SME0809 - Inferência Bayesiana - Distribuição não informativa

Grupo 13 - Francisco Miranda - 4402962 - Heitor Carvalho - 11833351

Setembro 2021

```r
# pacotes do R utilizados
library(tidyverse)
library(ggpubr)
```

Seja $Y_1, ..., Y_n$ uma a.a de $Y \sim \text{Pois}(\theta)$. Pede-se:

- a) encontre a distribuição a *priori* não informativa de Jeffreys

Temos que

$$p(y|\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^y}{y!},\ \theta > 0,\ y = 0, 1, 2, ...$$

Primeiramente, vamos obter a log-verossimilhança

$$\log(L(\theta)) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} p(y_i|\theta)\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{y_i}}{y_i!}\right) = \log\left(\frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}\right) =$$
$$-n\theta + \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\theta) - \log\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right)$$

Tomando a segunda derivada, temos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(\theta)) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[-n\theta + \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\theta) - \log\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i\right] =$$
$$-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Assim, como $J(\theta) = E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(\theta))\right)$

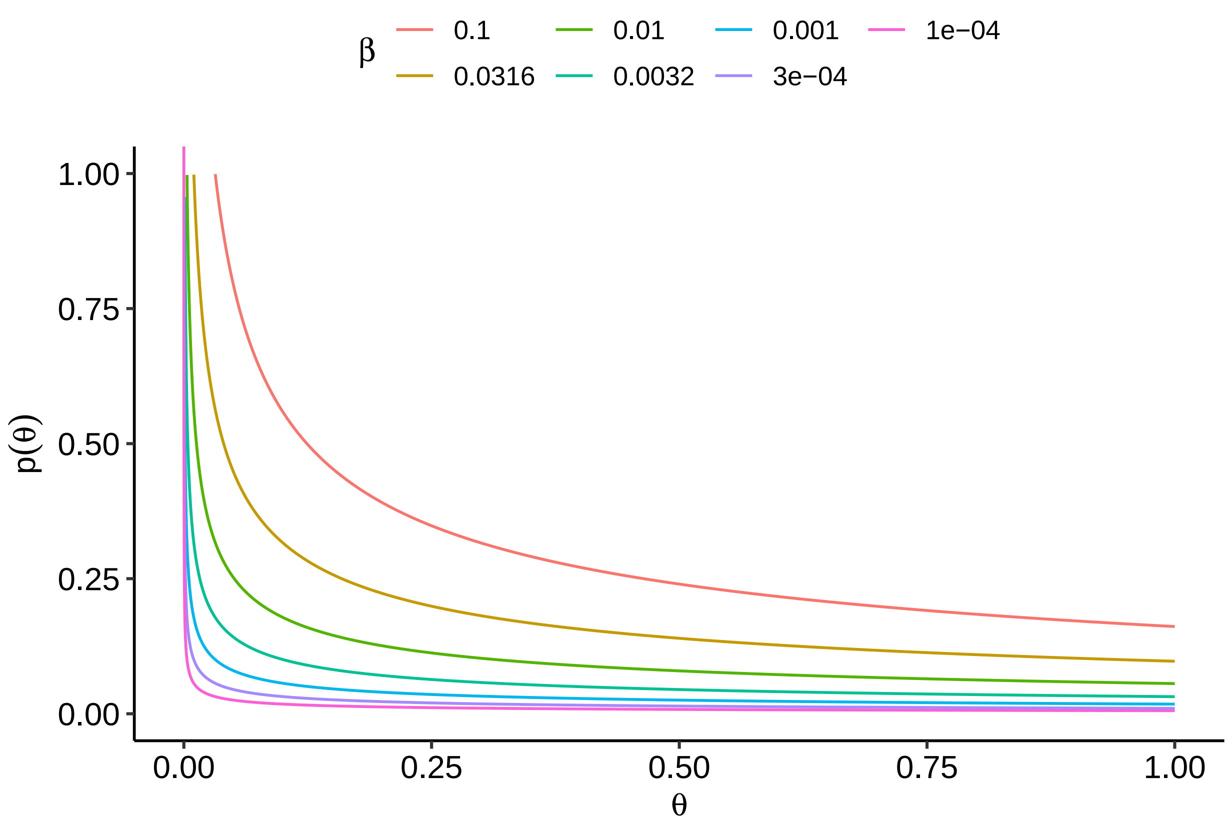
$$J(\theta) = E\left(\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{\theta^2}E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{n\theta}{\theta^2} = \frac{n}{\theta} \propto \frac{1}{\theta}$$

A distribuição a *priori* de Jeffreys é dada por $\pi(\theta) \propto \sqrt{J(\theta)}$. Logo, $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}$.

Note que esta *priori* pode ser obtida a partir da conjulgada natural Gama(α, β), com $\alpha = 1/2$ e $\beta \to 0$. Ilustramos o efeito de fixar α e diminuir β abaixo:

```r
df <- NULL
theta <- seq(0,1, 0.0001)

for (i in seq(1,4, 0.5)) {
  tmp <- tibble(x = theta,
                y = dgamma(theta, 1/2, 10^(-i)),
                beta = as.factor(round(10^(-i), 4)))
  df <- rbind(df, tmp)
}
df %>% ggplot() + geom_line(aes(x = x, y = y, color = beta)) +
  scale_y_continuous(limits = c(0,1)) + labs(color= expression(beta)) +
  xlab(expression(theta)) + ylab(expression(p(theta))) +
  theme_pubr()
```



Além disso, $\pi(\theta)$ é uma distribuição imprópria pois $\int_0^{+\infty} \theta^{-1/2} d\theta$ diverge.

- b) A função de verossimilhança na parametrização θ muda em locação e escala? Justificar graficamente

$$L(\theta) = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!} \propto e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

- c) caso a resposta ao item b) seja afirmativa, encontre a escala na qual a função de verossimilhança mude somente em locação. Mostre graficamente.

$$\phi \propto \int \pi(\theta) d\theta$$