>% mutate(Priori = "Eduarda")
c <- norm(samp = sample5,  sigma = sd(sample), tau0 = 5 , mu = 55) %>% mutate(Priori = "Larissa")
d <- norm(samp = sample5,  sigma = sd(sample), tau0 = 3, mu = 47) %>% mutate(Priori = "Robertinho")


rbind(a,b,c,d) %>%
  ggplot(aes(x = theta)) +
  geom_line(aes(y = post, color = "Posteriori")) +
  geom_line(aes(y = priori, color = "Priori")) +
  geom_line(aes(y = ver, color = "Verossimilhança")) +
  scale_colour_brewer(name = "Distribuição", type = "qual", palette = "Dark2")+
  scale_x_continuous(name = expression(theta), limits = c(20, 60))+
  theme(axis.title.y=element_blank()) +
  labs(title = "Distribuições da média do bico dos pinguins",
       subtitle = "n = 5") +
  facet_wrap(~Priori)
```



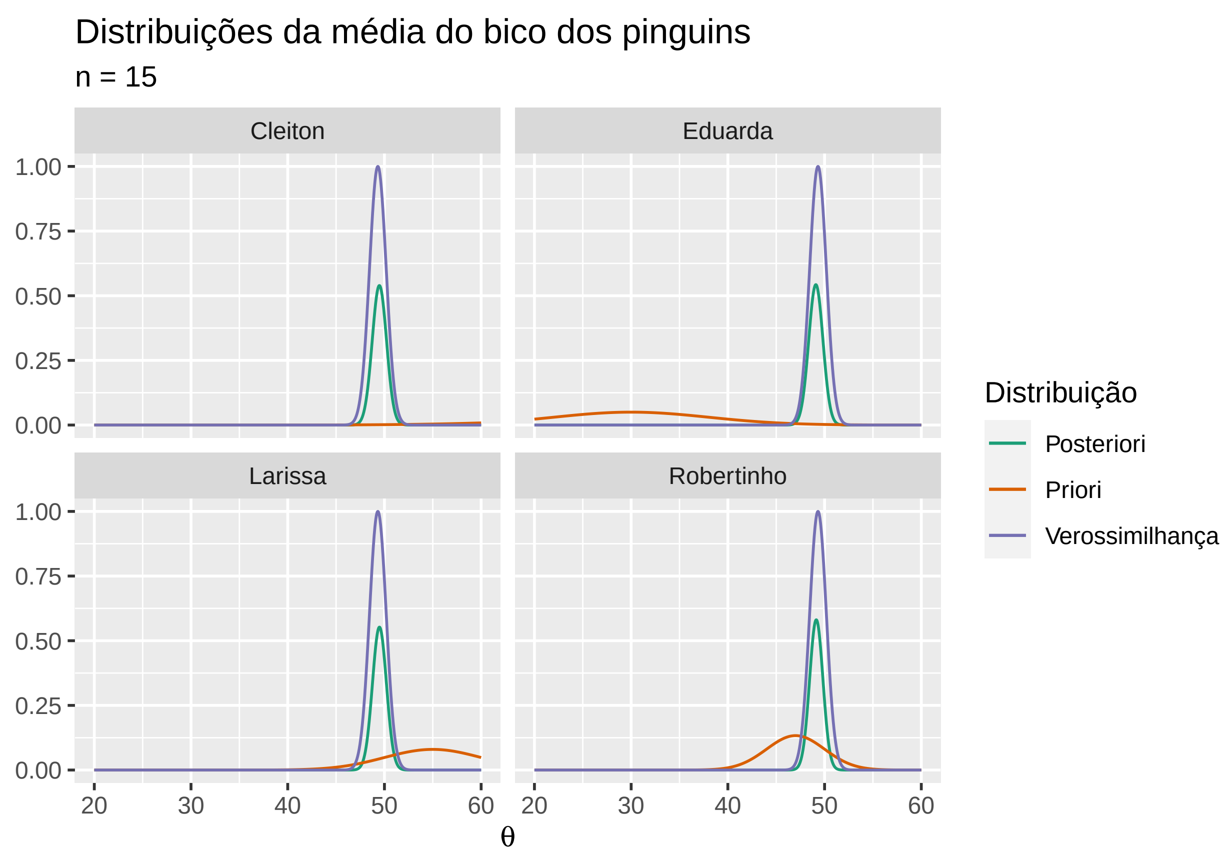

```r
tibble(       Prioris = c("Cleiton","Eduarda","Larissa", "Robertinho"),
              Media.pri = c(80, 30, 55, 47),
              Media.pos = c(50.6, 43.8, 51.8, 47.5),
              SD.pri = c(12, 8, 5, 3),
              SD.pos = c(22.2, 17.2, 12.1, 6.51),
              IC.025 = c(qnorm(0.025, mean = 50.6 , sd = 22.2),
                        qnorm(0.025, mean = 43.8 , sd = 17.2),
                        qnorm(0.025, mean = 51.8,  sd = 12.1),
                        qnorm(0.025, mean = 47.5,  sd = 6.51)),
              IC.975 = c(qnorm(0.975, mean = 50.6 , sd = 22.2),
                        qnorm(0.975, mean = 43.8 , sd = 17.2),
                        qnorm(0.975, mean = 51.8,  sd = 12.1),
                        qnorm(0.975, mean = 47.5,  sd = 6.51)))%>%
  knitr::kable(digits = 2, caption = "Resumo aposteriori dos quatro amigos (n=5)")
```

Table 2: Resumo aposteriori dos quatro amigos (n=5)

Prioris	Media.pri	Media.pos	SD.pri	SD.pos	IC.025	IC.975
Cleiton	80	50.6	12	22.20	7.09	94.11
Eduarda	30	43.8	8	17.20	10.09	77.51
Larissa	55	51.8	5	12.10	28.08	75.52
Robertinho	47	47.5	3	6.51	34.74	60.26

Enquanto que, para $n = 15$:

```r
e <- norm(samp = sample15,  sigma = sd(sample), tau0 = 12, mu = 80) %>% mutate(Priori = "Cleiton")
f <- norm(samp = sample15,  sigma = sd(sample), tau0 = 8, mu = 30) %>% mutate(Priori = "Eduarda")
g <- norm(samp = sample15,  sigma = sd(sample), tau0 = 5 , mu = 55) %>% mutate(Priori = "Larissa")
h <- norm(samp = sample15,  sigma = sd(sample), tau0 = 3, mu = 47) %>% mutate(Priori = "Robertinho")


rbind(e,f,g,h) %>%
  ggplot(aes(x = theta)) +
  geom_line(aes(y = post, color = "Posteriori")) +
  geom_line(aes(y = priori, color = "Priori")) +
  geom_line(aes(y = ver, color = "Verossimilhança")) +
  scale_colour_brewer(name = "Distribuição", type = "qual", palette = "Dark2")+
  scale_x_continuous(name = expression(theta), limits = c(20, 60))+
  theme(axis.title.y=element_blank()) +
  labs(title = "Distribuições da média do bico dos pinguins",
       subtitle = "n = 15") +
  facet_wrap(~Priori)
```




```r
tibble(      Prioris = c("Cleiton","Eduarda","Larissa", "Robertinho"),
             Media.pri = c(80, 30, 55, 47),
             Media.pos = c(49.6, 49.1, 49.5, 49.1),
             SD.pri = c(20, 8, 5, 3),
             SD.pos = c(1.24, 0.735, 0.722, 0.687),
             IC.025 = c(qnorm(0.025, mean = 49.6,  sd = 1.240),
                        qnorm(0.025, mean = 49.1,  sd = 0.735),
```

```
                    qnorm(0.025, mean = 49.5,  sd = 0.722),
                    qnorm(0.025, mean = 49.1,  sd = 0.687)),
          IC.975 = c(qnorm(0.975, mean = 49.6 , sd = 1.240),
                    qnorm(0.975, mean = 49.1 , sd = 0.735),
                    qnorm(0.975, mean = 49.5,  sd = 0.722),
                    qnorm(0.975, mean = 49.1,  sd = 0.687)))%>%
  knitr::kable(digits = 2, caption = "Resumo aposteriori dos quatro amigos (n=15)")
```

Table 3: Resumo aposteriori dos quatro amigos (n=15)

Prioris	Media.pri	Media.pos	SD.pri	SD.pos	IC.025	IC.975
Cleiton	80	49.6	20	1.24	47.17	52.03
Eduarda	30	49.1	8	0.74	47.66	50.54
Larissa	55	49.5	5	0.72	48.08	50.92
Robertinho	47	49.1	3	0.69	47.75	50.45

Caso 2: μ conhecido e σ desconhecido

Distribuições a priori

Seja Y_i uma amostra aleatória simples de uma distribuição $Y \sim N(\theta, \sigma^2)$, com θ conhecido. Primeiramente, vamos encontrar a função de verossimilhança de σ^2.

$$\mathcal{L}(y|\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(y_i-\theta)^2/2\sigma^2} \propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^2\right)}$$

Priori não informativa

Definimos a log-verossimilhança em nosso caso como sendo:

$$\log(\mathcal{L}(y|\sigma^2)) \propto -\frac{n}{2}\log(\sigma^{-2}) - \sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^2$$

A distribuição a *priori* de Jeffreys é dada por $\pi(\sigma^2) \propto \sqrt{J(\sigma^2)}$.

$$J(\sigma^2) \propto E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(\theta))\right) = E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(-\frac{n}{2}\log(\sigma^{-2}) - (\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^2\right)\right)$$
$$= E\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{2}(\sigma^2)^{-1} + (\sigma^2)^{-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^2\right)\right) = E\left(-\frac{n}{2\sigma^2} + 2(\sigma^2)^{-3}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^2\right)$$
$$= -\frac{n}{2\sigma^2} + 2\sigma^{-4}\sum_{i=1}^{n}(E(y_i)-\theta)^2 = -\frac{n}{\sigma^2} + 2\sigma^{-4}\sum_{i=1}^{n}(\theta-\theta)^2 = -\frac{n}{\sigma^2} \propto \sigma^{-2}$$

Assim, $\pi(\sigma) \propto \sqrt{\sigma^{-2}} = \sigma^{-1}$. Seu parâmetro Φ de escala que faz com que θ mude somente em locação pode ser obtido através do cálculo de

$$\phi \propto \int \pi(\sigma^2) d\sigma^2 = \int \frac{1}{\sigma^2} d\sigma^2 = \log|\sigma^2| + k \propto \log \sigma^2$$

ϕ é uma distribuição imprópria, pois $\int_0^{+\infty} \log(\sigma^2) d\sigma^2$ é divergente. Assim, a *priori* não favorece nenhuma escala em detrimento de outra.

Conjulgadas Naturais

O suporte de nosso parâmetro de interesse $\sigma > 0$ permite-nos adotar três distribuições de probabilidade estudadas durante o curso:

1.**Gama:**

Se $X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$ então

$$f_X(x|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \propto x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, x > 0$$

2.**Gama-Inversa:**

Se $X \sim (\alpha, \beta)$ então

$$f_X(x|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha x^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/x}}{\Gamma(\alpha)} \propto x^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/x}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, x > 0$$

3.**Qui-Quadrado:**

Se $X \sim \chi^2(\nu)$ então

$$f_X(x|\nu) = \frac{x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \propto x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}, \quad \nu > 0, x > 0$$

Note que as duas primeiras estão relacionadas via uma transformação simples e a última é um caso particular delas. Desprezadas as constantes não informativas, as três distribuições são da forma x elevado a uma potência vezes a exponencial de x. Dessa forma, as três distribuições servem como conjulgada natural da Normal, em nosso caso. Neste trabalho, optou-se por utilizar a distribuição Gama Inversa.

Fazendo $x = \sigma$, temos uma *priori* da forma:

$$\sigma^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/\sigma^2} \Rightarrow \pi(\sigma) \sim \text{Gama-Inv}(\alpha, \beta)$$

Se quisermos torná-la não informativa, basta utilizarmos $\alpha \to 0, \beta \to 0$.

Distribuição a *posteriori*

$$\pi(\sigma|y) \propto \mathcal{L}(y|\sigma^2)\pi(\sigma) = (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (y_i-\theta)^2\right)} \sigma^{-(\alpha-1)} e^{-\beta/\sigma^2}$$

$$= (\sigma^2)^{-(\alpha+\frac{n}{2}+1)} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left(\beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y_i-\theta)^2\right)}$$

Dessa forma,

$$\pi(\sigma^2|y) \sim \text{Gama-Inv}(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2)$$

Exemplo: Comprimento do bico dos pinguins

Cleiton, Eduarda, Larissa e Robertinho estão estudando sobre os Pinguins-de-barbicha. Sabe-se que o comprimento do bico deles tem distribuição Normal com média 48.833 e desvio padrão desconhecido. Os quatro amigos decidem estimar este desvio padrão, cada um define sua *priori* da seguinte forma:

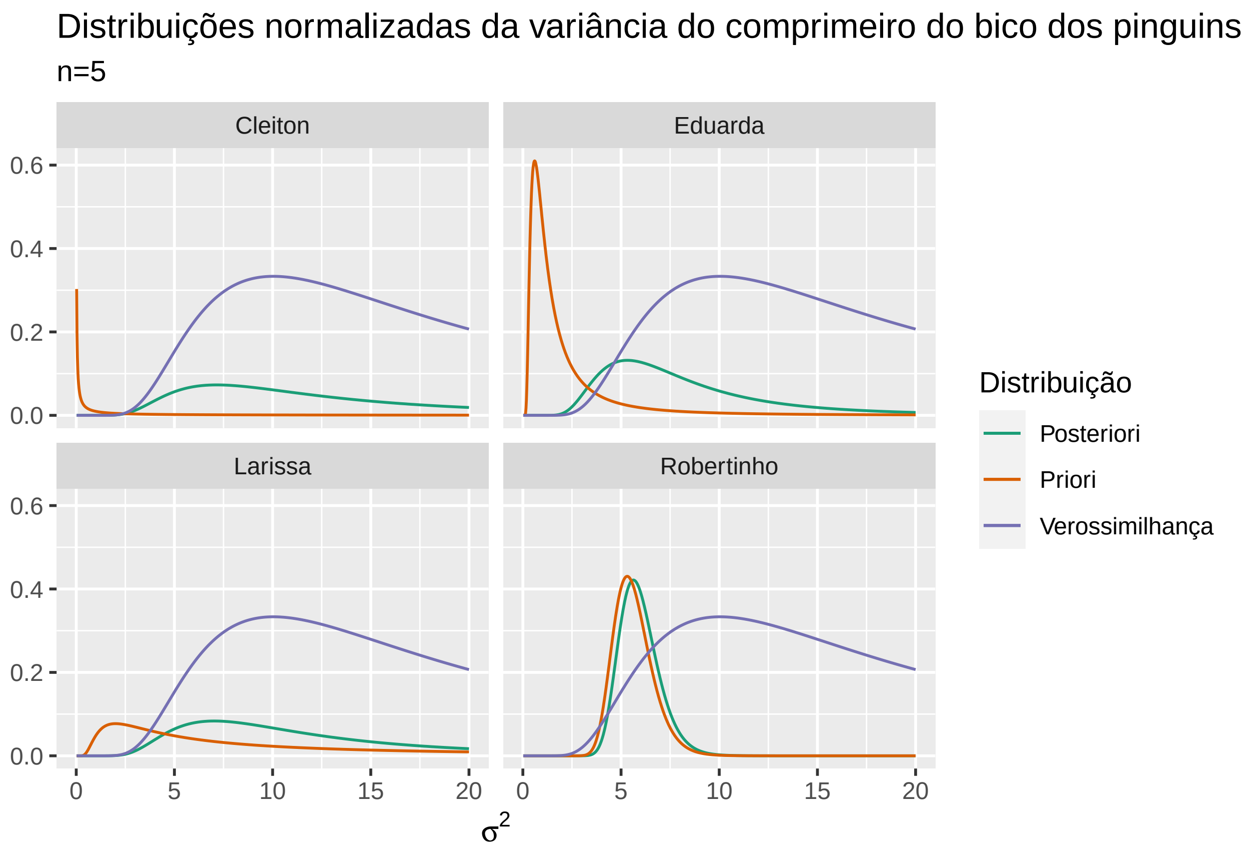
- **Cleiton** nunca viu um pinguim-de-barbicha na vida, nem em fotografia. Dessa forma, ele decide adotar uma *priori* não informativa Gama-Inv($\alpha = 0.01,\ \beta = 0.01$)
- **Eduarda** sabe tudo sobre pinguins, mas nunca viu um pessoalmente. Ela opta por uma Gama-Inv($\alpha = 20,\ \beta = 20$)
- **Larissa** adora ir ao zoológico visitar aos pinguins. Ela decide adotar uma Gama-Inv($\alpha = 0.5,\ \beta = 3$)
- **Robertinho** é um biólogo com muita experiência, que consulta suas anotações sobre pinguins e decide adotar uma *priori* Gama-Inv($\alpha = 35,\ \beta = 186$)

Chegam duas amostras de bico de pinguins, uma com $n = 5$, outra com $n = 30$.

```r
# gera a priori e a posteriori de uma normal com media conhecida e sigma desconhecido
SigmaNorm <- function(samp, theta = 48.833, alpha = 0.001, beta = 0.001){

  n <- length(samp)
  s <- sum(((samp - theta)/2)^2)

  l_sigma2 <- function(sigma2) sigma2^(-(n/2))  * exp(- 1/sigma2 *s)


  a.post <- alpha + n/2
  b.post <- beta +  s

  sigma2 <- seq(0.02, 40, 0.02)

  tibble(sigma2 = sigma2,
         priori = (dinvgamma(sigma2,alpha,beta)),
         post = (dinvgamma(sigma2,a.post,b.post)),
         ver = normalize(l_sigma2(sigma2))/3,
         alpha1 = a.post,
         beta1 = b.post,
         alpha0 = alpha,
         beta0 = beta)
}
```

```r
a <- SigmaNorm(sample5, alpha = 0.01, beta = 0.01) %>% mutate(Priori = "Cleiton")
b <- SigmaNorm(sample5,alpha = 1.5, beta = 1.5) %>% mutate(Priori = "Eduarda")
c <- SigmaNorm(sample5,alpha = 0.5, beta = 3) %>% mutate(Priori = "Larissa")
d <- SigmaNorm(sample5,alpha = 34, beta = 186) %>% mutate(Priori = "Robertinho")

rbind(a,b,c,d) %>%
  ggplot(aes(x = sigma2)) +
  geom_line(aes(y = post, color = "Posteriori")) +
  geom_line(aes(y = priori, color = "Priori")) +
  geom_line(aes(y = ver, color = "Verossimilhança")) +
  #geom_line(aes(y = 0.03* ver, colour = "Verossimilhança")) +
  scale_colour_brewer(name = "Distribuição", type = "qual", palette = "Dark2")+
  scale_x_continuous(name = expression(sigma^2), limits = c(0, 20))+
```

```
  theme(axis.title.y=element_blank()) +
  labs(
    title ="Distribuições normalizadas da variância do comprimeiro do bico dos pinguins",
    subtitle = "n=5") +
  facet_wrap(~Priori)
```




```
tabDesc <- function(alpha, beta){
  tibble( alpha = alpha,
          beta = beta,
          media = beta/(alpha-1),
          var = beta^2/((alpha-1)^2*(alpha-2)),
          moda = beta/(alpha+1),
          IC2.5 = qinvgamma(0.025, alpha, beta),
          IC97.5 = qinvgamma(0.975, alpha, beta))
}


  cbind( Priori = c("Cleiton","Eduarda", "Larissa", "Robertinho"),
             rbind(tabDesc(a$alpha0[1], a$beta0[1]),
                   tabDesc(b$alpha0[1], b$beta0[1]),
                   tabDesc(c$alpha0[1], c$beta0[1]),
                   tabDesc(d$alpha0[1], d$beta0[1])
              )) %>%
  knitr::kable(digits = 2, caption = "Resumo a priori (n = 5)")
```

Table 4: Resumo a priori (n = 5)

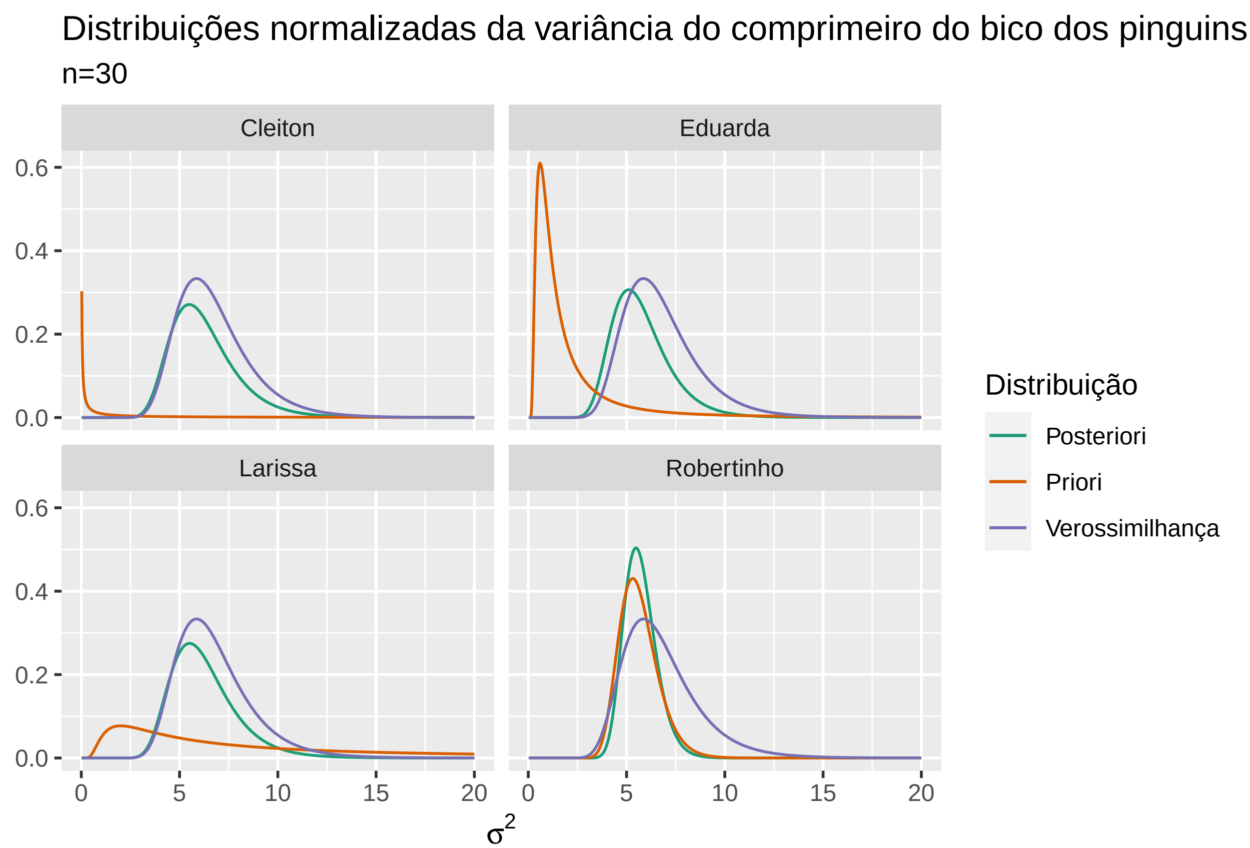
Priori	alpha	beta	media	var	moda	IC2.5	IC97.5
Cleiton	0.01	0.01	-0.01	0.00	0.01	0.21	2.838743e+158
Eduarda	1.50	1.50	3.00	-18.00	0.60	0.32	1.390000e+01
Larissa	0.50	3.00	-6.00	-24.00	2.00	1.19	6.109550e+03
Robertinho	34.00	186.00	5.64	0.99	5.31	4.01	7.900000e+00

```
  cbind( Priori = c("Cleiton","Eduarda", "Larissa", "Robertinho"),
             rbind(tabDesc(a$alpha1[1], a$beta1[1]),
                   tabDesc(b$alpha1[1], b$beta1[1]),
                   tabDesc(c$alpha1[1], c$beta1[1]),
                   tabDesc(d$alpha1[1], d$beta1[1])
              )) %>%
  knitr::kable(digits = 2, caption = "Resumo a posteriori  (n = 5)")
```

Table 5: Resumo a posteriori (n = 5)

Priori	alpha	beta	media	var	moda	IC2.5	IC97.5
Cleiton	2.51	25.12	16.63	542.47	7.16	3.90	59.89
Eduarda	4.00	26.61	8.87	39.33	5.32	3.03	24.41
Larissa	3.00	28.11	14.05	197.49	7.03	3.89	45.43
Robertinho	36.50	211.11	5.95	1.03	5.63	4.29	8.24

```
a <- SigmaNorm(sample30, alpha = 0.01, beta = 0.01) %>% mutate(Priori = "Cleiton")
b <- SigmaNorm(sample30,alpha = 1.5, beta = 1.5) %>% mutate(Priori = "Eduarda")
c <- SigmaNorm(sample30,alpha = 0.5, beta = 3) %>% mutate(Priori = "Larissa")
d <- SigmaNorm(sample30,alpha = 34, beta = 186) %>% mutate(Priori = "Robertinho")

rbind(a,b,c,d) %>%
  ggplot(aes(x = sigma2)) +
  geom_line(aes(y = post, color = "Posteriori")) +
  geom_line(aes(y = priori, color = "Priori")) +
  geom_line(aes(y = ver, color = "Verossimilhança")) +
  #geom_line(aes(y = 0.03* ver, colour = "Verossimilhança")) +
  scale_colour_brewer(name = "Distribuição", type = "qual", palette = "Dark2")+
  scale_x_continuous(name = expression(sigma^2), limits = c(0, 20))+
  theme(axis.title.y=element_blank()) +
  labs(
    title ="Distribuições normalizadas da variância do comprimeiro do bico dos pinguins",
    subtitle = "n=30") +
  facet_wrap(~Priori)
```




```
tabDesc <- function(alpha, beta){
  tibble( alpha = alpha,
          beta = beta,
          media = beta/(alpha-1),
          var = beta^2/((alpha-1)^2*(alpha-2)),
          moda = beta/(alpha+1),
          IC2.5 = qinvgamma(0.025, alpha, beta),
          IC97.5 = qinvgamma(0.975, alpha, beta))
}


  cbind( Priori = c("Cleiton","Eduarda", "Larissa", "Robertinho"),
           rbind(tabDesc(a$alpha0[1], a$beta0[1]),
                 tabDesc(b$alpha0[1], b$beta0[1]),
                 tabDesc(c$alpha0[1], c$beta0[1]),
                 tabDesc(d$alpha0[1], d$beta0[1])
            )) %>%
  knitr::kable(digits = 2, caption = "Resumo a priori  (n = 30)")
```

Table 6: Resumo a priori (n = 30)

Priori	alpha	beta	media	var	moda	IC2.5	IC97.5
Cleiton	0.01	0.01	-0.01	0.00	0.01	0.21	2.838743e+158
Eduarda	1.50	1.50	3.00	-18.00	0.60	0.32	1.390000e+01

Priori	alpha	beta	media	var	moda	IC2.5	IC97.5
Larissa	0.50	3.00	-6.00	-24.00	2.00	1.19	6.109550e+03
Robertinho	34.00	186.00	5.64	0.99	5.31	4.01	7.900000e+00

```
cbind( Priori = c("Cleiton","Eduarda", "Larissa", "Robertinho"),
           rbind(tabDesc(a$alpha1[1], a$beta1[1]),
                 tabDesc(b$alpha1[1], b$beta1[1]),
                 tabDesc(c$alpha1[1], c$beta1[1]),
                 tabDesc(d$alpha1[1], d$beta1[1])
            )) %>%
knitr::kable(digits = 2, caption = "Resumo a posteriori (n = 30)")
```

Table 7: Resumo a posteriori (n = 30)

Priori	alpha	beta	media	var	moda	IC2.5	IC97.5
Cleiton	15.01	87.94	6.28	3.03	5.49	3.74	10.46
Eduarda	16.50	89.43	5.77	2.30	5.11	3.53	9.39
Larissa	15.50	90.93	6.27	2.91	5.51	3.77	10.37
Robertinho	49.00	273.93	5.71	0.69	5.48	4.30	7.56