Lista 2 - Parte 2

Francisco Castro

Aesp 20

Equações relevantes p/ análise e implementação do filtro de Kalman

$$x_n = A\, x_{n-1} + B\, u_{n-1} + w_{n-1}\ ;\ \text{cov}(w) = R \quad (1)$$

$$z_n = H\, x_n + v_n\ ;\ \text{cov}(v) = Q \quad (2)$$

$$e_n^- = x_n - \hat{x}_n^- \quad (3)$$

$$e_n^+ = x_n - \hat{x}_n^+ \quad (4)$$

$$p^- = E\left[e_n^-(e_n^-)^T\right] \quad (5)$$

$$p^+ = E\left[e_n^+(e_n^+)^T\right] \quad (6)$$

Portanto

$$\hat{x}_n^+ = \hat{x}_n^- + K_n(z_n - H\hat{x}_n) \quad (7)$$

$$K_n = P_n^- H^T (H P_n^- H^T + R)^{-1} \quad (8)$$

$$P_n^- = A P_{n-1}^+ A^T + Q \quad (P(k|k-1)) \quad (9)$$

$$P_n^+ = (I - K_n H) P_n^- \quad (P(k|k)) \quad (10)$$

S-1 | 1. No steady state,

$$P_n^+ = P_{n-1}^+ \xrightarrow{(9)} P_n^- = A\left[(I - K_n H) P_n^-\right] A^T + Q$$

$$\longrightarrow P_n^- = A P_n^- A^T - A K_n H P_n^- A^T + Q$$

$$\xrightarrow{(8)} P_n^- = A P_n^- A^T - A\left[P_n^- H^T (H P_n^- H^T + R)^{-1}\right] H P_n^- A^T + Q \quad (11)$$

P/ o caso escalar,

$$p_n^- = a^2 p_n^- - a^2 h^2 (p_n^-)^2 (p_n^- h^2 + r)^{-1} + q$$

$$\therefore p_n^-(1 - a^2) = -\frac{(a h p_n^-)^2}{p_n^- h^2 + r} + q$$

$$\therefore p_n^{-2} h^2 + p_n^-\left[(1-a^2)r - q h^2\right] - r q = 0 \rightarrow p_n^- = \frac{-\left[(1-a^2)r - q h^2\right] \pm \sqrt{\left[(1-a^2)r - q h^2\right]^2 - 4 h^2 r q}}{2 h^2} \quad (12)$$

DA ONDE TIRAMOS, DE (9)

$$p_n^+ = \frac{p_n^- - q}{a^2}$$

EM QUE p_n^- É DADO POR (12). ESTA É A COVARIÂNCIA $p_\infty = \lim_{n\to\infty} p(n|n)$.

2. A SIMULAÇÃO DA TRAJETÓRIA CONSTA NO ANEXO A1

3. $\hat{x}(0|0) = \frac{z(0)}{h} \longrightarrow \hat{\dot{x}}(0|0) = \frac{z(0)-z(-1)}{h}$

i) $E[\hat{x}(0|0)] = E\left[\frac{z(0)}{h}\right] = \frac{1}{h} E[h\,x(0) + w(0)] = x(0)$, POIS $E[w(0)] = 0$

ii) $E[\hat{\dot{x}}(0|0)] = E\left[\frac{z(0)-z(-1)}{h}\right] = \frac{1}{h} E\left[h(x(0)-x(-1)) + (w(0)-w(-1))\right] = (x(0)-x(-1))$

iii) $\text{VAR}(\hat{x}(0|0)) = E\left[\left(\hat{x}(0|0) - E[\hat{x}(0|0)]\right)^2\right]$

$$\overset{(i)}{=} E\left[\left(\hat{x}(0|0) - x(0)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{h\,x(0)+w(0)}{h} - x(0)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{w(0)^2}{h^2}\right]$$

$$= \frac{1}{h^2}\cdot \text{VAR}(w(0)) \qquad (E[w(0)] = 0)$$

$$= \frac{r}{h^2}$$

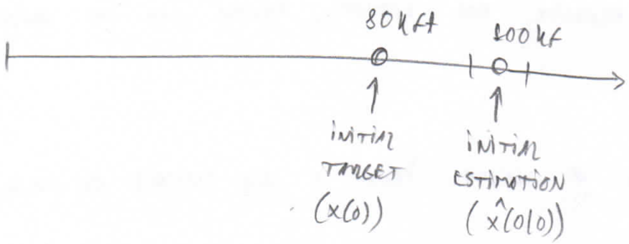
4. OS RESULTADOS CONSTAM NO ANEXO A2

5. NA SIMULAÇÃO, $p_n^+(\text{END}) = 0.0951$. RESOLVENDO A EQUAÇÃO DESCRITA EM 1., TEMOS $p_\infty^+ = 0.0951$. LOGO, HÁ CONSISTÊNCIA DE RESULTADOS.

6. VIDE ANEXO A3

7. DEVE-SE ALTERAR A VARIÂNCIA DO RUÍDO w, OU SEJA, r.

5-6



1. Temos que o range de aceitação baseia-se em $\sigma = \sqrt{10^6} = 10^3\ ft = 1kf$ (desvio padrão). Logo, crê-se que o valor real da variável estimada está entre 95 kft e 105 kft com 99,9% de certeza (5σ). Contudo, sabe-se que não está. Portanto, a qualidade da estimativa inicial está ruim.

2. Temos uma incerteza muito grande na estimação, ou uma variância muito pequena inicialmente quanto ao range de estimativa que deveria ter p/ englobar a medida "real". Logo, o erro de estimação médio deve divergir do erro real.

3. Consideraria uma variância inicial de

$$5\sigma \geq 100 - 80 \longrightarrow \sigma \geq 4 \longrightarrow \boxed{var \geq 16\ kft^2}$$

5-12 * Original:

$$\begin{cases} x = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} \\ x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F} x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}}_{\Gamma} v(k), \quad k \in [0, 99], \quad v(k) \text{ tq } E[v(k)] = 0 \text{ e } E[v(k)^2] = q \\ x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \\ z(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x(k) + w(k), \quad w(k) \text{ tq } E[w(k)] = 0 \text{ e } E[w(k)^2] = r = 1, \quad k \in [1, 100]. \\ E[v(k)\, w(k)] = E[v(k)] \cdot E[w(k)]. \end{cases}$$

1. * Modificado:

$$x = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \underbrace{\bar{w} + w(k)}_{\text{biased noise}} = \xi(k) + \bar{w} + w(k) \longrightarrow z(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H'} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ \bar{w} \end{bmatrix}}_{x'} + w(k)$$

com isso,

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F'} x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'} \begin{bmatrix} v(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix}, \quad v(k),\ v_2(k) \text{ com média zero}$$

2. PROVAVELMENTE VAMOS CONSEGUIR UMA ESTIMAÇÃO DECENTE DOS ESTADOS, MESMO COM UM SENSOR COM BIAS, DADA A ADAPTAÇÃO DO MODELO A SER ESTIMADO.

CONTUDO, NÃO SERÁ POSSÍVEL $\underbrace{\text{ESTIMAR}}^{\text{À PRIORI}}$ O BIAS DO SENSOR. VENDO A SUA MATRIZ DE OBSERVABILIDADE $[C;\ CA;\ CA^2]$, TEMOS QUE O POSTO É 2, INDICANDO A OBSERVABILIDADE DE APENAS 2 ESTADOS, SÃO ELES $\xi + \bar{w}$ E $\dot{\xi}$ (JÁ QUE $\dot{\bar{w}} = 0$).

LISTA 2 – PARTE 3

01)

$$\hat{\xi}(0|0) = z(0) = \xi(0) + w(0)$$

$$\hat{\dot{\xi}}(0|0) = \frac{z(0) - z(-1)}{T} = \frac{\xi(0) - \xi(-1) + w(0) - w(-1)}{T}$$

i) $E\left[\hat{\xi}(0|0)\right] = E\left[\xi(0) + w(0)\right] = \xi(0)$

ii) $E\left[\hat{\dot{\xi}}(0|0)\right] = E\left[\frac{\xi(0) - \xi(-1) + w(0) - w(-1)}{T}\right] = \frac{\xi(0) - \xi(-1)}{T}$

iii)
$$\text{VAR}\left[\hat{\xi}(0|0)\right] = E\left[\left(\hat{\xi}(0|0) - E\left[\hat{\xi}(0|0)\right]\right)^2\right]$$

$$\overset{(i)}{=} E\left[\left(\xi(0) + w(0) - \xi(0)\right)^2\right]$$

$$= E\left[w(0)^2\right]$$

$$= \text{VAR}(w(0)) = R$$

iv)
$$\text{VAR}\left[\hat{\dot{\xi}}(0|0)\right] = E\left[\left(\hat{\dot{\xi}}(0|0) - E\left[\hat{\dot{\xi}}(0|0)\right]\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{\xi(0) - \xi(-1) + w(0) - w(-1)}{T} - \frac{\xi(0) - \xi(-1)}{T}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{w(0) - w(-1)}{T}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{T^2} E\left[w(0)^2 - 2w(0)w(-1) + w(-1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{T^2}\left(\underbrace{E\left[w(0)^2\right]}_{R} - \underbrace{2E\left[w(0)\right]E\left[w(-1)\right]}_{0} + \underbrace{E\left[w(-1)^2\right]}_{R}\right)$$

$$= \frac{2R}{T^2}$$

(Continuação lista 02 – parte 2, questão 01)

vi) $$\operatorname{cov}\left(\hat{\xi}(0|0),\ \hat{\dot{\xi}}(0|0)\right) = E\left[\left(\hat{\xi}(0|0) - E\left[\hat{\xi}(0|0)\right]\right)\left(\hat{\dot{\xi}}(0|0) - E\left[\hat{\dot{\xi}}(0|0)\right]\right)\right]$$

$$\overset{(iv)+(iii)}{=} E\left[\left(w(0)\right)\left(\frac{w(0)-w(-1)}{T}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{T} E\left[w(0)^2 - w(0)\,w(-1)\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left(\underbrace{E\left[w(0)^2\right]}_{R} - \underbrace{E\left[w(0)\right]E\left[w(-1)\right]}_{0}\right)$$

$$= \frac{R}{T}$$

Logo,

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} R & R/T \\ R/T & 2R/T^2 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

02| Vide anexo B1.

03| Vide anexo B2.