

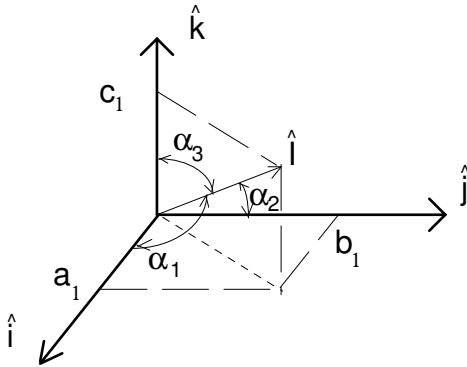
Capítulo 1 - Parametrização da Atitude

É possível definir a atitude angular relativa entre dois sistemas de eixos cartesianos através de parâmetros distintos. Se o espaço varrido pelo sistema cartesiano for euclidiano de ordem n , então o número mínimo de parâmetros necessários para se definir a atitude angular entre os dois sistemas de eixos é $m = n(n-1)/2$. Assim, no espaço 3-D são necessários 3 parâmetros para se definir a atitude angular. Conforme será visto em seguida, nem sempre é interessante o emprego do número mínimo de parâmetros para a computação da atitude angular. Verifiquemos então as formas mais populares de parametrização (i.e., representação), a saber:

1. Matriz de cossenos diretores
2. Ângulos de Euler
3. Quatérnions
4. Parâmetros de Rodriguez (ou parâmetros de Cayley, ou vetor de Gibbs)
5. Vetor de Euler

1.1 - Matriz de cossenos diretores (DCM)

Analisemos a transformação da representação de um vetor do sistema V para o sistema U, respectivamente descritos por suas bases ortonormais: $V(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) \rightarrow U(\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$



Descrevamos o vetor unitário \hat{I} no sistema U como um vetor no sistema V:

$$\hat{I} = a_1 \hat{i} + b_1 \hat{j} + c_1 \hat{k} \quad (1.1)$$

O que vem a ser a grandeza a_1 ? Para responder a esta pergunta, façamos o produto escalar de (1.1) com \hat{i} :

$$\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{i}} = a_1\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{i}} + b_1\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{i}} + c_1\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{i}} \therefore a_1 = \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{i}} = \cos \alpha_1$$

Se fizermos o produto escalar de (1.1) com $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$, verificaremos que, de forma análoga:

$$b_1 = \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{j}} \quad \text{e} \quad c_1 = \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{k}}$$

Desta forma, é possível escrever (1.1) em função da base de V como:

$$\hat{\mathbf{I}} = [\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{i}} \quad \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{j}} \quad \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{k}}] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

De forma análoga, é possível tratar os vetores unitários $\hat{\mathbf{J}}$ e $\hat{\mathbf{K}}$ e obter expressões semelhantes. Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}} \\ \hat{\mathbf{J}} \\ \hat{\mathbf{K}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_U^V} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix}$$

Todo vetor descrito no sistema $V(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ possui componentes na base do sistema $U(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{K}})$. Uma vez conhecida a transformação do sistema $V(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ para o sistema $U(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{K}})$, é possível passar da representação de qualquer vetor descrito na base do sistema V para a aquela segundo a base do sistema U.

Notação: \mathbf{R}_V é a matriz coluna cujos componentes são a decomposição do vetor \mathbf{R} na base do sistema V; \mathbf{R}_U , por sua vez, na base do sistema U. Assim, usa-se a notação:

$$\mathbf{R}_U = \mathbf{D}_U^V \mathbf{R}_V$$

A matriz \mathbf{D}_U^V é uma matriz ortogonal, i.e., $\mathbf{D}_U^V (\mathbf{D}_U^V)^T = \mathbf{I}$

$$\begin{cases} (\mathbf{D}_U^V)^T = \mathbf{D}_V^U \\ (\mathbf{D}_U^V)^T = (\mathbf{D}_U^V)^{-1} \end{cases}$$

A matriz \mathbf{D}_U^V é chamada de *matriz de cossenos diretores* (DCM) ou matriz de transformação.

Equação diferencial para a computação da DCM:

Suponhamos que nós saibamos a velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{uv}$, a qual indica a velocidade de rotação do sistema U com relação ao sistema V. Como poderemos computar a matriz de transformação entre os dois sistemas?

Seja o vetor posição \mathbf{R} cuja representação no sistema V, \mathbf{R}_v , é invariante. As representações nos sistemas U e V, respectivamente, relacionam-se por:

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{D}_v^u \mathbf{R}_u \quad (1.3)$$

Seja $\overset{u}{\dot{\mathbf{R}}}_u = \dot{\mathbf{R}}_u$ o vetor de variação temporal de \mathbf{R} conforme observado do sistema de referência U e representado neste mesmo sistema. De forma análoga, há $\overset{v}{\dot{\mathbf{R}}}_v = \dot{\mathbf{R}}_v$ em relação ao sistema V. Derivemos a expressão (1.3) no tempo:

$$\dot{\mathbf{R}}_v = \mathbf{0} = \mathbf{D}_v^u \dot{\mathbf{R}}_u + \dot{\mathbf{D}}_v^u \mathbf{R}_u \Rightarrow \dot{\mathbf{D}}_v^u \mathbf{R}_u = -\mathbf{D}_v^u \dot{\mathbf{R}}_u \quad (1.4)$$

Do teorema do transporte da mecânica, que versa sobre derivadas temporais de vetores em sistemas de coordenadas girantes:

$$\overset{v}{\dot{\mathbf{R}}} = \mathbf{0} = \overset{u}{\dot{\mathbf{R}}} + \boldsymbol{\omega}^{uv} \times \mathbf{R} \Rightarrow \overset{u}{\dot{\mathbf{R}}} = -(\boldsymbol{\omega}^{uv} \times \mathbf{R}) \Rightarrow \overset{u}{\dot{\mathbf{R}}}_u = -(\boldsymbol{\omega}_u^{uv} \times \mathbf{R}_u) \quad (1.5)$$

Então, substituindo (1.5) em (1.4):

$$\dot{\mathbf{D}}_v^u \mathbf{R}_u = \mathbf{D}_v^u (\boldsymbol{\omega}_u^{uv} \times \mathbf{R}_u) \quad (1.6)$$

sendo

$$\boldsymbol{\omega}_u^{uv} \times \mathbf{R}_u = \begin{bmatrix} R_{zu} \omega_{yu}^{uv} - R_{yu} \omega_{zu}^{uv} \\ R_{xu} \omega_{zu}^{uv} - R_{zu} \omega_{xu}^{uv} \\ R_{yu} \omega_{xu}^{uv} - R_{xu} \omega_{yu}^{uv} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}_u^{uv} \mathbf{R}_u \quad (\#)$$

em que o produto vetorial é representado pela matriz antisimétrica:

$$\boldsymbol{\Omega}_u^{uv} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zu}^{uv} & \omega_{yu}^{uv} \\ \omega_{zu}^{uv} & 0 & -\omega_{xu}^{uv} \\ -\omega_{yu}^{uv} & \omega_{xu}^{uv} & 0 \end{bmatrix}$$

onde $\omega_{xu}^{uv}, \omega_{yu}^{uv}, \omega_{zu}^{uv}$ são os componentes de velocidade angular $\omega = \omega^{uv}$ do sistema U em relação a V medidas no sistema U. A equação (1.6) deve valer para qualquer R_u e tem-se então que:

$$\dot{D}_v^u = D_v^u \Omega_u^{uv} \quad (1.7)$$

Nota-se que a transformação da atitude angular através da DCM se baseia em 9 parâmetros. É claro que existe uma redundância de parâmetros (somente 3 são requeridos). As características desta parametrização são como a seguir:

1. 9 parâmetros
2. Não há problemas com singularidades, do tipo divisão 0/0
3. Nem a DCM e nem a equação diferencial associada à sua computação exigem a computação de funções trigonométricas

Entretanto, girômetros medem a velocidade angular do sistema girante U em relação ao sistema inercial I – isto é, medem ω_u^{ui} e a equação acima requer o conhecimento da velocidade angular $\omega = \omega_u^{uv} = \omega_u^{ui} - D_u^v \omega_v^{vi}$, em que o último termo demanda a transformação de ω_v^{vi} da representação em S_v para a em S_u . Alternativamente à equação (1.7), é possível derivar uma equação diferencial para a DCM que utilize diretamente ambas as velocidades angulares ω_u^{ui} e ω_v^{vi} sem transformar suas respectivas representações. Assim, é sabido que:

$$\Omega_u^{uv} = \Omega_u^{ui} + \Omega_u^{iv}$$

Substituindo em (1.7):

$$\dot{D}_v^u = D_v^u \Omega_u^{uv} = D_v^u (\Omega_u^{ui} + \Omega_u^{iv}) = D_v^u \Omega_u^{ui} + D_v^u \Omega_u^{iv} \quad (1.8)$$

Entretanto:

$$\Omega_u^{iv} R_u = D_u^v (\Omega_v^{iv} R_v) = D_u^v \Omega_v^{iv} (D_v^u R_u) \Rightarrow \Omega_u^{iv} = D_u^v \Omega_v^{iv} D_v^u \quad (1.9)$$

Então, substituindo em (1.8):

$$\dot{D}_v^u = D_v^u \Omega_u^{ui} + D_v^u \Omega_u^{iv} = D_v^u \Omega_u^{ui} + D_v^u D_u^v \Omega_v^{iv} D_v^u$$

resulta:

$$\dot{D}_v^u = D_v^u \Omega_u^{ui} - \Omega_v^{vi} D_v^u \quad (1.10)$$

Esta equação diferencial vai ser empregada no capítulo 5, onde S_u representa o sistema do corpo ao qual estão afixados os girômetros, S_v é o sistema de referência da navegação, o qual é tangente à Terra no local em que se encontra o veículo e que gira lentamente em relação ao sistema inercial S_i . Como a manutenção da referência tangente à Terra depende do conhecimento acurado da posição do veículo e de sua velocidade terrestre, a expressão demonstra o acoplamento existente entre navegação e determinação de atitude. A vantagem de (1.10) sobre (1.7) é que as medidas dos girômetros em Ω_u^{ui} e a solução da navegação utilizada em Ω_v^{vi} podem ser empregadas de forma direta, sem transformações entre representações; em especial, Ω_v^{vi} é de lenta variação e não requer atualização frequente – reduzindo a necessidade de computar a solução de navegação com a mesma alta frequência com que são amostradas as medidas girométricas e motivando a investigação de algoritmos de determinação de atitude e navegação com múltiplas taxas de amostragem.

1.2 - Ângulos de Euler

Euler provou que com 3 rotações em torno de 3 eixos diferentes é possível trazer um sistema de coordenadas cartesianas para qualquer outro sistema de coordenadas desejado (lembramos que o número de parâmetros necessários para se descrever a atitude angular entre 2 sistemas de coordenadas é 3).

Se as rotações ocorrem em torno de um eixo instantâneo do sistema de coordenadas que gira, este ângulo de rotação se chama *ângulo de Euler*

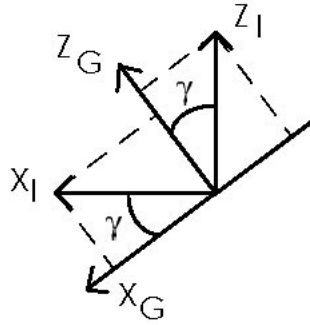
Se nos restringirmos a sistemas dextrógiros, então existem 12 combinações possíveis para a sequência de ângulos de Euler para a transformação entre dois sistemas de coordenadas. As possibilidades são:

Grupo I (com repetição de eixos)	Grupo II (sem repetição de eixos)
1-2-1	1-2-3
1-3-1	1-3-2
2-1-2	2-1-3
2-3-2	3-1-2
3-1-3	2-3-1
3-2-3	3-2-1

1.2.1 - Computação da DCM a partir dos ângulos de Euler

1.2.1.1 - O método clássico

Suponhamos que uma sequência de rotações seja como mostrado abaixo:



$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ \gamma & \beta & -\alpha \end{matrix} \rightarrow$$

isto é, $I \xrightarrow{\gamma} G \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{-\alpha} V$

onde :

$$X_G = X_I \cos \gamma - Z_I \sin \gamma$$

$$Y_G = Y_I$$

$$Z_G = X_I \sin \gamma + Z_I \cos \gamma$$

$$\therefore \mathbf{D}_G^I = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

De forma análoga obtêm-se as seguintes matrizes DCM:

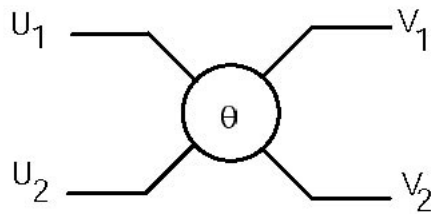
$$\mathbf{D}_B^G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}_V^B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{D}_V^I = \mathbf{D}_V^B \cdot \mathbf{D}_B^G \cdot \mathbf{D}_G^I = \begin{bmatrix} c\gamma.c\alpha - s\alpha.s\beta.s\gamma & -s\alpha.c\beta & -c\alpha.s\gamma - s\alpha.s\beta.c\gamma \\ s\alpha.c\gamma + c\alpha.s\beta.s\gamma & c\alpha.c\beta & -s\alpha.s\gamma + c\alpha.s\beta.c\gamma \\ c\beta.s\gamma & -s\beta & c\beta.c\gamma \end{bmatrix}$$

1.2.1.2 - Emprêgo do Piograma

Vide: R.L.Pio, "Euler Angle Transformations", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.AC-11, n.4, Oct. 66, pp. 707-715.

Regras de formação do piograma:



Regra 1:

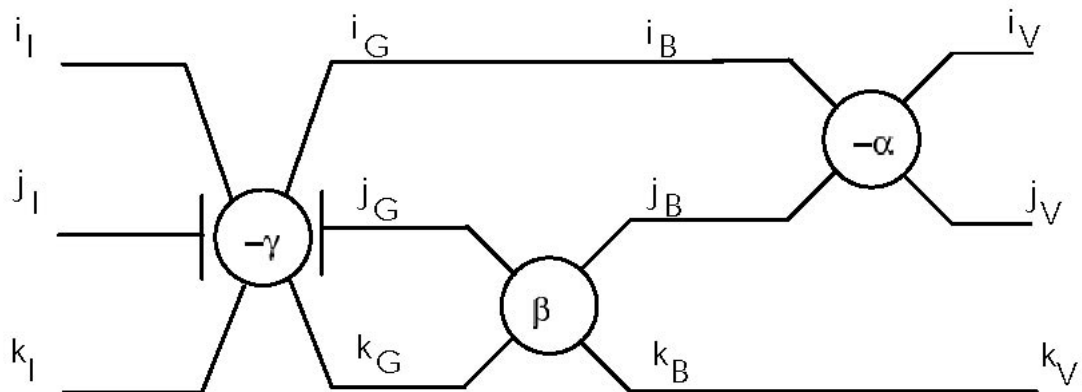
- 1) $U_1 \rightarrow V_1$ $\cos\theta$ 2) $U_1 \rightarrow V_2$ $-\sin\theta$
- 3) $U_2 \rightarrow V_1$ $\sin\theta$ 4) $U_2 \rightarrow V_2$ $\cos\theta$

Regra 2:

Quando a rotação fôr em torno do eixo 2, é necessário inverter o sinal da rotação.

Regra 3:

Desenhe o piograma. Por exemplo, no caso anterior o piograma correspondente é:



Regra 4:

O número de termos em cada elemento da matriz corresponde ao número de caminhos distintos no piograma, entre o vetor da base do sistema inicial e o vetor da base do sistema final, vetores estes correspondentes ao elemento da matriz:

$$\mathbf{D}_V^I = (\text{saídas :}) \left\{ \begin{array}{c} \text{(entradas)} \\ \begin{array}{c} i_l \quad j_l \quad k_l \\ \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \right.$$

1.2.2 - A equação diferencial para computação dos ângulos de Euler

1.2.2.1 - Derivação da equação pelo método clássico:

Voltemos ao exemplo de rotação anterior

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ \gamma & \beta & -\alpha \end{array} \\ \hline \text{isto é, } I \xrightarrow{\gamma} G \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{-\alpha} V \end{array}$$

Suponhamos que, momentaneamente, sejam adicionados incrementos angulares a cada um dos ângulos, isto é, passemos a enxergar os novos ângulos de Euler como:

$$\alpha' = \alpha + \Delta\alpha \quad \beta' = \beta + \Delta\beta \quad \gamma' = \gamma + \Delta\gamma$$

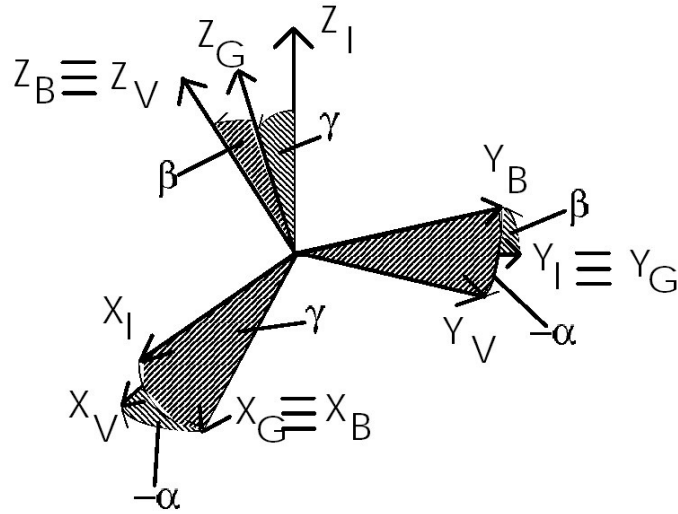
Como giram e se orientam agora os eixos do sistema V como consequência deste incrementos angulares nos ângulos de Euler?

NOTA: Devido à natureza infinitesimal dos incrementos, é possível aproximar que o resultado final desta rotação perturbada é uma mudança infinitesimal na orientação angular dos eixos. Portanto, a sequência de ocorrência de perturbações se torna irrelevante.

Como visto na nota acima, é possível considerar cada uma das rotações incrementais como uma grandeza vetorial. Seja, então, o vetor rotação incremental representado no sistema em que a rotação ocorreu e transformemos cada vetor para a base do sistema V. Se denotarmos o vetor rotação incremental por $\Delta\theta$, podemos então escrever:

$$\Delta\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta\alpha \end{bmatrix} + \mathbf{D}_V^B \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D}_V^G \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

O significado físico da expressão acima é descrito pelo esquema a seguir:



Seqüência de rotações por ângulos de Euler

Substituamos as matrizes de transformação na equação anterior, resultando em:

$$\Delta\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\alpha' & -s\alpha' & 0 \\ s\alpha' & c\alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\alpha' & -c\beta'.s\alpha' & -s\beta'.s\alpha' \\ s\alpha' & c\beta'.c\alpha' & s\beta'.c\alpha' \\ 0 & -s\beta' & c\beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

\therefore

$$\Delta\theta = \begin{bmatrix} c\alpha'.\Delta\beta - c\beta'.s\alpha'.\Delta\gamma \\ s\alpha'.\Delta\beta + c\beta'.c\alpha'.\Delta\gamma \\ -\Delta\alpha - s\beta'.\Delta\gamma \end{bmatrix}$$

Para achar a velocidade angular do sistema V quando os incrementos angulares $\Delta\alpha$ $\Delta\beta$ $\Delta\gamma$ variam no tempo (isto é, existem $\dot{\alpha}$ $\dot{\beta}$ $\dot{\gamma}$ não nulos), computemos o seguinte limite:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} c(\alpha + \Delta \alpha) \frac{\Delta \beta}{\Delta t} - c(\beta + \Delta \beta) \cdot s(\alpha + \Delta \alpha) \cdot \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \\ s(\alpha + \Delta \alpha) \frac{\Delta \beta}{\Delta t} + c(\beta + \Delta \beta) \cdot c(\alpha + \Delta \alpha) \cdot \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \\ -\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} - s(\beta + \Delta \beta) \cdot \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

\therefore

$$\begin{bmatrix} \omega_{xv} \\ \omega_{yv} \\ \omega_{zv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha \cdot \dot{\beta} - c\beta \cdot s\alpha \cdot \dot{\gamma} \\ s\alpha \cdot \dot{\beta} + c\beta \cdot c\alpha \cdot \dot{\gamma} \\ -\dot{\alpha} - s\beta \cdot \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Estamos interessados na relação inversa, isto é, dados ω_{xv} ω_{yv} ω_{zv} deseja-se obter $\dot{\alpha}$ $\dot{\beta}$ $\dot{\gamma}$. Isto não chega a ser um problema, pois temos três equações independentes e três incógnitas. Assim, a solução é como a seguir:

$$(a) \omega_{xv} = c\alpha \cdot \dot{\beta} - c\beta \cdot s\alpha \cdot \dot{\gamma} \quad (\times c\alpha)$$

$$(b) \omega_{yv} = s\alpha \cdot \dot{\beta} + c\beta \cdot c\alpha \cdot \dot{\gamma} \quad (\times s\alpha)$$

$$(c) \omega_{zv} = -\dot{\alpha} - s\beta \cdot \dot{\gamma}$$

Somando-se (a) e (b), respectivamente multiplicados pelos termos entre parênteses à direita, resulta em:

$$\dot{\beta} = \omega_{xv} c\alpha + \omega_{yv} s\alpha$$

Substituindo a equação acima em (a) resulta:

$$\omega_{xv} = \omega_{xv} \cdot c^2\alpha + \omega_{yv} \cdot s\alpha \cdot c\alpha - c\beta \cdot s\alpha \cdot \dot{\gamma}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{c\beta} (\omega_{yv} c\alpha - \omega_{xv} s\alpha)$$

E finalmente substituamos esta última expressão em (c), resultando em:

$$\dot{\alpha} = \tan\beta(\omega_{xv}s\alpha - \omega_{yv}c\alpha) - \omega_{zv}$$

Resumindo, a taxa de variação temporal dos ângulos de Euler pode ser obtida a partir das velocidades angulares expressas segundo a base do sistema V segundo:

$$\dot{\alpha} = \tan\beta(\omega_{xv}s\alpha - \omega_{yv}c\alpha) - \omega_{zv}$$

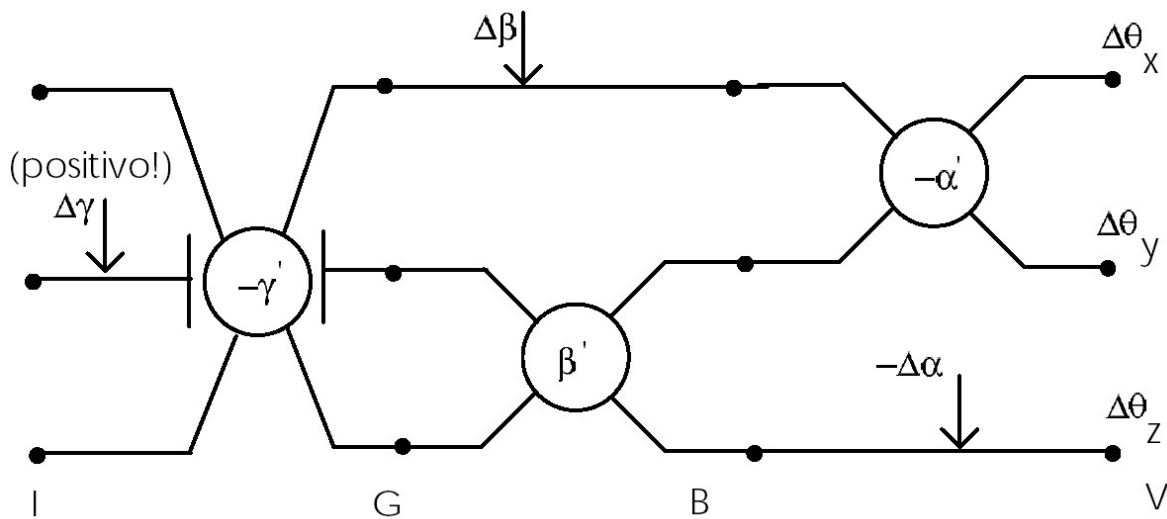
$$\dot{\beta} = \omega_{xv}c\alpha + \omega_{yv}s\alpha$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{c\beta}(\omega_{yv}c\alpha - \omega_{xv}s\alpha)$$

É óbvio que para cada seqüência de ângulos de Euler produz uma expressão diferente, enquanto que a expressão (1.7) continua única.

1.2.2.2 - Obtenção da equação pelo método do piograma

A equação de $\Delta\theta$ em função dos ângulos de Euler e dos incrementos angulares é possível obter facilmente através do piograma:



e a partir daí é possível aplicar as regras já vistas anteriormente.

Características da parametrização por ângulos de Euler:

- Somente 3 parâmetros
- Existência de singularidades

- Requer a computação de funções trigonométricas, tanto na descrição da DCM quanto na solução da equação diferencial dos ângulos de Euler, quando o sistema de coordenadas está sujeito a movimento com velocidade angular.

1.3 - Quatérnions

1.3.1 - Álgebra de Quatérnions

O conceito de quatérnions foi desenvolvido por Hamilton em 1843. Sua definição é:

$$q = \lambda + i\rho_x + j\rho_y + k\rho_z$$

Definamos agora a operação **soma** para quatérnions:

$$q_1 + q_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) + i(\rho_{x1} + \rho_{x2}) + j(\rho_{y1} + \rho_{y2}) + k(\rho_{z1} + \rho_{z2})$$

Definamos agora o **produto elementar**:

$$i \cdot j = -j \cdot i = k$$

$$j \cdot k = -k \cdot j = i$$

$$k \cdot i = -i \cdot k = j$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Note que i , j e k não são vetores unitários de um sistema cartesiano 3-D, mas sim uma extensão do número imaginário i ($= \sqrt{-1}$). De posse das definições das operações de soma de quatérnions e de produto elementar, podemos então definir o produto de quaténions. Utilizando as definições acima tem-se que:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 = & (\lambda_1 \lambda_2 - \rho_{x1} \rho_{x2} - \rho_{y1} \rho_{y2} - \rho_{z1} \rho_{z2}) + \\ & (\lambda_1 \rho_{x2} + \lambda_2 \rho_{x1} + \rho_{y1} \rho_{z2} - \rho_{z1} \rho_{y2}) i + \\ & (\lambda_1 \rho_{y2} + \lambda_2 \rho_{y1} + \rho_{z1} \rho_{x2} - \rho_{x1} \rho_{z2}) j + \\ & (\lambda_1 \rho_{z2} + \lambda_2 \rho_{z1} + \rho_{x1} \rho_{y2} - \rho_{y1} \rho_{x2}) k \end{aligned}$$

De forma a se representar a expressão acima de forma condensada, utilizemos a transformação $i \rightarrow \vec{i}$ $j \rightarrow \vec{j}$ $k \rightarrow \vec{k}$ e definamos os vetores:

$$\mathbf{r}_1 = \vec{i}\rho_{x1} + \vec{j}\rho_{y1} + \vec{k}\rho_{z1}$$

$$\mathbf{r}_2 = \vec{i}\rho_{x2} + \vec{j}\rho_{y2} + \vec{k}\rho_{z2}$$

O produto de quatérnions $q_3 = q_1 \cdot q_2$ é agora possível expressar por

$$\tilde{q}_3 = \tilde{q}_1 \cdot \tilde{q}_2 = (\lambda_1 \lambda_2 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \lambda_1 \mathbf{r}_2 + \lambda_2 \mathbf{r}_1)$$

onde $(.)$ representa a operação de produto interno e (\times) representa o produto vetorial. A transformação inversa de volta para o quatérnion q_3 é obtida via $\vec{i} \rightarrow i$ $\vec{j} \rightarrow j$ $\vec{k} \rightarrow k$. O quatérnion conjugado é dado por:

$$q^* = (\lambda - i\rho_x - j\rho_y - k\rho_z)$$

Definamos agora a norma (valor absoluto) de q como

$$\|q\| = \lambda_{qq}^{1/2}$$

isto é, a norma é a raiz quadrada da parte real do produto $q \cdot q^*$ (na verdade não há parte imaginária neste produto...). É possível mostrar que

$$\|q\| = (q \cdot q^*)^{1/2} = (\lambda^2 + \rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2)^{1/2}$$

O quatérnion inverso é dado por:

$$q \cdot q^{-1} = 1$$

e, como consequência, verifica-se que (Por quê?):

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$$

Também é óbvio que

$$q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q$$

e é possível mostrar que

$$(q_1 \cdot q_2)^{-1} = q_2^{-1} \cdot q_1^{-1}$$

É possível ainda definir o quatérnion associado a um vetor da seguinte forma:

$$\text{Dado } \mathbf{r} = \vec{i}r_x + \vec{j}r_y + \vec{k}r_z, \text{ então seja } r_q = 0 + ir_x + jr_y + kr_z \text{ o quatérnion associado}$$

e a passagem inversa de r_q para \mathbf{r} é clara. A seguir será visto o emprêgo de quatérnions na descrição de atitude angular.

1.3.2 - Quatérnion de rotação:

É possível representar a atitude angular de um sistema de coordenadas cartesiano 3-D com relação a um outro sistema empregando quatérnions. Chamemos a esta representação

"quatérnion de rotação". O quatérnion de rotação se baseia em um teorema de Euler, o qual afirma:

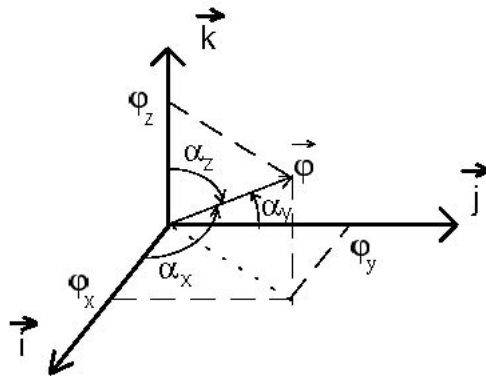
Theorema

Quomodocunque sphaera circa centrum suum convertatur, semper assignari potest diameter, cuius directio in situ translato conueniat cum situ initiali.

L. Euler, "Formulae Generales pro Translatione Quacunque Corporum Rigidorum", Novi Acad. Sci. Petrop., Vol.20, 1775, pp. 189-207.

(Independentemente da maneira como um sistema de coordenadas cartesiano 3-D chegou de seu estado inicial a seu estado final, sempre é possível determinar um eixo fixo único em torno do qual uma única rotação trará o sistema de coordenadas de sua situação inicial para sua situação final.)

Este eixo define uma direção. O ângulo de rotação define uma magnitude φ , e, juntamente com a direção do eixo de rotação $\hat{\varphi}$, é possível definir o **vetor de rotação** $\varphi = \varphi \hat{\varphi}$. A direção deste vetor é a direção do eixo de rotação e sua magnitude é dada pela magnitude do ângulo de rotação em radianos. O vetor de rotação φ define uma rotação em torno do eixo de rotação que leva do sistema I(i,j,k) ao sistema V(I,J,K). O vetor φ é também chamado de **vetor de Euler**. Observe que o vetor φ possui a mesma representação em ambos os sistemas I e V.



$$\lambda = \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$\rho_x = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\varphi_x}{\varphi} = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \alpha_x$$

$$\rho_y = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\varphi_y}{\varphi} = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \alpha_y$$

$$\rho_z = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\varphi_z}{\varphi} = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \alpha_z$$

Definamos agora o quatérnion de rotação com base no que foi explicado no parágrafo acima. Seja o ângulo de rotação dado por φ . Então as componentes do quatérnion de rotação são como no desenho acima. É óbvio que o quatérnion de rotação tem a seguinte propriedade:

$$\|q\| = 1$$

e portanto

$$q^{-1} = q^*.$$

A seguir será estudado como empregar quatérnions para transformar a descrição de um vetor expresso em um sistema de coordenadas em um outro sistema de coordenadas.

1.3.3 - Transformação com auxílio de quatérnions

Suponha que lhe sejam dados:

1. q_V^I - quatérnion de rotação do sistema I para o sistema V.
2. r_I - vetor descrito no sistema I.
3. r_V - vetor descrito no sistema V.

Definamos então dois quatérnions sobre estes vetores como mostrado abaixo:

$$r_I \rightarrow r_{Iq}$$

$$r_V \rightarrow r_{Vq}$$

Então é possível verificar que

$$r_{Vq} = (q_V^I)^{-1} \cdot r_{Iq} \cdot q_V^I$$

É portanto claro como se realiza a transformação de r_I para r_V quando se é dado o quatérnion de rotação entre os dois sistemas.

1.3.4 - Computação da DCM a partir do quatérnion de rotação:

Uma vez que já foi visto acima que

$$r_{Vq} = (q_V^I)^{-1} \cdot r_{Iq} \cdot q_V^I$$

e também sabe-se que

$$r_V = D_V^I r_I$$

Portanto, existe uma correspondência entre q_V^I e D_V^I . É possível mostrar que:

$$\mathbf{D}_V^I = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \rho_x^2 - \rho_y^2 - \rho_z^2 & 2(\rho_x \rho_y + \lambda \rho_z) & 2(\rho_x \rho_z - \lambda \rho_y) \\ 2(\rho_x \rho_y - \lambda \rho_z) & \lambda^2 - \rho_x^2 + \rho_y^2 - \rho_z^2 & 2(\rho_y \rho_z + \lambda \rho_x) \\ 2(\rho_x \rho_z + \lambda \rho_y) & 2(\rho_y \rho_z - \lambda \rho_x) & \lambda^2 - \rho_x^2 - \rho_y^2 + \rho_z^2 \end{bmatrix}$$

É possível mostrar que a relação entre a matriz $\{D_{ij}\}, i=1,2,3, j=1,2,3$ acima e os ângulos de Euler empregados na seqüência de rotações guinada $(3,\psi)$ -arfagem $(2,\theta)$ -rolamento $(1,\phi)$ é:

$$c\theta = \pm \sqrt{1 - C_{13}^2} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{C_{23}}{C_{33}} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{-C_{13}}{\sqrt{1 - C_{13}^2}} \quad \psi = \tan^{-1} \frac{C_{12}}{C_{11}}$$

As ambigüidades na determinação dos ângulos de Euler são resolvidas mediante verificação dos elementos na DCM associada à seqüência $I \xrightarrow{\substack{\psi & \theta & \phi \\ 3 & 2 & 1}} V$.

1.3.5 - Equação diferencial para computação de quatérnion

É possível provar que, dado o vetor $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_V^{VI}$ (isto é, a velocidade angular do sistema girante V com relação ao sistema I, expressa como um vetor segundo o sistema girante V) e definindo-se sobre este vetor o quatérnion ω_q (isto é, $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \omega_q$), então a taxa de variação do quatérnion de rotação é:

$$\dot{q}_V^I = \frac{1}{2} q_V^I \cdot \omega_q$$

Este q_V^I é o quatérnion que mapeia do sistema I para o sistema V; êle deve ser utilizado na expressão para \mathbf{D}_V^I vista acima na seção 1.3.4. Na forma matricial a equação diferencial se torna:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda \\ \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_x & -\rho_y & -\rho_z \\ \lambda & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & \lambda & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \omega_{xv}^{vi} \\ \frac{1}{2} \omega_{yv}^{vi} \\ \frac{1}{2} \omega_{zv}^{vi} \end{bmatrix}$$

A equação acima pode ainda ser reescrita em uma forma matricial condensada como:

$$\dot{\mathbf{q}}_V^I = \frac{1}{2} \Omega_{\text{aug}} \mathbf{q}_V^I \quad \mathbf{q}_V^I = \begin{bmatrix} \lambda \\ \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} \quad \Omega_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{xv}^{vi} & -\omega_{yv}^{vi} & -\omega_{zv}^{vi} \\ \omega_{xv}^{vi} & 0 & \omega_{zv}^{vi} & -\omega_{yv}^{vi} \\ \omega_{yv}^{vi} & -\omega_{zv}^{vi} & 0 & \omega_{xv}^{vi} \\ \omega_{zv}^{vi} & \omega_{yv}^{vi} & -\omega_{xv}^{vi} & 0 \end{bmatrix}$$

Características da parametrização baseada em quatérnions:

- 4 parâmetros
- Não há singularidades
- Não há necessidade de se computar funções trigonométricas, nem para a computação da DCM e nem para a solução da equação diferencial associada.

1.4 - Parâmetros de Rodríguez (ou parâmetros de Cayley ou vetor de Gibbs)

O número de parâmetros é três, e eles são definidos com base no vetor de Euler como abaixo:

$$g_1 = \tan \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\varphi_x}{\varphi} \quad g_2 = \tan \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\varphi_y}{\varphi} \quad g_3 = \tan \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\varphi_z}{\varphi}$$

(Qual a relação entre estes parâmetros de Rodríguez e o quatérnion correspondente?)

1.4.1 - Computação da DCM a partir dos parâmetros de Rodríguez

A DCM pode ser expressa por:

$$\mathbf{D}_V^I = \begin{bmatrix} 1 + g_1^2 - g_2^2 - g_3^2 & 2(g_1 g_2 + g_3) & 2(g_1 g_3 - g_2) \\ 2(g_1 g_2 - g_3) & 1 - g_1^2 + g_2^2 - g_3^2 & 2(g_2 g_3 + g_1) \\ 2(g_1 g_3 + g_2) & 2(g_2 g_3 - g_1) & 1 - g_1^2 - g_2^2 + g_3^2 \end{bmatrix}$$

É possível representar a computação de \mathbf{D}_V^I baseada nos parâmetros de Rodríguez g_i da seguinte forma. Defina-se a matriz \mathbf{G} por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & g_3 & -g_2 \\ -g_3 & 0 & g_1 \\ g_2 & -g_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então a seguinte relação pode ser provada:

$$\mathbf{D}_I^V = (\mathbf{I} - \mathbf{G})(\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1}$$

1.4.2 - Equação diferencial para a computação dos parâmetros de Rodríguez

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + g_1^2 & g_3 + g_1 g_2 & -g_2 + g_1 g_3 \\ -g_3 + g_1 g_2 & 1 + g_2^2 & g_1 + g_2 g_3 \\ g_2 + g_1 g_3 & -g_1 + g_2 g_3 & 1 + g_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{xv}^{vi} \\ \omega_{yv}^{vi} \\ \omega_{zv}^{vi} \end{bmatrix}$$

Da seção 1.1.1, temos que:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zv}^{vi} & \omega_{yv}^{vi} \\ \omega_{zv}^{vi} & 0 & -\omega_{xv}^{vi} \\ -\omega_{yv}^{vi} & \omega_{xv}^{vi} & 0 \end{bmatrix}$$

e então é possível mostrar que:

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{G})\mathbf{\Omega}(\mathbf{I} - \mathbf{G})$$

Características da parametrização baseada nos parâmetros de Rodríguez:

- Número de parâmetros é 3 (o mínimo)
- Singularidade quando se realiza rotação de 180° tal que o vetor de Euler tem magnitude π (rotação de π radianos) e $\tan(\pi/2)$ tende a infinito.
- Não requer computação de funções trigonométricas para a determinação da DCM nem para a solução da equação diferencial associada.

1.5 - Vetor de Euler

1.5.1 - Transformação do vetor de Euler para a DCM:

É possível provar que, dado o vetor de Euler $\boldsymbol{\phi} = \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ que leva de I para V, a DCM é (Hughes, Spacecraft Attitude Dynamics, pp.24, eq.(11)):

$$\mathbf{D}_V^I = \mathbf{I} \cos \phi + \frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \boldsymbol{\phi}_v (\boldsymbol{\phi}_v)^T - \frac{\sin \phi}{\phi} [\boldsymbol{\phi}_v \times]$$

$$\boldsymbol{\varphi}_v = \begin{bmatrix} \varphi_{xv} \\ \varphi_{yv} \\ \varphi_{zv} \end{bmatrix} \quad [\boldsymbol{\varphi}_v \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_{zv} & \varphi_{yv} \\ \varphi_{zv} & 0 & -\varphi_{xv} \\ -\varphi_{yv} & \varphi_{xv} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\sin(\varphi)}{\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{3!} + \frac{\varphi^4}{5!} - \dots \quad \frac{1 - \cos(\varphi)}{\varphi^2} = \frac{1}{2!} - \frac{\varphi^2}{4!} + \frac{\varphi^4}{6!} - \dots$$

Algoritmos distintos para determinação de atitude baseados na parametrização com vetor de Euler empregam truncamentos distintos das séries acima.

1.5.2 - Equação diferencial do vetor de Euler:

É possível provar que:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_v = \boldsymbol{\omega}_v^{VI} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}^{VI})_v + (\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}^{VI}))_v \frac{1}{\varphi^2} \left(1 - \frac{\varphi \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)}\right)$$

- Qual a diferença entre $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ e $\boldsymbol{\omega}^{VI}$? Chama-se esta diferença de "não comutatividade da rotação"
- O que ocorre quando $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ e $\boldsymbol{\omega}^{VI}$ estão na mesma direção?

1.6 – Propriedades das parametrizações de atitude

Seja \mathbf{a} vetor complexo em \mathbb{C}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 j \\ a_2 + b_2 j \\ a_3 + b_3 j \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}^H = [a_1 - b_1 j \quad a_2 - b_2 j \quad a_3 - b_3 j]$$

onde o superscrito H indica a operação hermitiana, i.e., transposta conjugada. Considere agora a expressão que relaciona os autovalores complexos λ_k e respectivos autovetores \mathbf{a}_k da DCM $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$ em $\mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\mathbf{D} \mathbf{a}_k = \lambda_k \mathbf{a}_k; \quad k = 1, 2, 3; \quad \lambda_k \in \mathbb{C}; \quad \mathbf{a}_k \in \mathbb{C}^3; \quad \mathbf{a}_k \neq \mathbf{0}$$

Então, pre-multiplicando pelo hermitiano dos termos em cada lado da igualdade resulta em:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D} \mathbf{a}_k)^H \mathbf{D} \mathbf{a}_k &= (\lambda_k \mathbf{a}_k)^H \lambda_k \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_k^H \mathbf{D}^H \mathbf{D} \mathbf{a}_k &= \bar{\lambda}_k \lambda_k \mathbf{a}_k^H \mathbf{a}_k \end{aligned}$$

onde $\bar{\lambda}_k$ indica o autovalor conjugado. Dado que \mathbf{D} é real e ortonormal, $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{I}$ e então:

$$(\bar{\lambda}_k \lambda_k - 1) \mathbf{a}_k^H \mathbf{a}_k = 0 \Rightarrow \bar{\lambda}_k \lambda_k = 1 \Rightarrow |\lambda_k| = 1$$

Portanto os autovalores todos de \mathbf{D} apresentam norma unitária. Como se trata de três autovalores, eles são:

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = e^{j\varphi}; \quad \lambda_3 = e^{-j\varphi}$$

Uma vez que a transformação linear para diagonalização de \mathbf{D} não altera o determinante nem o traço:

$$\text{Det}(\mathbf{D}) = \prod_{k=1}^3 \lambda_k = 1; \quad \text{tr}(\mathbf{D}) = \sum_{k=1}^3 \lambda_k = 1 + 2\cos(\varphi)$$

Associado ao autovalor unitário e seu correspondente autovetor unitário \mathbf{a}_1 , temos que:

$$\mathbf{D} \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1$$

A igualdade acima corresponde à definição de direção do eixo de rotação que leva do sistema de origem ao de destino. Portanto, \mathbf{a}_1 é a direção do vetor de Euler, i.e., $\mathbf{a}_1 = \hat{\phi}$.

O traço de \mathbf{D} permite obter o ângulo de rotação φ em torno de $\hat{\phi}$:

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{D}) - 1)$$

Da seção 1.3.2, o quaternion de rotação pode ser obtido do vetor de Euler. A ambiguidade na rotação φ devido ao cosseno na expressão acima precisa ser resolvida comparando a DCM resultante do quaternion de rotação, descrita na seção 1.3.4, com \mathbf{D} .

1.7 – Aspectos numéricos: normalização de DCM e de quaternion

A DCM é uma matriz de rotação, portanto ortonormal. O quaternion de rotação tem norma unitária. Entretanto, durante a integração numérica das equações diferenciais que relacionam as derivadas temporais dessas parametrizações de atitude com a velocidade angular relativa entre os sistemas de coordenadas cartesianas envolvidos, erros numéricos devido à mantissa finita, erros de não comutatividade das rotações finitas e erros do algoritmo de integração vão se acumulando e resulta em perda de ortonormalidade da DCM, ou da norma unitária do quaternion. A seguir, seguem algoritmos recursivos para recuperar, no caso da DCM, a ortonormalidade e, no caso do quaternion, a norma unitária.

1.7.1. DCM – Processo Original:

(investigado em Bar-Itzhack e Meyer, IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems, Vol. AES-12, no.2, pp. 146-151, **On the Convergence of Iterative Orthogonalization Processes**, 1976; originalmente proposto em A. Björck and C. Bowie, SIAM J. Numer. Anal. **8**, pp. 358-364 (7 pages) **An Iterative Algorithm for Computing the Best Estimate of an Orthogonal Matrix**, June 1971).

Deseja-se obter uma matriz ortonormal \mathbf{D}^{opt} que seja próxima, segundo a norma euclidiana, da matriz \mathbf{D}_0 que é computada, a cada instante de tempo, pelo método de integração numérica da equação diferencial da DCM:

$$\mathbf{D}^{\text{opt}} = \min_{\mathbf{D}} \left\| (\mathbf{D}_0 - \mathbf{D})(\mathbf{D}_0 - \mathbf{D})^T \right\|_{\text{Euclid}} = \min_{\mathbf{D}} \left(\text{traço} \left((\mathbf{D}_0 - \mathbf{D})(\mathbf{D}_0 - \mathbf{D})^T \right) \right)^{1/2}$$

sujeito a $\mathbf{D}^T \mathbf{D} - \mathbf{I} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ (isto é, \mathbf{D} é matriz ortonormal).

$\mathbf{X}_0 = \mathbf{D}_0$ % Inicia com DCM computada pelo algoritmo de integração em um dado instante
Para $j=1:n$

$$\mathbf{X}_j = (3/2) \cdot \mathbf{X}_{j-1} - (1/2) \cdot \mathbf{X}_{j-1} \cdot (\mathbf{X}_{j-1})^T \cdot \mathbf{X}_{j-1}$$

Fim

$$\mathbf{D}^{\text{opt}} = \mathbf{X}_n$$

% Termina com DCM sendo a matriz ortonormal \mathbf{D}^{opt} que minimiza a norma euclidiana
% entre \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}^{opt} .

1.7.2. Quaternion:

(Savage, P., Strapdown System Algorithms, AGARD Lecture Series 133, Advances in Strapdown Inertial Systems, pg. 379, 1984)

$\mathbf{X}_0 = \mathbf{q}_0$ % Inicia com quaternion computado pelo algoritmo de integração em um dado instante

Para $j=1:n$

$$\mathbf{X}_j = (3/2) \cdot \mathbf{X}_{j-1} - (1/2) \cdot \mathbf{X}_{j-1} \cdot (\mathbf{X}_{j-1})^* \cdot \mathbf{X}_{j-1} \text{ % superscrito '*' indica quaternion conjugado}$$

Fim

$$\mathbf{q}^{\text{opt}} = \mathbf{X}_n$$

% Termina com o quaternion unitário \mathbf{q}^{opt} .