

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

DIVISÃO DE ENGENHARIA AERONÁUTICA E
AEROESPACIAL

**Projeto de transferência
Terra-Marte baseado em patched
conics otimizado com algoritmo
evolutivo**

Autores:

Francisco Matheus¹

Guilherme Marinot¹

Gustavo Medeiros¹

Rafael Mendes¹

Luiz Sivieri²

Professora:

Dra. Máisa Terra

Disciplina:

MVP-41

Turma:

Aesp20

¹ Graduando em Eng. Aeroespacial no Instituto Tecnológico de Aeronáutica

² Pós-graduando em Física no Instituto Tecnológico de Aeronáutica

24 de junho de 2019

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS, BRASIL

Sumário

1	Introdução	5
2	Metodologia	6
2.1	Problema de Lambert	6
2.1.1	Teorema de Lambert	6
2.1.2	Abordagem	8
2.2	Patched conics	8
2.3	Otimização	11
2.3.1	Particle Swarm Optimization (PSO)	11
2.3.2	Escolha dos Parâmetros	13
3	Resultados	16
4	Análises	19
4.1	Comparação com a literatura	19
4.2	Discussões e propostas de melhoria	20
4.3	Análise dos dados obtidos	23
5	Conclusão	24

Lista de Figuras

1	Órbita simplificada para ilustração dos parâmetros livres envolvidos na análise por <i>patched conics</i>	10
2	Convergência de partículas num exemplo ilustrativo de utilização do algoritmo PSO.	14
3	Arcos de cônica que constituem a transferência interplanetária proposta	18
4	Trajetórias hiperbólicas de excesso com omissão do ponto de escape e de captura.	19
5	Trajetória possível com a duração mais próxima encontrada no trabalho.	21
6	Possível trajetória com a maior variação de velocidade similar a encontrada neste trabalho.	21
7	Custos clássicos envolvidos em viagens interplanetárias.	22
8	Custos generalizados envolvidos em transferências interplanetárias em função do destino.	23

Lista de Tabelas

1	Upper e Lower Bounds de cada uma das incógnitas do PSO.	14
2	Resultados obtidos de diversas iterações do programa de otimização. .	16
3	Caracterização dos trechos de cônicas coladas para a trajetória ótima encontrada	17
4	Caracterização dos pontos relevantes para a trajetória ótima encontrada	17
5	Valores de duração trajetória próximas ao calculado neste trabalho .	20
6	Valores de variação de velocidade total próximas ao calculado neste trabalho	20

1 Introdução

A astrodinâmica possui um problema fundamental, formulado pelo matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728 - 1779), conhecido como problema de Lambert. Dentro de projetos de missões espaciais, é essencial saber o tempo de voo necessário para viajar entre determinados pontos em uma trajetória particular. De acordo com o teorema de Lambert, o tempo de transferência entre dois pontos, depende apenas da soma dos vetores posição, o semieixo maior e do comprimento que une os dois pontos. Em outras palavras, é um problema de valor de limite entre dois vetores de posição e um tempo de voo. Por meio da solução de tal problema, é possível calcular as variações de velocidades necessárias durante a transferência. No caso de uma transferência Terra-Marte, inicialmente se faz necessário identificar as posições da Terra e de Marte para determinadas datas de partida e chegada. Além disso, a solução para o problema de Lambert também é utilizada para determinar a orientação e a forma da trajetória hiperbólica de chegada, que neste caso se trata de Marte.

É importante ressaltar que o problema de Lambert não busca tempos mínimos de trajetórias, já que em suas soluções são apresentadas possíveis trajetórias cônicas (*conics-like trajectories*) entre dois pontos de interesse sobre um determinado tempo. Desse modo, as soluções de Lambert ajudam a criar um gráfico, do inglês conhecido como *porkchop plot*, que indica todas as trajetórias para um determinado intervalo de tempo, i.e., datas de partida e chegada fixas que auxiliam na análise da escolha do que pode ser a melhor trajetória tendo em base a finalidade da missão, como a redução de custo com combustível por exemplo.

2 Metodologia

2.1 Problema de Lambert

2.1.1 Teorema de Lambert

Suponha que a nave está no ponto P1 em sua órbita e o alvo estará no ponto P2 em sua órbita, e a questão é a determinação do tempo de transferência. De forma a obter uma equação descritiva do tempo de transferência, utiliza-se a equação de Kepler. Como esta descreve um problema de valor inicial e o problema de Lambert, como já dito, trata de um problema de valor de contorno orbital, é possível derivar, da equação de Kepler, a equação de Lambert que seja independente da excentricidade.

$$E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1) = \sqrt{\frac{u}{a^3}}(t_2 - t_1) \quad (1)$$

$$\frac{a^3}{2}[\alpha - \sin \alpha - (\beta - \sin \beta)] = \sqrt{\mu}(t_2 - t_1) \quad (2)$$

onde α e β são descritos de tal modo que

$$\alpha = 2\sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{s}{2a}} \right) \quad (3)$$

$$\beta = 2\sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{s-c}{2a}} \right) \quad (4)$$

e s e c dados por

$$s = 0,5(r_{earth} + r_{mars} + c) \quad (5)$$

$$c = \sqrt{r_{earth}^2 + r_{mars}^2 - r_{earth}r_{mars}\cos\theta} \quad (6)$$

A demonstração pode ser encontrada em [7]. Por meio dessa equação, é possível obter as soluções para as transferências. Tais soluções informam as velocidades, nos pontos de partida e chegada, necessárias para que uma espaçonave possa realizar a transferência entre os pontos propostos. E, ainda, essas soluções rendem não somente trajetórias elípticas, como também trajetórias hiperbólicas, dependendo de qual é o intervalo de tempo (datas de partida e chegada) que está sendo analisado.

Para resolver o problema de Lambert, inicialmente deve-se definir as datas de partidas e chegadas pretendidas para a missão espacial. Feito isso, se torna possível calcular os vetores posição de cada planeta dado os tempos iniciais e finais do objeto

de estudo. Em suma, o problema é resolvido usando o método de cônicas coladas, do inglês *patched conics*, onde a transferência de uma espaçonave se dá por meio de cônicas que vão se interligando em determinados pontos durante o percurso até o destino final. Assim sendo, ao invés de termos um problema de N corpos, reduzimos a três ou mais problemas de 2 corpos, tornando mais simples projetar a trajetória da missão. Dessa forma, pode-se utilizar a mesma abordagem feita em [8], onde a transferência interplanetária pode ser dividida como:

- A saída interplanetária, considerando que a espaçonave está inicialmente em uma órbita estacionária, e deseja-se aplicar um incremento de velocidade para que a mesma possa entrar em uma trajetória hiperbólica de transferência.
- A entrada interplanetária, i.e., a espaçonave realiza uma aproximação do planeta de destino e, se faz necessário uma redução de velocidade para que a espaçonave possa entrar em uma trajetória que irá orbitar o planeta de destino.

Com isso, se torna perceptível o método de *patched conics*, onde a primeira cônica é a órbita estacionária em que a espaçonave se encontra. A segunda cônica é a trajetória hiperbólica de escape do planeta de origem, a terceira é a cônica de transferência considerando, agora, uma órbita em torno do Sol em direção ao planeta alvo. A quarta consagra-se como uma cônica na qual a espaçonave irá de aproximar e, a última, a que irá orbitar depois de se aproximar do planeta pela trajetória hiperbólica. Nesse contexto, um aspecto que deve ser levado em consideração é a esfera de influência, do inglês *sphere of influence* (SOI), que nada mais é do que o lugar geométrico dos pontos primariamente afetos pelo campo gravitacional do corpo massivo ao qual se orbita, como, por exemplo, um planeta exercendo influência sobre objetos relativamente próximos, tais como espaçonaves e satélites naturais. É necessário considerar a SOI nos seguintes casos:

- Quando a espaçonave se encontra próxima ao planeta inicial e ela deve possuir um incremento de velocidade para que consiga escapar do campo gravitacional e entrar numa trajetória de transferência;
- Quando a espaçonave realiza uma aproximação a um planeta para usar seu campo gravitacional para mudar de direção;
- Novamente quando existe a aproximação do planeta e da espaçonave, e a mesma deseja-se colocar em uma trajetória que orbitará o planeta.

2.1.2 Abordagem

Foi-se utilizado uma rotina em MATLAB que resolve de maneira robusta o problema de Lambert [1]. Essa rotina tem como *inputs* o tempo de trajeto e as posições de chegada e de partida do corpo e retorna, por sua vez, as velocidades de partida e de chegada nos dados pontos da órbita kleperiana que satisfaz as condições de contorno impostas.

Sabe-se, no entanto, que o problema de Lambert não possui, dadas as condições de contorno especificadas acima, necessariamente apenas uma solução, e então, como parâmetro adicional, pode ser requisitado ao programa que retorne as outras soluções que não o arco da cônica no sentido anti-horário (a qual é retornada por padrão). No entanto, para esse projeto, foi considerada apenas a resposta padrão do problema. Além disso, o programa também devolve as distâncias mínima e máxima entre a espaçonave e o corpo considerado como centro de massa do sistema, durante a sua trajetória. Essas informações, contudo, não foram utilizadas no escopo desse projeto. Para mais informações, ver [?]. O código utilizado está exposto no Apêndice A.

A partir dessa implementação foi possível simular e obter as velocidades inicial e final de cada uma das três órbitas utilizadas para compor a missão interplanetária da Terra até Marte, valendo-se da técnica de *patched conics*. A primeira (Manobra 1) consiste em sair de uma órbita de espera em torno da Terra e chegar na borda da esfera de influência da Terra (SOI_T); a segunda (Manobra 2), em ir da borda da SOI_T até a borda da SOI_{Marte} ; e a terceira (Manobra 3), em ir da borda da SOI_M até uma órbita de espera em Marte, como melhor descrito a seguir.

2.2 Patched conics

A fim de se utilizar a abordagem de *patched conics*, foram feitas algumas considerações que possibilitaram unir os resultados das três manobras discernidas na seção anterior.

Será assumido que todas as órbitas envolvidas no problema são coplanares: as órbitas de espera na Terra e em Marte e as órbitas da Terra, de Marte em torno do Sol e, por consequência, as órbitas de transferência. Além disso, foram utilizadas apenas circunferências, e não potenciais esferas para trajetórias tridimensionais, de influências como possíveis destinos quando utilizando como ponto final a esfera de influência da Terra ou de Marte. Tais circunferências, também coplanares às órbitas, foram tomadas a fim de fazer com que o problema se resumisse a uma análise em apenas um plano.

Assim, foi-se possível definir o ponto de chegada e de partida em cada órbita, ou seja, em cada circunferência de influência, por meio de apenas um ângulo, medido sempre a partir da direção tangente à órbita da Terra em torno do Sol, considerando-a como uma circunferência, com sentido positivo o sentido da velocidade da Terra em torno do Sol. Em outras palavras, o módulo da distância dos pontos tomados como de interesse, a saber, A, B, C e D, a serem descritos a seguir, e que se farão como parâmetros livres da análise de otimização, estão fixos, permitindo-se apenas a variação das suas coordenadas angulares para caracterização dos mesmos. Tal representação dos pontos está ilustrada de forma simplificada na Figura 1 para o caso de *patched conics* simplificada (ver [2]). Nesta, as respectivas coordenadas angulares são $\theta_A = \pi/2$, $\theta_B = -\pi/2$, $\theta_C = \pi/2$ e $\theta_D = -\pi/2$, conforme análise desenvolvida em [2], para o qual já temos valores resultantes analiticamente calculados para usarmos como referência de otimização.

Por conseguinte, foi-se possível, a partir de uma análise das diferenças vetoriais de velocidade, estimar a alteração de velocidade total imposta à espaçonave, a qual se relaciona diretamente com o custo total da missão. As diferenças vetoriais de velocidade que precisaram ser consideradas estão listadas a seguir.

1. Entre a velocidade de órbita de espera ao redor da Terra numa altitude de $0,1R_T$, onde R_T é o raio da Terra (a partir do ponto A), e a velocidade de partida da Manobra 1;
2. Entre a velocidade de chegada da Manobra 1 (chegando na SOI_T) e a velocidade de saída da Manobra 2 (saindo da SOI_T) (ponto B);
3. Entre a velocidade de chegada da Manobra 2 (chegando na SOI_M) e a velocidade de saída da Manobra 3 (saindo da SOI_M) (ponto C);
4. Entre a velocidade de chegada da Manobra 3 e a velocidade de órbita de espera ao redor de Marte, numa altitude de $0,3R_M$ (ponto D), onde R_M é o raio de Marte.

As diferenças de velocidade também precisaram contabilizar o fato de que as velocidades de chegada e partida devolvidas pelo programa nem sempre estavam no mesmo referencial. Então, para a Manobra 1, as velocidades são apresentadas em relação à Terra, para a Manobra 2, em relação ao Sol, e para a Manobra 3, em relação à Marte. As devidas correções foram feitas numericamente.

O problema de custo total da missão, portanto, está limitado a 7 incógnitas principais, como descrito abaixo:

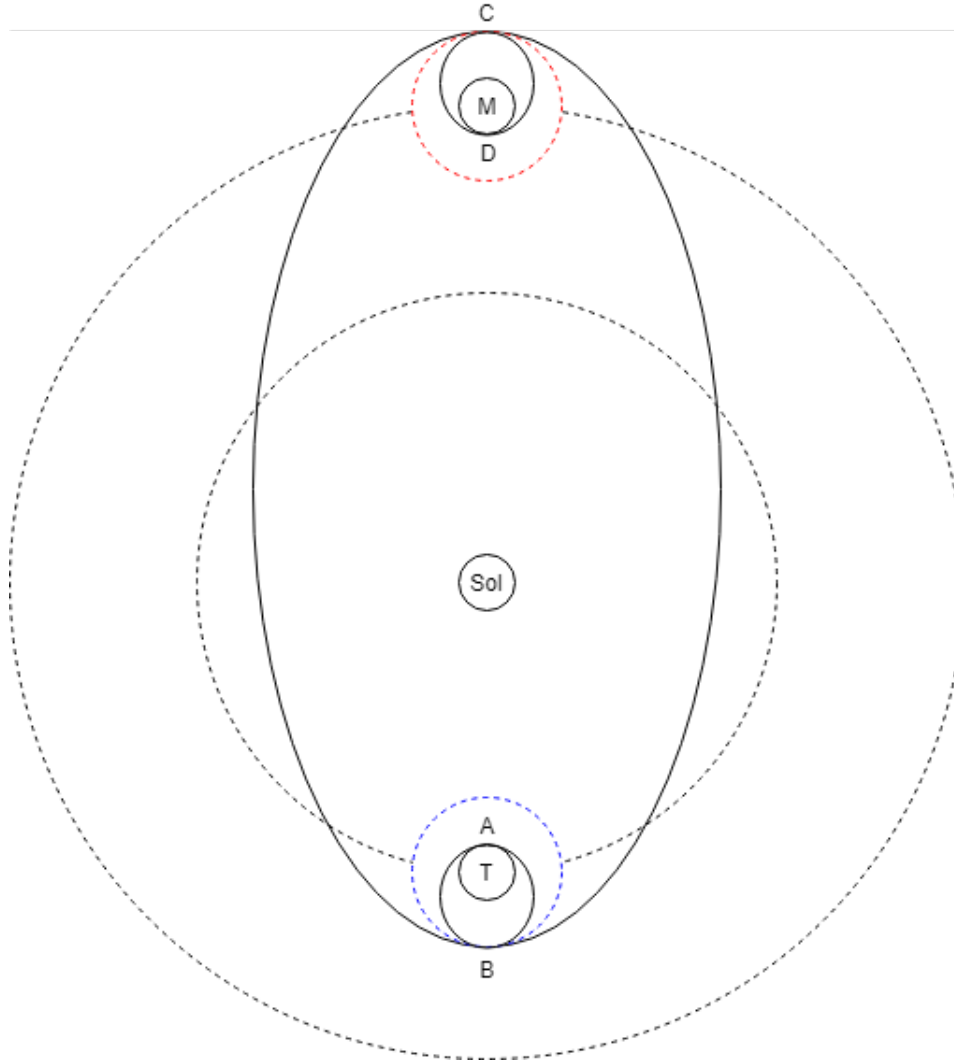


Figura 1: Órbita simplificada para ilustração dos parâmetros livres envolvidos na análise por *patched conics*.

1. **Âng A** - Angulação entre 0 e 2π que representa a posição da espaçonave na órbita de espera em que ela irá acionar os motores para realizar a primeira manobra que comporá o movimento de *patched conics* - da órbita de espera até a borda esfera de influência da Terra (SOI_T);
2. **Âng B** - Angulação entre 0 e 2π que representa a posição de chegada da espaçonave na borda da SOI_T , assumindo movimento planar;
3. **Âng C** - Angulação entre 0 e 2π que representa a posição de chegada da espaçonave na borda da SOI_M (esfera de influência de Marte), assumindo movimento planar. Essa angulação representa a chegada da segunda manobra que compõe o *patched conics* - da SOI_T até a SOI_M ;

4. **Âng D** - Angulação entre 0 e 2π que representa a posição de chegada da espaçonave na órbita de espera de Marte - o ponto final da última manobra que compõe o *patched conics* - da SOI_M até a órbita de espera em Marte;
5. **Nro Dias 1** - Número de dias que serão necessários para realizar a primeira manobra da *patched conics* - a ida da órbita de espera da Terra até a SOI_T ;
6. **Nro Dias 2** - Número de dias que serão necessários para realizar a segunda manobra da *patched conics* - a ida da SOI_T até a SOI_M ;
7. **Nro Dias 3** - Número de dias que serão necessários para realizar a terceira manobra da *patched conics* - a ida da SOI_M até a órbita de espera em Marte.

2.3 Otimização

A abordagem utilizada pelo grupo, portanto, foi a análise do menor custo que a missão interplanetária pode possuir. O menor custo está relacionado linearmente com a variação de velocidade imposta à espaçonave.

Para cumprir essa abordagem, portanto, foi implementado um algoritmo de otimização computacional. Esse algoritmo foi implementado para otimizar o resultado da rotina do MATLAB utilizada anteriormente para resolução do problema de Lambert (problema de valor de contorno), que nos dava a variação de velocidade necessária para mudar de órbita a partir da resolução e consequente aplicação do algoritmo para vários pontos que descreveriam as órbitas desejadas. Em outras palavras, os algoritmos foram integrados de tal forma que a resolução de consecutivos problemas de Lambert que compartilhavam pontos referente à colagem das cônicas foi utilizada para determinar o custo da transferência a ser minimizado. Dentre os algoritmos de otimização existentes, foi decidido pela utilização do chamado *Particle Swarm Optimization (PSO)*.

2.3.1 Particle Swarm Optimization (PSO)

O algoritmo de otimização *PSO* baseia-se em dinâmica populacional e utiliza-se de uma técnica de espalhamento para encontrar o mínimo global que uma função pode assumir [4]. Para que o leitor entenda o trabalho realizado de forma completa, segue abaixo uma explicação sucinta do algoritmo.

O *PSO* trabalha com um número de "partículas" n definido pelo usuário. Cada partícula representa um único estado dentre todos os possíveis inputs do programa - no caso do projeto, isso representa um vetor de 7 incógnitas, onde cada uma está

entre os valores de *upper bound* (UB) e de *lower bound* (LB), também definidos pelo usuário. As sete incógnitas são os parâmetros descritos na seção anterior.

Tendo definido o número de partículas n , o UB e o LB , o PSO cria as partículas aleatoriamente. Assim, existirão n vetores de 7 incógnitas, e essas incógnitas estarão definidas randomicamente.

Então o programa aplica a função para cada uma dessas partículas, encontrando um valor de custo para cada uma delas. A partir daí, começa a etapa iterativa do programa. O usuário define o número de iterações i que serão realizadas.

O algoritmo tem como premissa convergir as partículas para mínimos locais, ainda diversificando o resultado o bastante para que cada partícula consiga explorar novas regiões e encontrar, ainda, mínimos elegíveis ao mínimo global da função de custo.

Ele [o algoritmo] o faz a partir de uma função velocidade, a qual possui um valor para cada uma das partículas criadas. Implementada apenas internamente, ela define o quanto a partícula se afasta da sua posição anterior a partir de uma série de parâmetros que definem o quanto ela está próxima ou distante de um possível mínimo. A função velocidade possui valor randômico na primeira iteração e é dada pela equação 7.

$$v_{i+1} = \omega v_i + \phi_p r_p (b_i - x_i) + \phi_g r_g (b_g - x_i) \quad (7)$$

onde

- x_i representa o estado atual (vetor com sete elementos) da partícula.
- b_i representa o melhor estado histórico já encontrado *pela partícula*.
- b_g representa o melhor estado histórico já encontrado dentre *todas as partículas*.

Assim, a equação 7 pode ser analisada em cada um de seus termos para o entendimento de como os valores convergem. O primeiro termo da equação, ωv_i representa a inércia da velocidade - não permitir que a velocidade seja alterada de maneira muito acentuada de uma iteração para a outra. O segundo termo, $\phi_p r_p (b_i - x_i)$, representa que quanto mais próxima a partícula estiver do seu mínimo histórico, menor a sua velocidade, ou seja, ela tende a permanecer nesse mínimo local. O terceiro termo, $\phi_g r_g (b_g - x_i)$, representa a convergência para o mínimo global, ou seja, quanto mais perto a partícula estiver do mínimo global (mínimo histórico encontrado dentre todas as partículas), menor a sua velocidade. Note que ambas as diminuições entre b e x são vetoriais, de forma que, quando a partícula se distancia de um mínimo (seja ele local ou global), ela tende a voltar para lá devido a esses termos.

A respeito dos outros parâmetros, segue descrição detalhada.

- ω - Peso de Inércia - Não permitir que a velocidade seja alterada de maneira muito acentuada de uma iteração para a outra;
- ϕ_p - Parâmetro Cognitivo - Valor entre 0 e 1 escolhido pelo usuário, representa o peso atribuído à variação da velocidade relativo à proximidade com um mínimo local;
- ϕ_g - Parâmetro Social - Valor entre 0 e 1 escolhido pelo usuário, representa o peso atribuído à variação da velocidade relativo à proximidade com um mínimo global;
- r_p - Parâmetro Randômico Cognitivo - Valor aleatório entre 0 e 1 atrelado ao parâmetro cognitivo.
- r_g - Parâmetro Randômico Social - Valor aleatório entre 0 e 1 atrelado ao parâmetro social.

Os parâmetros r_p e r_g adicionam um fator aleatório ao sistema, permitindo que sejam encontrados outros mínimos que não limitados àqueles que já foram descobertos.

Após definido o vetor velocidade, a partícula é atualizada (iterada) de acordo com a equação 8. O processo é repetido i vezes, de acordo com o que foi definido pelo usuário.

$$x_{i+1} = x_i + v_i \quad (8)$$

Para melhor visualização da convergência das partículas, a Figura 2 a representa quando utilizado o algoritmo de PSO.

2.3.2 Escolha dos Parâmetros

Implementou-se, portanto, o algoritmo de PSO para explorar os custos associados à resolução de uma transferência feita com cônica coladas através da função de Lambert, como descrito na seção anterior. Então, foi preciso decidir os parâmetros de execução do código.

A primeira tarefa foi escolher os UBs e os LBs de cada incógnita utilizada. Para fazê-lo, foi-se utilizada uma estimativa de missão interplanetária entre a Terra e Marte [2], a partir da técnica de *patched conics*, valendo-se de hipóteses simplificadoras semelhantes às utilizadas nesse projeto, impondo transferências de Hohmann

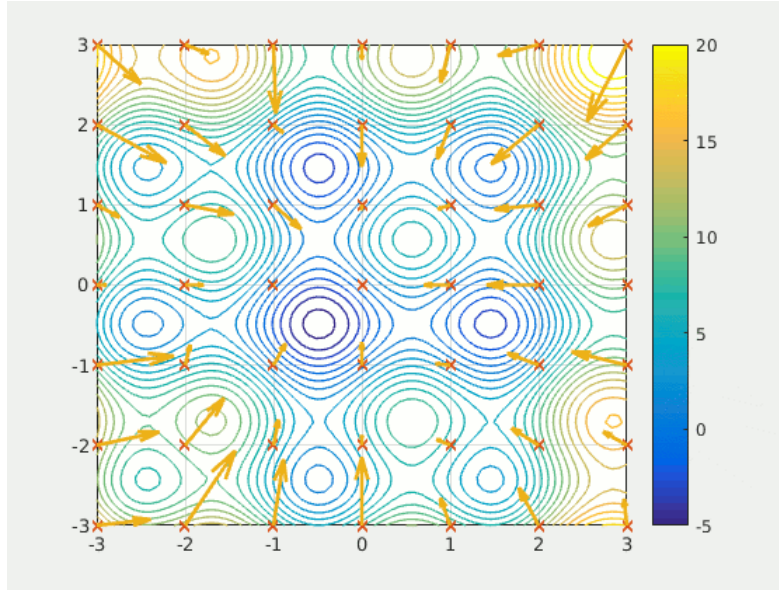


Figura 2: Convergência de partículas num exemplo ilustrativo de utilização do algoritmo PSO.

em todas as manobras que foram descritas na seção anterior. Essa estimativa retorna valores de tempo de voo de 0,55, 8,67 e 0,84 meses para as manobras 1, 2 e 3, respectivamente. Assim, foi decidido utilizar os seguintes *upper* e *lower bounds* como os demonstrados na Tabela 1.

Tabela 1: Upper e Lower Bounds de cada uma das incógnitas do PSO.

	Âng A (rad)	Âng B (rad)	Âng C (rad)	Âng D (rad)	Nro Dias 1	Nro Dias 2	Nro Dias 3
Lower Bound	0	0	0	0	0	0	0
Upper Bound	2π	2π	2π	2π	60	360	60

Dessa forma, foi definida a dimensão do problema.

De acordo com [3], o algoritmo PSO e seus parâmetros devem ser escolhidos de maneira a balancear adequadamente a exploração do espaço de estados e afluência a um mínimo encontrado, a fim de evitar convergência prematura a um mínimo local e ainda assim assegurar uma boa taxa de convergência para o mínimo global.

Assim, o próximo passo foi definir os parâmetros ω , ϕ_p e ϕ_g , como descritos na seção anterior. Tomamos como base resultados empíricos que, conforme [6], resultam em boa convergência e exploração do espaço de soluções, resultando nos seguintes valores: $\omega = 0,9$, $\phi_p = 0,6$ e $\phi_g = 0,8$.

O tempo de execução da tarefa foi um limitante importante para definir os parâmetros de execução do software. Quanto maior a quantidade de partículas n que serão utilizadas, maior a chance de cobrir de maneira efetiva todo o espaço de estados que são abordados pelo problema, no entanto maior o poder computacional necessário. De maneira semelhante, o número de iterações i é relevante para que a partícula consiga explorar o espaço de estados suficientemente e que consiga convergir para o mínimo global.

Iterações iniciais do problema foram feitas com relativamente poucas partículas e poucas iterações, a saber $n = 50$ e $i = 100$. O tempo de execução foi pequeno (aproximadamente 10 segundos), no entanto, devido aos resultados imensamente díspares obtidos¹, foi-se decidido aumentar ambos os parâmetros para se obter resultados mais consistentes. Esses resultados foram descartados.

Optou-se, então, por fazer vários testes com $n = 500$ e $i = 200$. Os resultados foram mais consistentes, ou seja, retornavam valores próximos que sugeriam grandes, no sentido de importante, mínimos locais². Cada execução demorava aproximadamente 5 minutos. Assumiu-se que o maior valor encontrado para o mínimo da função custo era apenas um mínimo local e que o algoritmo eventualmente convergia para ele precipitadamente, provavelmente devido a uma falta de espalhamento de número de partículas por todo o espaço de estados ou devido a uma falta de iterações para permitir uma melhor exploração dos parâmetros.

Por fim, para averiguar a consistência do resultado de menor valor encontrado para o custo total da viagem, foi executado o programa para $n = 5000$ e $i = 2000$. O processo demorou aproximadamente 8 horas para ser completado. O resultado, no entanto, corroborou o resultado de menor custo obtido pelas execuções com menor n e menor i . Assim, foram utilizados os resultados encontrados por essa execução.

¹Tais disparidades dão indícios de que o problema apresenta vários mínimos locais que eram melhores ou piores explorados a depender da execução

²Grandes mínimos locais são bons candidatos para mínimo global da função. De forma geral, quanto maior for a frequência de repetição de um valor para várias execuções, maior será a probabilidade dele ser o mínimo global

3 Resultados

A Tabela 2 demonstra os resultados que foram obtidos nas diversas tentativas de minimização do custo total envolvido na trajetória estudada através do algoritmo de otimização utilizado. Nesta, temos expressa vários valores para o custo total, que apresenta-se diferente mesmo para o mesmo número de iterações. Isto deve-se ao fato de que são mínimos locais e o algoritmo da forma como é concebido não garante um mínimo global, mas sim um local para o tempo (quantidade de iterações) que tem disponível para avaliar todo o espaço amostral.

Nesse contexto, a Tabela 2 mostra as características de posicionamento de cada um dos 4 pontos, em um caráter geral, para cada uma das execuções do algoritmo, bem como o tempo de voo para cada arco de cônica colada. A soma destes nos dá o tempo total de voo.

Tabela 2: Resultados obtidos de diversas iterações do programa de otimização.

Custo Total (km/s)	Âng A (rad)	Âng B (rad)	Âng C (rad)	Âng D (rad)	Nro Dias 1	Nro Dias 2	Nro Dias 3	Nro Partí- culas	Nro Itera- ções
7.3540	2.6447	0.0000	4.9218	1.7212	3.11	260.97	21.45	500	200
7.3318	2.6265	0.0000	4.6822	1.5406	3.11	261.03	26.03	500	200
5.6547	2.6258	0.0000	3.0408	0.8367	3.26	260.91	2.29	500	200
5.5044	2.6292	0.0000	3.0095	0.8299	3.09	261.96	2.28	500	200
7.2284	2.6227	0.0000	0.0000	3.1418	3.09	261.29	60.00	500	200
5.5044	2.6280	0.0000	3.0095	0.8369	3.09	261.96	2.28	500	200
5.5037	2.6147	6.2832	3.0095	0.8353	3.09	261.96	2.28	5000	2000

Dado os resultados expostos acima, temos que a trajetória mais otimizada encontrada foi a de custo $\Delta v = 5.5037 \text{ km/s}$, caracterizada pelos pontos A, B, C e D conforme descrito na seção Metodologias e exemplificados pela Figura 1, mas dotados das respectivas coordenadas angulares presentes na Tabela 2 com relação à direção da trajetória da Terra em relação ao Sol, tomados no plano da órbita. Desta forma, os vetores posição dos supracitados pontos, em relação aos respectivos planetas e com suas magnitudes dadas em km , são

$$\vec{r}_{A,Terra} = (-6.06, 3.52, 0)$$

$$\vec{r}_{B,Terra} = (871.95, 12.81, 0)$$

$$\vec{r}_{C,Marte} = (-538.59, 71.56, 0)$$

$$\vec{r}_{D,Marte} = (2.96, -3.27, 0)$$

onde as velocidades referentes a cada ponto foram as apresentadas na Tabela 4.

Tendo os vetores velocidade antes e após o impulso de mudança de órbita e os respectivos vetores velocidade, podemos definir as características da órbita (elementos orbitais), que, por sua vez, estão expostos na Tabela 3.

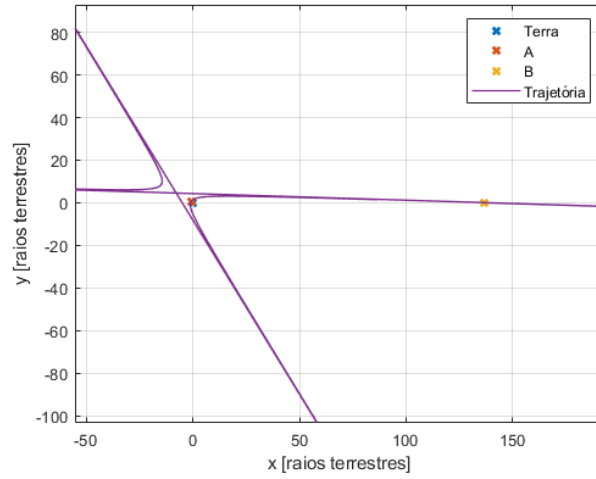
Tabela 3: Caracterização dos trechos de cônicas coladas para a trajetória ótima encontrada

Órbita	AB	BC	CD
Energia [km^2/s^2]	3.8852	-351.5353	3.4969
Momento linear (\vec{h}) [km^2/s]	(0,0,7.7254)e04	(0,0,4.8969)e09	(0,0,-2.2617)e04
Semieixo maior (a) [km]	-5.1294e04	1.8880e08	-6.979e03
Excentricidade (e)	1.1366	0.2078	1.725
Rotação da órbita (ϕ) [rad]	5.7569	1.6263	2.0425

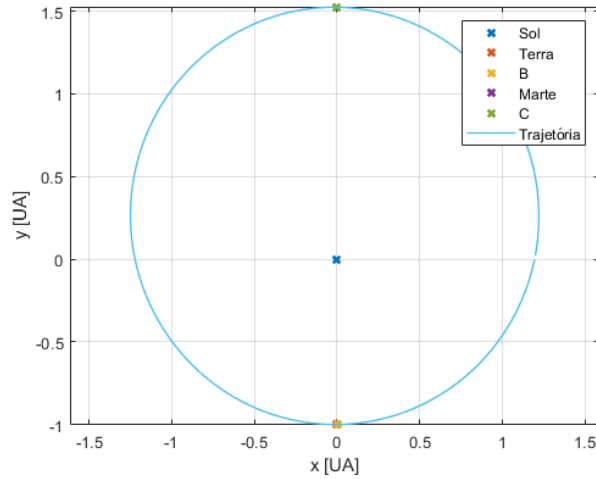
Tabela 4: Caracterização dos pontos relevantes para a trajetória ótima encontrada

Ponto	A	B	C	D
Referencial	Terra	Sol	Sol	Marte
$V_{chegada}$	7.5415	32.7336	2.6726	5.1336
V_{saida}	11.0235	32.7342	2.6741	3.1113
ΔV	3.4820	0.0007	0.0015	2.0223

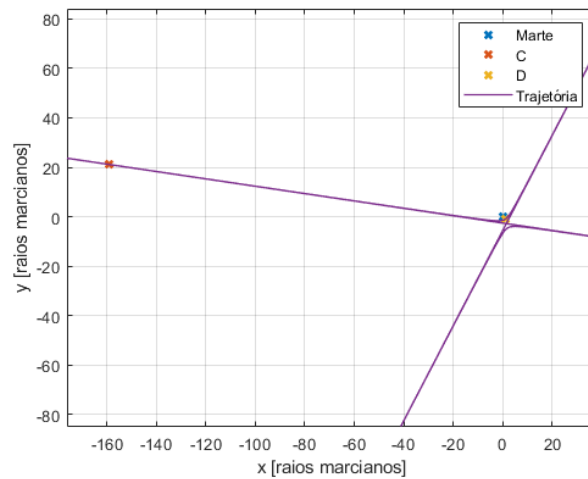
Assim, as trajetórias resultantes são as apresentadas na Figura 3 e repetidas com melhor dimensionamento na Figura 4 para melhor visualização da trajetória nas proximidades do planeta. Note a presença das assíntotas características das trajetórias hiperbólicas, que não fazem parte da órbita em si, mas foram colocadas para fins ilustrativos.



(a) Trajetória de escape da Terra



(b) Trajetória de viagem no Sistema Solar



(c) Trajetória de captura gravitacional por Marte

Figura 3: Arcos de cônica que constituem a transferência interplanetária proposta

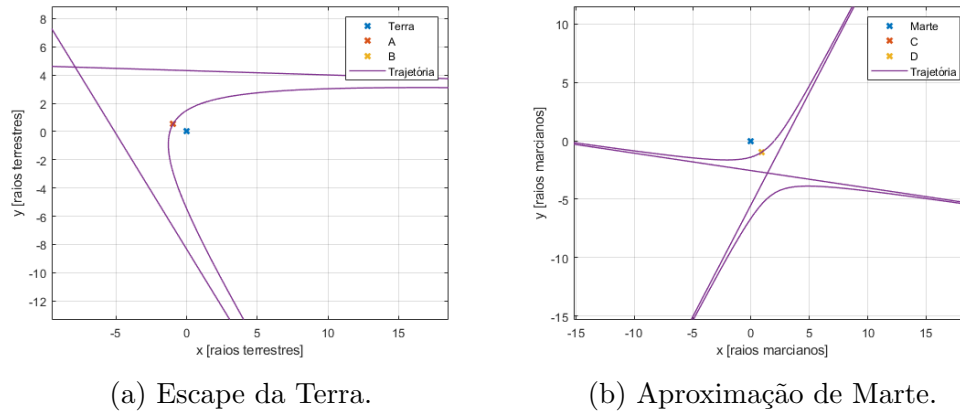


Figura 4: Trajetórias hiperbólicas de excesso com omissão do ponto de escape e de captura.

4 Análises

4.1 Comparação com a literatura

A Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço (NASA) dos Estados Unidos possui um [site](#), o qual oferece uma ferramenta que busca trajetórias espaciais. Nesta ferramenta, é possível inserir o destino e a janela de lançamento de interesse e, com base nessas informações, o programa resulta vários dados interessantes, dentre eles o tempo de duração para cada trajetória que cumpre o percurso, como também os incrementos e velocidades totais do percurso. O algoritmo envolvido utiliza o método do problema de Lambert, usando uma data de lançamento da Terra e uma duração de transferência até o objeto de destino, e assim determinando a órbita que conecta os dois corpos. Em outras palavras, as informações geradas pelo programa condizem com o incremento de velocidade necessário para que a espaçonave entre na trajetória de transferência e qual a duração dessa viagem. Tais informações se tornam bastante relevantes para verificação dos dados encontrados neste trabalho. Contudo, é importante ressaltar que tais dados obtidos no site da NASA servem apenas para um levantamento de dados preliminares ou mesmo suposições iniciais para futuros projetos, já que o programa assume que pequenos corpos podem ter massa-zero e desconsidera outras perturbações.

Dessa forma, inseriu-se no programa da NASA os seguintes parâmetros:

- Ano de lançamento 2010 - 2040;
- 300 dias de duração da trajetória de transferência;
- 8 km/s sendo a variação máxima de velocidade total.

Data de lançamento da Terra	Data de chegada em Marte	Duração da trajetória de transferência (dias)	Energia necessária para sair SOI da Terra	Incremento de velocidade para entrar na trajetória de transferência (km/s)	Variação de velocidade total requerida (km/s)
Nov-29-2018	Aug-28-2019	272	10.9	3.71	4.72
Dec-06-2013	Sep-04-2014	272	10.1	3.68	4.73
Oct-30-2011	Jul-28-2012	272	9.2	3.63	4.75
Nov-02-2024	Jul-16-2025	256	24	4.27	4.87
Oct-11-2039	Jun-23-2040	256	21.9	4.18	4.84
Nov-24-2026	Aug-07-2027	256	13.8	3.84	4.68
Dec-01-2011	Aug-13-2012	256	11.7	3.75	4.84

Tabela 5: Valores de duração trajetória próximas ao calculado neste trabalho

Data de lançamento da Terra	Data de chegada em Marte	Duração da trajetória de transferência (dias)	Energia necessária para sair SOI da Terra	Incremento de velocidade para entrar na trajetória de transferência (km/s)	Variação de velocidade total requerida (km/s)
May-19-2033	Sep-08-2033	112	32.3	4.6	7.32
Mar-11-2031	Aug-02-2031	144	28.7	4.46	7.28
Oct-12-2022	Mar-05-2023	144	42.7	5.02	7.28
Aug-19-2020	Dec-09-2020	112	31.7	4.58	7.22
Dec-17-2011	Jul-12-2012	208	19.1	4.06	5.71
May-03-2033	Sep-24-2033	144	15	3.89	5.59
Dec-31-2028	Jul-27-2029	208	12.9	3.8	5.58
Nov-02-2024	May-29-2025	208	24.8	4.3	5.58
Aug-19-2020	Jan-10-2021	144	25.6	4.33	5.55

Tabela 6: Valores de variação de velocidade total próximas ao calculado neste trabalho

O programa gerou um total de 100 trajetórias possíveis, e dentro dessas possíveis buscou-se valores próximos encontrados ao produzir esse trabalho, compiladas nas Tabelas 5 e 6.

A ferramenta do site da NASA também possibilita uma animação de como seria realizado a trajetória de cada uma das possíveis trajetórias inicialmente oferecidas. A partir dessa animação obtivemos as Figuras 5 e 6, as quais facilitam a compreensão de onde seriam os pontos de lançamento e interceptação do objeto de estudo. É interessante notar que, quanto maior a variação de velocidade durante a transferência, menor é o arco da trajetória.

4.2 Discussões e propostas de melhoria

No mais, temos que os resultados para custo encontrados neste trabalho condizem com a literatura [5] para as órbitas a que se propõem, como pode-se ver nas Tabelas 7 e 8, que indicam custos típicos, tanto para a transferência de uma órbita LEO

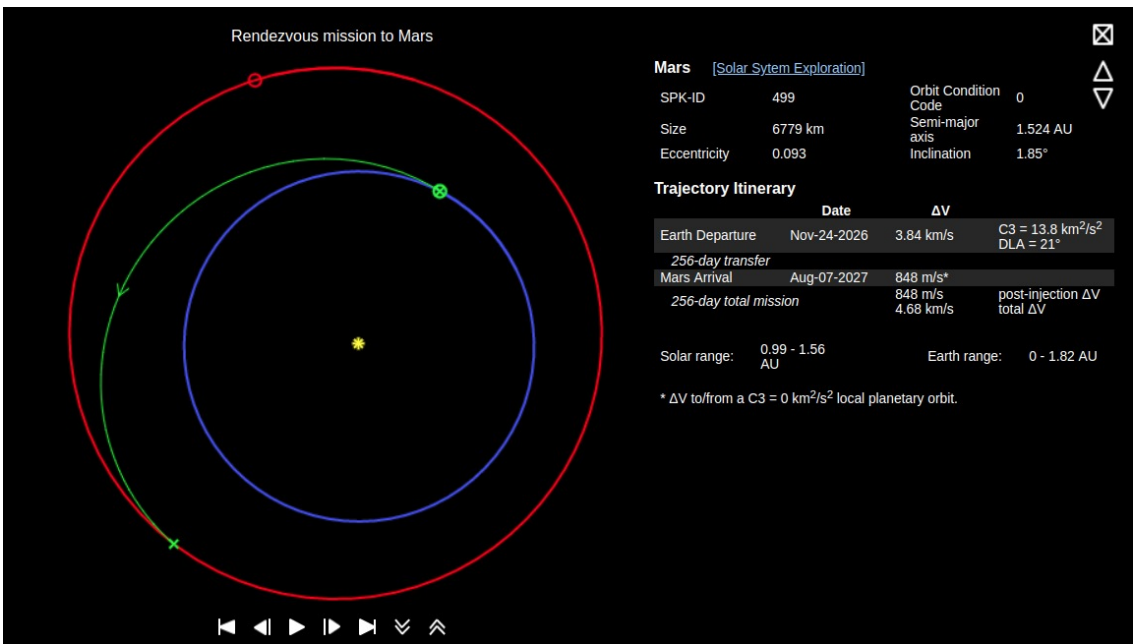


Figura 5: Trajetória possível com a duração mais próxima encontrada no trabalho.

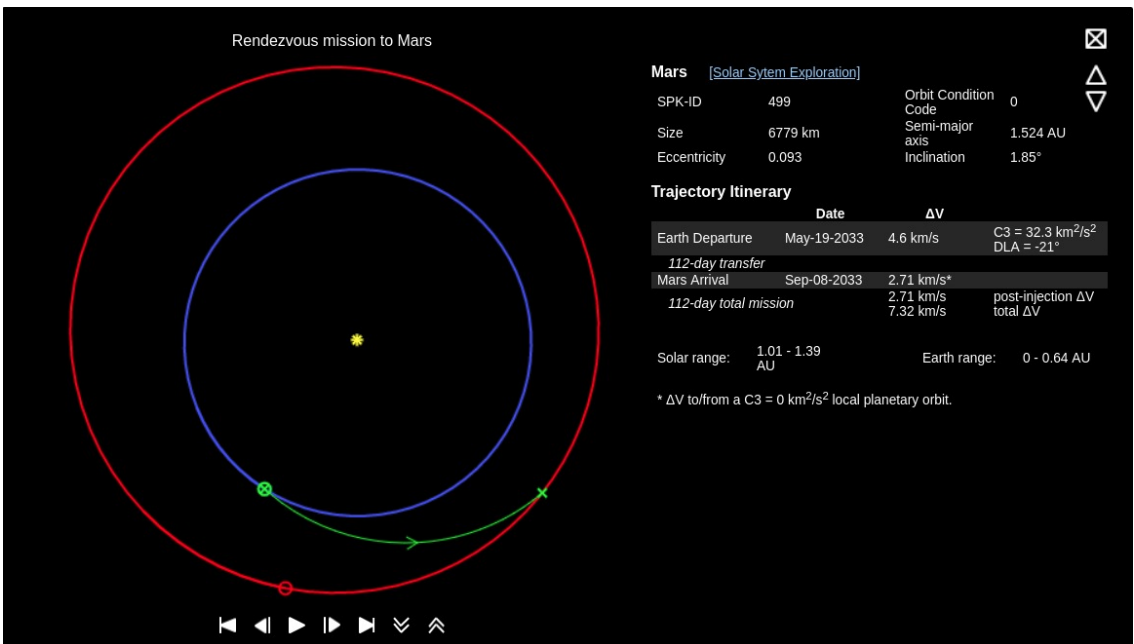


Figura 6: Possível trajetória com a maior variação de velocidade similar a encontrada neste trabalho.

From	To	Delta-v (km/s)
LEO	Mars transfer orbit	4.3 ^[6] ("typical", not minimal)
Earth escape velocity (C3=0)	Mars transfer orbit	0.6 ^[7]
Mars transfer orbit	Mars capture orbit	0.9 ^[7]
Mars capture orbit	Deimos transfer orbit	0.2 ^[7]
Deimos transfer orbit	Deimos surface	0.7 ^[7]
Deimos transfer orbit	Phobos transfer orbit	0.3 ^[7]
Phobos transfer orbit	Phobos surface	0.5 ^[7]
Mars capture orbit	Low Mars orbit	1.4 ^[7]
Low Mars orbit	Mars surface	4.1 ^[7]
Earth–Moon Lagrange point 2	Mars transfer orbit	<1.0 ^[6]
Mars transfer orbit	Low Mars orbit	2.7 ^[6] (not minimal)
Earth escape velocity (C3=0)	Closest NEO ^[8]	0.8–2.0

Figura 7: Custos clássicos envolvidos em viagens interplanetárias.

para a órbita de transferência de Marte quando para a órbita de captura por Marte, competitivos com os encontrados, não só para a trajetória de menor custo encontrada, como para várias outras trajetórias possíveis apontadas como mínimo locais e retornadas pelo algoritmo de otimização com possíveis trajetórias. De uma maneira geral, o custo otimizado apontado para uma transferência interplanetária para Marte, partindo de uma órbita LEO, é de 3.6 km/s (Tabela 8), sendo $4.3 + 0.9 = 5.2 \text{ km/s}$ um valor típico para uma órbita de transferência para Marte com finalização em órbita de captura marciana (Tabela 7), mostrando possíveis otimizações e considerações a serem feitas, sem descartar a sua coerência, para reduzir o valor de aproximadamente 5.5 km/s encontrados neste estudo.

As propostas de melhorias giram em torno de considerar órbitas com inclinação entre os seus planos, tanto os característicos dos planetas envolvidos como os das órbitas de transferência, o que pode abrir novas oportunidades de otimização e consequente minimização do custo. Outro fator prático seria explorar melhor o conjunto de soluções aumentando o número de iterações, o espaço amostral e a quantidade de partículas associadas ao método de otimização utilizado.

Destination	Orbital radius (AU)	Δv to enter Hohmann orbit from Earth's orbit	v exiting LEO	Δv from LEO
Sun	0	29.8	31.7	24.0
Mercury	0.39	7.5	13.3	5.5
Venus	0.72	2.5	11.2	3.5
Mars	1.52	2.9	11.3	3.6
Jupiter	5.2	8.8	14.0	6.3
Saturn	9.54	10.3	15.0	7.3
Uranus	19.19	11.3	15.7	8.0
Neptune	30.07	11.7	16.0	8.2
Pluto	29.66 (perih.)	11.6	16.0	8.2
Infinity	∞	12.3	16.5	8.8

Figura 8: Custos generalizados envolvidos em transferências interplanetárias em função do destino.

4.3 Análise dos dados obtidos

Temos que os dados obtidos neste trabalho foram, como dito acima, condizentes com o esperado, tanto em valores típicos como em formato da trajetória, quanto às cônicas envolvidas, e ao tempo de duração da transferência. Observa-se pela Tabela 3 que as trajetórias de saída e chegada, de Terra e Marte, respectivamente, são naturalmente hipérboles, advindas da análise de minimização feitas, e não de consideração alguma no método.

O algoritmo mostrou-se tendencioso a minimizar o impulso associado ao escape da Terra, promovendo uma trajetória hiperbólica de excesso que naturalmente já o levava para fora do campo gravitacional e impulsionava a espaçonave à trajetória em torno do Sol praticamente com a velocidade remanescente do primeiro incremento de velocidade (relativo ao ponto A, para deixar a Terra).

Quanto à chegada em Marte, a mesma tendência se observa, ao ponto que o projeto de órbita faz com que a espaçonave chegue nos arredores da esfera de influência do planeta com velocidade similar à dele, mas um pouco maior, promovendo uma captura gravitacional a partir de uma trajetória hiperbólica de aproximação que surge naturalmente. Tal abordagem nasce a partir da oportunidade de aproveitar a energia da órbita de transferência em torno do Sol para se aproximar do planeta na sua esfera de influência, reduzindo assim o impulso necessário para correção de órbita e colagem da última cônica.

5 Conclusão

Dada a importância do tema transferências interplanetárias para o contexto das faculdades de mecânica celeste e para a formação de engenheiros aeroespaciais, conclui-se com proveito o presente trabalho com a sensação de ter feito análises que não corromperam pelo simplicismo, mas que mostram-se dispostas a abraçar novas correções e otimizações que podem dar a luz a novos trabalhos, principalmente para turmas vindouras. A pesquisa bibliográfica para a realização das análises e estudo das metodologias para desenvolvimento do tema foi de certo enriquecedor e intrigaram a novos questionamentos a medida que respostas à dúvidas iam sendo desvendadas.

A margem que este trabalho abre para futuros estudos, consagrando-se como uma abordagem inicial a problemas de fato pertinentes para o ramo do aeroespço e fazendo pinceladas e retraduições em algumas áreas estudadas durante este ano na disciplina de Mecânica Orbital, pondera uma motivação para desenvolvimento de trabalhos que podem consistir iniciações científicas, trabalhos de conclusão de curso ou mesmo defesas de teses de pós-graduação.

Quanto à utilização do algoritmo de otimização conhecido como *Algoritmo da Migração dos Pássaros* ou, oficialmente *Particle Swarm Optimization* (Otimização do Enxame de Partículas, em tradução livre), obteve-se resultados interessantes e pertinentes quando comparado aos valores clássicos esperados pela literatura, promovendo, como discutido, gratificação de estar no caminho certo, mas sem deixar de lado a visão de que há novas formas de se abordar o problema para buscar resultados cada vez melhores.

O problema de Lambert, por fim, é uma boa oportunidade de propor exercícios para revalidar resultados clássicos, ao passo que também se faz louvável quanto à possibilidade de implementar as nuances e técnicas abordadas em sala de aula para ver o resultado na prática, mas sem sair da esfera tangível que o problema de 2 corpos nos proporciona. As análises feitas a partir das metodologias propostas podem ser bem vistas tanto sob a perspectiva numérica quanto a analítica, dando vazão a diversas abordagens, como pode-se ver com a recorrência da escolha deste tema nos demais trabalhos de conclusão da disciplina de MVO-41, Mecânica Orbital, pelos diversos grupos.

Referências

- [1] OLDENHUIS, R. *Robust solver for Lambert's orbital-boundary value problem*. In: MathWorks: Accelerating the pace of engineering and science. The MathWorks, Inc., 2019. Disponível [aqui](#). Acesso em: 11 jun. 2019.
- [2] CASTRO, F.M.M.; SILVA, F.C; SILVA, M.C *Transferência Terra-Marte utilizando a metodologia de patched-conics*. Trabalho da disciplina MVO-41 - Mecânica Orbital. Departamento de Engenharia Aeronáutica e Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2019.
- [3] SHI, Y.; EBERHART, R.C. *A modified particle swarm optimizer*. Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation. pp. 69–73. 1998.
- [4] PARTICLE swarm optimization. In: Wikipedia, the free encyclopedia. Wikimedia, 2019. Disponível [aqui](#). Acesso em: 20 jun. 2019.
- [5] DELTA-V budget. In: WIKIPÉDIA: the free encyclopedia. Wikimedia, 2019. Disponível [aqui](#). Acesso em: 20 jun. 2019.
- [6] MÁXIMO, M. *Métodos de Otimização Baseados em População*. Apresentação de slides da disciplina de Inteligência Artificial para Robótica Móvel. Departamento de Engenharia da Computação. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos-SP, 2019.
- [7] PRUSSING, J.; E. CONWAY, B. A. *Orbital Mechanics*. 2nd Edition, pág. 68-71. Oxford University Press, 2012.
- [8] CURTIS, H. D. *Orbital Mechanics: For Engineering Students*. Elsevier Butterworth-Heinemann. Oxford, 2005.