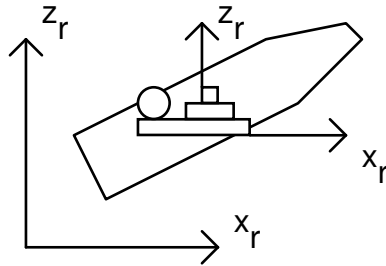


Capítulo 5 - Navegação Inercial

Generalidades:

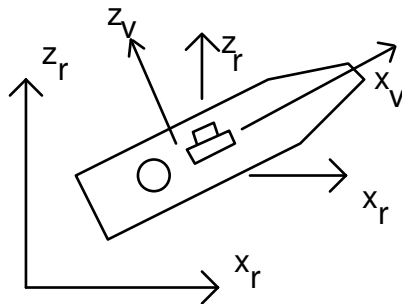
O sistema pode ser implementado por plataforma estabilizada ou solidária. Considere o sistema de coordenadas de referência para navegação $\{x_r, z_r\}$ e o dos sensores fixos ao corpo $\{x_v, z_v\}$.

1. Plataforma estabilizada:



- Girômetros mantêm a orientação da plataforma
- Acelerômetros medem as forças específicas com relação ao sistema de referência \mathbf{r} .

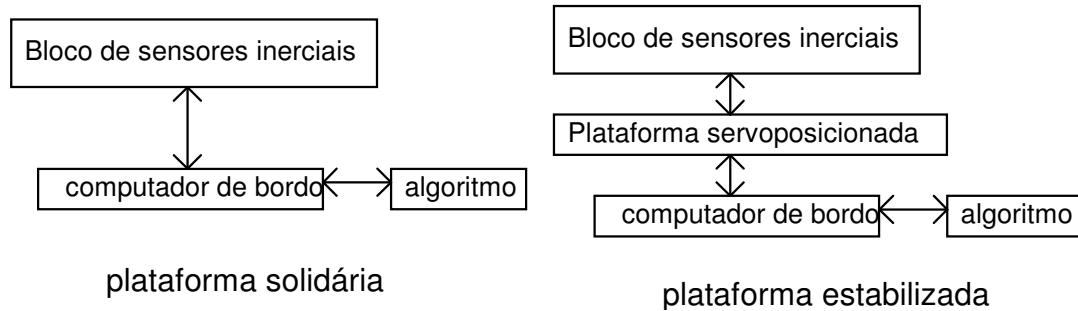
2. Plataforma solidária (plataforma analítica, plataforma matemática)



- Girômetros usualmente medem incrementos angulares no sistema do corpo \mathbf{v}
- Computador de bordo resolve numericamente a equação diferencial da DCM \mathbf{D}_r^v
- Os acelerômetros medem incrementos de velocidade no sistema do corpo \mathbf{v} .
- Com a matriz \mathbf{D}_r^v são computadas as forças específicas segundo o sistema \mathbf{r} (voltando-se assim à situação da plataforma estabilizada)

Ambos os métodos requerem o emprego de computador de bordo. A carga computacional no sistema solidário é bem maior que no sistema mecânicamente estabilizado. A

plataforma estabilizada mecânicamente, na qual a orientação desejada é obtida por um servomecanismo, é substituída por um algoritmo de integração numérica da equação diferencial da DCM. Este algoritmo é implementado no computador de bordo operando em tempo real.



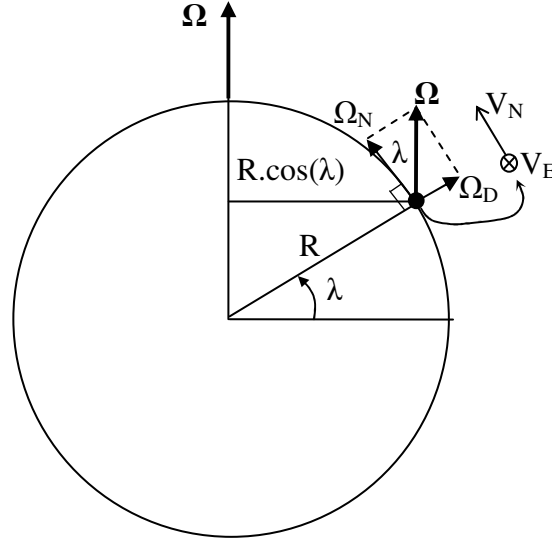
	Plataforma estabilizada	Plataforma solidária
Volume	Maior	Menor
Peso	Maior	Menor
Potência requerida	Maior	Menor
Confiabilidade	Menor	Maior
Carga computacional	Menor	Maior (e daí?)
Acurácia	Alta	Alta – mas isso requer sensores inerciais com mesma sensibilidade e fundo de escala maior – i.e., maior faixa dinâmica

Controle da Plataforma(Terra esférica):

Manutenção da orientação da plataforma no sistema Local Level Local North (LLLN):

Considere o sistema de referência S_e fixo à Terra e um veículo que se move em relação à superfície da Terra com velocidade V_N na direção norte e V_E na direção leste. Define-se como sendo o sistema LLLN o sistema de referência S_r , que acompanha o veículo e que muda sua orientação em relação ao sistema de referência inercial S_i devido à velocidade angular da Terra Ω e devido ao movimento do veículo com relação à Terra.

Seja ω^{re} a velocidade angular de S_r em relação a S_e . Então, a velocidade angular com que o sistema LLLN precisa girar com relação ao sistema inercial S_i para manter o alinhamento correto com a horizontal e o norte locais é $\Omega_{com} = \Omega + \omega^{re}$ e sua representação é facilmente feita no sistema LLLN.



No caso de estabilização mecânica, são realizados torques externos sobre a plataforma de forma que gire com esta velocidade angular. Idealmente, a plataforma ficaria continuamente alinhada com o sistema LLLN. Considerando que $\Omega_N = \Omega \cos \lambda$ e $\Omega_D = -\Omega \sin \lambda$, então:

$$\begin{aligned}\omega_r^{re} &= [V_E / R \quad -V_N / R \quad -(V_E / R) \tan \lambda]^T \\ \Omega_r &= [\Omega \cos \lambda \quad 0 \quad -\Omega \sin \lambda]^T \\ \therefore \Omega_{com,r} &= \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda + \frac{V_E}{R} \\ -\frac{V_N}{R} \\ -\Omega \sin \lambda - \frac{V_E}{R} \tan \lambda \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Quando os girômetros são mecânicos com malha de balanceamento de força [vide Merhav] e dispõem de entrada de corrente para teste, sendo conhecido o ganho de transdução mA/(grau/s), o computador de bordo computa a velocidade angular requerida, representada no sistema LLLN, para manter alinhada a plataforma com o sistema de referência LLLN. Inverte-se a polaridade do sinal e envia-se o sinal de corrente correspondente para o potenciômetro de saída de cada girômetro. As malhas de balanceamento de força em cada girômetro produzem uma corrente que causa torque sobre os respectivos rotores para tentar cancelar a deflexão inexistente. Essa corrente é o sinal de saída dos girômetros, que “acreditam” estar girando na direção oposta. O sistema de controle da plataforma comanda, considerando a atitude da plataforma em relação ao veículo hospedeiro, torques aos torqueadores posicionados nos eixos das plataformas para se opor à essa velocidade angular inexistente, criada pelo sinal de corrente inserido na saída de cada girômetro. Resulta, pois, a plataforma girando na direção necessária para manter o alinhamento.

5.1 - Computações no sistema de plataforma estabilizada:

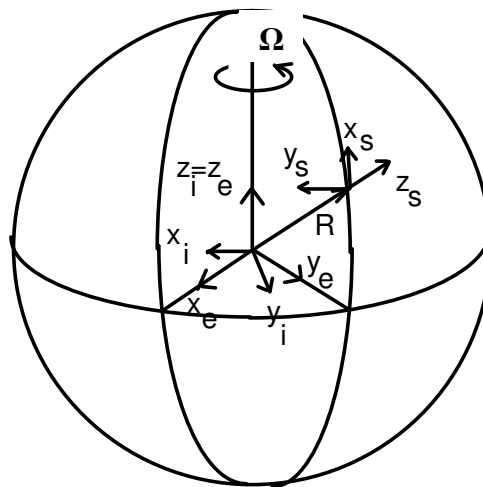
5.1.1 - Equações da navegação com relação à Terra esférica

Definamos:

1. Sistema inercial S_i fixo ao centro da Terra, *mas sem girar com ela* (o movimento em torno do Sol pode ser desprezado para nossos exemplos).
 2. Sistema de referência para navegação S_s fixo ao centro da terra, *mas com eixos sempre paralelos aos eixos da plataforma*.
 3. Sistema da Terra S_e fixo ao centro da Terra, *e girando acoplado a ela*.
- O sistema S_e gira com relação ao sistema S_i com velocidade angular $\omega^{ei} = \Omega$, cuja magnitude corresponde à rotação diária da Terra e com direção alinhada com o eixo de rotação da Terra.
 - O sistema S_s gira com relação ao sistema S_i com velocidade angular $\omega^{si} = \omega$.
 - Óbviamente, a velocidade angular de S_s com relação a S_e é dado por

$$\omega^{se} = \rho = \omega - \Omega$$

Define-se \mathbf{R} como o vetor posição do centro da Terra à unidade de medidas inerciais transportada pelo veículo em movimento. A figura abaixo ilustra o sistema de coordenadas inercial $S_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, o fixo à Terra $S_e = \{x_e, y_e, z_e\}$ e o de referência para a navegação $S_s = \{x_s, y_s, z_s\}$, aqui ilustrado com sua origem deslocada para melhor entendimento.



A aceleração inercial do veículo é dada por:

$$\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{R}}$$

Os acelerômetros (revisão: modelá-los para entender como funcionam) medem a força específica, a qual consiste na soma vetorial da aceleração inercial menos a gravitação, sendo esta causada pela atração a distância entre massas:

$$\mathbf{A}_{sp} = \mathbf{\ddot{R}} - \mathbf{g}_m \quad (5.1)$$

Do teorema de transporte da Mecânica, a velocidade inercial se relaciona com a velocidade terrestre mediante:

$$\mathbf{\dot{R}}^i = \mathbf{\dot{R}}^e + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$$

Definindo-se a velocidade terrestre como:

$$\mathbf{V}_e \triangleq \mathbf{\dot{R}}^e$$

resulta em

$$\mathbf{\dot{R}}^i = \mathbf{V}_e + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} \quad (5.2)$$

Derivando-se mais uma vez em relação ao tempo resulta:

$$\mathbf{\ddot{R}}^i = \mathbf{\dot{V}}_e + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{\dot{R}}^i = \mathbf{\dot{V}}_e + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{\dot{R}}^i \quad (5.3)$$

pois a velocidade de rotação da Terra em torno de seu eixo pode ser assumida como constante com relação ao espaço inercial para os problemas em vista. Descrevendo-se o vetor $\mathbf{\dot{V}}_e^i$ no sistema s:

$$\mathbf{\dot{V}}_e^i = \mathbf{\dot{V}}_e^s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_e \quad (5.4)$$

Substituindo-se (5.2) e (5.4) em (5.3) resulta em:

$$\mathbf{\ddot{R}}^i = \mathbf{\dot{V}}_e^s + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V}_e + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$$

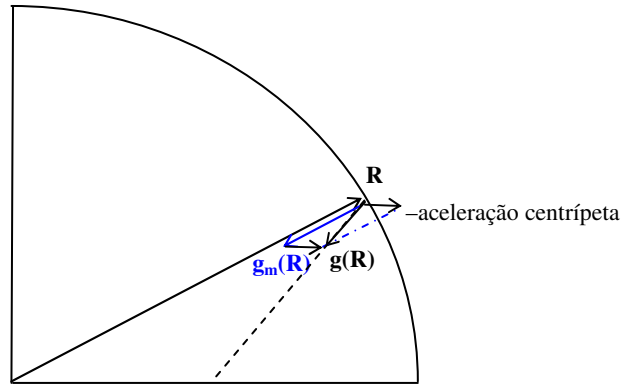
Substituindo na equação (5.1) resulta em

$$\boxed{\mathbf{\dot{V}}_e^s = \mathbf{A}_{sp} - (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V}_e + (\mathbf{g}_m - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}))}$$

Seja o último termo denotado pela gravidade:

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}) = \mathbf{g}_m - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$$

Vê-se, portanto, que a direção da gravidade $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ não aponta para o centro da Terra.



Desta forma:

$$\dot{\mathbf{V}}_e^s = \mathbf{A}_{sp} - (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V}_e + \mathbf{g}(\mathbf{R}) \quad (5.5)$$

De forma a obter a equação diferencial cuja solução é a posição \mathbf{R} , expressemos as relações entre as velocidades inercial e as observadas, respectivamente, nos sistemas s (fixo à plataforma) e e (fixo à Terra):

$$\dot{\mathbf{R}}^i = \dot{\mathbf{R}}^s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \dot{\mathbf{R}}^e + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} \quad (5.6)$$

Igualando os lados das equações acima:

$$\dot{\mathbf{R}}^s = \dot{\mathbf{R}}^e - (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{R} \quad (5.7)$$

Relembrando que $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}$ e que $\mathbf{V}_e^e = \dot{\mathbf{R}}^e$, então é possível expressar (5.5) e (5.7) da seguinte forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_e^s &= \mathbf{A}_{sp} - (2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{V}_e + \mathbf{g}(\mathbf{R}) \\ \dot{\mathbf{R}}^s &= \mathbf{V}_e - \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R} \end{aligned}}$$

Estas são as equações diferenciais que devem ser resolvidas numericamente, a partir das condições iniciais $\mathbf{R}(0), \mathbf{V}_e(0)$, pelo computador de navegação para que se conheçam $\mathbf{R}(t), \mathbf{V}_e(t)$, respectivamente a posição e a velocidade terrestre.

5.1.2 - Propriedades geométricas da Terra e de seu campo de gravidade

(vide Biezd, D.J., Integrated Navigation and Guidance Systems, pp.20-25, 1999; Chobotov, Orbital Mechanics, pp.202-209, 2002)

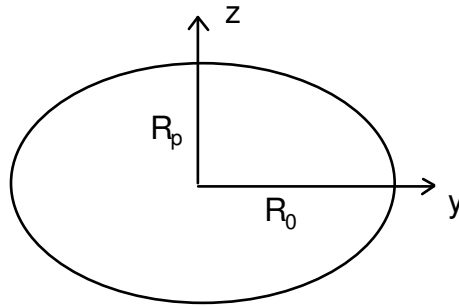
Acima foram derivadas as equações diferenciais que o computador de navegação necessita resolver numericamente. Analisou-se o caso geral de um sistema de coordenadas qualquer s fixo à plataforma. Agora será requerido que o sistema s fixo à plataforma seja o sistema LLLN. Para que possamos examinar quais as consequências

deste requisito, é preciso ainda modelar a forma do globo terrestre, chamada de geóide, e a gravidade associada.

A geóide é uma superfície na qual o valor do campo potencial de gravidade da Terra é constante e que aproxima o nível médio dos mares, de forma a considerar as oscilações causadas pelo efeito de maré gravitacional devido às posições relativas do sistema Terra-Sol-Lua. A geóide coincidiria com a superfície a que os oceanos se conformariam se estivessem livres para se ajustar ao efeito combinado da gravitação, decorrente da atração da massa da Terra, e da aceleração centrípeta causada pela rotação da Terra. Como resultado da distribuição de massa da Terra não ser homogênea, a forma da geóide é irregular, pois a gravitação que atua sobre os oceanos depende da distribuição assimétrica de massa da Terra. A geóide não tem expressão analiticamente fechada: trata-se de uma superfície equipotencial complexa, modelada por uma expansão em série que é truncada após milhares de coeficientes. A gravidade \mathbf{g} é o gradiente do campo potencial de gravidade da Terra; portanto, \mathbf{g} é ortogonal ao plano localmente tangente à geóide.

Elipsóides são superfícies empregadas para interpolar a geóide. Nos picos e vales da geóide ocorrem os maiores erros de aproximação em relação à elipsóide interpolante. Um tal elipsóide costuma ser caracterizado pelo seu centro em relação ao centro da Terra, seu raio equatorial e seu achatamento. Um modelo da geóide é o elipsóide de referência World Geodetic System (WGS-84), que busca se aproximar, globalmente, do nível médio dos mares.

A forma de uma secção da Terra contendo seu centro pode ser aproximado por uma elipse, como visto abaixo. Em seguida, a expressão do elipsóide de revolução em torno do eixo z é um modelo da geóide:



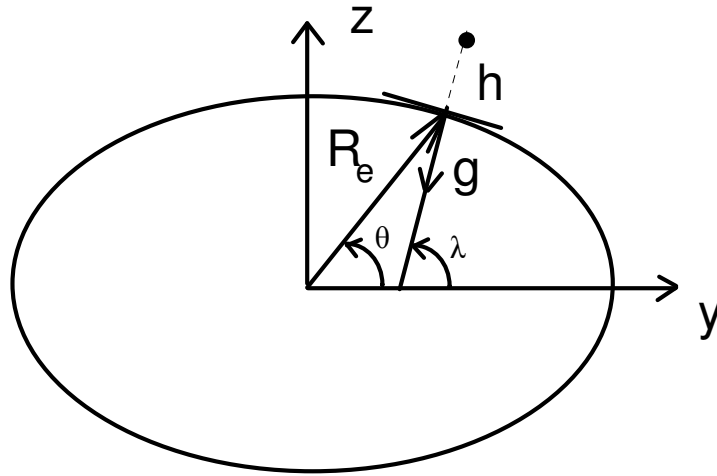
$$\frac{x^2 + y^2}{R_0^2} + \frac{z^2}{R_p^2} = 1$$

Definindo-se o achatamento como $e \triangleq 1 - \frac{R_p}{R_0}$, com o raio equatorial

$R_0 \approx 6.378138 \times 10^6 \text{ m}$ e o raio polar $R_p \approx 6.356752 \times 10^6 \text{ m}$ (vide WGS-84), tem-se um achatamento de $e=0,003353$. É possível expressar o elipsóide por intermédio do achatamento e do raio equatorial através de:

$$(1-e)^2(x^2 + y^2) + z^2 = (1-e)^2 R_0^2 \quad (5.8)$$

Passemos agora para um sistema de coordenadas esférico, como visto abaixo:



$$x = R_e \cos \theta \cos \Lambda$$

$$y = R_e \cos \theta \sin \Lambda$$

$$z = R_e \sin \theta$$

onde Λ é a longitude medida a partir do meridiano de Greenwich. Substituindo as igualdades acima em (5.8) resulta em:

$$R_e^2 [(1-e)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] = (1-e)^2 R_0^2$$

$$\therefore R_e = R_0 \left[1 + \left(\frac{1}{(1-e)^2} - 1 \right) \sin^2 \theta \right]^{-1/2}$$

A relação acima fornece a posição de um ponto na superfície em função da latitude em um sistema de coordenadas fixo à Terra e com sua origem no centro do elipsóide. Desenvolvendo-se a função acima em série de potências do achatamento e e mantendo-se os termos de primeira ordem, a seguinte aproximação resulta:

$$R_e \approx R_0 (1 - e \sin^2 \theta)$$

O erro máximo desta aproximação (**não da navegação!!!**) é em torno de 30 metros com relação à geóide e, portanto, a aproximação é excelente.

5.1.2.1 - Latitude geocêntrica, latitude geográfica (ou geodética) e latitude astronômica

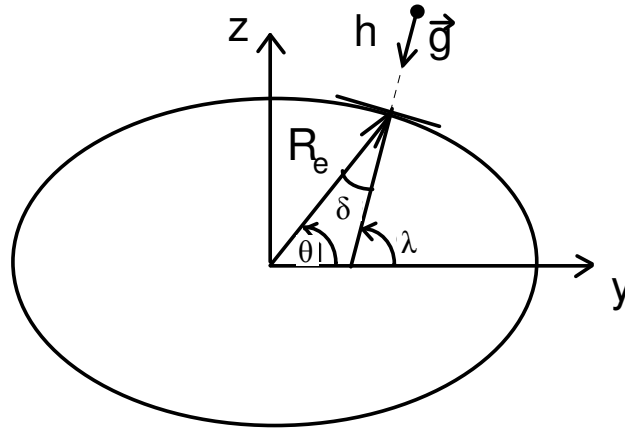
θ - latitude geocêntrica λ - latitude geográfica (ou geodética)

Os mapas utilizam a latitude geográfica (ou geodética), que é dada pela direção ortogonal à elipsóide interpolante e que é aproximada nesse curso pela direção da gravidade local \mathbf{g} .

Notar que, sendo \mathbf{g} o gradiente do campo potencial gravitacional, \mathbf{g} é ortogonal ao plano localmente tangente à geóide. Em uma aproximação muito boa, \mathbf{g} pode ser

assumido como ortogonal ao plano tangente local à elipsóide interpolante. O erro de direção entre a ortogonal à geóide e à elipsóide interpolante é conhecida como deflexão da vertical local, da ordem de 10arcseg. Esta deflexão provoca componente de gravidade em torno de $10^{-6}g$ nas direções norte e leste do plano tangente à elipsóide, valor insignificante para as aplicações estudadas nesse curso. A latitude astronômica é a dada pela direção de \vec{g} , ortogonal à geóide.

Considerada a aproximação acima, a diferença entre as latitudes geográfica e geocêntrica (ou geodética) é denotada por $\delta = \lambda - \theta$ como na figura abaixo:



e é possível verificar que, em uma aproximação de primeira ordem:

$$\delta = e \cdot \sin(2\theta)$$

5.1.2.2 - Raio de curvatura da superfície do elipsóide da Terra

O movimento do veículo, causado por suas velocidades lineares na direção norte e na direção leste em relação à Terra, demanda a rotação do sistema s (fixo à plataforma), visando ao seu alinhamento com o sistema de referência escolhido para a navegação.

Para relacionar a velocidades linear terrestre na direção norte e na direção leste com a velocidade angular do sistema s (fixo à plataforma) em relação à Terra, surge a necessidade de se conhecer os raios de curvatura da superfície da Terra localmente, nas direções norte e leste. Obteremos o raio de curvatura na direção norte como função da latitude geocêntrica θ e do achatamento e e com uma aproximação de primeira ordem em e , resulta:

$$R_N = R_0[1 - e(2 - 3\sin^2 \theta)]$$

e na direção leste:

$$R_E = R_0[1 + e \cdot \sin^2 \theta]$$

Entretanto, mapas terrestres usados para navegação empregam a latitude geográfica λ , e não a geocêntrica θ , requerendo assim uma mudança de variáveis que pode ser aproximada por:

$$\sin^2 \theta \approx \sin^2 \lambda + \delta \cdot \sin 2\lambda$$

Se substituirmos simplesmente θ por λ , os erros, que são da ordem de décimos de ponto percentual, podem ser desprezados e portanto os raios da Terra e de curvatura nas direções norte e leste são dados por:

$$\begin{aligned} R_e &= R_0(1 - e \cdot \sin^2 \lambda) \\ R_N &= R_0[1 - e(2 - 3 \cdot \sin^2 \lambda)] \\ R_E &= R_0(1 + e \cdot \sin^2 \lambda) \end{aligned}$$

5.1.2.3 - Aceleração g sobre a Terra (vide Pittman)

$$\begin{aligned} g_e &= g(\lambda) = g_0(1 + 0.0053 \sin^2 \lambda + 6 \cdot 10^{-6} \sin^2(2\lambda)) \\ g_0 &= 9.780327 \text{ m/s}^2 \text{ (sobre a superfície, ao longo da linha do equador)} \end{aligned}$$

A magnitude g como função da altitude h , com relação a um plano tangente da Terra, pode ser aproximada por:

$$g \approx g_e \frac{R_e^2}{(R_e + h)^2} = g_e \frac{1}{(1 + \frac{h}{R_e})^2}$$

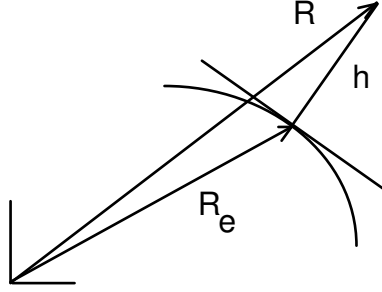
Devido ao fato de $h \ll R_e$, a expressão acima pode ser simplificada via expansão em série de Taylor e descartados os termos em h de ordem superior a um, resultando em:

$$g \approx g_e \left(1 - \frac{2h}{R_e}\right)$$

e finalmente, a aceleração g , apontando em direção ortogonal ao plano tangente local, tem sua magnitude descrita por:

$$g = g_0(1 + 0.0053 \sin^2 \lambda) \left(1 - \frac{2h}{R_e}\right)$$

Observe que o termo em $\sin^2(2\lambda)$ que aparece na expressão de g_e foi desprezado. A diferença entre a magnitude local da gravidade e o previsto pelo modelo é conhecida como *anomalia da gravidade*. O valor RMS (raiz do valor médio quadrático) da anomalia está na faixa de $10^{-5}g$ a $10^{-6}g$ e depende da posição. A figura a seguir indica que a altitude h é referida à elipsóide que modela a geóide.



5.1.3 - Representação das equações de navegação no sistema LLLN

Já foi visto que as equações vetoriais no sistema plataforma geral a serem resolvidas são:

$$\dot{\mathbf{V}}_e^s = \mathbf{A}_{sp} - (2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{V}_e + \mathbf{g}(\mathbf{R}) \quad (a)$$

$$\dot{\mathbf{R}}^s = \mathbf{V}_e - \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R} \quad (b)$$

Trabalharemos com o sistema LLLN'={N,W,U}, no qual o eixo x_p aponta para o norte local, o eixo y_p aponta para o oeste local e z_p aponta para cima (obviamente, o plano descrito por $x_p y_p$ é tangente à Terra no ponto em que se encontra a plataforma).

Desejamos verificar como são representados os vetores das expressões (a) e (b) em suas componentes neste sistema LLLN'. Como já visto, a gravidade \mathbf{g} é a combinação da aceleração causada pela gravitação (atração entre massas a distância) com a aceleração centrípeta devido à rotação da Terra. Será considerado, de forma aproximada, que a gravidade \mathbf{g} aponta perpendicularmente ao plano que tangencia o elipsóide de referência que modela a geóide. Portanto:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad \text{onde } g = g_0(1 + .0053 \sin^2 \lambda)(1 - \frac{2h}{R_e})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ \Omega \sin \lambda \end{bmatrix}$$

Com relação ao vetor posição:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_e + \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} -R_e \sin \delta \\ 0 \\ R_e \cos \delta \end{bmatrix} \quad \therefore \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -R_e \delta \\ 0 \\ R_e + h \end{bmatrix}$$

onde se assume que $\delta \approx 0$.

$$\begin{aligned}
-2eR_0 \cos(2\lambda) \dot{\lambda} &= V_x - \dot{\lambda}(R_e + h) \\
0 &= V_y + \dot{\Lambda} \sin \lambda \cdot e \cdot R_0 \sin 2\lambda + \dot{\Lambda} \cos \lambda \cdot (R_e + h) \\
-eR_0 \sin(2\lambda) \dot{\lambda} + \dot{h} &= V_z - \dot{\lambda} e R_0 \sin 2\lambda
\end{aligned}$$

Resolvendo para \dot{h} , $\dot{\Lambda}$ e $\dot{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \frac{V_x}{R_0[1 - e(2 - 3\sin^2 \lambda)] + h} \\
\dot{\Lambda} &= \frac{-V_y}{[R_0(1 + e \sin^2 \lambda) + h] \cos \lambda} \\
\dot{h} &= V_z
\end{aligned}$$

Se substituirmos nas equações acima as expressões correspondentes a R_E e R_N , obteremos:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \frac{V_x}{R_N + h} \\
\dot{\Lambda} &= \frac{-V_y}{(R_E + h) \cos \lambda} \\
\dot{h} &= V_z
\end{aligned}$$

As equações acima, derivadas a partir de (b) na Seção 5.1.3, também podem ser obtidas a partir de considerações geométricas. A partir da solução das três equações formuladas de forma vetorial em (a), é obtida a solução para V_x , V_y e V_z e, a partir das três últimas equações vistas acima, é obtida a solução para a posição, expressa em coordenadas esféricas como λ , Λ e h . A passagem para um mapa é automática. Note que $LLN' = \{N, W, U\}$ e $LLN = \{N, E, D\}$

Sumarizando:

Equações Diferenciais de Navegação (a) e (b) representadas em $LLN = NED$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N &= A_{SN} + \frac{V_N}{R_N + h} V_D - (2\Omega \sin \lambda + \frac{V_E}{R_E + h} \tan \lambda) V_E \\
\dot{V}_E &= A_{SE} + (2\Omega \sin \lambda + \frac{V_E}{R_E + h} \tan \lambda) V_N + (2\Omega \cos \lambda + \frac{V_E}{R_E + h}) V_D \\
\dot{V}_D &= A_{SD} - (2\Omega \cos \lambda + \frac{V_E}{R_E + h}) V_E - \frac{V_N}{R_N + h} V_N + g_0 (1 + .0052884 \cdot \sin^2 \lambda) (1 - \frac{2h}{R_e}) \\
\dot{\lambda} &= \frac{V_N}{R_N + h}
\end{aligned}$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{V_E}{(R_E + h) \cos \lambda}$$

$$\dot{h} = -V_D$$

$$R_E = R_0(1 + e \sin^2 \lambda)$$

$$R_N = R_0[1 - e(2 - 3 \sin^2 \lambda)]$$

$$R_e = R_0(1 - e \sin^2 \lambda)$$

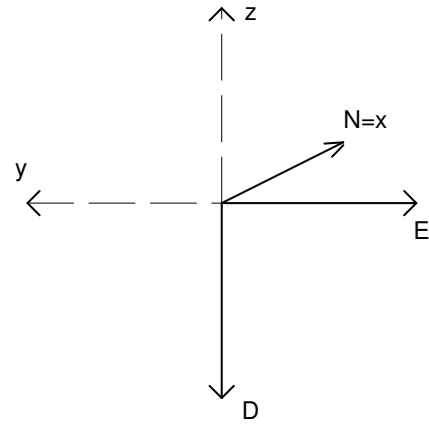
Parâmetros do elipsóide de referência
(WGS-84):

$$e = 1/298,25$$

$$R_0 = 6.378138 \times 10^6 \text{ m}$$

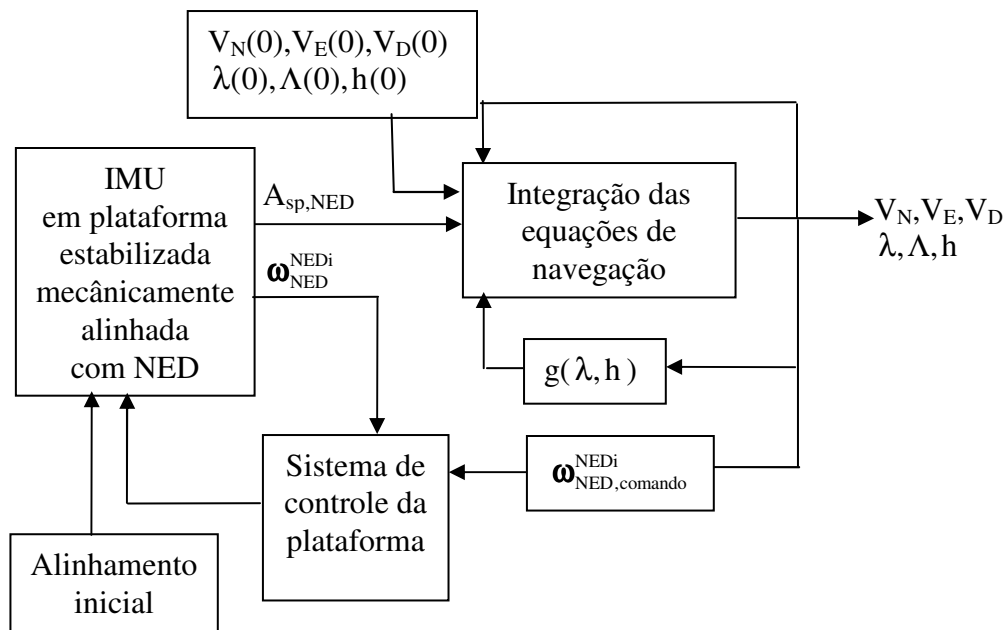
$$g_0 = 9.780327 \text{ m / sec}^2$$

$$\Omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad / sec}$$

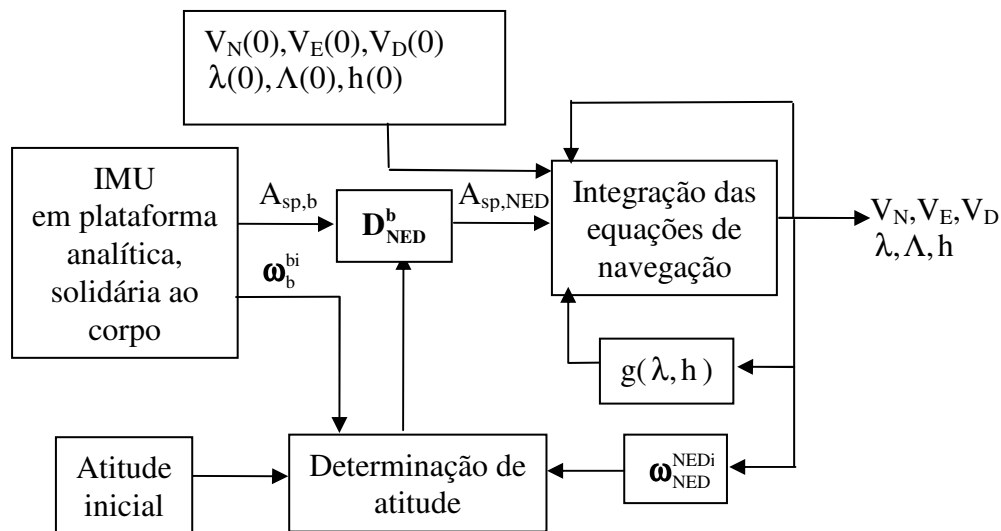


A solução das **equações** diferenciais acima fornece, a cada instante, a posição e a velocidade terrestres, i.e., em relação ao sistema S_e , representadas no sistema LLLN S_{NED} . Adicionalmente, a solução do problema de determinação de atitude do sistema do corpo S_b em relação ao de referência de navegação S_s é requerida em sistemas de navegação com sensores solidários para que as medidas de força específica A_{sp} dos acelerômetros sejam transformadas do sistema do corpo para o sistema S_{NED} .

A seguir será realizada a análise da propagação dos erros dos sensores pelas equações de navegação e seu efeito no desempenho do sistema de navegação inercial.



Plataforma estabilizada, mecânicamente alinhada com NED



Plataforma strapdown (solidária), alinhada com NED

5.2 – Análise de erros

Em todo sistema de medidas é preciso avaliar os erros do sistema devido a:

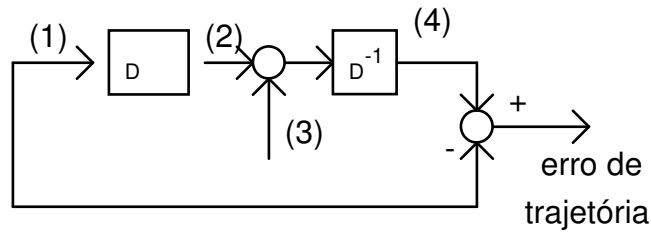
- 1) desejo de conhecer quais os fatores preponderantes a causarem erros de forma a se concentrar os esforços de projeto nestes fatores,
- 2) desejo de conhecer o desempenho teórico esperado do sistema

3) necessidade de diagnosticar e localizar falhas do sistema, através do conhecimento da magnitude dos erros durante operação normal e assim permitir a detecção de operação anormal.

Dois métodos são os mais comuns:

a) simulação em paralelo do sistema de navegação ideal e do sistema com erros ao longo de uma trajetória.

D - sistema de equações inverso



(1) - trajetória nominal: posição e velocidade

(2) - medidas: acelerações e velocidades angula

(3) - erros de medida

(4) - trajetória computada

Desvantagens:

- Análise é feita para uma dada trajetória, a natureza dos erros não fica caracterizada.
- Não fornece expressões algébricas para os erros, apenas valores numéricos.

b) análise para pequenas perturbações em torno de uma trajetória.

$$\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{x}_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{x}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \ddot{x}_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \ddot{x}_n} \end{bmatrix}_{\text{aolongo da trajetória}} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \Delta \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right]_{\text{idem}} \Delta \dot{\mathbf{x}} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\text{idem}} \Delta \mathbf{x} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\text{idem}} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

São obtidas equações diferenciais lineares com parâmetros variantes no tempo e estes parâmetros dependem da trajetória.

$\Delta \mathbf{u}$ - fontes de erro: erros no estado inicial (posição, velocidade, inclinação e direção), erros de medida (giros e acelerômetros).

$\Delta \mathbf{x}$ - erros do sistema: erros de posição, velocidade, inclinação e direção estimadas. Os erros de truncamento não são consideradas aqui.

Sistema de coordenadas para a análise de erros:

São definidos 3 sistemas de coordenadas. Se os sistema de navegação fôsse ideal, os 3 sistemas seriam coincidentes ao sistema LLLN ($= \mathbf{s}$). Os sistemas são definidos abaixo:

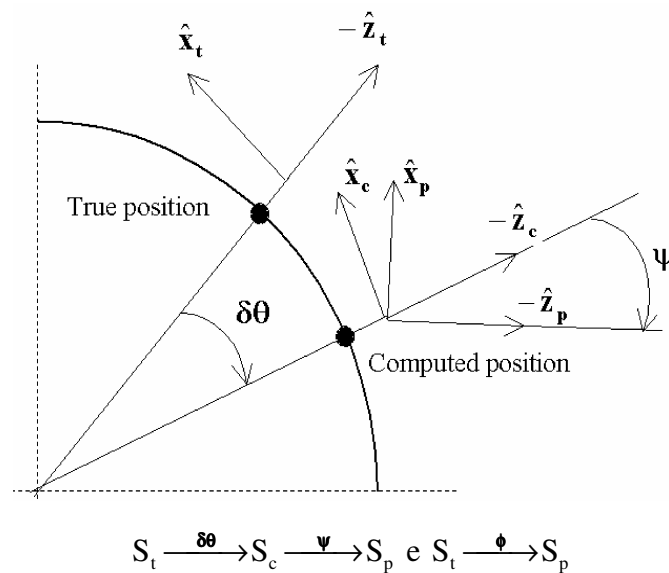
- 1) Sistema verdadeiro - \mathbf{t} (coincide com o sistema LLLN $= \mathbf{s}$ na posição verdadeira do sistema de navegação. Sua velocidade angular com relação ao sistema inercial \mathbf{i} é $\boldsymbol{\omega}$.
- 2) Sistema computado - \mathbf{c} é o sistema LLLN que corresponde à posição computada pelo sistema de navegação. Sua velocidade angular com relação ao sistema inercial é $\boldsymbol{\omega}_c$.
- 3) Sistema da plataforma - \mathbf{p} é definido pelo sistema fixo aos eixos da plataforma. Sua velocidade angular com relação ao sistema inercial é $\boldsymbol{\omega}_p$.

Denotaremos:

ϕ - "vetor" angular com o qual é preciso girar o sistema \mathbf{t} para fazê-lo coincidir com \mathbf{p} .

$\delta\theta$ - "vetor" angular com o qual é preciso girar o sistema \mathbf{t} para fazê-lo coincidir com \mathbf{c} .
É decorrente de erros de posição.

ψ - "vetor" angular com o qual é preciso girar o sistema \mathbf{c} para fazê-lo coincidir com \mathbf{p} .
É decorrente de erros nos giros, os quais provocam desalinhamento da plataforma.



$$\phi = \delta\theta + \psi \text{ (Modelo de Pinson – 1963)}$$

$$\delta\theta = f(\Delta R), \psi = h(\epsilon)$$

Sistemas de coordenadas:

	Conhecido	Desconhecido
Incorreto	S_c, S_b estimado	S_p
Correto	S_e, S_i	S_t, S_b

Primeiramente, as equações diferenciais que regem os erros em uma plataforma estabilizada mecanicamente e suas soluções serão analisados, para casos distintos, no domínio do tempo. Em seguida, será derivado um modelo dinâmico desses erros no espaço de estados e analisados os autovalores do polinômio característico. O estudo do efeito dos erros dos sensores sobre o alinhamento inicial e sobre a propagação dos erros de navegação permitirá estabelecer uma visão crítica sobre o impacto da qualidade dos sensores inerciais sobre o desempenho do sistema de navegação. Adicionalmente, o modelo de erros no espaço de estados será útil quando for estudada a fusão dos sensores inerciais com outros sensores mediante filtragem de Kalman.

5.3 – Análise de erros em plataforma estabilizada mecanicamente

5.3.1 - Equação de erro de deriva:

Os girômetros medem a velocidade angular. Estes erros são propagados pelo sistema de controle da plataforma à plataforma e esta causa uma diferença angular entre o sistema **p** e o sistema **c**, e portanto

$$\epsilon = \overset{i}{\psi}, \quad \overset{i}{\psi} = \overset{t}{\psi} + \omega \times \psi, \quad \therefore \overset{t}{\psi} + \omega \times \psi = \epsilon$$

Se descrevermos todos os vetores no sistema **t** teremos:

$$\frac{d\psi}{dt} + \omega \times \psi = \epsilon, \text{ todos os vetores descritos no sistema verdadeiro t.}$$

Obs:

As diferenças entre os sistemas **p** e **c** que não forem causados diretamente pela deriva dos girômetros podem ser descritos em termos de uma deriva equivalente. A equação acima é uma das equações vetoriais a serem solucionadas na análise de erros.

5.3.2 - Equação de erro de posição no sistema verdadeiro **t**:

O veículo é suposto deslocar-se sobre uma trajetória conhecida. Deseja-se computar o que o sistema de navegação "enxerga" durante a trajetória. Já foi visto que no computador de bordo é resolvida a equação de posição básica relacionada às medidas de aceleração:

$$\overset{ii}{R} = A_{sp} + g_m \tag{5.1}$$

As equações de navegação foram obtidas após a diferenciação em 2 sistemas de coordenadas (s e e), para que resultasse \mathbf{V}_e - o vetor velocidade terrestre, i.e., com relação à Terra, como solução da primeira equação diferencial vetorial e para se obter λ , Λ , h como solução da segunda equação diferencial vetorial. Neste instante, será mais adequado estudarmos o problema com relação a somente um sistema de coordenadas girantes. Suponhamos que este sistema de coordenadas se mova com velocidade angular ω com relação ao espaço inercial. Chamemos este sistema girante de q e então:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \overset{qq}{\ddot{\mathbf{R}}} + 2\omega \times \overset{q}{\dot{\mathbf{R}}} + \overset{q}{\dot{\omega}} \times \mathbf{R} + \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) \quad (5.2)$$

Lembrando que

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_m - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) \quad (5.3)$$

onde Ω é o vetor velocidade angular da Terra. Como já visto, substituindo (5.2) e (5.3) em (5.1) resulta em

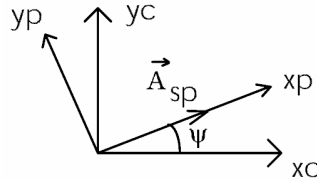
$$\overset{qq}{\ddot{\mathbf{R}}} + 2\omega \times \overset{q}{\dot{\mathbf{R}}} + \overset{q}{\dot{\omega}} \times \mathbf{R} + \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = \mathbf{A}_{sp} + \mathbf{g}$$

Deseja-se que o sistema girante a ser considerado seja c , isto é, $q=c$. Então:

$$\overset{cc}{\ddot{\mathbf{R}}} + 2\omega_c \times \overset{c}{\dot{\mathbf{R}}} + \overset{c}{\dot{\omega}_c} \times \mathbf{R} + \omega_c \times (\omega_c \times \mathbf{R}) - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = \mathbf{A}_{sp} + \mathbf{g} \quad (5.4)$$

O computador recebe leituras incorretas de força específica, isto é, ao invés de \mathbf{A}_{sp} correta é lida a medida (verifique!):

$$\mathbf{A}_{sp} + \nabla - \psi \times \mathbf{A}_{sp} \quad (5.5)$$



onde ∇ é o erro de bias na leitura dos acelerômetros e o erro devido ao desalinhamento angular da plataforma provoca uma componente de erro dada pelo produto vetorial acima. Em consequência da introdução destes erros de medida de força específica, o computador de bordo computará a posição incorreta $\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}$ no lugar de \mathbf{R} e portanto a aceleração da gravidade $\mathbf{g} + \Delta\mathbf{g}$ no lugar de \mathbf{g} . (Observe que as velocidades angulares Ω e ω_c representadas no sistema computado c , ainda que incorretas, são exatamente conhecidas). Substituindo estas grandezas em (5.4) e cancelando os valores nominais do lado direito do sinal de igualdade com aqueles do lado esquerdo resulta em:

$$\overset{cc}{\ddot{\Delta\mathbf{R}}} + 2\omega_c \times \overset{c}{\dot{\Delta\mathbf{R}}} + \overset{c}{\dot{\omega}_c} \times \Delta\mathbf{R} + \omega_c \times (\omega_c \times \Delta\mathbf{R}) - \Omega \times (\Omega \times \Delta\mathbf{R}) = \nabla - \psi \times \mathbf{A}_{sp} + \Delta\mathbf{g}$$

É possível voltar ao sistema inercial, fornecendo então

$$\overset{ii}{\Delta \mathbf{R}} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \Delta \mathbf{R}) = \nabla - \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{A}_{sp} + \Delta \mathbf{g}$$

Uma vez que a trajetória do veículo é conhecida, interessa-nos passar agora ao sistema \mathbf{t} que gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ com relação ao sistema inercial, resultando em:

$$\overset{tt}{\Delta \mathbf{R}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \overset{t}{\Delta \mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \overset{t}{\Delta \mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{R}) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \Delta \mathbf{R}) = \nabla - \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{A}_{sp} + \Delta \mathbf{g} \quad (5.6)$$

Neste sistema é mais fácil de se trabalhar pois temos conhecimento da posição verdadeira do veículo (lembrar que o problema assume que o veículo se move em uma trajetória conhecida e examina-se o erro do sistema com relação a esta trajetória). É possível mostrar que a dependência de $\Delta \mathbf{g}$ com o erro de posição $\Delta \mathbf{R}$ é dada por:

$$\Delta \mathbf{g} = g_e R_e^2 \left(-\frac{\Delta \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} + 3 \frac{\mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^5} \mathbf{R} \right) \quad (5.6-b)$$

onde relembramos que g_e é a aceleração da gravidade sobre a superfície da Terra *na latitude em que se encontra o sistema*. R_e é a distância do centro da Terra à sua superfície *na mesma latitude em que se encontra o veículo*. Substituindo a equação acima em (5.6) fornece:

$$\begin{aligned} \overset{tt}{\Delta \mathbf{R}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \overset{t}{\Delta \mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \overset{t}{\Delta \mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{R}) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \Delta \mathbf{R}) - 3g_e R_e^2 \frac{\mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^5} \mathbf{R} + g_e R_e^2 \frac{\Delta \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \\ = \nabla - \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{A}_{sp} \end{aligned}$$

$$\overset{t}{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.7) \text{ e } (5.8)$$

A solução simultânea das equações vetoriais acima (nove equações diferenciais escalares) fornecerá o erro de posição, erro de velocidade e desalinhamento angular $\overset{t}{\Delta \mathbf{R}}$, $\Delta \mathbf{R}$ e $\boldsymbol{\psi}$ em função das fontes de erro devido à deriva dos giroscópios e bias dos acelerômetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ e ∇ , com condições iniciais $\overset{t}{\Delta \mathbf{R}}(0), \Delta \mathbf{R}(0), \boldsymbol{\psi}(0)$. O sistema acima é caracterizado pelos parâmetros $\boldsymbol{\omega}(t), \overset{t}{\boldsymbol{\omega}}(t), g_e(t), R_e(t), \mathbf{A}_{sp}(t)$, os quais são perfeitamente conhecidos pois a trajetória nominal (descrita no sistema \mathbf{t}) é conhecida a cada instante. Será também visto na seção de análise de erros que o erro na determinação da gravidade $\Delta \mathbf{g}$ é função linear do erro de posição $\Delta \mathbf{R}$ próximo à superfície da Terra (i.e., a baixa altitude). Desta forma, as equações acima correspondem, para um sistema de navegação operando a baixa altitude, a um sistema linear variante no tempo descrito por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$.

5.3.3 - Equações de erro de velocidade:

A velocidade V_e do veículo com relação ao sistema fixo à Terra e já foi definida como:

$$V_e = \dot{R}^e$$

a partir do qual o erro em velocidade com relação à Terra é então

$$\Delta V_e = \Delta \dot{R}^e$$

Relembrando que o sistema t (LLLN coincidente com a posição verdadeira do veículo) gira com velocidade $\rho = \omega - \Omega$ (sabida ao longo da trajetória nominal) com relação ao sistema e fixo à Terra, podemos então descrever o erro em velocidade com relação à Terra por

$$\Delta \dot{R}^e = \Delta \dot{R}^t + \rho \times \Delta R$$

ou seja,

$$\Delta V_e = \Delta \dot{R}^t + \rho \times \Delta R$$

Desta forma, a solução de (5.7) permite a obtenção do erro em velocidade no sistema e fixo à Terra através da transformação acima, sem que seja necessária a solução de equação diferencial adicional.

5.3.4 - Caso especial: o sistema de navegação está em repouso e possui somente erros de bias nos acelerômetros

Analisemos o caso especial em que o sistema está em repouso sobre a superfície da Terra e portanto:

$$A_{sp} = -g_e \text{ e } V_e = 0$$

Vamos descrever todos os vetores envolvidos nas equações (5.7) e (5.8) no sistema t . Supõe-se que o sistema de navegação é dotado de giros ideais (sem deriva) e está sujeito somente a erros de bias nos acelerômetros, denotados no sistema t por:

$$\nabla_t = [\nabla_{xt} \quad \nabla_{yt} \quad \nabla_{zt}]^T \text{ e } \varepsilon = 0$$

Mais ainda, supõe-se que os erros de posição inicial, de velocidade inicial e de desalinhamento inicial entre os eixos da plataforma e o sistema computado da plataforma sejam todos nulos, isto é:

$$\Delta R(0) = \Delta \dot{R}(0) = \psi(0) = 0$$

A condição inicial sobre o desalinhamento e a hipótese de giros ideais, tem como consequência (vide equação (5.8)):

$$\psi(t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

O erro na determinação do vetor gravidade é representado no sistema t por (vide 5.6-b):

$$\Delta \mathbf{g}_t = g_e R_e^2 \left\{ \frac{-1}{(R_e + h)^3} \begin{bmatrix} \Delta R_x \\ \Delta R_y \\ \Delta R_z \end{bmatrix} + \frac{3(\Delta R_x, \Delta R_y, \Delta R_z)^t \cdot (0, 0, R_e + h)^t}{(R_e + h)^5} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_e + h \end{bmatrix} \right\} = \frac{g_e R_e^2}{(R_e + h)^3} \begin{bmatrix} -\Delta R_x \\ -\Delta R_y \\ 2\Delta R_z \end{bmatrix}$$

Escolhendo-se, por simplicidade e sem incorrer em perda de generalidade, que o sistema se encontra em repouso com relação à Terra no Golfo da Guiné na costa de Gana, portanto posicionado com as coordenadas dadas por latitude λ = longitude Λ = altura h = 0, tem-se as seguintes representações no sistema t :

$$\mathbf{A}_{sp,t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_0 \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}, \quad \Delta \mathbf{g}_t = \frac{g_0}{R_0} \begin{bmatrix} -\Delta R_x & -\Delta R_y & 2\Delta R_z \end{bmatrix}^T$$

Substituindo em (5.7), resulta em:

$$\begin{bmatrix} \Delta R_{xt}^{tt} \\ \Delta R_{yt}^{tt} \\ \Delta R_{zt}^{tt} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta R_{xt}^t \\ \Delta R_{yt}^t \\ \Delta R_{zt}^t \end{bmatrix} - \frac{g_0}{R_0} \begin{bmatrix} -\Delta R_{xt} \\ -\Delta R_{yt} \\ 2\Delta R_{zt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{xt} \\ \nabla_{yt} \\ \nabla_{zt} \end{bmatrix}$$

Resulta assim as equações de erro em posição e velocidade para um sistema de navegação em repouso sobre a linha do equador.

$\Delta R_{yt}^{tt} + \frac{g_0}{R_0} \Delta R_{yt} - 2\Omega \Delta R_{zt}^t = \nabla_{yt} \quad (5.9-a)$
$\Delta R_{xt}^{tt} + \frac{g_0}{R_0} \Delta R_{xt} = \nabla_{xt} \quad (5.9-b)$
$\Delta R_{zt}^{tt} - 2\frac{g_0}{R_0} \Delta R_{zt} + 2\Omega \Delta R_{yt}^t = \nabla_{zt} \quad (5.9-c)$

5.3.4.1 - Oscilações de Schuler:

Seja $\omega_s^2 = \frac{g_0}{R_0}$. Então, no eixo xt tem-se:

$$\Delta R_{xt}^{tt} + \omega_s^2 \Delta R_{xt} = \nabla_{xt}$$

cujas solução é

$$\Delta R_{xt} = \frac{\nabla_{xt}}{\omega_s^2} (1 - \cos(\omega_s t))$$

o que caracteriza o erro de posição no canal norte como oscilante não amortecido, com período de 84.5 minutos (oscilação de Schuler).

No eixo yt:

$$\Delta R_{yt}^{tt} + \omega_s^2 \Delta R_{yt} = \underbrace{\nabla_{yt} + 2\Omega \Delta R_{zt}^t}_{\text{excitação}}$$

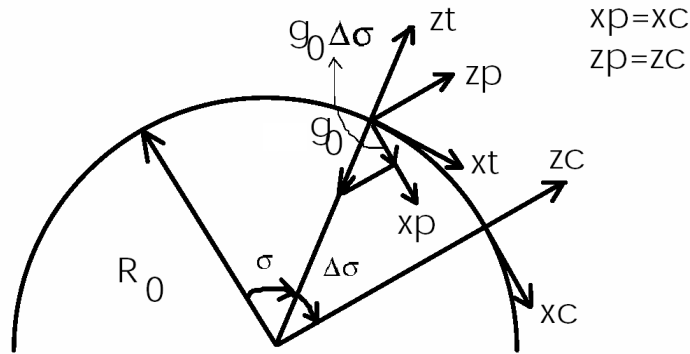
No eixo zt:

$$\Delta R_{zt}^{tt} - 2\omega_s^2 \Delta R_{zt} = \underbrace{\nabla_{zt} - 2\Omega \Delta R_{yt}^t}_{\text{excitação}}$$

Transformando-se por Laplace a equação relativa ao eixo zt, observa-se a existência de instabilidade neste canal vertical (polo real no semiplano direito), a qual motiva o emprego de um sensor dedicado para a estabilização deste canal. Uma vez efetuada a estabilização do canal vertical, $\Delta R_z^t \approx 0$ e o erro de posição no canal oeste se mostra oscilante sem amortecimento com o mesmo período de Schuler que o canal norte.

As conclusões acima são gerais, apesar do caso específico analisado aqui. A frequência $\sqrt{\frac{g_0}{R_0}}$ corresponde àquela de um pêndulo de comprimento igual ao raio da Terra sujeito à aceleração da gravidade.

Explicação Física da Oscilação de Schuler:



No caso ideal, os sistemas **t**, **p** e **c** coincidem e o computador de bordo realiza o seguinte cálculo:

$$R_{xt} = \iint A_{sp,xt} dt dt$$

Devido a erros nos acelerômetros (erros de alinhamento da plataforma desprezados aqui), $\mathbf{t} \neq \mathbf{p} = \mathbf{c}$, causando erros de posição e incorrendo o acelerômetro em medidas incorretas, como visto na figura anterior. Desta forma:

$$R_{xt} + \Delta R_{xt} = \iint (A_{sp,xt} + \delta A_{sp,xt} - g_0 \Delta \sigma) dt dt$$

onde o integrando corresponde às medidas errôneas do acelerômetro devido a erros do acelerômetro e ao desalinhamento entre os sistemas $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ e o sistema LLLN verdadeiro **t**.

O sinal negativo se deve ao fato de o acelerômetro medir a força específica de reação à gravidade na direção de \mathbf{x}_p . Então:

$$\Delta R_{xt} = \iint (\delta A_{sp, xp} - g_0 \Delta \sigma) dt dt$$

$$\Delta R_{xt} + g_0 \Delta \sigma = \delta A_{sp, xp}$$

$$\text{onde } \sin(\Delta \sigma) = \frac{\Delta R_{xt}}{R_0} \approx \Delta \sigma$$

resultando finalmente em

$$\Delta R_{xt} + \frac{g_0}{R_0} \Delta R_{xt} = \delta A_{sp, xt}$$

No caso de $\delta A_{sp, xt} = \nabla_{xt} \cdot \mathbf{l}(t)$:

$$\Delta R_{xt} = \frac{\nabla_{xt}}{g_0} R_0 \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{g_0}{R_0}} t\right) \right] \quad (5.10-a)$$

Como já visto, o erro de posição neste caso ocorre devido ao campo gravitacional ser central. Consiste de oscilação não amortecida em torno de $\frac{\nabla_{xt}}{\omega_s^2}$ e com período de Schuler (84.5 minutos).

5.3.5 - Caso especial: o sistema de navegação está em repouso e possui somente erros de deriva nos giros

Neste caso, há desalinhamento da plataforma com relação ao sistema \mathbf{c} computado devido às derivas constantes dos girômetros $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{l}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \text{ (efeito negligível a curto prazo, bem inferior a 24 horas)} \quad \therefore \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varepsilon} t$$

O erro de medida do acelerômetro, enquanto o desalinhamento for pequeno, é então $\delta A_{sp, xt} \approx -g_0 \varepsilon t$, o qual, ao ser substituído em (5.7) resulta em:

$$\therefore \Delta R_{xt} = -\varepsilon R_0 \sqrt{\frac{R_0}{g_0}} \left[\sqrt{\frac{g_0}{R_0}} t - \sin\left(\sqrt{\frac{g_0}{R_0}} t\right) \right] \quad (5.10-b)$$

Uma comparação entre as equações de erro acima mostra que a **deriva dos girômetros provoca erro ilimitado** (em uma primeira análise linear e para um intervalo de tempo bastante inferior ao período de rotação da Terra de 24 horas) e portanto o fator mais importante na caracterização da qualidade do sistema de navegação é a qualidade dos

girômetros. Quanto menor a deriva dos girômetros, maior a qualidade do sistema de navegação.

- **O fenômeno Schuler é providencial**, pois limita a amplitude da oscilação do erro de posição no plano horizontal local quando as leituras do acelerômetro possuem bias constante (caso 1). Note que, se não houvesse o movimento pendular da plataforma (como quando se assume Terra plana, i.e., raio da Terra infinito e $\Delta\sigma \approx 0$), o erro de bias constante no acelerômetro se propagaria pelo sistema causando um erro de posição em um canal horizontal proporcional ao quadrado do tempo, como visto abaixo:

$$\Delta R_{xt}^{tt} = \nabla_{xt} \therefore \Delta R_{xt} = \frac{\nabla_{xt}}{2} t^2 \quad (5.11-a)$$

- O fenômeno Schuler também reduz a taxa de divergência do erro de posição em um canal horizontal para proporcional ao tempo quando as leituras do acelerômetro são corrompidas por desalinhamento da plataforma devido à deriva dos girômetros (caso 2). Observe que, se não houvesse a dinâmica pendular, teríamos este erro de posição sendo proporcional ao cubo do tempo:

$$\Delta R_{xt}^{tt} = -g_0 \epsilon t \therefore \Delta R_{xt} = -\frac{g_0 \epsilon}{6} t^3 \quad (5.11-b)$$

- Uma vez que a equação (5.10-b) descreve um erro ilimitado causado por desalinhamento da plataforma originado na deriva dos giros, a determinação da qualidade do sistema de navegação comumente emprega o erro de posição ([m],[naut.mi.]) em um canal horizontal após uma hora, ou então a magnitude da deriva dos giros ϵ em ($^\circ/h$).

$$\epsilon \left[\frac{\text{graus}}{h} \right] \approx \frac{|\Delta R_{xt} [\text{m, após 1 hora}]| \cdot 180}{R_0 \pi}$$

O fenômeno Schuler não se deve à escolha do sistema LLLN para análise de erros, mas sim deriva do fato do campo gravitacional ser um **campo central**, cuja força de atração aponta para o centro da Terra. Ele acrescenta um amortecimento natural ao sistema físico no plano horizontal local. Desta forma, as exatidões requeridas dos sensores inerciais podem ser relaxadas para a solução de um grande número de problemas de navegação próxima à superfície da Terra. Assim, se torna possível a produção de sensores inerciais em escala industrial. Em consequência da redução de custos envolvidos na produção de sensores inerciais, a utilização de sistemas inerciais de navegação é acessível a uma ampla gama de usuários, dependendo seu custo da especificação da qualidade requerida durante um dado tempo de operação.

5.3.6 - Alinhamento Inicial

Uma linha no espaço é determinada como a interseção de dois planos, os quais são definidos por seus respectivos vetores normais. Para que esta interseção exista, tais vetores não podem ser paralelos. A Terra possui estas duas direções, \mathbf{g} e $\mathbf{\Omega}$. Suas direções são conhecidas em qualquer ponto próximo à superfície da Terra. Portanto, se a plataforma estiver alinhada de maneira apropriada, sabe-se quais forças específicas devem ser medidas pelos acelerômetros e quais velocidades angulares devem ser medidas pelos girômetros. Quando lidamos com uma plataforma estabilizada mecânicamente que se encontra em repouso e alinhada com o sistema $s=LLN$, seus sensores medirão:

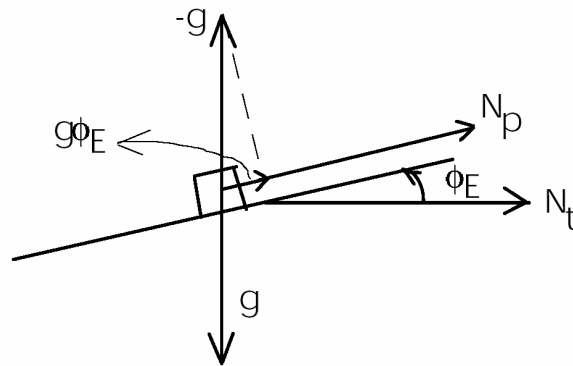
$$\mathbf{A}_{sp,s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{North} \\ \text{East} \\ \text{Down} \end{matrix} \quad \mathbf{\omega}_{p,s} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix}$$

Sendo \mathbf{g} com magnitude aproximada de 10 m/s^2 e $\mathbf{\Omega}$ com magnitude aproximada de $7 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$, o processo de alinhamento com a vertical local é bem mais rápido que o de alinhamento com o norte. Além disso, também no alinhamento com o norte é importante o papel desempenhado por \mathbf{g} .

5.3.6.1 - Alinhamento com a vertical

Caso 1: Desalinhamento em torno do eixo alinhado com o leste

O acelerômetro alinhado com o norte da plataforma fornece uma leitura da reação à componente da gravidade. Esta leitura é corrompida por bias, resultando em $g\phi_E + \nabla_{N_p}$ como mostrado abaixo.



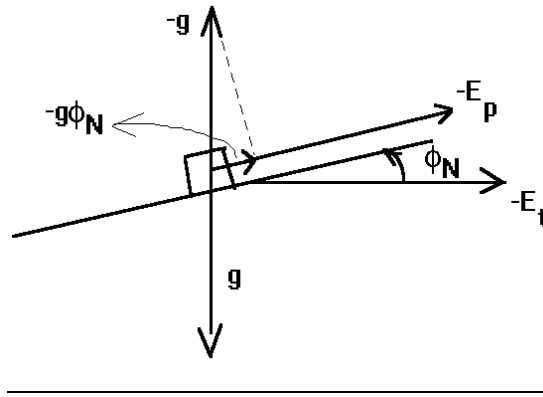
O alinhamento é feito através de rotação em torno do eixo leste da plataforma até que a leitura da velocidade V_N na saída do sistema de navegação se mantenha nula por um período de tempo. Por se tratar V_N da integral da força específica medida pelo acelerômetro alinhado com o Norte, o efeito do ruído em altas frequências na

medida provinda desse acelerômetro é atenuado (assíntota com decaimento de 20dB por década). Ao final do processo, o ângulo de desalinhamento residual é dado por:

$$\phi_{E,\min} = -\frac{\nabla_{Np}}{g}$$

Caso 2: Desalinhamento em torno do eixo alinhado com o norte

O acelerômetro alinhado com o leste da plataforma fornece uma leitura da reação à componente da gravidade. Também esta leitura é corrompida por bias, resultando em $-g\phi_N + \nabla_{Ep}$ como mostrado abaixo.

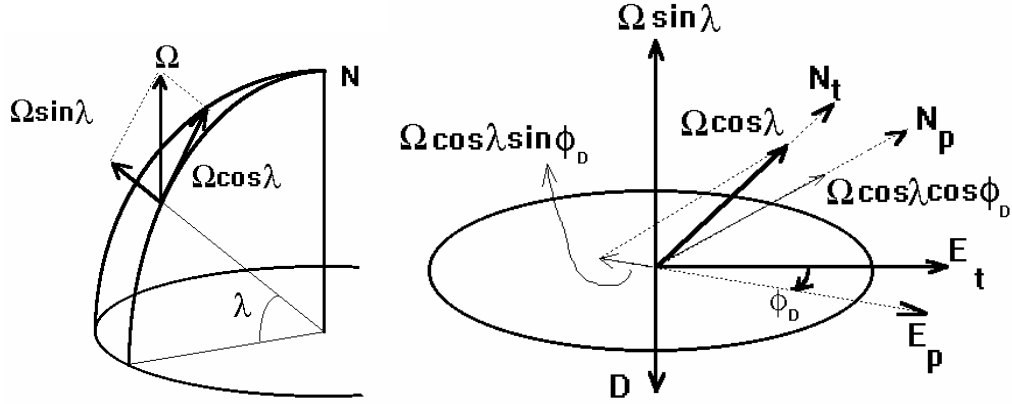


O alinhamento é feito através de rotação em torno do eixo norte da plataforma até que a leitura da velocidade V_E na saída do sistema de navegação se mantenha nula por um período de tempo. Por se tratar V_E da integral da força específica medida pelo acelerômetro alinhado com o Leste, o efeito do ruído em altas frequências na medida provinda desse acelerômetro é atenuado (assíntota com decaimento de 20dB por década). Ao final do processo, o ângulo de desalinhamento residual é dado por:

$$\phi_{N,\min} = \frac{\nabla_{Ep}}{g}$$

5.3.6.2 - Alinhamento com o norte verdadeiro (gyrocompassing): (Vide artigo Bar-Itzhack, I.Y. (1995); Two Misconceptions in the Theory of Inertial Navigation Systems, Journal of Guidance, vol.18 no.4, pp. 908-911)

Assumindo-se a plataforma já alinhada com a vertical, tem-se as seguintes componentes de velocidade angular devido à rotação da Terra ao longo dos eixos Norte, Leste e Down da plataforma:



Devido ao desalinhamento ϕ_D desconhecido da plataforma em relação ao norte verdadeiro, a plataforma precisa ter uma certa velocidade angular com relação ao espaço inercial de forma a manter-se alinhada com a vertical. Esta velocidade angular, descrita no sistema LLLN da plataforma, é:

$$\omega_{p,LLL N-p} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \cos \phi_D \\ -\Omega \cos \lambda \sin \phi_D \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} N \\ E \\ D \end{matrix}$$

A plataforma, no entanto, é controlada pelo sistema de navegação, que assume que a plataforma está alinhada de forma exata com o sistema LLLN verdadeiro t . O comando de velocidade angular enviado à plataforma para mantê-la paralela ao plano horizontal local e alinhada com a vertical local é:

$$\omega_{\text{comando},LLL N-p} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix}$$

Observe que, ao manter a plataforma alinhada com a vertical local (i.e., paralela ao plano horizontal local), o eixo norte da plataforma se eleva e foge da direção do norte verdadeiro a uma taxa dada pela componente leste da velocidade angular da Terra, conforme a figura acima. Assim, a velocidade angular com relação ao espaço inercial que a plataforma precisa executar para manter-se alinhada com a vertical será, para ϕ_D pequeno:

$$\omega_{p,LLL N-p} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ -\Omega \cos \lambda \cdot \phi_D \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} N_p \\ E_p \\ D_p \end{matrix}$$

Portanto, existe uma incorreção no comando de precessão enviado à plataforma dado por:

$$\Delta \omega_{\text{comando,LLLN-p}} = \omega_{\text{p,LLLN-p}} - \omega_{\text{comando,LLLN-p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega \phi_D \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

na direção E_p para que a plataforma se mantenha paralela ao plano horizontal local verdadeiro. Devido à ausência desse comando na direção E_p , a direção do norte da plataforma N_p foge do plano horizontal local verdadeiro a uma taxa:

$$\dot{\phi}_E = \Omega \cos(\lambda) \phi_D \quad \therefore \quad \phi_E(t) = \phi_E(0) + \int_0^t \Omega \cos(\lambda) \phi_D . d\tau$$

Este desalinhamento do eixo N_p com relação ao plano horizontal local verdadeiro resulta em uma leitura no acelerômetro alinhado com o eixo norte da plataforma, como já visto no alinhamento com a vertical (caso 1), igual a:

$$g\phi_E = g \int_0^t \Omega \cos(\lambda) \phi_D . d\tau \quad , \text{ assumindo } \phi_E(0) = 0$$

onde também se assumiu que a plataforma está inicialmente alinhada com o plano horizontal local verdadeiro. Adicionalmente, a deriva ε_E do girômetro da plataforma que tem seu eixo sensível alinhado com a direção E_p causa a velocidade angular $-\varepsilon_E$ em torno da direção E_p da plataforma com respeito ao referencial inercial; assim, a medida desse girômetro indica zero.

Portanto, considerando-se o efeito da deriva do girômetro leste, o eixo N_p da plataforma afasta-se do plano horizontal local verdadeiro com velocidade angular $\dot{\phi}_E = \Omega \cos(\lambda) \phi_D - \varepsilon_E$ em torno da direção E_p . Primeiramente busca-se aproximar o norte da plataforma do norte verdadeiro mediante anulação da medida corrompida por deriva fornecida pelo girômetro alinhado com a direção leste da plataforma. *O alinhamento fino da plataforma com o norte verdadeiro é feito através da contínua manutenção da horizontal local e pela rotação em torno do eixo vertical, visando a eliminar o desalinhamento ϕ_D mediante monitoração da saída do acelerômetro alinhado com o norte da plataforma até que essa leitura torne-se nula, i.e.,*

$$g\phi_E = g\Omega \cos(\lambda) \int_0^t \left(\phi_D - \frac{\varepsilon_E}{\Omega \cos \lambda} \right) . dt = 0$$

Assim, após zerar a medida do girômetro leste durante o alinhamento grosso com o norte verdadeiro, parte-se para o alinhamento fino mediante cancelamento da medida do acelerômetro norte. É benéfica a existência do ganho g na leitura do

acelerômetro norte, o que permite maior acurácia no alinhamento do que o cancelamento da medida do girômetro leste, representado pelo integrando $\phi_D - \varepsilon_E / (\Omega \cos \lambda)$. Além disto, a operação implícita de integração no tempo filtra os componentes ruidosos, de alta frequência, existentes na leitura do giro. O processo de alinhamento com o norte é terminado quando a leitura do acelerômetro fôr nula, isto é:

$$\phi_{Dp,min} = \frac{\varepsilon_E}{\Omega \cos \lambda}$$

De forma resumida:

- Por meio dos torqueadores, a plataforma estabilizada mecânicamente é alinhada inicialmente, de forma grosseira, até um erro de alguns graus.
- Realiza-se um ajuste fino através de alinhamento com a vertical e com o norte local. Um limite inferior no erro de alinhamento angular da plataforma é, aproximadamente:

$$\Phi_{\text{erro-p,LLLN-t}} \approx \begin{bmatrix} \frac{\nabla_E}{g} \\ -\frac{\nabla_N}{g} \\ \frac{\varepsilon_E}{\Omega \cos \lambda} \end{bmatrix} \begin{matrix} N_t \\ E_t \\ D_t \end{matrix}$$

O sinal "aproximadamente" se deve ao fato de não ter sido levado em conta o efeito composto de cada erro angular sobre os outros erros. Entretanto, a expressão acima é uma aproximação excelente para o limite inferior. Existem outros métodos que permitem uma melhor estimativa do limite inferior para o erro de alinhamento com o norte.

- Por ser a velocidade angular da Terra um sinal de magnitude mais fraca que o sinal de gravidade, o processo de girocompasso requer bastante mais tempo do que o de alinhamento com a horizontal local.
- A transferência de alinhamento do avião para um míssil por ele transportado é feita usando manobras que causam acelerações laterais que auxiliam na atenuação do erro ϕ_D de alinhamento.
- A filtragem de Kalman busca estimar os erros de alinhamento para então cancelá-los.

Rotação da plataforma para manter alinhamento após o alinhamento inicial:

A plataforma é precessionada com relação ao espaço inercial conforme o comando nominal a seguir, gerado pelo sistema de controle (servomecanismo) da plataforma para mantê-la alinhada com o sistema de coordenadas NED:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{comando, LLLN-p}} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix}$$

Isso é feito gerando-se as correntes apropriadas nos torqueadores dos girômetros que estão instalados na plataforma, causando em suas saídas sinais que seriam produzidos se ela estivesse precessionando com uma velocidade angular de magnitude desejada, mas em direção oposta à desejada.

Os torqueadores da plataforma recebem sinais do sistema de controle da plataforma para então precessionar a plataforma na direção oposta à oposta da desejada (isto é, na direção desejada) para cancelar a precessão imaginária que foi criada pela injeção das correntes nos torqueadores dos girômetros. Dessa forma, a plataforma precessionará na direção comandada, conforme desejado.

5.4 - Computações na plataforma solidária (strapdown)

- a) Computações de orientação (não são requeridas em plataforma estabilizada)
- b) Computações de velocidade e posição (cálculos de navegação)

5.4.1 - Computações de orientação:

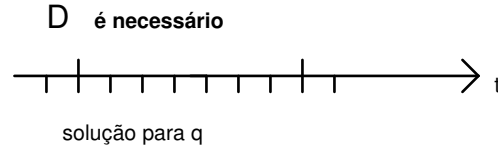
- Determinam a qualidade do sistema de navegação
- Requerem grande exatidão:
 - algoritmo de integração robusto a erros de truncamento
 - palavra do computador suficientemente longa
 - grande velocidade na integração numérica

Métodos para a solução:

I - Solução de $\dot{\mathbf{D}} = -\boldsymbol{\Omega}\mathbf{D}$ (nove integrações) (eq. 1.4)

II - Solução de $\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{q}$ (quatro integrações) (Seção 1.3.5)

Solução de II: usa-se frequência elevada na integração da equação diferencial do quatérnio de orientação \mathbf{q} e a computação da DCM \mathbf{D} , a partir de \mathbf{q} , é feita somente quando \mathbf{D} for necessária para transformar a força específica entre sistemas de coordenadas, em uma frequência mais lenta.



III – Solução de: (3 integrações) (Seção 1.5.2)

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_v = \boldsymbol{\omega}_v^{VI} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}^{VI})_v + (\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}^{VI}))_v \frac{1}{\varphi^2} \left(1 - \frac{\varphi \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)}\right)$$

Solução de III: usa-se frequência elevada na integração da equação diferencial

$\dot{\Delta\boldsymbol{\varphi}}_v = \boldsymbol{\omega}_v^{VI} + \frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}^{VI})_v$ sendo a condição inicial no intervalo de integração dada por $\Delta\boldsymbol{\varphi}_v = \mathbf{0}$. Quando $\Delta\boldsymbol{\varphi}_v$ aumenta de magnitude, ele é somado ao vetor rotação $\boldsymbol{\varphi}_v$ já acumulado, $\Delta\boldsymbol{\varphi}_v$ é zerado e se inicia um novo intervalo de integração. Computação do quatérnio (ou da DCM - vide seção 1.5.1) para transformações requeridas pelo algoritmo de navegação pode ser feita com frequência mais lenta.

Ângulos de Euler não costumam ser usados na computação da orientação devido a:

- singularidades na solução não admitirem manobras completas
- necessidade de funções trigonométricas serem avaliadas

Em todos os métodos mede-se a velocidade angular do veículo - ou o incremento angular acumulado entre instantes de amostragem - e computa-se a orientação

Tipos de solução para equações diferenciais matriciais em I e II:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

1) \mathbf{A} é constante

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Esta solução é exata no caso da velocidade angular do corpo $\boldsymbol{\omega}$ ser constante durante o intervalo de integração. Os erros ocorrem devido ao método usado para computar-se a exponencial da matriz $\mathbf{A}t$. Conforme já visto na Seção 5.4, a solução exata dessa exponencial requer a computação de funções trigonométricas, o que demanda muito esforço computacional do processador embarcado. Uma aproximação por série truncada de potências de $\mathbf{A}t$ é bastante empregada e será vista mais adiante.

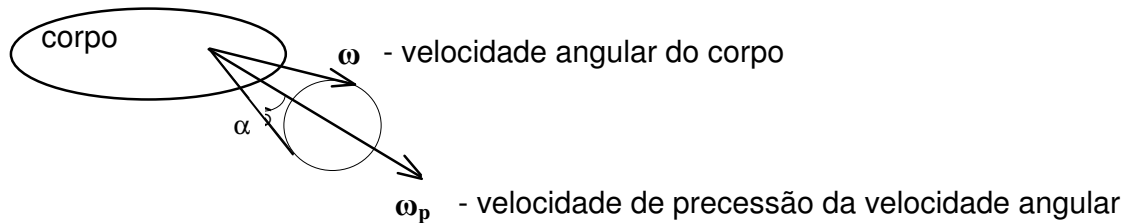
2) \mathbf{A} varia no tempo de acordo com $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0.f(t)$, onde $f(t)$ é uma função escalar

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_0 \int_0^t f(\tau) d\tau} \mathbf{x}(0)$$

Esta solução é exata no caso da velocidade angular do corpo ω variar em magnitude, mas manter sua direção no espaço durante o intervalo de integração. Os erros dependem do método usado no cômputo da exponencial da matriz e da integral de $f(t)$.

3) $\mathbf{A}(t)$ é qualquer.

Assume-se então que o intervalo de integração é bem pequeno e emprega-se o algoritmo para o caso 1 ou o do caso 2 mencionados acima. Todo algoritmo de integração de $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Omega} \mathbf{q}$ é analisado nas condições mais desfavoráveis, através de testes padronizados off-line nos quais ω muda constantemente de direção (coning motion) e para os quais se conhece a solução analítica.



Compara-se os resultados do algoritmo de integração com a solução analítica. A proximidade entre as soluções depende do ângulo α da geratriz do cone, das velocidades angulares de precessão ω_p e do corpo ω , do intervalo de integração e do tamanho da palavra do computador. Se o algoritmo é suficientemente exato para este teste off-line, então assume-se que o algoritmo de integração pode ser empregado para a integração em tempo real da equação diferencial do quatérnion de rotação do veículo.

Verifiquemos, no caso de parametrização da atitude por DCM ou quatérnion em que a equação diferencial é linear, a base de um algoritmo de determinação de atitude típico, baseado em série truncada de potências de $\mathbf{A}t$:

$$1) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$2) \text{ Expansão em série de Taylor: } \mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t)\Delta t + \ddot{\mathbf{x}}(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + \dots$$

$$\text{De 1): } \ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d(\dot{\mathbf{x}}(t))}{dt} = (\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^2)\mathbf{x}$$

Substituindo 1) e o obtido acima em 2):

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}(t)\Delta t.\mathbf{x}(t) + (\dot{\mathbf{A}}(t) + \mathbf{A}^2(t))\mathbf{x}(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + \dots$$

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(t)\Delta t + (\dot{\mathbf{A}}(t) + \mathbf{A}^2(t))\frac{\Delta t^2}{2!} + \dots)\mathbf{x}(t)$$

Para uma taxa elevada de amostragem dos girômetros, assume-se que a velocidade angular se mantenha constante entre amostras e, com isso, $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$. Portanto:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(t)\Delta t + \mathbf{A}^2(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + \dots)\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{x}(t)$$

5.4.2 - Computações de navegação (velocidade e posição)

Acelerômetros fornecem incrementos da integral da força específica no sistema do corpo durante o intervalo $\Delta t'$:

$$\Delta\boldsymbol{\beta}_b = \int_t^{t+\Delta t'} \mathbf{a}_b d\tau$$

5.4.2.1 - Computações no sistema LLLN:

Partindo-se da equação (5.5) com $\mathbf{s}=\text{LLLN}$, torna-se necessária a transformação de $\Delta\boldsymbol{\beta}_b$ para $\Delta\boldsymbol{\beta}_{\text{LLLN}}$, fornecendo o incremento de velocidade $\Delta\mathbf{V}_{\text{LLLN}}$ durante o intervalo $\Delta t'$, como visto abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{V}_{e,\text{LLLN}} &= \int_t^{t+\Delta t'} (\mathbf{a}_{\text{LLLN}} + \mathbf{g}_{\text{LLLN}} - ((\boldsymbol{\rho} + 2\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V}_e)_{\text{LLLN}}) d\tau = \\ &\approx \int_t^{t+\Delta t'} \mathbf{D}_{\text{LLLN}}^b \mathbf{a}_b d\tau + \mathbf{g}_{\text{LLLN}} \cdot \Delta t' - ((\boldsymbol{\rho} + 2\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V}_e)_{\text{LLLN}} \cdot \Delta t' \end{aligned}$$

A aproximação assume que, dentro do período $\Delta t'$, as representações da gravidade e das grandezas vetoriais no terceiro termo, relacionadas com a rotação do sistema LLLN transportado pelo veículo durante seu movimento, se mantêm constantes. Assumido-se ainda que a DCM mantenha-se constante *dentro deste intervalo*, i.e., que o sistema do corpo não gire durante $\Delta t'$, tem-se que:

$$\therefore \Delta\mathbf{V}_{e,\text{LLLN}} = \mathbf{D}_{\text{LLLN}}^b \Delta\boldsymbol{\beta}_b + \mathbf{g}_{\text{LLLN}} \cdot \Delta t' - ((\boldsymbol{\rho} + 2\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V}_e)_{\text{LLLN}} \cdot \Delta t'$$

Esta aproximação provoca erros que são chamados na literatura de *sculling*, em que a interação entre uma aceleração linear em um eixo do corpo e uma velocidade angular em outro eixo ortogonal - originados principalmente da vibração a que os sensores estão sujeitos, pode provocar uma componente de aceleração espúria ao longo do terceiro eixo. (Relacione a nomenclatura deste efeito com o modo de impulsão empregado por

barqueiros - *scullers* - mediante uso de um único remo atuado de forma cíclica na ré do barco.)

Uma vez obtido o incremento de velocidade, é possível proceder com a solução das equações de navegação:

$$\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{e,LLN} \leftarrow \mathbf{V}_{e,LLN} + \Delta \mathbf{V}_{e,LLN} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\Lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_N / (R_N + h) \\ V_E / [(R_E + h) \cos \lambda] \\ -V_D \end{bmatrix}$$

5.4.2.2 - Computações no sistema do corpo

A partir de (5.5), é possível escrever a seguinte aproximação quando $\mathbf{s}=\mathbf{b}$:

$$\mathbf{V}_e^b = \mathbf{A}_{sp} - (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{V}_e + \mathbf{g}(\mathbf{R})$$

$\mathbf{V}_e^e = \mathbf{R}$ é a velocidade terrestre que interessa conhecer

O incremento de velocidade terrestre computado no sistema do corpo é então:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V}_{e,b} &= \Delta \boldsymbol{\beta}_b + \int_t^{t+\Delta t'} (\mathbf{g}_b - (\boldsymbol{\omega}_b^{bi} + \boldsymbol{\Omega}_b) \times \mathbf{V}_{e,b}) d\tau \\ &= \Delta \boldsymbol{\beta}_b + \int_t^{t+\Delta t'} \{ \mathbf{D}_b^{LLL} \mathbf{g}_{LLL} - (\boldsymbol{\omega}_b^{bi} + \mathbf{D}_b^{LLL} \boldsymbol{\Omega}_{LLL}) \times \mathbf{V}_{e,b} \} d\tau \end{aligned}$$

Descrevendo-se as grandezas vetoriais acima no sistema do corpo, nota-se que:

1 - $\Delta \boldsymbol{\beta}_b$ é incremento de velocidade acumulado no intervalo $\Delta t'$ obtido na saída dos acelerômetros,

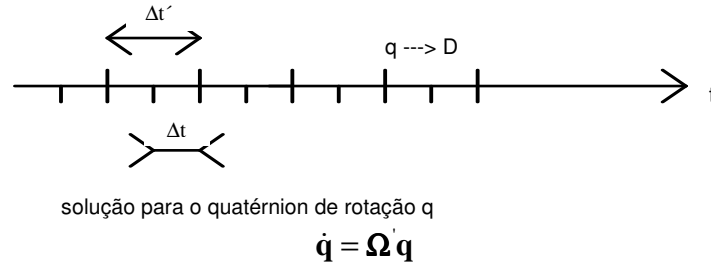
2 - $\boldsymbol{\omega}_b^{bi} = \Delta \boldsymbol{\theta}_b^{bi} / \Delta t'$ é obtido do incremento angular acumulado no intervalo $\Delta t'$ obtido na saída dos girômetros,

3 - \mathbf{g}_b e $\boldsymbol{\Omega}_b$ são necessários, o que requer transformação freqüente para o sistema do corpo

$$\mathbf{g}_b = \mathbf{D}_b^{LLL} \mathbf{g}_{LLL} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Omega}_b = \mathbf{D}_b^{LLL} \boldsymbol{\Omega}_{LLL}$$

4 - Uma vez obtida a solução $\mathbf{V}_{e,b} \leftarrow \mathbf{V}_{e,b} + \Delta \mathbf{V}_{e,b}$, ainda é requerida a transformação $\mathbf{V}_{e,LLN} = \mathbf{D}_{LLN}^b \mathbf{V}_{e,b}$, cujo resultado é empregado na integração das equações diferenciais de posição para a solução da latitude, longitude e altitude, como visto anteriormente. Existe, aqui também, a necessidade de computar-se a DCM do sistema do corpo para o da LLLN com freqüência suficientemente elevada para que a resolução numérica da integral não seja significativamente deteriorada por erros de *sculling*. Múltiplas freqüências de

computação são empregadas visando a uma redução da carga computacional, conforme esquematizado na figura abaixo:



Erro de *sculling*: É causado pela aproximação de assumir a DCM constante durante o intervalo entre amostras de velocidade angular. Veremos agora em qual erro se incorre ao adotar esta simplificação. Para tal, será considerado que a força específica \mathbf{a}_b e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_b^{bNED}$ são constantes no intervalo $\tau \in [0, \Delta t']$. Considere inicialmente as representações da força específica e a respectiva transformação entre elas por meio da DCM:

$$\mathbf{a}_{LLN} = \mathbf{D}_{LLN}^b \mathbf{a}_b$$

Conforme a Seção 5.5.2.1, considere agora o primeiro termo da igualdade de $\Delta \mathbf{V}_{e,LLN}$, a saber, o incremento de velocidade $\Delta \mathbf{v}_{LLN}(t_k)$ $k=1,2,3,\dots$ definido por:

$$\Delta \mathbf{v}_{LLN}(t_k) = \int_0^{\Delta t'} \mathbf{D}_{LLN}^b(\tau + t_{k-1}) \mathbf{a}_b(\tau + t_{k-1}) d\tau$$

Expandindo a DCM em série de Taylor até os termos de primeira ordem em τ :

$$\mathbf{D}_{LLN}^b(\tau + t_{k-1}) \approx \mathbf{D}_{LLN}^b(t_{k-1}) + \dot{\mathbf{D}}_{LLN}^b(t_{k-1})\tau \quad \tau \in [0, \Delta t']$$

Já foi visto, na equação diferencial da DCM, que

$$\dot{\mathbf{D}}_{LLN}^b(t_{k-1}) = \mathbf{D}_{LLN}^b(t_{k-1}) \boldsymbol{\Omega}_b^{bLLN}(t_{k-1})$$

Então, a substituição das igualdades acima em $\Delta \mathbf{v}_{LLN}(t_k)$ resulta:

$$\Delta \mathbf{v}_{LLN}(t_k) = \int_0^{\Delta t'} \left\{ \mathbf{D}_{LLN}^b(t_{k-1}) + \mathbf{D}_{LLN}^b(t_{k-1}) \boldsymbol{\Omega}_b^{bLLN}(t_{k-1}) \tau \right\} \mathbf{a}_b(\tau + t_{k-1}) d\tau$$

Assumindo que, por hipótese, $\mathbf{a}_b(\cdot)$ e $\boldsymbol{\Omega}_b^{bLLN}(\cdot)$ são constantes no intervalo $\tau \in [0, \Delta t']$, a integral acima é aproximada por:

$$\Delta \mathbf{v}_{LLN}(t_k) = \mathbf{D}_{LLN}^b(t_{k-1}) \mathbf{a}_b(t_{k-1}) \Delta t' + \frac{1}{2} \mathbf{D}_{LLN}^b(t_{k-1}) \boldsymbol{\Omega}_b^{bLLN}(t_{k-1}) \mathbf{a}_b(t_{k-1}) \Delta t'^2$$

Isto pode ser reescrito como:

$$\Delta \mathbf{v}_{\text{LLN}}(t_k) = \mathbf{D}_{\text{LLN}}^b(t_{k-1}) \Delta \boldsymbol{\beta}_b + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{D}_{\text{LLN}}^b(t_{k-1}) \boldsymbol{\Omega}_b^{\text{bLLN}}(t_{k-1}) \Delta t' \mathbf{a}_b(t_{k-1}) \Delta t'}_{\text{ERRO DE SCULLING}}$$

O erro de *sculling* pode ser, por sua vez, escrito de forma compacta empregando a representação matricial do produto vetorial como:

$$\text{Erro de sculling} = \frac{1}{2} \mathbf{D}_{\text{LLN}}^b(t_{k-1}) [\Delta \boldsymbol{\phi} \times] (t_{k-1}) \Delta \mathbf{v}_b(t_{k-1})$$

sendo $\Delta \boldsymbol{\phi}$ o incremento angular no intervalo $\Delta t'$ causado pela velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_b^{\text{bNED}}$.

5.4.2.3 - Computações combinadas no sistema do corpo e LLN:

É possível mostrar que, para um observador fixo ao sistema do corpo, a seguinte equação diferencial da velocidade inercial $\mathbf{R}^i = \mathbf{V}$ é válida:

$$\mathbf{V}^b = \mathbf{A}_{\text{sp}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{g}_m$$

Note que $\mathbf{g}_m = \mathbf{g}_m(\mathbf{R})$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{V})$. Se assumirmos que, no intervalo computado, a gravitação não varia significativamente com a posição do veículo, então \mathbf{g}_m é vetor constante e o sistema apresenta dinâmica linear. Representando os vetores no sistema do corpo:

$$\dot{\mathbf{V}}_b = \mathbf{A}_{\text{sp},b} - [\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{V}_b + \mathbf{g}_{m,b}$$

Poderá ser então empregado o princípio da superposição com a atribuição adequada das condições iniciais:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_{1b} &= -[\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{A}_{\text{sp},b} \quad \text{Efeito das forças específicas} \\ \mathbf{V}_{1b}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_{2b} &= -[\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{V}_{2b} + \mathbf{g}_{m,b} \quad \text{Efeito da gravitação} \\ \mathbf{V}_{2b}(0) &= \mathbf{V}_b(0) \end{aligned}$$

sujeito a $\mathbf{V}_b = \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{V}_{2b}$

O vetor \mathbf{V}_{1b} é a chamada velocidade de empuxo (*thrust velocity*), representada no sistema do corpo e causada pela ação das forças específicas que agem sobre o veículo, sendo nula a sua condição inicial. Já o vetor \mathbf{V}_{2b} é a velocidade inercial causada pela ação gravitacional em adição à velocidade inercial inicial. Ambas as parcelas têm suas respectivas equações diferenciais representadas no sistema do corpo. Note que a gravitação varia sua representação muito fortemente no sistema do corpo. Por isso, seria

interessante usar este sistema de coordenadas para tão somente integrar aquela parte da dinâmica afetada pelas forças específicas apenas, de modo a reduzir a carga computacional sobre o processador embarcado.

Por outro lado, para um observador fixo ao sistema LLLN, também é possível mostrar que a seguinte equação diferencial da velocidade terrestre $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_e$ é válida:

$$\dot{\mathbf{V}}_e = -(2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{V}_e - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{A}_{sp} + \mathbf{g}_m$$

Além de ser assumido que \mathbf{g}_m é constante para pequenas variações de \mathbf{R} , também será assumido que $\boldsymbol{\rho}_1$ é constante no intervalo de computação e, por isso, trata-se de sistema dinâmico linear. Representando as grandezas vetoriais no sistema LLLN:

$$\dot{\mathbf{V}}_{e,1} = -[(2\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\rho}_1) \times] \mathbf{V}_{e,1} - [\boldsymbol{\Omega}_1 \times]^2 \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{sp,1} + \mathbf{g}_{m,1}$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{e,1} = -[(2\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\rho}_1) \times] \mathbf{V}_{e,1} + \mathbf{A}_{sp,1} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R}_1)$$

Usando superposição com a atribuição adequada das condições iniciais:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_{e,11} &= -[(2\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\rho}_1) \times] \mathbf{V}_{e,11} + \mathbf{A}_{sp,1} \quad \text{Efeito das forças específicas} \\ \mathbf{V}_{e,11}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_{e,21} &= -[(2\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\rho}_1) \times] \mathbf{V}_{e,21} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R}_1) \quad \text{Efeito da gravidade} \\ \mathbf{V}_{e,21}(0) &= \mathbf{V}_{e,1}(0) \end{aligned}$$

sujeito a $\mathbf{V}_{e,1} = \mathbf{V}_{e,11} + \mathbf{V}_{e,21}$

O vetor $\mathbf{V}_{e,11}$ é a velocidade terrestre, representada no sistema LLLN e causada pela ação das forças específicas que agem sobre o veículo, sendo nula a sua condição inicial. Já o vetor $\mathbf{V}_{e,21}$ é a velocidade terrestre causada pela ação gravitacional em adição à velocidade terrestre inicial. Ambas as parcelas têm suas respectivas equações diferenciais representadas no sistema LLLN. Note que, neste sistema de coordenadas, a dinâmica causada pelo efeito de gravitação apresenta vetores $\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{g}_1$ cujas representações variam muito lentamente. Por isso, seria interessante usar este sistema de coordenadas para tão somente integrar aquela parte da dinâmica afetada pela gravidade e empregando um passo de integração maior (i.e., resolução numérica com menor frequência), de modo a também contribuir para a redução da carga computacional sobre o processador embarcado.

É também possível mostrar que, se a computação for reiniciada a curtos intervalos, então é possível relacionar a velocidade de empuxo \mathbf{V}_{1b} e a velocidade terrestre $\mathbf{V}_{e,11}$, ambas causadas pela ação das forças específicas e condições iniciais nulas – de forma aproximada, sem incorrer em desvios significativos – conforme abaixo:

$$\mathbf{V}_{e,11} = \mathbf{D}_1^b \mathbf{V}_{1,b}$$

O algoritmo com múltiplas taxas de amostragem, descrito em Bar-Itzhack (1978), é como exposto a seguir:

Início de ciclo de computações:

Solução em frequência elevada (centenas de Herz):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_{1b} &= -[\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{A}_{sp,b} \\ \mathbf{V}_{1b}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Solução em frequência intermediária (dezenas de Herz):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_{e,2l} &= -[(2\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\rho}_1) \times] \mathbf{V}_{e,2l} + \mathbf{g}_1(\mathbf{R}_1) \\ \mathbf{V}_{e,2l}(0) &= \mathbf{V}_{e,l}(0) \end{aligned}$$

Solução em frequência lenta (Hz):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{e,l} &= \mathbf{D}_1^b \mathbf{V}_{1,b} + \mathbf{V}_{e,2l} \\ \text{Usar } \mathbf{V}_{e,l} &= [\mathbf{V}_N \quad \mathbf{V}_E \quad \mathbf{V}_D]^T \text{ nas equações} \\ &\text{diferenciais de posição } \dot{\lambda}, \dot{\Lambda}, \dot{h} \\ \mathbf{V}_{1,b}(0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_{e,2l}(0) &= \mathbf{V}_{e,l} \\ &\text{Ir para novo ciclo} \end{aligned}$$