

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

DIVISÃO DE ENGENHARIA AERONÁUTICA E
AEROESPACIAL

EES-60
Relatório 04
Lista 02 - Parte 1

Autor:
Francisco Castro¹

Professor:
Prof. Dr. Jacques
Waldmann

Turma:
Aesp 20

Disciplina:
EES-60

¹ Graduando em Engenharia Aeroespacial no Instituto Tecnológico de Aeronáutica

2 de novembro de 2019
SÃO JOSÉ DOS CAMPOS, BRASIL

Sumário

| | | |
|----------|-------------------|-----------|
| 1 | Introdução | 5 |
| 2 | Questão 01 | 5 |
| 3 | Questão 02 | 7 |
| 4 | Questão 03 | 9 |
| 5 | Questão 04 | 16 |

Lista de Figuras

| | | |
|----|--|----|
| 1 | <i>Skyplot</i> para os 4 satélites utilizados na estimação da posição do receptor. | 9 |
| 2 | Metodologia seguida para realização das tarefas necessárias para a questão 03. | 10 |
| 3 | Resultados para os <i>skyplots</i> da evolução de azimuth e elevação dos SVs indicados para o intervalo de tempo e ponto de observação escolhidos. | 12 |
| 4 | Resultados para os <i>skyplots</i> da evolução de azimuth e elevação dos SVs visíveis para o intervalo de tempo e ponto de observação escolhidos. | 13 |
| 5 | Análise de visibilidade da constelação de SVs para o intervalo de tempo e posição escolhidos. As linhas representam os SVs, as colunas, o instante de tempo t , em segundos, e as marcações (x), a visibilidade do SV para o tempo em questão. | 14 |
| 6 | Gráfico da quantidade de SVs visíveis no ponto escolhido em função do tempo. | 14 |
| 7 | Representação da magnitude da velocidade relativa do satélite em relação ao receptor na direção da linha de visada para os SVs visíveis nas condições da simulação. | 15 |
| 8 | Representação da magnitude da velocidade angular da linha de visada dos SVs visíveis para o receptor nas condições da simulação. | 15 |
| 9 | Esquema para amortecimento dos erros de navegação inercial por meio de fusão com sensor externo de velocidade baseado em efeito Doppler. | 16 |
| 10 | Curva de Bode da magnitude de $\frac{\Delta V_x(\omega j)}{\delta V_r(\omega j)}$ com o valor de K ajustado acima. | 17 |

Lista de Tabelas

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Estimativa da deriva dos girômetros para o experimento Montezum . | 6 |
| 2 | Dados de posição e pseudodistância utilizados como input para o algoritmo iterativo de estimação | 7 |
| 3 | Resultados, em metros, para posição, erro de bias e correção a cada iteração para o algoritmo iterativo de estimação utilizando 4 satélites | 7 |
| 4 | Resultados para a linha de visada LOS de cada satélite em relação ao receptor. | 8 |

1 Introdução

Este documento refere-se à terceira lista computacional da disciplina EES-60, ministrada pelo Prof. Dr. Jacques Waldmann em 2019. Há 3 tópicos principais, são eles:

- INS: Estimação da deriva nos girômetros empregados no experimento Montezum;
- GPS: algoritmo recursivo para estimação de posição e simulação da constelação de SVs;
- Doppler: integração com INS.

Tais tópicos traduzem-se nas atividades referentes à navegação inercial abordadas nas seções que seguem.

2 Questão 01

Nesta questão estimou-se a deriva dos girômetros na INS utilizada no experimento Montezum, trabalhado nas listas computacionais anteriores a esta. As hipóteses assumidas para derivação das expressões para os erros foram acelerômetros perfeitos ($\nabla = 0$), alinhamento inicial exato ($\Psi = 0$) e latitude zero ($\lambda = 0$). Além disso, como o canal vertical foi estabilizado, os erros neste foram desprezados ($\Delta R_D = \Delta V_D = 0$). Esta aproximação é válida para quando o INS está estacionário ou sujeito a manobras verticais rápidas e de curta duração, em que considerou-se a dinâmica da montanha russa Montezum como cumpridora destes requisitos.

Com isso, a solução das equações para determinação dos erros de posição é [1]

$$\Delta R_E(t) = -\frac{R_0}{\omega_s} \epsilon_N [\omega_s t - \sin \omega_s t]$$

$$\Delta R_N(t) = \frac{g_0}{(\omega_s^2 - \Omega^2)\omega_s\Omega} (\epsilon_E(\omega_s \sin \Omega t - \Omega \sin \omega_s t) - \frac{\epsilon_D}{\omega_s} (\Omega^2(1 - \cos \omega_s t) - \omega_s^2(1 - \cos \Omega t)))$$

onde $\epsilon_{N,E,D}$ são as derivas, $\omega_s = \sqrt{\frac{g_0}{R_0}}$ é a frequência de Schuler e Ω , R_0 e g_0 a velocidade angular da Terra, raio médio e valor da constante do modelo de gravidade calibrado para o local do experimento durante o TRIAD (Parte 1 da Lista 1). Assim, podemos estimar a qualidade dos girômetros avaliando a sua deriva ϵ e considerando $\epsilon_N = \epsilon_E = \epsilon_D = \epsilon$, de forma que o erro horizontal $\Delta R_{EN} = \sqrt{\Delta R_N^2 + \Delta R_E^2}$,

conhecido da integração numérica da Parte 3 da Lista 1 para qualquer instante de medição, possa ser expresso em função da deriva.

Observe que nas expressões derivadas constam a influência da velocidade angular da Terra Ω , que, dependendo do modelamento, pode ser desprezada na sua parcela de contribuição $\Omega \times \Psi \approx 0$, resultando nas expressões simplificadas

$$\Delta R_N(t) = \epsilon_E R_e \left(-t + \frac{1}{\omega_s} \sin \omega_s t \right)$$

$$\Delta R_E(t) = \epsilon_N R_e \left(t + \frac{1}{\omega_s} \sin \omega_s t \right)$$

onde $R_e = R_0$ devido à nossa hipótese simplificadora de latitude nula. Note que as hipóteses adotadas vão sim ser as primeiras fontes de discrepância com relação ao resultado real, mas foram tomadas como medidas simplificadora para uma análise de primeira instância.

Com isso, as estimativas de deriva obtidas são, para os instantes

- Δt_1 : fim do TRIAD até o início do movimento
- Δt_2 : fim do TRIAD até o final da primeira volta
- Δt_3 : fim do TRIAD até o final da quarta volta

as exibidas na Tabela 1.

Tabela 1: Estimativa da deriva dos girômetros para o experimento Montezum

| Instante | Erro horizontal [m] | Estimativa deriva [°/h] | |
|--------------|---------------------|-------------------------|--------------------------|
| | | Considerando Ω | Desconsiderando Ω |
| Δt_1 | 0,21 | 0,2024 | 6,58E-05 |
| Δt_2 | 3,13 | 0,0566 | 2,66E-04 |
| Δt_3 | 606,11 | 0,1522 | 0,0134 |

Vale ressaltar que calculou-se o erro horizontal como a distância no plano horizontal entre as posições dos sensores, que são obtidas inicialmente em coordenadas geodésicas através da integração numérica das equações de navegação, após representação no ENU do ponto inicial do movimento e subtração vetorial.

3 Questão 02

Implementou-se, para esta questão, um programa que computa recursivamente a posição instantânea $X_e = [x, y, z]$ do receptor no sistema de referência fixo à Terra (S_e) - ou seja, ECEF - e o erro de bias b no relógio do receptor a partir da metodologia proposta em [2], Seção 6.1, página 5, para a estimativa da posição do receptor utilizando dados de posição dos satélites e pseudodistâncias medidas pelo receptor para o caso de 4 satélites.

As coordenadas instantâneas $X_e = [x_e, y_e, z_e]$, em metros, dos quatro satélites (Spacecraft Vehicles – SV) GPS no sistema de referência ECEF (S_e), bem como as pseudodistâncias ρ medidas, em metros, pelo receptor a cada um dos SVs utilizadas no algoritmo são as dadas na Tabela 2.

Tabela 2: Dados de posição e pseudodistância utilizados como input para o algoritmo iterativo de estimação

| SV | $x_e [m]$ | $y_e [m]$ | $z_e [m]$ | $\rho [m]$ |
|----|--------------|--------------|-------------|-------------|
| 2 | 7766188,44 | -21960535,34 | 12522838,56 | 22228206,42 |
| 26 | -25922679,66 | -6629461,28 | 31864,37 | 24096139,11 |
| 4 | -5743774,02 | -25828319,92 | 1692757,72 | 21729070,63 |
| 7 | -2786005,69 | -15900725,8 | 21302003,49 | 21259581,09 |

Com isso, utilizou-se como estimativa inicial da posição do receptor $\hat{X}_0 = [x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0, b_0 = 0]$, onde obtemos a correção $\Delta X = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]$ em cada iteração até a convergência e a nova estimativa de posição e erro de bias de relógio para a k-ésima iteração $\hat{X}_k = [\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{b}]$ apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3: Resultados, em metros, para posição, erro de bias e correção a cada iteração para o algoritmo iterativo de estimação utilizando 4 satélites

| k | x | Δx | y | Δy | z | Δz | b |
|---|----------|------------|----------|------------|----------|------------|----------|
| 0 | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 |
| 1 | -2977571 | -2,98E+06 | -5635278 | -5,64E+06 | 4304235 | 4,30E+06 | 1625240 |
| 2 | -2451729 | 5,26E+05 | -4730878 | 9,04E+05 | 3573998 | -7,30E+05 | 314070,7 |
| 3 | -2430772 | 2,10E+04 | -4702376 | 2,85E+04 | 3546604 | -2,74E+04 | 264749,7 |
| 4 | -2430745 | 2,71E+01 | -4702345 | 3,07E+01 | 3546569 | -3,52E+01 | 264691,1 |
| 5 | -2430745 | 4,05E-05 | -4702345 | 3,82E-05 | 3546569 | -5,36E-05 | 264691,1 |
| 6 | -2430745 | -3,45E-09 | -4702345 | -3,30E-09 | 3546569 | -1,89E-09 | 264691,1 |

Computada a posição estimada do receptor no ECEF, deriva-se as coordenadas geodésicas (latitude λ e longitude Λ) do mesmo, considerando Terra esférica, a partir das expressões 1 e 2, a fim de determinar a matriz de rotação (D_{NED}^e) que leva do ECEF (S_e) para o NED local do receptor. Com isso, determina-se, a partir das

expressões 3 e 4, os ângulos de azimute e elevação, em graus, do vetor linha de visada (LOS) unitário, representado pela expressão 5, que vai da posição estimada do receptor a cada SV.

$$\lambda = \arcsin \frac{z_r}{\text{norm}([x_r, y_r, z_r])} \quad (1)$$

$$\Lambda = \arctan \frac{y_r}{x_r} \quad (2)$$

$$\chi = \text{mod} \left(\arctan \frac{r_E}{r_N}, 2\pi \right) \frac{180}{\pi} \quad (3)$$

$$\phi = \left(\arctan \frac{-r_D}{\text{norm}(r_{NE})} \right) \frac{180}{\pi} \quad (4)$$

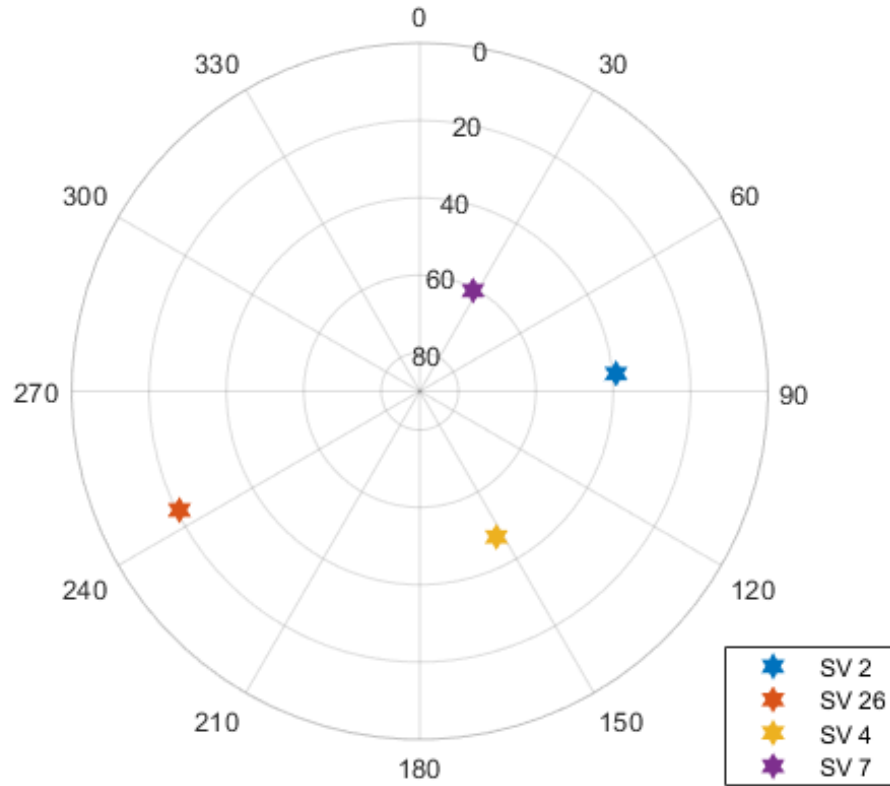
$$r_{NED} = D_{NED}^e \frac{\vec{r}_e}{\text{norm}(\vec{r}_e)} \quad (5)$$

onde $\vec{X}_r = [x_r, y_r, z_r]$ são as coordenadas estimadas do receptor no ECEF, $\vec{r}_{NED} = [r_N, r_E, r_D]$ a direção (vetor unitário), no NED, da linha de visada para cada satélite e $\vec{r}_e = \vec{X}_e - \vec{X}_r$ (relembre-se que \vec{X}_e é a posição, no ECEF, de cada satélite considerado) é o vetor distância relativa, no ECEF, entre um dos satélites e o receptor.

Com isso, temos que os vetores unitários da LOS de cada um dos 4 satélites, bem como seus azimutes e elevações computados são os dados pela Tabela 4. Tais azimutes e elevações nos dão um cenário que pode ser observado de forma sintetizada em um skyplot, conforme mostra a Figura 1.

Tabela 4: Resultados para a linha de visada LOS de cada satélite em relação ao receptor.

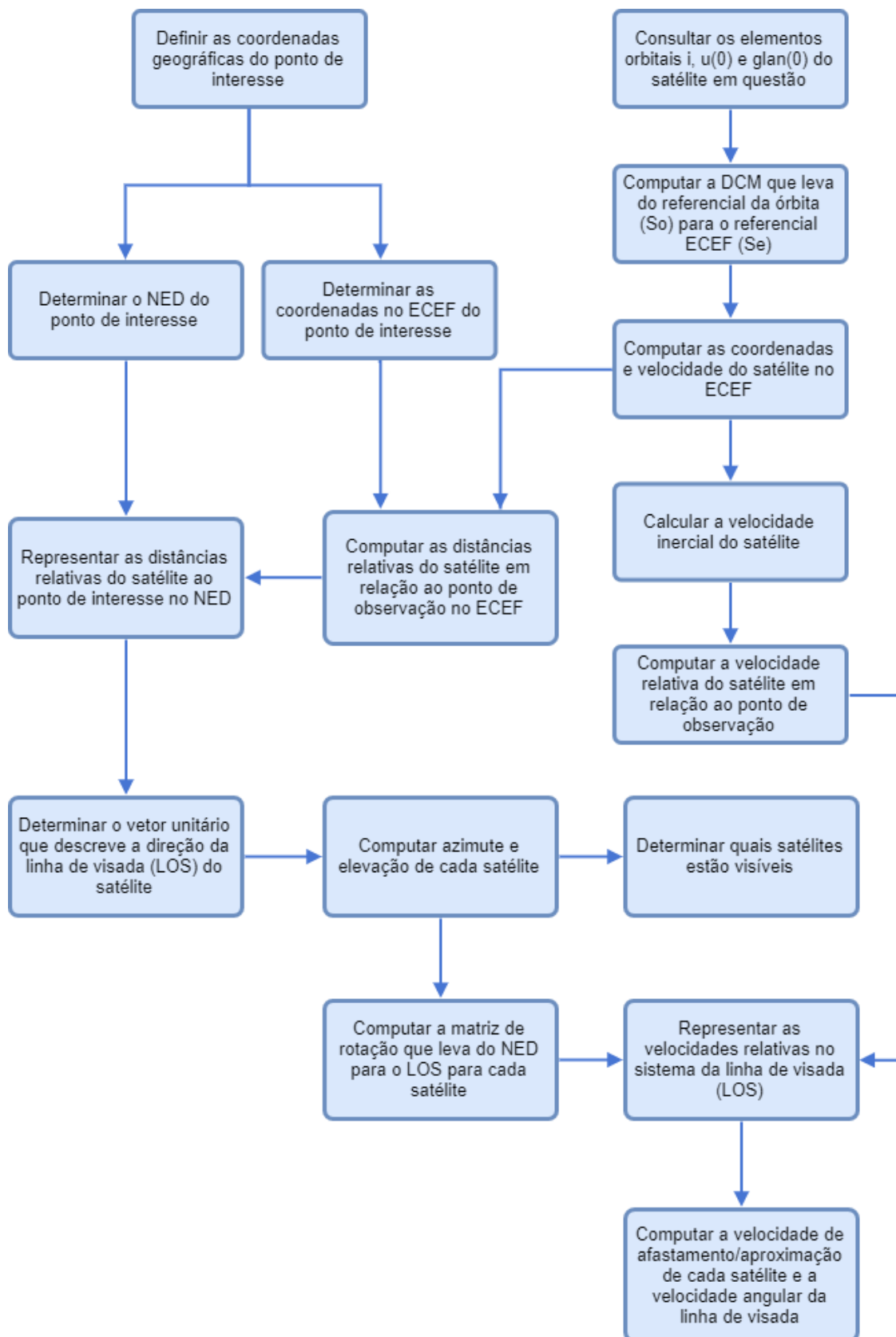
| SV | r_{NED} [m] | Azimute [°] | Elevação [°] |
|----|-----------------------|-------------|--------------|
| 2 | [0,05 0,52 -0,42] | 84,85 | 39,07 |
| 26 | [-0,30 -0,61 -0,26] | 243,70 | 20,71 |
| 4 | [-0,39 0,21 -0,48] | 152,23 | 47,49 |
| 7 | [0,28 0,15 -0,56] | 27,88 | 60,55 |

Figura 1: *Skyplot* para os 4 satélites utilizados na estimação da posição do receptor.

4 Questão 03

Dada os parâmetros orbitais argumento de latitude $u(t) = u(0) + \frac{2\pi}{T}t$, inclinação da órbita $i = 55^\circ$ e longitude geográfica do nó ascendente $glan(t) = glan(0) - \Omega t$ que descrevem os 24 satélites da constelação GPS em questão. Tem-se os valores iniciais do argumento de latitude $u(0)$ e da longitude geográfica do nó ascendente $glan(0)$ na época 01/julho/1990 à 00h00'00" (Table I. Orbit Reference Values of the 1993 edition of the Navstar GPS description report by NavtechGPS), os quais podem ser usados para determinar a matriz de rotação D_e^o que leva do referencial da órbita de cada satélite (S_o) até o ECEF (S_e). A metodologia executada pode ser resumidamente descrita e visualizada pelo fluxograma apresentado na Figura 2.

Figura 2: Metodologia seguida para realização das tarefas necessárias para a questão 03.



Para os cálculos do programa desenvolvido, utilizou-se os valores para o raio da Terra $R_e = 6378 \text{ km}$ e velocidade angular da Terra $\Omega = 7.29e^{-5} \text{ rad/s}$. O ponto escolhido para observação foi o ponto de coordenadas 0°N , 0°W e 600 m de altitude. O intervalo de tempo escolhido foi o de $t_0 = 0 \text{ s}$ e $t_f = 20 \text{ s}$.

Quanto aos parâmetros orbitais dos satélites, considerou-se que estão em órbita circular de raio $R = 26560000 \text{ m}$, com período $T = 43.082 \text{ s}$ e inclinação $i = 55^\circ$, conforme dito no início desta seção. O valor utilizado para o produto GM foi $\mu = 3.986e^{14} \text{ km}^3\text{s}^{-2}$, de forma que a posição e a velocidade de cada satélite no referencial da sua órbita (S_o) podia ser dado por

$$R_{sat,o} = [R, 0, 0]_o$$

$$V_{sat,o} = \left[0, \sqrt{\frac{\mu}{R}}, 0 \right]_o$$

Desta forma, a velocidade inercial pode ser dada por, em termos da velocidade terrestre $V_{sat,e}$

$$V_{sat,inercial} = V_{sat,e} + \Omega \times R_{sat}$$

independentemente da base escolhida para representar os vetores.

Os cálculos de azimuth e elevação foram feitos de forma análoga á forma realizada na questão anterior, portanto, utilizando-se das expressões já apresentadas 3 e 4, bem como nas conversões de coordenadas geográficas para ECEF, onde considerou-se Terra esférica para simplificação e utilizou-se, portanto, as equações

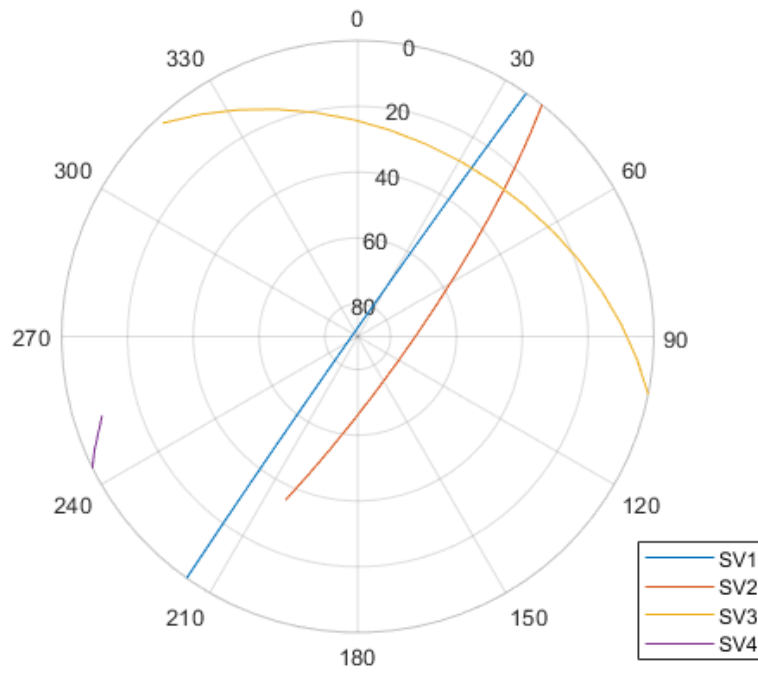
$$x = R_e \cos \lambda \cos \Lambda$$

$$y = R_e \cos \lambda \sin \Lambda$$

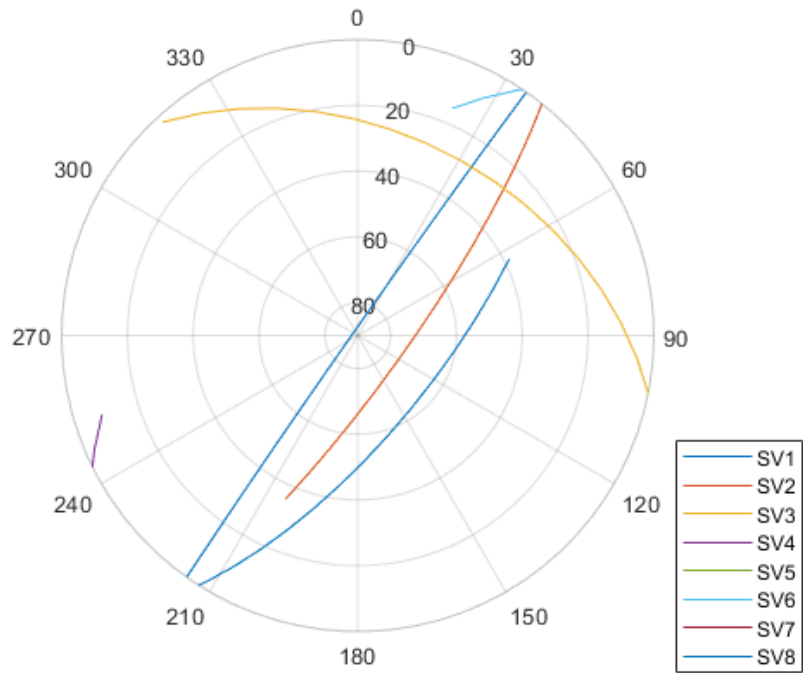
$$z = R_e \sin \lambda$$

para conversão de coordenadas geográficas para o ECEF.

Devido à grande quantidade de satélites, mostrar-se os resultados para a evolução dos azimutes e elevações para o intervalo de tempo definido, analisando a evolução de 4, 8 e 24 SVs, respectivamente, nas figuras (a) e (b) da Figura 3 e 4.



(a) Skyplot para a evolução dos SVs de 1 a 4 (sem contar visibilidade).



(b) Skyplot para a evolução dos SVs de 1 a 8 (sem contar visibilidade).

Figura 3: Resultados para os *skyplots* da evolução de azimuth e elevação dos SVs indicados para o intervalo de tempo e ponto de observação escolhidos.

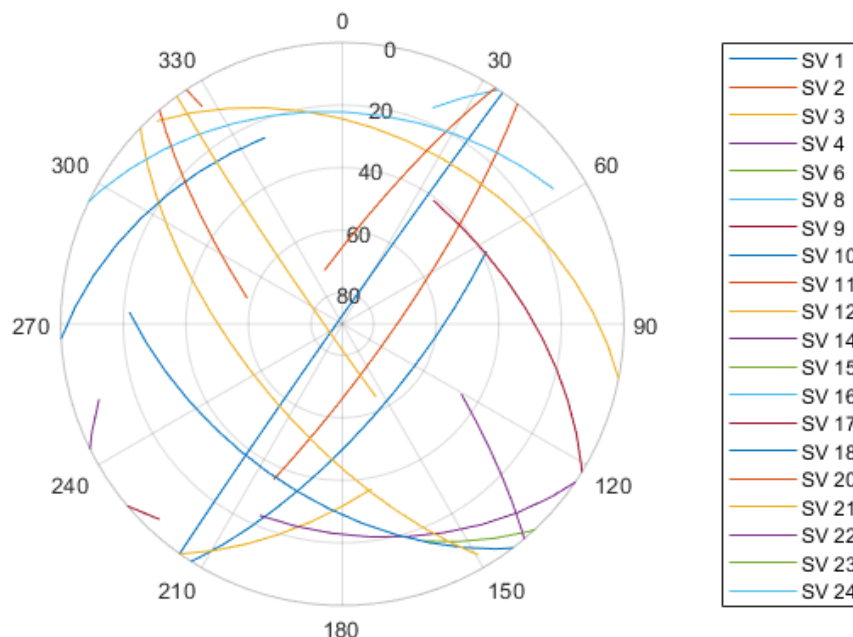


Figura 4: Resultados para os *skyplots* da evolução de azimuth e elevação dos SVs visíveis para o intervalo de tempo e ponto de observação escolhidos.

Note que nem todos os satélites estão visíveis no intervalo de tempo escolhido. A olhar pela Figura 4, os SVs 5, 7, 13 e 19 não são visíveis em nenhum momento. Tal informação pode ser melhor traduzida numa matriz de visibilidade, exibida na Figura 5, aliada à Figura 6, que mostra a quantidade de SVs visíveis ao longo do tempo. Nelas, vê-se que a quantidade máxima de satélites visíveis é 10 e mínima é 8 para as condições da simulação, para cada instante, e a discriminação de quais os são.

Quanto à evolução da velocidade relativa dos SVs visíveis em relação ao receptor ao longo das respectivas LOS e à magnitude da velocidade angular de cada LOS para SV que esteja visível, tem-se que estão descritas nas Figuras 7 e 8. Nessas vê-se, primeiramente, que alguns satélites só apresentam valores de velocidade de afastamento/aproximação e velocidade angular a partir de ou até determinado instante, indicando a perda de visibilidade do mesmo com relação ao horizonte local em que se encontra o ponto escolhido. Outra observação imediata é o padrão de curva achatada para SVs com menores inclinações quanto, principalmente, à velocidade angular, demonstrando uma métrica razoável para avaliar a elevação apenas em função da velocidade angular medida.

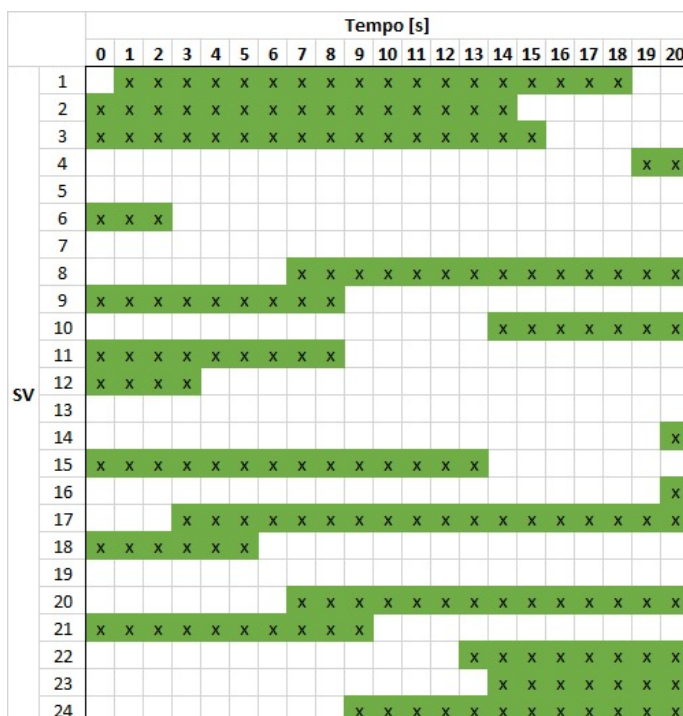


Figura 5: Análise de visibilidade da constelação de SVs para o intervalo de tempo e posição escolhidos. As linhas representam os SVs, as colunas, o instante de tempo t , em segundos, e as marcações (x), a visibilidade do SV para o tempo em questão.

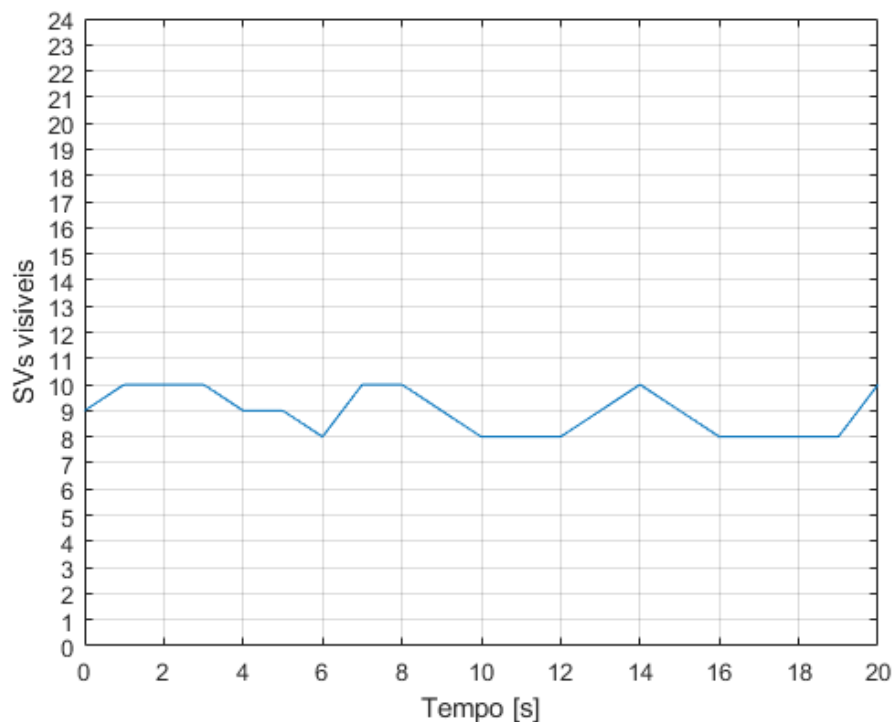


Figura 6: Gráfico da quantidade de SVs visíveis no ponto escolhido em função do tempo.

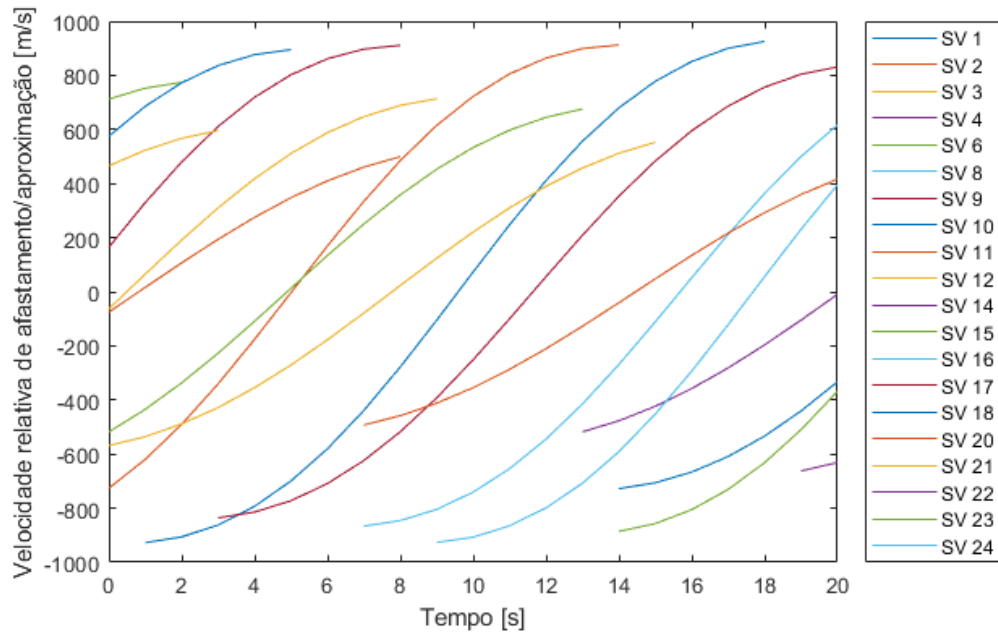


Figura 7: Representação da magnitude da velocidade relativa do satélite em relação ao receptor na direção da linha de visada para os SVs visíveis nas condições da simulação.

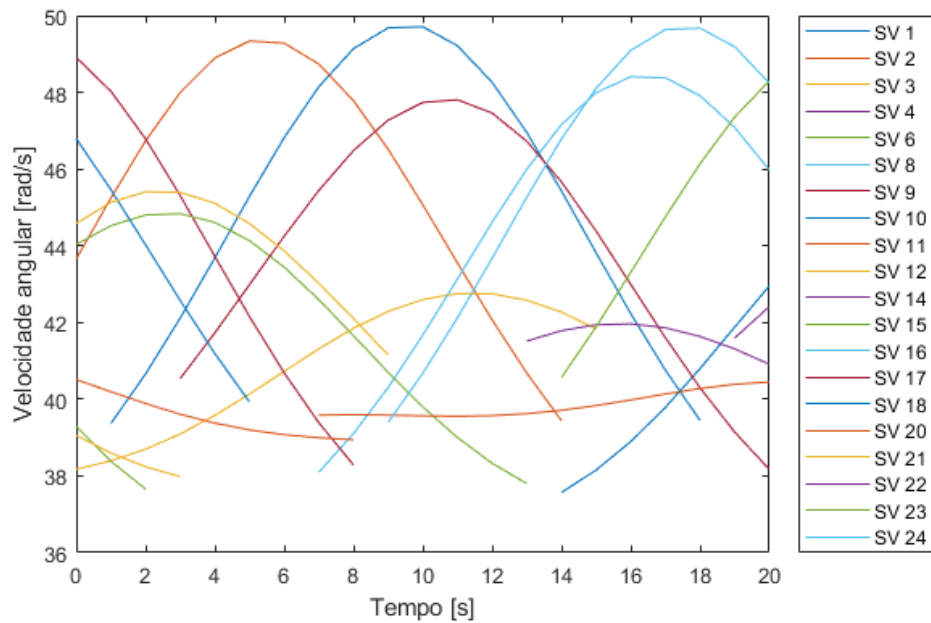


Figura 8: Representação da magnitude da velocidade angular da linha de visada dos SVs visíveis para o receptor nas condições da simulação.

5 Questão 04

A Figura 9 descreve a situação referida nesta questão de onde pede-se as análises que constam nas subseções a seguir.

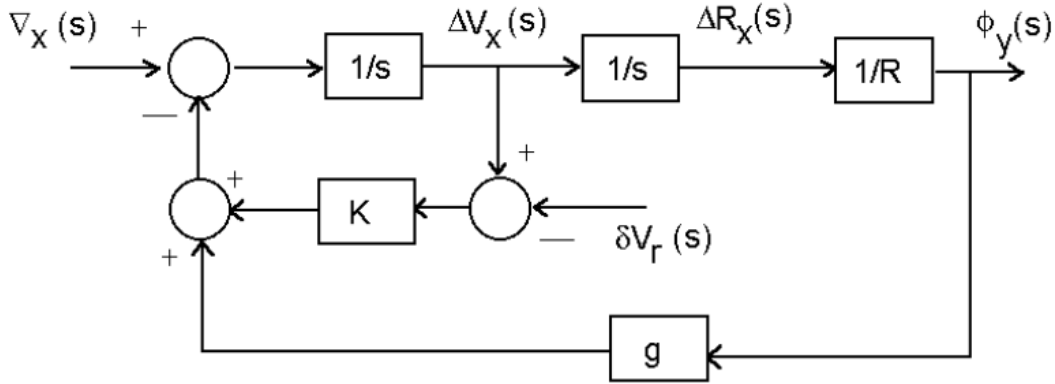


Figura 9: Esquema para amortecimento dos erros de navegação inercial por meio de fusão com sensor externo de velocidade baseado em efeito Doppler.

a) Função de transferência $\frac{\Delta V_x(s)}{\delta V_r(s)}$

Seguindo a malha fechada que relaciona $\Delta V_x(s)$ com $\delta V_r(s)$, temos, no domínio da frequência, a equação 6.

$$\Delta V_X = \frac{1}{s} (\nabla_X - (K(\Delta V_X - \delta V_r) + g\Phi_y)) \quad (6)$$

De onde temos, ainda, que

$$\Phi_y(s) = \frac{\Delta R_X(s)}{R} = \frac{\Delta V_X(s)}{sR}$$

Portanto

$$\begin{aligned} s\Delta V_X &= \nabla_X - K\Delta V_X + K\delta V_r - \Delta V_X \frac{g}{sR} \\ \longrightarrow \Delta V_X \left(s + K + \frac{g}{sR} \right) &= \nabla_X + K\delta V_r \end{aligned}$$

Separando a malha fechada de interesse, temos que $\nabla_X(s) = 0$ e, com isso

$$\frac{\Delta V_X(s)}{\delta V_r(s)} = \frac{K}{\left(s + K + \frac{g}{sR} \right)} = \frac{KsR}{Rs^2 + KR s + g} \quad (7)$$

b) Cálculo analítico de K

Temos que a equação diferencial atrelada ao diagrama de blocos mostrado na Figura 9 é

$$\Delta\ddot{R}_X + K\Delta\dot{R}_X + \frac{g}{R}\Delta R_X = K\delta V_r + \nabla_X \quad (8)$$

Da onde se tira que

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = K \\ \omega_n^2 = \frac{g}{R} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\xi=0.5} K = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$\xrightarrow[\substack{R=6378km \\ g=9.8m/s^2}]{R=6378km} K = 1.24 \cdot 10^{-3} s^{-1}$$

c) Curva de Bode (magnitude)

Analisando a equação 7, temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta V_X(s)}{\delta V_r(s)} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Delta V_X(s)}{\delta V_r(s)} = 0$$

Portanto, a curva de bode é algo que parte do zero, cresce até um valor máximo, e decresce até zero novamente. De fato, plotando a expressão 7, temos a Figura 10.

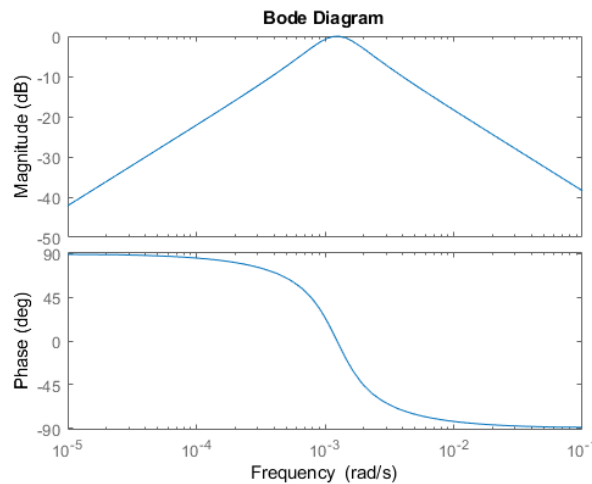


Figura 10: Curva de Bode da magnitude de $\frac{\Delta V_X(\omega j)}{\delta V_r(\omega j)}$ com o valor de K ajustado acima.

d) Função de transferência $\frac{\Delta V_x(s)}{\nabla_X(s)}$

Analogamente, a partir da equação 6, temos que

$$\Delta V_X \left(s + K + \frac{g}{sR} \right) = \nabla_X + K \delta V_r$$

Separando a malha fechada de interesse, temos que $\delta V_r(s) = 0$ e, com isso

$$\frac{\Delta V_X(s)}{\nabla_X(s)} = \frac{1}{\left(s + K + \frac{g}{sR} \right)} = \frac{sR}{Rs^2 + KR s + g}$$

e) Erros de velocidade e posição em regime estacionário

Considerando $\nabla_X = 1 \text{ mg}$ e $\delta V_r = 0.01 \text{ m/s}$ constantes, temos que a solução de 8, que é uma EDO linear de segunda ordem não-homogênea com coeficientes constantes, é

$$\Delta R_X(t) = \Delta R_X(t)_h + \Delta R_X(t)_p \quad (9)$$

onde

$$\Delta R_X(t)_h = c_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{4R}}t} \sin\left(\sqrt{\frac{3g}{4R}}t\right) + c_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{4R}}t} \cos\left(-\left(\sqrt{\frac{3g}{4R}}t\right)\right) \quad (10)$$

e

$$\Delta R_X(t)_p = \frac{K \delta V_r + \nabla_X}{\frac{g}{R}} \quad (11)$$

No regime estacionário, temos que t é muito grande, de forma que a solução tende a

$$\Delta R_X(t) = \frac{K \delta V_r + \nabla_X}{\frac{g}{R}} \quad (12)$$

Portanto, no estado estacionário, $\Delta R_X(t) = 6.3858 \cdot 10^3 \text{ m}$ e $\dot{\Delta R}_X(t) = \Delta V_X(t) = 0 \text{ m/s}$

Referências

- [1] WALDMANN, J. *Sistema solidário: derivação do modelo no espaço de estado do erro de velocidade no sistema computado*. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Eletrônica. São José dos Campos, 2019. Disponível em <https://drive.google.com/open?id=1Zd3LV5fBAUZ2jTSjFUD4rqiShdovqMvc>.
- [2] WALDMANN, J. *NAVSTAR (Navigation Signal, Time, and Range) GPS (Global Positioning System)*. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Eletrônica. São José dos Campos, 2017. Disponível em <https://drive.google.com/open?id=1SPrP7MLzb7AhBpvzzQcZVPYXmq4PN4o5>.