

ESTRUTURAS AEROESPACIAIS I

(PARTE 2)

PROF. MAURICIO V. DONADON

ABRIL 2015

CAPÍTULO 1

TEORIA DE PLACAS

ÍNDICE DE SEÇÕES

1.1	INTRODUÇÃO	1.4
1.2	HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS	1.4
1.3	RELAÇÕES CINEMÁTICAS	1.5
1.4	DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES E ESFORÇOS EM PLACAS	1.9
1.5	RIGIDEZ DE PLACAS	1.13
1.6	PLACAS SUBMETIDAS A FLEXÃO PURA	1.16
1.7	SOLUÇÃO PELO MÉTODO DE NAVIER	1.20
1.8	EXERCÍCIOS	1.27
1.9	REFERÊNCIAS	1.29

ÍNDICE DE FIGURAS

1-1	DESLOCAMENTO DE UM PONTO ARBITRÁRIO POSICIONADO AO LONGO DA ESPESSURA DA PLACA 2.5	1.5
1-2	ROTAÇÃO DO PLANO MÉDIO DA PLACA	1.6
1-3	DESLOCAMENTO NA DIREÇÃO X DE UM PONTO ARBITRÁRIO SITUADO NA SEÇÃO DA PLACA	1.7
1-4	TENSÕES ATUANTES	1.9
1-5	DISTRIBUIÇÃO DE DEFORMAÇÕES E TENSÕES AO LONGO DA ESPESSURA DA PLACA	1.10
1-6	ESFORÇOS EQUIVALENTES A DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES AO LONGO DA ESPESSURA DA PLACA	1.11
1-7	CONVENÇÃO DE SINAIS PARA M_x	1.11
1-8	DIREÇÃO POSITIVA DOS ESFORÇOS RESULTANTES	1.12
1-9	CILINDRO DE PAREDE FINA SUJEITO A CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO	1.15
1-10	ELEMENTO INFINITESIMAL DE VOLUME DE PLACA PLANA	1.17
1.11	GEOMETRIA DE REFERENCIA PARA APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	1.21

1. Teoria de placas

1.1 Introdução

No curso elementar de estruturas ou resistência dos materiais (EST-10) foi apresentado teorias relacionadas à flexão de membros uni-dimensionais, tais como colunas e vigas. A análise destes membros é relativamente simples, porque a flexão pode ser considerada se dar num único plano. Em comparação, uma placa envolve flexão em dois planos sendo, portanto, relativamente mais complexa. De um ponto de vista matemático, a maior diferença entre vigas e placas é que quantidades tais como deflexões e momentos fletores, que são funções de uma única variável independente para vigas, tornam funções de duas variáveis independentes em placas. Em consequência, o comportamento de placas é descrito por equações diferenciais parciais, enquanto que equações diferenciais ordinárias foram suficientes para descrever o comportamento de vigas.

Placas podem ser classificadas em três categorias: Placas espessas, placas finas e membranas. Se a espessura da placa é considerável, se comparada às outras dimensões, deformações de cisalhamento tendem a ser da mesma ordem de grandeza das deflexões de flexão e, portanto, têm de ser consideradas na análise. Tais placas são denominadas de *placas espessas*. Por outro lado, *placas finas* são aquelas em que a espessura é pequena comparada às outras dimensões e deformações de cisalhamento são desprezíveis comparadas às deflexões de flexão. Um terceiro grupo conhecido por *membranas* consiste de placas cuja espessura é tão fina que a rigidez em flexão tende a zero, e cargas transversais devem ser resistidas quase que exclusivamente pela ação de membrana. Neste capítulo somente placas finas serão consideradas.

1.2 Hipótese simplificadoras

Costuma-se fazer as duas hipóteses dispostas abaixo no que concerne o comportamento de placas finas:

- o material é homogêneo e isotrópico;
 - a placa é fina; isto é, as suas dimensões laterais são muito maiores do que a espessura;
 - a placa está sujeita a um estado plano de tensões ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) ;
-
- todos os deslocamentos são pequenos comparados com a espessura da placa ($|u|, |v|, |w| \ll h$);
 - os deslocamentos são contínuos em toda a placa (não há descolamento das camadas);

- os deslocamentos no plano (u , v) variam linearmente ao longo da espessura (u e v , deslocamentos ao longo de x e y , respectivamente, são funções lineares de z);
- as deformações de cisalhamento transversal são negligenciáveis ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} \approx 0$) – isso implica que retas normais à seção transversal continuam normais à seção transversal após a deformação;
- as relações tensão-deformação e deslocamentos-deformação são lineares;
- a deformação normal ε_z é negligenciável (comparado com ε_x ou ε_y)

1.3 Relações cinemáticas

Considere a figura esquemática ilustrada na Fig. 1-1. Os pontos A, B, C e D são pontos posicionados ao longo da espessura da placa

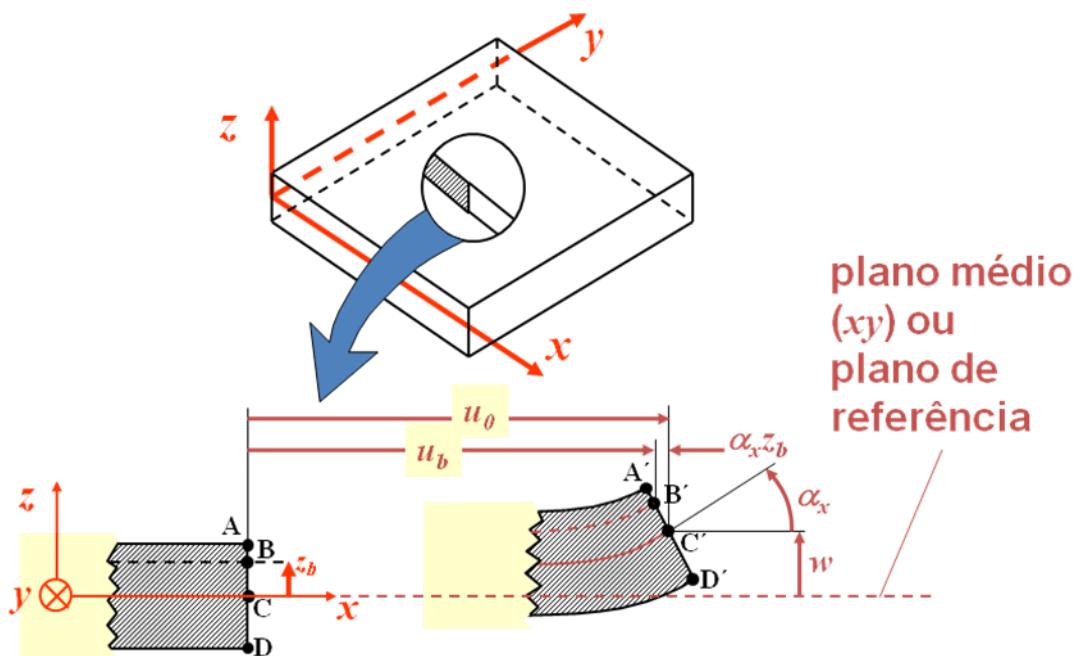


Fig. 1-1 Deslocamento de um ponto arbitrário posicionado ao longo da espessura da placa

Das hipóteses básicas, a componente de deformação ε_z pode ser considerada nula portanto, o deslocamento fora do plano, w , deve ser constante ao longo da espessura da placa, isto é:

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (1.1)$$

A partir das hipóteses formuladas, é possível escrever os deslocamentos de um ponto qualquer na placa em função dos deslocamento do plano médio. Os deslocamentos do plano médio são de dois tipos:

- a) deslocamentos de translação (u , v e w)
- b) deslocamentos de rotação (α_x e α_y)

Os deslocamentos do plano médio são medidos a partir do plano médio (ou plano de referência). Os deslocamentos do plano médio dependem apenas das coordenadas x e y ($z = 0$ no plano médio),

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0(x, y) \\ v_0 &= v_0(x, y) \\ w_0 &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

As rotações do plano médio são medidas a partir do plano médio (ou plano de referência). Portanto, as rotações do plano médio dependem apenas das coordenadas x e y ($z = 0$ no plano médio),

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_x(x, y) \\ \alpha_y &= \alpha_y(x, y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sendo assim as rotações do plano médio dependem dos deslocamentos fora do plano w , conforme ilustrado na Fig. 1-2:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_x(x, y) \\ \alpha_y &= \alpha_y(x, y) \end{aligned} \quad (1.4)$$

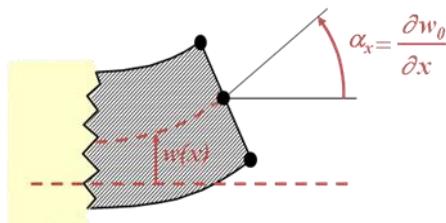


Fig. 1-2 Rotação do plano médio da placa

As rotações do plano médio dependem dos deslocamentos fora do plano w :

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \alpha_x(x, y) = \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ \alpha_y &= \alpha_y(x, y) = \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y}\end{aligned}\quad (1.5)$$

Das hipóteses básicas, os deslocamentos no plano, u e v , variam linearmente ao longo da espessura. Dessa forma os deslocamentos nas direções x e y de um ponto arbitrário podem ser calculados a partir dos deslocamentos do plano médio como uma função linear em z ,

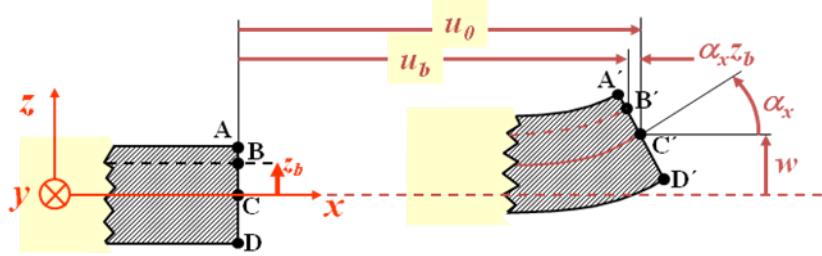


Fig. 1-3 Deslocamento na direção x de um ponto arbitrário situado na seção da placa

$$u_b(x, y, z) = u_0(x, y) - z_b \alpha_x(x, y) \quad (1.6)$$

De forma análogo temos para a direção y

$$v_b(x, y, z) = v_0(x, y) - z_b \alpha_y(x, y) \quad (1.7)$$

Os deslocamentos nas direções x e y de um ponto arbitrário podem então ser calculados a partir dos deslocamentos do plano médio:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\quad (1.8)$$

Uma vez que os deslocamentos de um ponto arbitrário podem ser escritos em função dos deslocamentos do plano médio, as deformações e tensões num ponto arbitrário também podem ser escritos em função dos deslocamentos do plano médio. Dessa forma o problema que era originalmente tri-dimensional (coordenadas x , y e z) passa a ser bi-dimensional (coordenadas x e y apenas). No contexto de pequenas deformações, as deformações no plano podem ser calculadas a partir das seguintes relações,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

As deformações fora do plano são nulas devido às hipóteses básicas consideradas:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\alpha_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\alpha_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Agora pode-se definir:

- a) deformações no plano ou de membrana;
- b) curvaturas do plano médio;

As deformações na placa podem ser escritas como uma combinação desses fatores. As deformações no plano ou de membrana são deformações do plano médio e portanto só dependem das coordenadas x e y :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^0(x, y) &= \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} \\
\varepsilon_y^0(x, y) &= \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \\
\gamma_{xy}^0(x, y) &= \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

As curvaturas do plano médio também só dependem das coordenadas x e y :

$$\begin{aligned}
\kappa_x(x, y) &= -\frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x^2} \\
\kappa_y(x, y) &= -\frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial y^2} \\
\kappa_{xy}(x, y) &= -2 \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

k_x e k_y representam o inverso do raio de curvatura do plano médio da placa no ponto (x, y) . k_{xy} representa a torção do plano médio da placa no ponto (x, y) . Usando as definições de deformações e curvaturas do plano médio, as deformações ficam:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y, z) &= \varepsilon_x^0(x, y) + z\kappa_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= \varepsilon_y^0(x, y) + z\kappa_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \gamma_{xy}^0(x, y) + z\kappa_{xy}(x, y)\end{aligned}\tag{1.13}$$

Portanto, uma importante consequência das hipóteses consideradas é que as deformações variam linearmente ao longo da espessura. De uma forma matricial compacta podemos escrever,

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^0 + z\{\kappa\}\tag{1.14}$$

As curvaturas do plano médio multiplicadas por z fornecem deformações devido à flexão/torção da placa. Portanto, a mudança de coordenadas do tensor de curvaturas segue o mesmo procedimento usado para deformações.

1.4 Distribuição de tensões e esforços em placas

Uma vez obtidas as deformações pode-se calcular as tensões a partir das relações tensão-deformação.

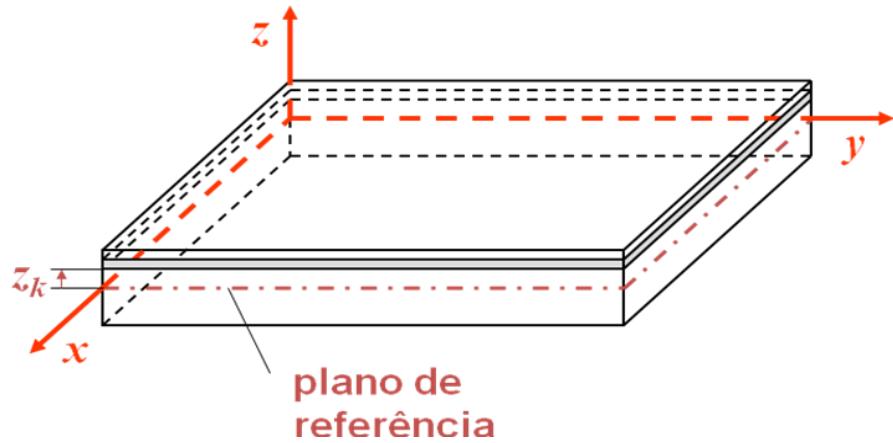


Fig. 1-4 Tensões atuantes

A relação tensão-deformação na placa é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \{ \varepsilon \} \quad (1.15)$$

substituindo a expressão obtida para as deformações (Eq-1.14) obtemos,

$$\{ \sigma \} = [A] \{ \varepsilon \}^0 + z [A] \{ \kappa \} \quad (1.16)$$

Note que todas as tensões acima são calculadas no sistema de referência (xyz). As tensões variam linearmente com z,



Fig. 1-5 Distribuição de deformações e tensões ao longo da espessura da placa

Os deslocamentos num ponto arbitrário foram escritos em termos de deslocamentos do plano médio. As deformações num ponto arbitrário foram escritas em termos de deformações e curvaturas do plano médio. As deformações e curvaturas do plano médio foram escritos em termos de deslocamentos do plano médio. As tensões foram escritas em termos da relação tensão-deformação do material e das deformações e curvaturas do plano médio. Portanto, todas as grandezas envolvidas podem ser calculadas a partir dos deslocamentos do plano médio. O problema foi reduzido de tri-dimensional para bi-dimensional. As expressões obtidas para as tensões na espessura da placa é necessário definir as “tensões da placa” que devem ser bi-dimensionais. Essas tensões da placa devem poder ser expressas em termos das deformações e curvaturas do plano médio. Uma distribuição arbitrária de forças pode ser substituída por uma força e um momento equivalente. Analogamente, uma distribuição arbitrária de tensões pode ser substituída por esforços resultantes (esforços no plano e momentos). Esses esforços resultantes são grandezas bi-dimensionais.

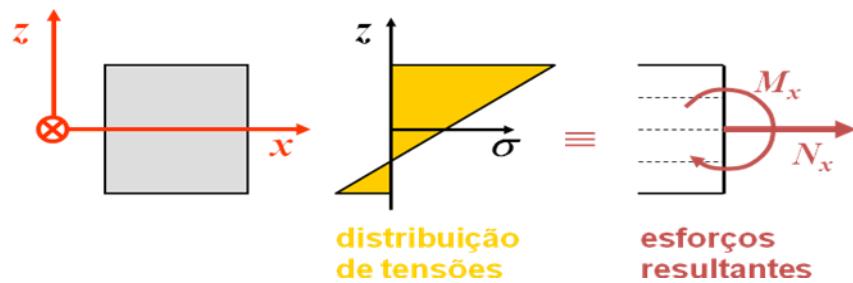


Fig. 1-6 Esforços equivalentes a distribuição de tensões ao longo da espessura da placa

N_x é a força resultante equivalente à distribuição de tensões e tem unidade de força por unidade de comprimento,

$$N_x(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x(x, y, z) dz \quad (1.17)$$

M_x é o momento resultante equivalente à distribuição de tensões e tem unidade de momento por unidade de comprimento,

$$M_x(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_x(x, y, z) dz \quad (1.18)$$

A direção positiva de M_x corresponde à direção do momento resultante de uma força $\sigma_x dz$ positiva para z positivo.

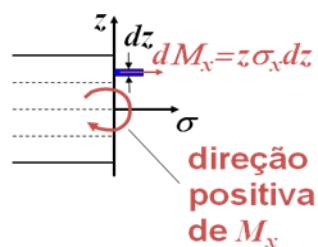


Fig. 1-7 Convenção de sinais para M_x

Os esforços resultantes atuando no plano da placa são,

$$\begin{aligned}
N_x(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x(x, y, z) dz \\
N_y(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y(x, y, z) dz \\
N_{xy}(x, y) = N_s(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_s(x, y, z) dz
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Alternativamente utilizando a notação matricial compacta podemos escrever,

$$\{N(x, y)\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma(x, y, z)\} dz \tag{1.20}$$

Os momentos resultantes atuando no plano da placa são,

$$\begin{aligned}
M_x(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x(x, y, z) dz \\
M_y(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y(x, y, z) dz \\
M_{xy}(x, y) = M_s(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_s(x, y, z) dz
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Alternativamente utilizando a notação matricial compacta podemos escrever,

$$\{M(x, y)\} = \int_{-t/2}^{t/2} z \{\sigma(x, y, z)\} dz \tag{1.22}$$

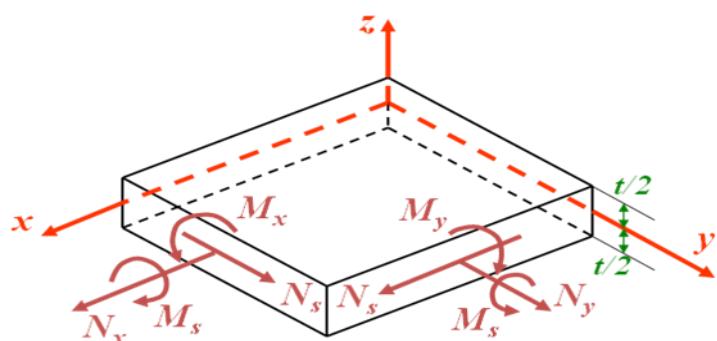


Fig. 1-8 Direção positiva dos esforços resultantes

De acordo com a notação adotada N_x , N_y são os esforços resultantes normais por unidade de comprimento, $N_{xy} = N_s$ esforços resultantes de cisalhamento por unidade de comprimento, M_x , M_y momentos resultantes de flexão por unidade de comprimento e $M_{xy} = M_s$ momentos resultantes de torção por unidade de comprimento.

1.5 Rigidez de placas

Como vimos anteriormente, os esforços resultantes e tensões atuantes no plano da placa são dados por,

$$\begin{aligned}\{N(x, y)\} &= \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma(x, y, z)\} dz \\ \{\sigma\} &= [A]\{\varepsilon\}^0 + z[A]\{\kappa\}\end{aligned}\quad (1.23)$$

Combinando ambas equações obtemos,

$$\{N\} = \int_{-t/2}^{t/2} \left([A]\{\varepsilon\}^0 + z[A]\{\kappa\} \right) dz \quad (1.24)$$

como a matriz $[A]$ é constante ao longo da espessura podemos escrever,

$$\{N\} = [A] \left(\int_{-t/2}^{t/2} \{\varepsilon\}^0 dz + \int_{-t/2}^{t/2} z\{\kappa\} dz \right) = [A] \left(\{\varepsilon\}^0 \int_{-t/2}^{t/2} dz + \{\kappa\} \int_{-t/2}^{t/2} z dz \right) \quad (1.25)$$

Procedendo a integração,

$$\{N\} = [A] \left(\{\varepsilon\}^0 \left[\left(\frac{t}{2} \right) - \left(-\frac{t}{2} \right) \right] + \{\kappa\} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{t}{2} \right)^2 - \left(-\frac{t}{2} \right)^2 \right] \right) \quad (1.26)$$

Portanto,

$$\{N\} = t [A]\{\varepsilon\}^0 \quad (1.27)$$

Onde $t [A]$ é a matriz de rigidez extensional da placa. A equação (1.27) relaciona os esforços resultantes no plano com as deformações no plano médio. A matriz $[A]$ depende somente das propriedades elásticas do material da placa.

A determinação dos esforços no plano é baseada na seguinte relação,

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

Os momentos resultantes na placa podem ser calculados de forma análoga:

$$\{M(x, y)\} = \int_{-t/2}^{t/2} z \{\sigma(x, y, z)\} dz = \{M\} = \int_{-t/2}^{t/2} \left([A]\{\varepsilon\}^0 + z[A]\{\kappa\} \right) dz = \int_{-t/2}^{t/2} \left(z[A]\{\varepsilon\}^0 + z^2[A]\{\kappa\} \right) dz \quad (1.29)$$

como a matriz $[A]$ é constante podemos escrever,

$$\{M\} = [A] \left(\int_{-t/2}^{t/2} z \{\varepsilon\}^0 dz + \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \{\kappa\} dz \right) \quad (1.30)$$

como $\{\varepsilon\}^0$ e $\{\kappa\}$ são funções apenas de x e y e independem de z:

$$\{M\} = [A] \left(\int_{-t/2}^{t/2} z \{\varepsilon\}^0 dz + \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \{\kappa\} dz \right) \quad (1.31)$$

Integrando Eq. (1.31) obtemos:

$$\{M\} = \left(\frac{t^3}{3} \left[\left(\frac{1}{8} \right) - \left(-\frac{1}{8} \right) \right] \right) [A]\{\kappa\} = \frac{t^3}{12} [A]\{\kappa\} \quad (1.32)$$

A equação (1.32) relaciona os momentos resultantes com as curvaturas do plano médio. A matriz $[D]$ depende das propriedades elásticas do material e da espessura da placa. Os esforços de flexão são explicitamente dados por,

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{t^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.33)$$

Lembrando que as curvaturas do plano médio são dadas por,

$$\begin{aligned}\kappa_x(x, y) &= -\frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x^2} \\ \kappa_y(x, y) &= -\frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial y^2} \\ \kappa_{xy}(x, y) &= -2 \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (1.34)$$

podemos reescrever (1.33) em termos do campo de deslocamento transversal,

$$\begin{aligned}M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (1.35)$$

Onde $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$.

Exemplo: Determinar as tensões e deformações atuantes na parede de um cilindro de parede fina de raio r e espessura t sujeito a um carregamento hidrostático

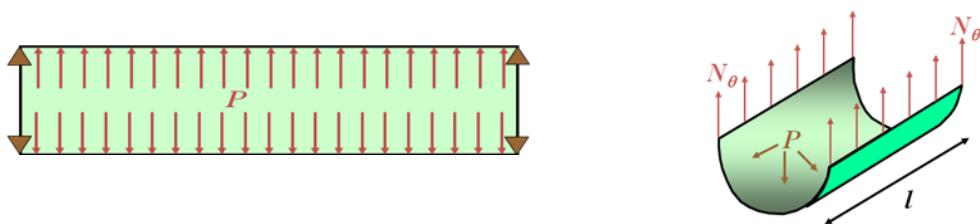


Fig. 1-9 Cilindro de parede fina sujeito a carregamento hidrostático

Nesse caso o carregamento equivale ao de um cilindro infinito sujeito a uma pressão interna. Os esforços resultantes que agem na parede de um segmento de comprimento l são:

$$F = PDl = 2N_\theta l$$

$$N_\theta = \frac{PD}{2} = P r$$

$$N_x = N_s = 0$$

Como não há flexão as tensões são constantes ao longo da espessura ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_s \end{Bmatrix} = \frac{P r}{t} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_s \end{Bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = P r \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Portanto as deformações de membrana resultantes são dadas por,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \frac{P r}{t} \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{P r}{tE} \begin{Bmatrix} -\nu \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1.6 Placas submetidas a Flexão Pura

Essa subseção apresenta o procedimento detalhado para a extração das equações diferenciais parciais que regem o equilíbrio estático de placas planas finas e isotrópicas submetidas a flexão pura.

Considere o elemento infinitesimal de volume de placa mostrado na Fig 1-9 sob o qual encontram-se mapeados os esforços externo e internos. Na figura q corresponde a carga externa por unidade de área, Q_x e Q_y são os esforços cisalhantes transversais por unidade de comprimento atuantes nos planos yz e xz definidos pela normais nas direções x e y , respectivamente, do elemento infinitesimal de placa. M_x , M_y e M_{xy} são os momentos por

unidade de comprimento definidos na seção 1.4, expressos em termos das tensões normais de flexão e cisalhante atuantes no plano xy da placa.

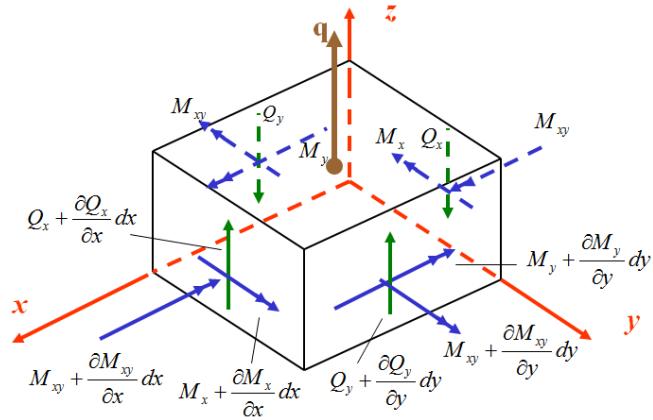


Fig. 1-10 Elemento infinitesimal de volume de placa plana

O equilíbrio de forças na direção z resulta em,

$$\begin{aligned} \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx + q dxdy &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

O equilíbrio de momentos na direção x resulta em,

$$\begin{aligned} - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + M_y dx - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + M_{xy} dy + \\ + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dxdy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - Q_x dy \frac{dx}{2} + q dxdy \frac{dy}{2} &= 0 \\ - \frac{\partial M_y}{\partial y} dxdy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dxdy + Q_y dxdy + \\ + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx(dy)^2 + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dy \frac{(dx)^2}{2} + q dx \frac{(dy)^2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

Negligenciando os infinitesimais de ordem superior obtemos,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + Q_y dx dy &= 0 \\
\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} &= Q_y
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Analogamente, o equilíbrio de momentos na direção y resulta em,

$$\begin{aligned}
&\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} dx + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy - \\
&- \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + Q_y dx \frac{dx}{2} + q dx dy \frac{dx}{2} = 0 \\
&\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dx dy + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy - Q_x dx dy - \\
&- \frac{\partial Q_x}{\partial x} (dx)^2 dy - \frac{\partial Q_y}{\partial y} \frac{(dx)^2}{2} dy + q \frac{(dx)^2}{2} dy = 0
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Negligenciando os infinitesimais de ordem superior obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dx dy + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy - Q_x dx dy &= 0 \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= Q_x
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Dessa forma, as equações de equilíbrio para placas sujeitas a flexão pura são:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \tag{1.41}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \tag{1.42}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \tag{1.43}$$

Substituindo Eqs. (1.42) e (1.43) em Eq. (1.41) obtemos,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \tag{1.44}$$

Lembrando que,

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.45)$$

onde $D=Et^3/(12*(1-\nu^2))$, a Eq. (1.44) pode ser escrita em função do campo de deslocamento transversal do plano médio da placa, ou seja,

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1.46)$$

Eq. (1.46) é a equação diferencial parcial que rege o comportamento estrutural de placas finas de material isotrópico sujeitas a flexão pura. A solução da Eq. (1.46) para uma dada condição de contorno permite a determinação dos esforços internos de flexão e cisalhamento bem como a distribuição de tensões atuantes na placa ou seja,

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} z \begin{bmatrix} \kappa_x(x, y) \\ \kappa_y(x, y) \\ \kappa_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

onde,

$$\begin{aligned}\kappa_x(x, y) &= -\frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x^2} \\ \kappa_y(x, y) &= -\frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial y^2} \\ \kappa_{xy}(x, y) &= -2 \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (1.50)$$

1.7 Solução pelo Método de Navier

Uma solução possível para a equação diferencial de equilíbrio (Eq. 1.46) (ou equação de Lagrange) é chamada solução de Navier. Nessa solução o campo de deslocamento transversal é descrito através de uma série dupla de senos que verifica simultaneamente a equação de equilíbrio (ou Lagrange) e atende todas as condições de contorno (naturais e geométricas) para uma placa simplesmente apoiada em todas as bordas, ou seja (vide Fig. 1-11),

$$\begin{array}{ll}w(0, y) = 0 & \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \\w(a, y) = 0 & \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0 \\w(x, 0) = 0 & \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0 \\w(x, b) = 0 & \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=b} = 0\end{array}\quad (1.51)$$

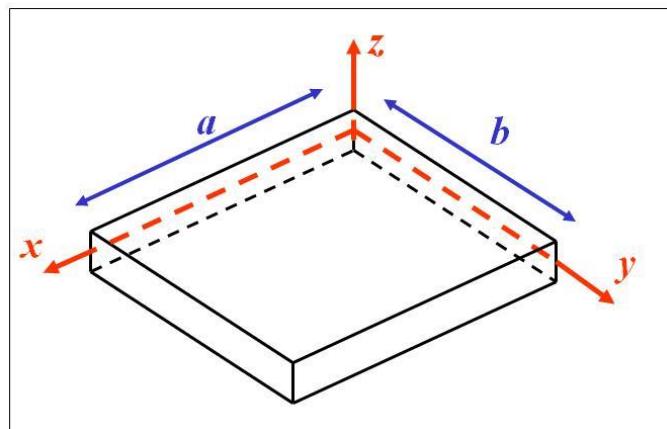


Fig. 1-11 Geometria de referencia para aplicação das condições de contorno

A forma geral da solução que atende as condições de contorno acima listadas é dada por:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1.52)$$

De forma análoga podemos descrever o carregamento externo na forma de uma série dupla trigonométrica em senos, ou seja,

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1.53)$$

De forma a determinar os coeficientes a_{mn} da Eq. (1.53), multiplicamos ambos os lados de Eq. (1.53) por $\sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right)$ e integramos ao longo de todo domínio sob o qual o carregamento externo foi prescrito. Para uma placa sujeita a uma pressão externa ao longo de toda a sua superfície externa obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dx dy &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b \int_0^a a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dx dy \\ \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dx dy &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) dx \right) \left(\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dy \right) \end{aligned} \quad (1.53)$$

Fazendo uso da propriedade de ortogonalidade da função seno, podemos escrever,

$$\int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dx dy = a_{m'n'} \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right) = a_{m'n'} \frac{ab}{4} \quad (1.54)$$

$$a_{m'n'} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dx dy \quad (1.55)$$

Substituindo a solução proposta para o campo de deslocamento transversal dada por Eq. (1.52) em Eq. (1.46) obtemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{a_{mn}}{D} \right\} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) = 0 \quad (1.55)$$

A solução não-trivial de Eq. (1.55) leva a seguinte equação característica,

$$A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{a_{mn}}{D} = 0 \quad (1.56)$$

Simplificando Eq. (1.56) obtemos,

$$A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 = \frac{a_{mn}}{D} \quad (1.57)$$

A partir de Eq. (1.57) podemos determinar os termos A_{mn} que compõe a solução geral da Equação de Laplace (ou equilíbrio) em termos dos coeficientes utilizados na expansão do carregamento externo em série dupla trigonométrica,

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{a_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (1.58)$$

Com A_{mn} determinado, temos o campo de deslocamento transversal, esforços cortantes e momentos fletores definidos em todo domínio da placa. É importante ressaltar que a solução encontrada só é aplicável a placas uniformes simplesmente apoiadas em todas as arestas. Para outras condições de contorno diferentes das mostradas nessa seção, temos que propor uma solução para o campo de deslocamento $w(x, y)$ que satisfaça todas as condições naturais e geométricas ao longo do contorno da placa.

Exemplo: Determinar o deslocamento central bem como a distribuição de momentos fletores e esforços cortantes atuantes numa placa retangular de comprimento a , largura b e espessura t simplesmente apoiada ao longo das bordas e sujeita a uma pressão externa constante $q(x, y) = q_0$ ao longo de toda a sua superfície.

O primeiro passo é expressar o carregamento uniformemente distribuído ao longo do domínio da placa por meio de uma série dupla de funções seno, ou seja,

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = q_0 \quad (1.59)$$

Pré-multiplicando ambos os lados de Eq. (1.59) por $\sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right)$, fazendo $m=m'$, $n=n'$ e integrando ao longo do domínio da placa sob o qual o carregamento foi definido, podemos obter a seguinte expressão para os coeficientes a_{mn} ,

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{4q_0}{mn\pi^2} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi) \quad (1.60)$$

onde $a_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}$ com m e n inteiros e ímpares. Lembrando que,

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{a_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \quad (1.61)$$

Portanto a solução da equação de Laplace pode ser escrita da seguinte forma,

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1.62)$$

para $x=a/2$ e $y=b/2$ podemos reescrever Eq. (1.62) da seguinte forma,

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (1.63)$$

Os esforços cortantes são dados pelas seguinte conjunto de equações,

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (1.64)$$

onde $w_0 = w(x, y)$ e os momentos são dados por,

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.65)$$

1.8 REFERÊNCIAS

- 1.1 DYM, C. L., 1974, INTRODUCTION TO THE THEORY OF SHELLS, PERGAMON PRESS, OXFORD.
- 1.2 FLÜGGE, W., 1973, STRESSES IN SHELLS, SPRINGER-VERLAG, BERLIN.
- 1.3 GOL'DENVEIZER, A. L., 1961, THEORY OF ELASTIC THIN SHELLS, PERGAMON PRESS, NEW YORK.
- 1.4 KRAUS, H., 1967, THIN ELASTIC SHELLS, JOHN WILEY, NEW YORK.
- 1.5 NOVOZHILOV, V. V., 1959, THE THEORY OF THIN SHELLS, NOORDHOFF, GRONINGEN.
- 1.6 PFLÜGER, A., 1961, ELEMENTARY STATICS OF SHELLS, McGRAW-HILL, NEW YORK.
- 1.7 REISMANN, H., 1988, ELASTIC PLATES: THEORY AND APPLICATION, JOHN WILEY, NEW YORK.

1.8 SEIDE, P., 1975, SMALL ELASTIC DEFORMATIONS OF THIN SHELLS , NOORDHOFF, LEYDEN.

1.9 SZILARD, R., 2004, THEORIES AND APPLICATIONS OF PLATE ANALYSIS: CLASSICAL, NUMERICAL AND ENGINEERING METHOD, JOHN WILEY, HOBOKEN.

1.10 TIMOSHENKO, S. P., AND WOINOWSKY-KRIEGER, S., 1959, THEORY OF PLATES AND SHELLS, McGRAW-HILL, NEW YORK.

1.11 UGURAL, A. C., 1999, STRESSES IN PLATES AND SHELLS, McGRAW-HILL, BOSTON.

CAPÍTULO 2

FLAMBAGEM DE COLUNAS

ÍNDICE DE SEÇÕES

2.1	INTRODUÇÃO	2.4
2.2	ALGUMAS EQUAÇÕES BÁSICAS	2.4
2.3	O MÉTODO DO EQUILÍBrio NEUTRO	2.5
2.4	A CARGA CRÍTICA DA COLUNA SIMPLESMENTE APOIADA	2.6
2.5	CONDIÇÕES DE CONTORNO	2.9
	A) AMBAS AS EXTREMIDADES ENGASTADAS	2.9
	B) UMA EXTREMIDADE ENGASTADA, OUTRA LIVRE	2.11
	C) UMA EXTREMIDADE SIMPLESMENTE APOIADA, OUTRA RESTRINGIDA ELASTICAMENTE	2.12
2.6	COMPRIMENTO EFETIVO E COEFICIENTE DE FIXAÇÃO	2.15
2.7	COLUNAS CARREGADAS EXCENTRICAMENTE	2.22
2.8	COLUNAS COM FORMAS IMPERFEITAS	2.23
2.9	FLAMBAGEM PLÁSTICA DE COLUNAS	2.29
2.11	EXEMPLOS DE ANÁLISE EM FLAMBAGEM DE COLUNAS	2.39
2.12	EXERCÍCIOS	2.44
2.13	REFERÊNCIAS	2.49

ÍNDICE DE FIGURAS

2-1	ESTABILIDADE DO EQUILÍBrio E SUPERFÍCIE DE ESTABILIDADE	2.5
2-2	COLUNA SIMPLESMENTE APOIADA	2.6
2-3	O COMPORTAMENTO DA COLUNA DE EULER	2.8
2-4	COLUNA COM EXTREMIDADES ENGASTADAS	2.9
2-5	COLUNA EQUIVALENTE DE EULER – EXTREMIDADES ENGASTADAS	2.10
2-6	COLUNA EM BALANÇO	2.11
2-7	COLUNA RESTRINGIDA ELASTICAMENTE	2.12
2-8	COLUNA RESTRINGIDA ELASTICAMENTE - PÓRTICO	2.14
2-9	COMPRIMENTO EFETIVO DE COLUNA SUBMETIDA À CARGA NA EXTREMIDADE E CARGA DISTRIBUÍDA AO LONGO DO COMPRIMENTO	2.18
2-10	COEFICIENTE DE FIXAÇÃO DE COLUNA COM APOIO ELÁSTICO	2.19
2-11	COEFICIENTE DE FIXAÇÃO EFETIVO PARA COLUNA COM APOIOS ELÁSTICOS DISTINTOS EM AMBAS AS EXTREMIDADES	2.20
2-12	CARGA CRÍTICA DE COLUNAS DE SEÇÃO VARIÁVEL	2.21
2-21	COLUNA CARREGADA EXCENTRICAMENTE	2-22
2-22	CURVA CARGA-DEFLEXÃO PARA COLUNA CARREGADA EXCENTRICAMENTE	2-23
2-23	COLUNA COM DEFLEXÃO INICIAL	2-23
2-24	COLUNA COM IMPERFEIÇÕES – RESULTADOS DA TEORIA LINEAR	2-26
2-25	COLUNA COM IMPERFEIÇÕES – RESULTADOS DA TEORIA NÃO-LINEAR	2.28
2-26	COLUNA DE SHANLEY – CURVA CARGA-DEFLEXÃO	2.31

2. FLAMBAGEM DE COLUNAS

2.1 INTRODUÇÃO

As almas finas e os elementos longitudinais esbeltos de aeronaves estão sujeitos à falha por flambagem em níveis de tensões relativamente baixos, freqüentemente abaixo do limite de proporcionalidade e raramente muito acima da tensão de escoamento. Em consequência, o modo crítico de falha para a maior parte da estrutura é por flambagem, em vez de ruptura por tração, e a predição das cargas de flambagem para colunas, placas e cascas é assunto de vital preocupação para o engenheiro aeronáutico. Neste capítulo consideraremos o mais simples destes elementos, a coluna.

Uma coluna pode flambar por *instabilidade primária* ou *secundária*. Na instabilidade primária não há distorção da seção transversal, e o comprimento de onda da “flamba” é da ordem do comprimento da coluna. Ela pode ocorrer por flexão lateral ou, se a seção é flexível em torção, por uma combinação de flexão e torção. Na instabilidade secundária, ou *local*, há mudanças na forma da seção transversal e o comprimento de onda da flamba é da ordem das dimensões da seção transversal. Neste capítulo será considerada somente a instabilidade primária por flexão.

Membros submetidos à tração, bem como colunas curtas e troncudas, falham quando a tensão atuante atinge certo limite de resistência do material. Uma vez conhecido este limite do material, é relativamente simples determinar a capacidade de absorção de carga do membro. A flambagem, entretanto, não ocorre quando a tensão no membro atinge uma certa resistência conhecida do material. A tensão na qual ocorre a flambagem depende de uma série de fatores, incluindo as dimensões do membro, a forma como este é suportado, e as propriedades do material do qual é manufaturado. A determinação da tensão de flambagem é portanto um problema relativamente complexo.

2.2 ALGUMAS EQUAÇÕES BÁSICAS

Nesta seção serão fornecidas algumas relações básicas necessárias para o desenvolvimento da teoria e supostas conhecidas pelo leitor.

A Teoria da Elasticidade fornece as seguintes relações não-lineares entre deformações e deslocamentos:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.2)$$

As expressões para ε_{yy} , ε_{zz} , ε_{yz} e ε_{zxy} , seguem por inspeção. Nestas expressões, os termos não-lineares estão entre colchetes e um ou mais destes termos são considerados nulos dependendo das hipóteses consideradas na análise.

A Teoria de Vigas fornece as relações não-lineares entre o raio de curvatura e os deslocamentos

$$\frac{1}{R_z} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}}, \quad \frac{1}{R_y} = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (2.3)$$

e a relação entre a curvatura e os momentos atuantes na seção

$$\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}} = \pm \frac{1}{E} \frac{M_z I_{yy} - M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}, \quad \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}} = \pm \frac{1}{E} \frac{M_y I_{zz} - M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (2.4)$$

onde o sinal depende da convenção adotada.

Mais uma vez, as relações acima podem ser simplificadas quando os termos entre parênteses são pequenos em relação à unidade e se é adotado um sistema de eixos principais.

2.3 O MÉTODO DO EQUILÍBRIO NEUTRO

O Conceito de estabilidade é freqüentemente explicado considerando o equilíbrio de uma bola rígida em várias posições, como mostrado na Fig. 2-1.

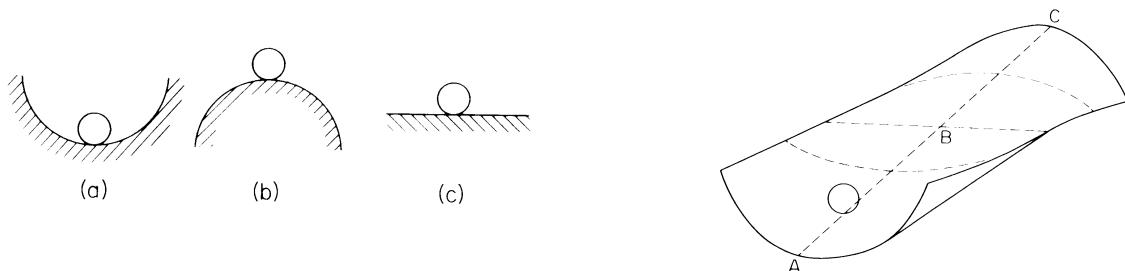


Fig. 2-1 Estabilidade do Equilíbrio e Superfície de Estabilidade

Embora a bola esteja em equilíbrio nas três posições mostradas, um exame mais cuidadoso revela a existência de importantes diferenças entre as três posições. Se a bola na parte (a) for deslocada ligeiramente de sua posição original de equilíbrio, ela retornará àquela posição após a retirada da força perturbadora. Um corpo que se comporta desta maneira é dito estar num estado de *equilíbrio estável*. Já a bola em (b), ao ser deslocada ligeiramente de sua posição de repouso não retornará, mas continuará a se mover para mais longe da posição original. O equilíbrio da bola em (b) é portanto muito precário. É

chamado de *equilíbrio instável*. A bola em (c), ao ser deslocada de sua posição de repouso não retorna à posição original mas também não se move para mais longe. Este comportamento é referido como *equilíbrio neutro*, ou *indiferente*.

A bola deslizando sobre a superfície da Fig. 2-1 está em equilíbrio em qualquer ponto ao longo da linha ABC. No trecho entre A e B o equilíbrio é estável e no trecho entre B e C, instável. No ponto B, transição entre os dois trechos, a bola está em estado de equilíbrio neutro.

O comportamento de uma coluna reta sujeita a uma carga central é bastante similar ao da bola. A configuração reta da coluna é estável para cargas pequenas e instável para cargas grandes. Se for assumido que um estado de equilíbrio neutro na coluna existe numa transição entre os estados estável e instável, então a carga sob a qual a configuração reta da coluna passa a ser instável é a carga sob a qual o equilíbrio neutro é possível. Esta carga é referida normalmente como a *carga crítica*.

Para determinar a carga crítica de uma coluna é necessário encontrar a carga sob a qual a coluna pode estar em equilíbrio tanto reta quanto levemente fletida. A técnica que usa este critério para a determinação de cargas críticas (há outras) é denominada de *método do equilíbrio neutro*.

2.4 A CARGA CRÍTICA DA COLUNA SIMPLESMENTE APOIADA

A coluna mostrada na Fig. 2-2 tem seção transversal constante e é manufaturada de material homogêneo. Considere válidas as seguintes hipóteses:

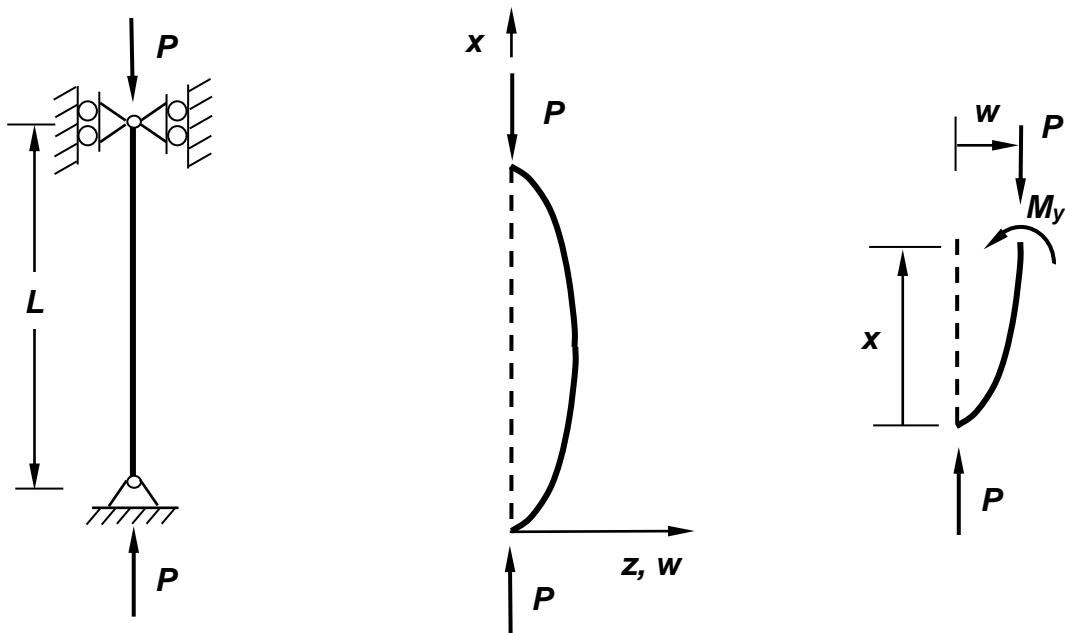


Fig. 2-2 Coluna Simplesmente Apoiada

- As extremidades da coluna são simplesmente apoiadas. A extremidade inferior está ligada a uma articulação imóvel e a extremidade superior a uma articulação tal que possa girar e mover na vertical livremente, mas não horizontalmente.

2. A coluna é perfeitamente reta e a carga é aplicada ao longo do eixo que passa pelos centróides das seções transversais. z é eixo principal.
3. O material obedece a lei de Hooke (elástico linear)
4. As deformações na coluna são pequenas o suficiente para que o termo $(w')^2$ é desprezível quando comparado à unidade na expressão (2.3) para a curvatura $w''/[1+(w')^2]^{1/2}$, de maneira que a curvatura possa ser aproximada por w'' .

De acordo com o critério do equilíbrio neutro, a carga crítica é aquela para a qual a posição de equilíbrio na configuração levemente fletida da Fig. 2-2 é possível. Para o sistema de eixos adotado na Fig. 2-2 e levando em conta a hipótese 4 acima, a Eq. (2.4), fornece

$$M_y = -EI_{yy}w''$$

Denominando o momento de inércia da seção em torno do eixo y simplesmente por I , doravante, e fazendo o equilíbrio do corpo livre da Fig 2-2, obtém-se:

$$\sum M = 0 \Rightarrow Pw - M_y = Pw - (-EIw'') = EIw'' + Pw = 0 \quad (2.5)$$

Se não houvessem sido feitas as hipóteses de comportamento elástico linear e pequenas deflexões, o módulo de elasticidade E na Eq. (2.5) tornar-se-ia variável, e a curvatura w'' seria substituída por $w''/[1+(w')^2]^{1/2}$. A equação resultante não teria coeficientes constantes e seria não linear. A sua solução, portanto, seria difícil de obter. Por outro lado, se não houvessem sido feitas as hipóteses de apoio simples em ambas as extremidades e cargas centrais, apareceriam termos adicionais na mão direita da Eq. (2.5). Isto tornaria a equação não-homogênea, mas sua solução não seria difícil de ser obtida.

Dividindo a Eq. (2.5) por EI , obtém-se

$$w'' + k^2 w = 0, \text{ com } k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.6)$$

cuja solução geral é dada por

$$w(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx \quad (2.7)$$

Para determinar as constantes arbitrárias A e B , deve-se fazer uso das condições de contorno aplicáveis no problema:

$$w = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = L \quad (2.8)$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow B \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

de modo que

$$w(x) = A \operatorname{sen} kx \quad (2.9)$$

A aplicação da segunda condição de contorno fornece

$$w(L) = 0 \Rightarrow A \operatorname{sen} kL = 0 \Rightarrow \text{ou } A = 0 \text{ ou } \operatorname{sen} kL = 0$$

Se $A = 0$, k e consequentemente P podem assumir qualquer valor. Este resultado é conhecido como a solução trivial, porque confirma o que já é conhecido, que a coluna está em equilíbrio sob qualquer carga axial desde que permaneça perfeitamente reta. Por outro lado,

$$\operatorname{sen} kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi, \text{ onde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

A solução então pode ser escrita

$$w(x) = A \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.11)$$

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (2.12)$$

Quando submetida às cargas dadas pela Eq. (2.12), a coluna pode estar em equilíbrio numa posição levemente fletida. A forma da deflexão é dada pela Eq. (2.11). A amplitude da deflexão é entretanto indeterminada uma vez que a constante A pode assumir qualquer valor quando $\operatorname{sen} kL = 0$. O menor valor da carga que satisfaz a Eq. (2.12) é a carga de Euler, de modo que é a menor carga sob a qual a coluna deixa de estar em equilíbrio estável.

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.13)$$

A deflexão máxima da coluna é dada para $x = L / 2$ e é numericamente igual a A . A Fig. 2-3 mostra o comportamento da coluna de Euler graficamente. Até a carga de Euler, a coluna tem de permanecer

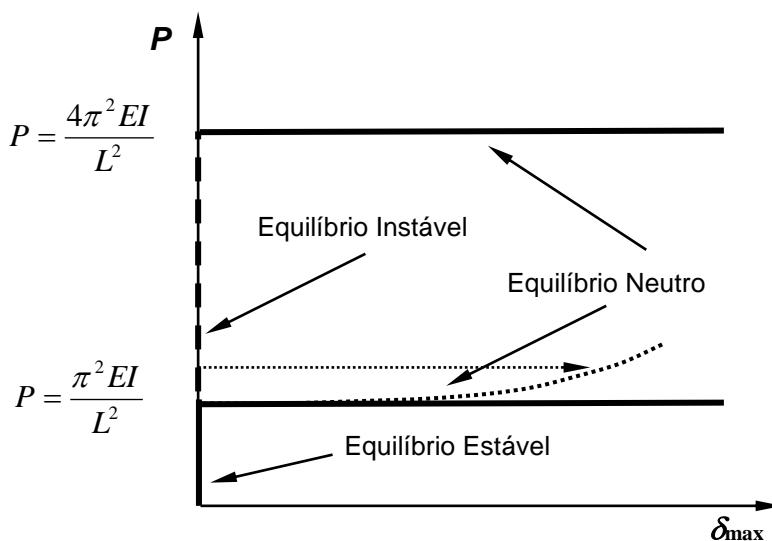


Fig. 2-3 O Comportamento da Coluna de Euler

reta. Se a coluna é deslocada de sua posição de equilíbrio, retorna à posição original cessada a perturbação. Na carga de Euler há uma bifurcação do equilíbrio, isto é, a coluna tanto pode permanecer reta como assumir uma forma fletida de amplitude indeterminada. O estado de equilíbrio é neutro. Uma coluna submetida a uma carga entre P_E e $4 P_E$ também pode assumir somente a posição reta. O equilíbrio, entretanto, é instável. As se deslocar a coluna de sua posição reta as deflexões crescerão sem limite. A carga $P = 4 P_E$, mais uma vez é uma bifurcação do equilíbrio, no qual é possível o equilíbrio neutro. No que concerne a estabilidade de colunas, entretanto, esta carga não tem maior significado, pois não é possível atingi-la na prática sem recorrer a artifícios experimentais (e.g., colocar um apoio temporário tipo rótula em $x = L/2$; carregar até atingir a carga $P = 4 P_E$; deformar a coluna de modo a que apresente duas semi-ondas de amplitude sensível; retirar os apoios temporários).

Para todos os efeitos práticos, uma coluna não resiste cargas superiores à carga de Euler. Se fossem admitidas grandes deflexões, mas ainda mantendo o material elástico linear, a solução teria a forma da linha pontilhada na Fig. 2-3, ou seja, submetida a uma carga maior do que a de Euler, a coluna encontraria uma posição fletida estável. As deflexões, entretanto, cresceriam violentamente com o aumento gradual da carga, resultando em tensões de flexão que logo superariam a tensão última da maioria dos materiais.

2.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

O primeiro passo a ser seguido para generalizar os resultados obtidos na seção anterior é considerar outras condições de contorno.

a) AMBAS AS EXTREMIDADES ENGASTADAS

Se uma coluna está engastada em ambas as extremidades, não pode se deslocar lateralmente nem girar nestes pontos. Em consequência, quando a coluna é fletida levemente, são induzidos momentos fletores M_0 em ambas as extremidades, como mostrado na Fig. 2-4. Fazendo o equilíbrio de momentos numa seção a uma distância x da origem, obtém-se

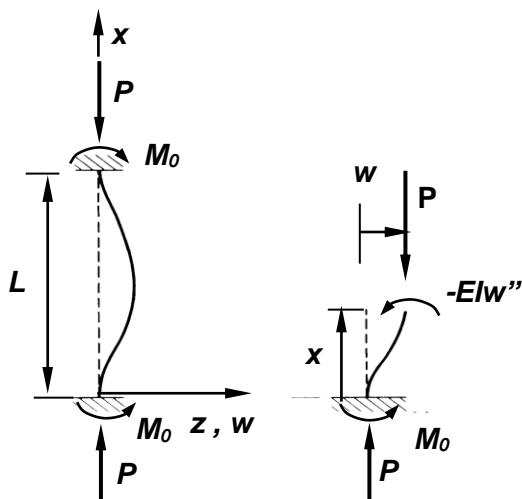


Fig. 2-4 Coluna com Extremidades Engastadas

$$EIw'' + Pw = M_0 \quad \text{ou} \quad w'' + k^2 w = \frac{M_0}{EI}, \quad \text{com} \quad k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.14)$$

A solução geral da equação homogênea é dada na Eq. (2.7). Uma solução particular que pode ser obtida por inspeção é $w(x) = M_0 / (k^2 EI) = M_0 / P$, de maneira que, a solução completa é

$$w = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_0}{P} \quad (2.15)$$

onde A e B são determinados das condições de contorno do problema:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0 \quad \text{e} \quad w(L) = 0.$$

As primeiras duas condições são satisfeitas se $A = 0$ e $B = -\frac{M_0}{P}$, de modo que

$$w = \frac{M_0}{P} (1 - \cos kx)$$

A última condição de contorno conduz à equação transcendental

$\cos kL = 1$ cuja menor raiz não nula é $kL = 2\pi$. A solução pode então ser escrita na forma

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.16)$$

$$w(x) = \frac{M_0}{P} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) \quad (2.17)$$

Como pode ser notado, a carga crítica da coluna com ambas as extremidades engastadas é quatro vezes a carga de Euler (coluna simplesmente apoiada).

Usando a Eq. (2.17), pode-se mostrar que os pontos de inflexão, i.e., os pontos de momento interno nulo, se encontram em $x = L/4$ e $x = 3L/4$. A porção central da coluna, entre estes pontos, é portanto equivalente a uma coluna simplesmente apoiada de comprimento $L/2$, como mostrado na Fig. 2-5, cuja carga crítica é

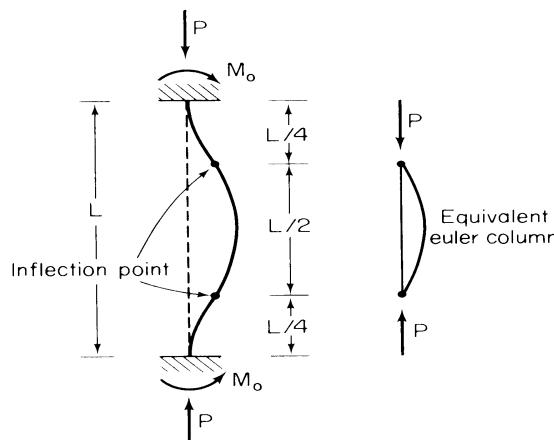


Fig. 2-5 Coluna Equivalente de Euler – Extremidades Engastadas

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} \quad (2.18)$$

A carga crítica da pseudo-coluna simplesmente apoiada que existe entre os pontos de inflexão da coluna bi-engastada é portanto igual à carga crítica da coluna bi-engastada. **A carga crítica de qualquer coluna pode ser obtida de uma coluna de Euler equivalente.** O comprimento desta coluna equivalente de Euler é denominado de *comprimento efetivo do membro*.

b) UMA EXTREMIDADE ENGASTADA, OUTRA LIVRE

A coluna mostrada na Fig. 2-6 está engastada na base e livre na outra extremidade. Uma deflexão lateral ocasionará um deslocamento δ na extremidade superior e um momento $P\delta$ na base. Impondo o equilíbrio de momentos (Fig. 2-6 b) resulta em

$$EIw'' + Pw = P\delta \quad \text{ou} \quad w'' + k^2 w = k^2 \delta \quad (2.19)$$

cuja solução geral é dada por

$$w = A \sin kx + B \cos kx + \delta \quad (2.20)$$

Aplicando as condições de contorno na base, tem-se

$$w'(0) = 0 \Rightarrow A = 0; \quad w(0) = 0 \Rightarrow B = -\delta; \quad \text{de modo que} \quad w(x) = \delta(1 - \cos kx)$$

A condição de contorno na extremidade superior, $w(L) = \delta$ é satisfeita se $\cos kL = 0$. A menor raiz não-trivial desta equação é $kL = \pi/2$, que leva a

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (2.21)$$

$$w(x) = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (2.22)$$

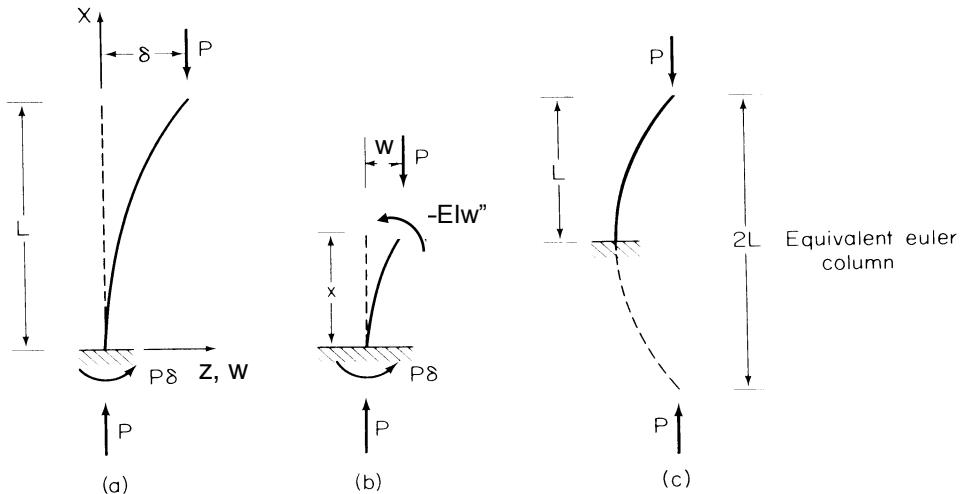


Fig. 2-6 Coluna em Balanço

A Eq. (2.21) indica que a carga crítica de uma viga em balanço é um quarto da carga de Euler. Pode ser mostrado a partir da Eq. (2.22) que a deflexão de uma viga em balanço consiste de um quarto de onda de senóide, ou seja, a metade da curva de deflexão da coluna simplesmente apoiada (Fig. 2-6c). O comprimento efetivo da coluna equivalente de Euler é igual a $2L$, e a carga crítica para a coluna em balanço pode ser expressa na forma

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \quad (2.23)$$

c) UMA EXTREMIDADE SIMPLESMENTE APOIADA, OUTRA RESTRINGIDA ELASTICAMENTE

Na maior parte das estruturas reais, as extremidades das colunas nem são simplesmente apoiadas, nem engastadas. Normalmente as colunas estão rigidamente conectadas a outros membros, que permitem a ocorrência de rotações limitadas nas extremidades. Suportes deste tipo são referidas como *restrições elásticas*. A restrição depende das propriedades elásticas dos membros aos quais a extremidade da coluna está conectada.

Considere uma coluna simplesmente apoiada na base e restrinuida elasticamente por uma mola na outra, como mostrado na Fig. 2-7. A mola torsional é suposta linearmente elástica em rotação (momento proporcional ao ângulo de rotação) e rígida nas direções horizontal e vertical, estando conectada a um dispositivo que permite o livre movimento vertical.

Fazendo o equilíbrio de momentos no corpo livre, obtém-se

$$-(-EIw'') + Pw - \frac{Mx}{L} = 0 \quad \text{ou} \quad w'' + k^2 w = \frac{Mx}{EIL} \quad (2.24)$$

cuja solução geral é

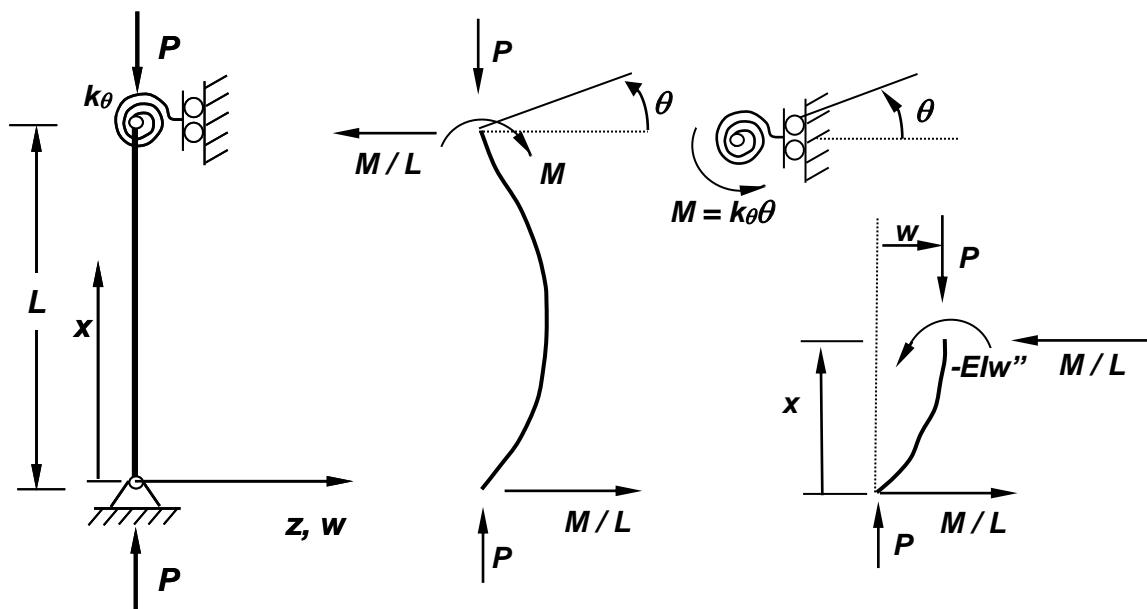


Fig. 2-7 Coluna Restringida Elasticamente

$$w = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + \frac{Mx}{PL} \quad (2.25)$$

Aplicando as condições de contorno na extremidade inferior, $w(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, e na extremidade superior, $w(L) = 0 \Rightarrow A = -M/(P \operatorname{sen} kL)$. Portanto,

$$w = \frac{M}{P} \left(\frac{x}{L} - \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} kL} \right) \quad (2.26)$$

Como a coluna está rigidamente conectada à mola, a rotação da extremidade superior da coluna tem de ser igual à rotação da mola. Para a coluna, a inclinação da deflexão em $x = L$ é

$$\theta = -\frac{dw}{dx} = -\frac{M}{P} \left(\frac{1}{L} - \frac{k \cos kL}{\operatorname{sen} kL} \right) = -\frac{M}{kEI} \left(\frac{1}{kL} - \frac{1}{\tan kL} \right) \quad (2.27)$$

onde o sinal menos foi utilizado porque dw/dx e θ têm sinais contrários. Por outro lado, na mola

$$\theta = \frac{M}{k_\theta} \quad (2.28)$$

Equacionando-se as expressões em (2.27) e (2.28), obtém-se

$$\frac{M}{k_\theta} = -\frac{M}{kEI} \left(\frac{1}{kL} - \frac{1}{\tan kL} \right) \text{ ou } \frac{kEI}{k_\theta} = -\left(\frac{1}{kL} - \frac{1}{\tan kL} \right) \quad (2.29)$$

Seja β uma medida adimensional da constante de mola, definida como

$$\beta = \frac{k_\theta L}{EI} \quad (2.30)$$

A Eq. (2.29) pode então, após manipulação algébrica conveniente, ser rescrita como

$$\tan kL = \frac{\beta kL}{(kL)^2 + \beta} \quad (2.31)$$

Dado β , a equação transcendental (2.31) pode ser resolvida para kL , entre outras:

1. Por uma calculadora;
2. Por tentativa e erro;
3. Traçando-se as curvas correspondentes às mãos esquerda e direita e verificando o ponto comum correspondente ao valor mais baixo de kL ;
4. Por um processo iterativo de relaxação.

Quando a rigidez da mola é nula ($\beta = 0$), reproduz-se a condição de apoio simples. Neste caso, a Eq. (2.31) fornece $\tan kL = 0$, cuja menor raiz é $kL = \pi$, de modo que a carga crítica é a de Euler, como não poderia deixar de ser.

Se a rigidez da mola for infinita tem-se o caso da coluna com uma extremidade simplesmente apoiada e a outra engastada. Neste caso, $\beta \rightarrow \infty$, e a Eq. (2.31) fornece

$$\tan kL = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta kL}{(kL)^2 + \beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{kL}{(kL)^2 + 1} = kL \quad (2.32)$$

A menor raiz desta equação transcendental é $kL \approx 4,49$, que leva, respectivamente, à carga crítica e modo crítico (equação da deflexão) dado pela Eq. (2.26)

$$P_{cr} \approx \frac{20,2EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2} \quad (2.33)$$

$$w(x) \approx \frac{M}{P} \left[\frac{x}{L} - \frac{\sin(4,49x/L)}{\sin 4,49} \right] \approx \frac{M}{P} \left[\frac{x}{L} + 1,02 \sin(4,49x/L) \right]$$

(2.34)

O comprimento efetivo da coluna equivalente de Euler é $0,7L$, como mostrado em (2.33).

Considere, agora, um pórtico como mostrado na Fig. 2-8, onde a viga é engastada na extremidade

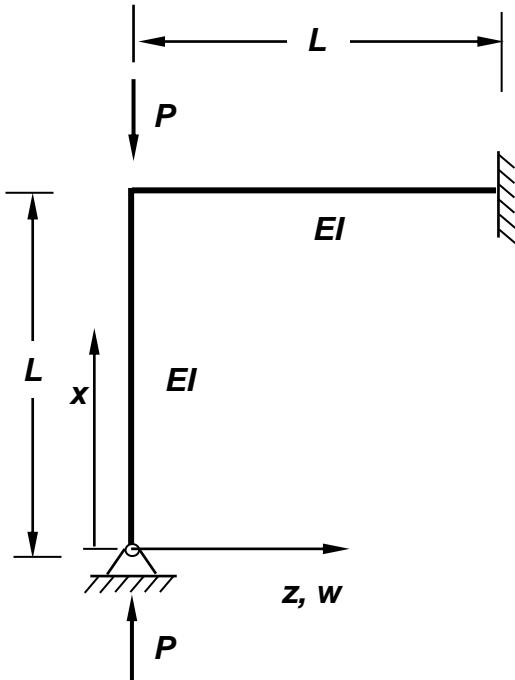


Fig. 2-8 Coluna Restringida Elasticamente - Pórtico

da direita. Por simplicidade, o comprimento L e a rigidez em flexão EI da viga são tomados iguais aos da coluna. Sob a ação da carga P , com $P < P_{cr}$, a coluna comprimirá e o ponto de aplicação da carga sofrerá um pequeno deslocamento vertical. A viga sofrerá uma pequena flexão, pois a sua extremidade esquerda terá que acompanhar o ponto de aplicação da carga. Enquanto a coluna estiver reta, entretanto, estes deslocamentos são muito pequenos e para linearizar o problema, serão desprezados.

Quando a carga crítica é atingida, entretanto, a deformação de flexão na coluna induzirá flexão na viga. Devido à sua rigidez, a viga resistirá à flexão pela ação da coluna e exercerá um momento na mesma. As forças de cisalhamento na viga dependem da magnitude da forma fletida. Como esta pode ser feita tão pequena quanto se queira (no cálculo da carga crítica as forças produzidas pelas deformações de flexão e as próprias deformações são consideradas infinitesimais), é razoável admitir-se que a carga axial na coluna permaneça constante e igual a P durante a flambagem. Para a solução do problema, portanto, basta avaliar β .

Da teoria de vigas vem que o momento necessário para girar a extremidade de uma viga bi-engastada de um ângulo θ é $M = 4(EI/L)\theta$. Portanto, a constante de mola é $k_\theta = 4EI/L$, e $\beta = 4$. A Eq. (2.31), então, fornece:

$$\tan kL = \frac{4kL}{(kL)^2 + 4} \quad (2.35)$$

cuja menor raiz é, aproximadamente, $kL = 3,829$, de modo que

$$P_{cr} \cong \frac{14,66EI}{L^2} \cong \frac{\pi^2 EI}{(0,82L)^2} \quad (2.36)$$

$$w(x) \cong \frac{M}{P} \left[\frac{x}{L} - \frac{\sin\left(\frac{3,829x}{L}\right)}{\sin 3,829} \right] \cong \frac{M}{P} \left[\frac{x}{L} + 0,635 \sin\left(\frac{3,829x}{L}\right) \right] \quad (2.37)$$

2.6 COMPRIMENTO EFETIVO E COEFICIENTE DE FIXAÇÃO

Como observamos na seção 2.5, qualquer problema de estabilidade elástica primária em flexão de uma coluna pode ser colocada de uma coluna de Euler com comprimento equivalente, ou seja,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{ref}}{(L')^2} \quad (2.38)$$

onde L' é o comprimento equivalente da coluna de Euler e I_{ref} o momento de inércia de uma seção de referência na coluna (necessário quando o momento de inércia da seção não é constante).

Uma outra forma de representar a carga crítica é através do *coeficiente de fixação* da coluna c , que para uma coluna de seção constante, varia entre os limites 1 e 4, respectivamente, para apoio simples e engaste perfeito em ambas as extremidades:

$$P_{cr} = \frac{c\pi^2 EI_{ref}}{L^2} \quad (2.39)$$

A relação entre o comprimento efetivo e o coeficiente de fixação é evidente:

$$L' = \frac{L}{\sqrt{c}} \quad \text{e} \quad c = \left(\frac{L}{L'} \right)^2 \quad (2.40)$$

Valores de L' para as condições de contorno mais usuais são dados na Tab. 2-1. Além do caso de colunas submetidas a cargas centrais nas extremidades, está também contemplado o caso de colunas submetidas a cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento.

Os comprimentos efetivos de colunas submetidas a uma carga de compressão numa das extremidades e uma carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento, para as condições de contorno em balanço, simplesmente apoiada, engastada - simplesmente apoiada e duplamente engastada, estão representados graficamente na Fig. 2-9.

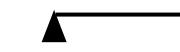
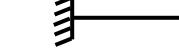
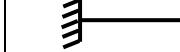
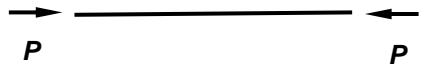
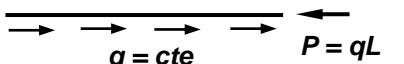
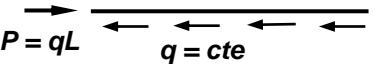
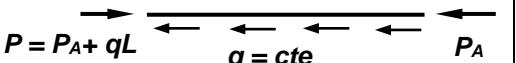
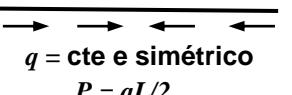
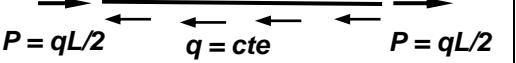
Os coeficientes de fixação de colunas submetidas a alguns casos de apoios elásticos estão representados graficamente na Fig. 2-10. A Fig. 2-10a contempla o caso de colunas simplesmente apoiadas com um suporte elástico, restringindo o deslocamento lateral de um ponto ao longo do comprimento e a Fig. 2-10b trata do caso de dois apoios elásticos idênticos (mesma rigidez e simétricos em relação ao centro da coluna). O coeficiente de fixação é fornecido em função da localização dos apoios e rigidez da mola. A Fig. 2-10c fornece os coeficientes de fixação para colunas com restrições elásticas em rotação. São contemplados os casos de restrição em uma e em ambas as extremidades, sendo que neste último caso as restrições são supostas de mesma rigidez.

Uma coluna cujas restrições elásticas nas extremidades são distintas, pode ser analisada em duas etapas. Inicialmente determinam-se os valores dos coeficientes de fixação para o caso de suportes elásticos iguais: a) com a rigidez do suporte superior e, b) do suporte inferior.. O coeficiente de fixação para a coluna sendo analisada evidentemente deve estar entre estes dois valores e pode ser obtida diretamente da Fig. 2-11.

Alguns casos de colunas de seção variável são considerados na Fig. 2-12. Estão representados os valores de $B = \pi^2 c$ para colunas simplesmente apoiadas com: (a) duas partes de seção constante, mas de rigidez EI distintas; (b) simétricas, com as extremidades de rigidez constante e menor do que a rigidez constante da parte central; (c) simétricas, com a parte central de rigidez constante e as extremidades afiladas em planta e; (d) simétricas, com a parte central de rigidez constante e as extremidades afiladas na largura e espessura.

Uma série de outros casos é tratado na literatura. Por exemplo, no Manual da Boeing (Ref. 2.1) podem ser encontrados os coeficientes de fixação para colunas submetidas a cargas axiais concentradas e cargas distribuídas ao longo do comprimento. A diferença em relação aos casos considerados na Tab. 2-1 é que aqui a razão entre a carga total distribuída e a carga concentrada pode variar entre 0 e 1. A Ref. 2.1 também considera o caso de colunas com seções não uniformes. Além dos casos considerados aqui, considera também colunas simétricas em relação ao centro, mas com a rigidez constante da parte das extremidades maior do que a rigidez constante da parte central. No que tange colunas afiladas, são tratados os casos de colunas sólidas de largura constante e extremidades afilando na espessura e colunas tubulares de espessura constante com extremidades afilando de forma uniforme. Entre outros, os casos de colunas com cargas seguidoras (cargas concentradas e distribuídas) que acompanham a deformação da coluna) e cargas passando por pontos fixos são tratados por Data Sheet do ESDU (Ref. 2-2).

Tabela 2.1 Comprimentos Equivalentes de Colunas Uniformes

Carregamento	Condições de Contorno				
					
	2,0 L	1,0 L	1,0 L	0,7 L	0,5 L
	1,69 L	-	0,732 L	0,58 L	0,365 L
	1,12 L	0,72 L	0,732 L	0,43 L	0,365 L
	Veja Fig. 2-9	-	Veja Fig. 2-9	Veja Fig. 2-9	Veja Fig. 2-9
	1,43 L	0,84 L	0,57 L	0,45 L	0,36 L
	-	-	0,49 L	-	0,24 L

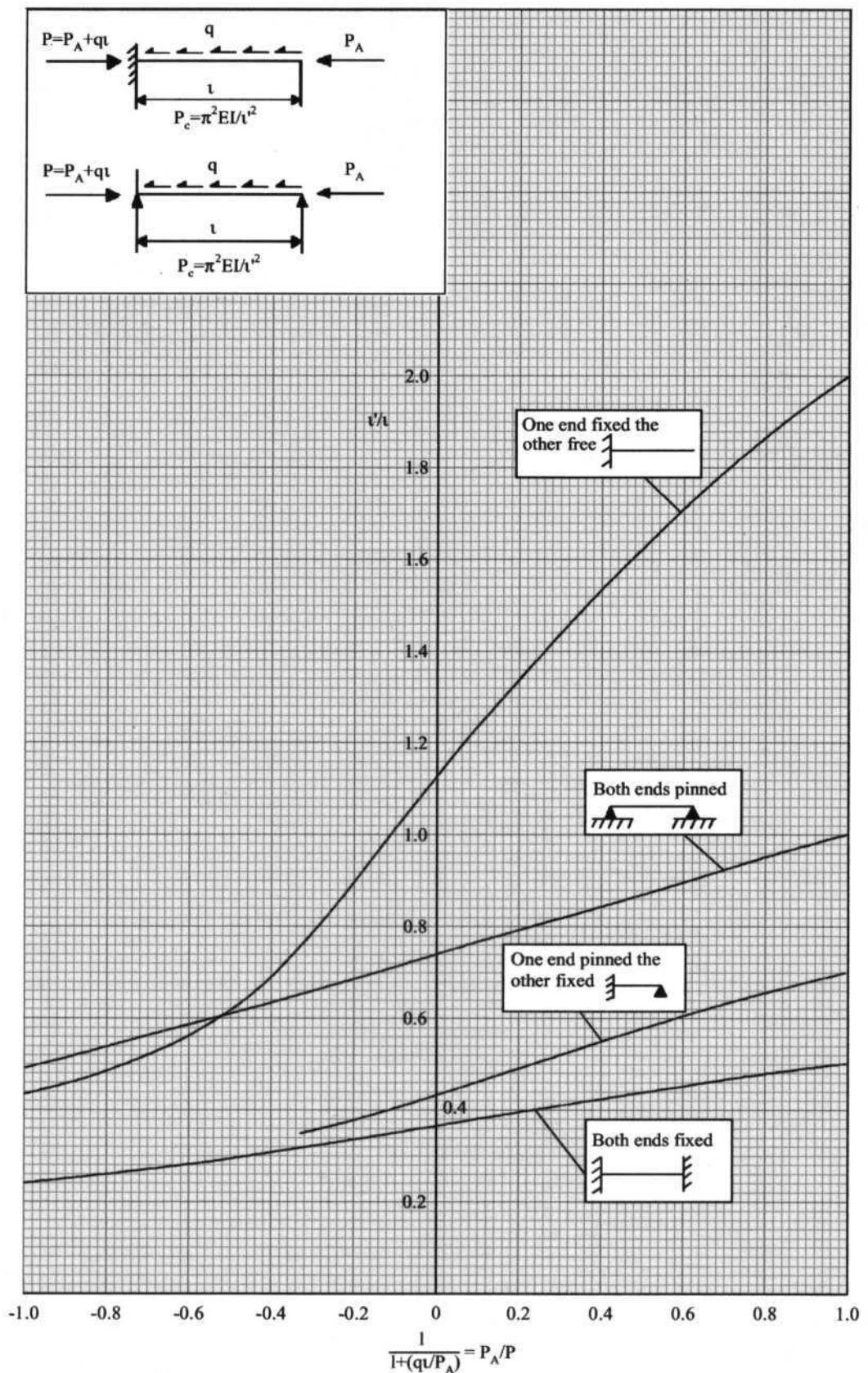


Fig. 2-9 Comprimento Efetivo de Coluna Submetida à Carga na Extremidade e Carga Distribuída ao Longo do Comprimento

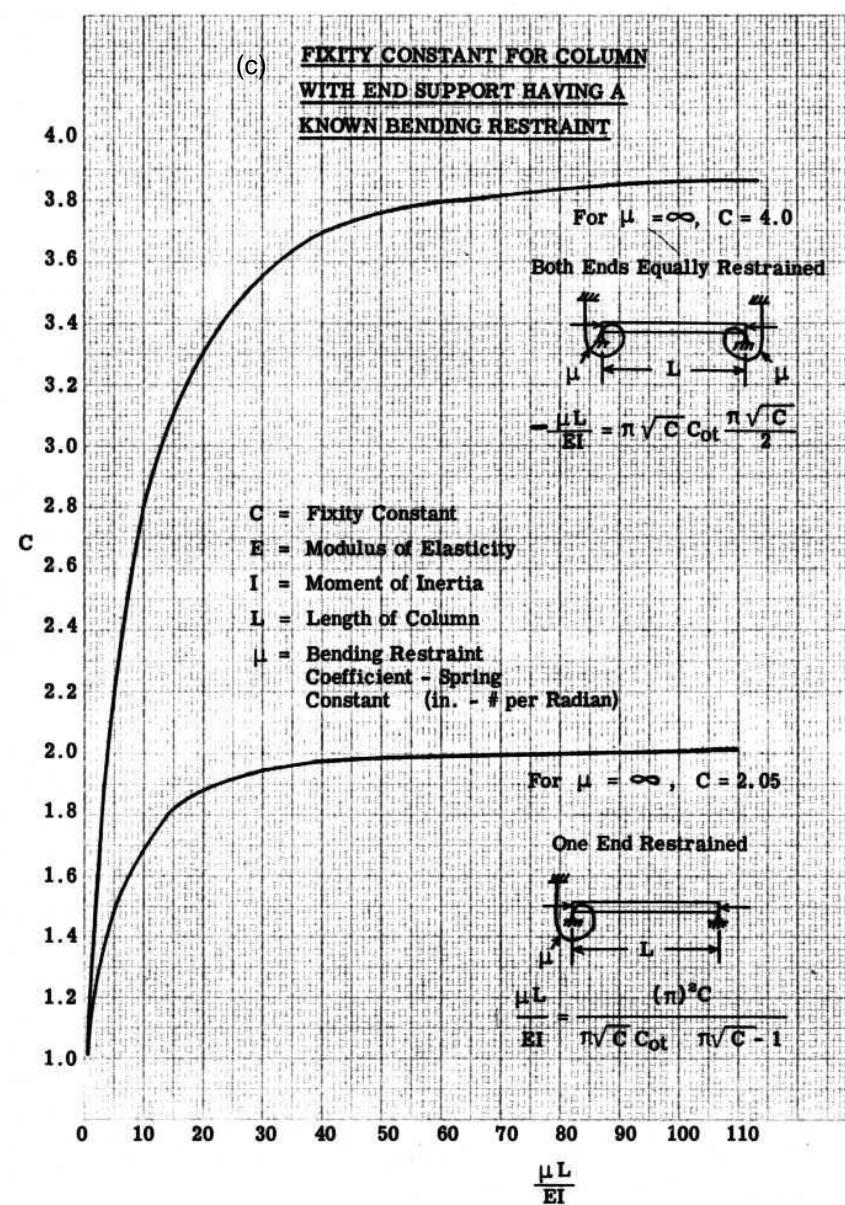
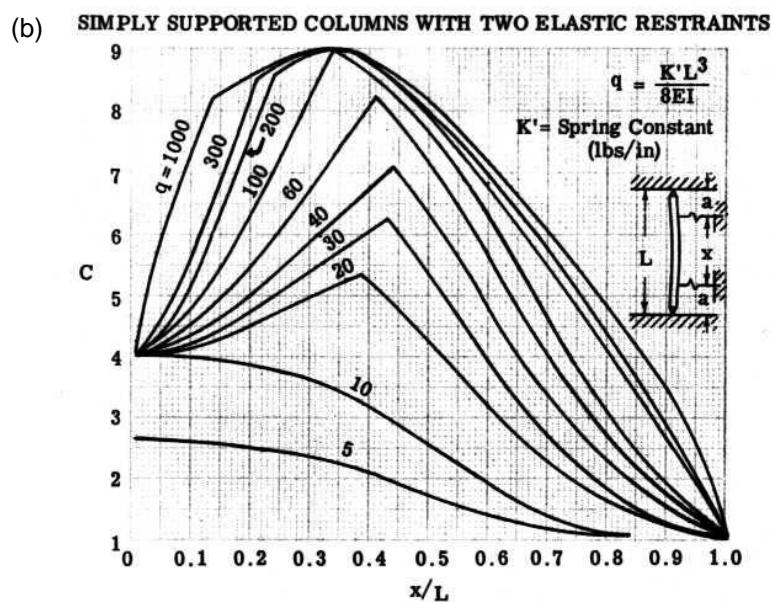
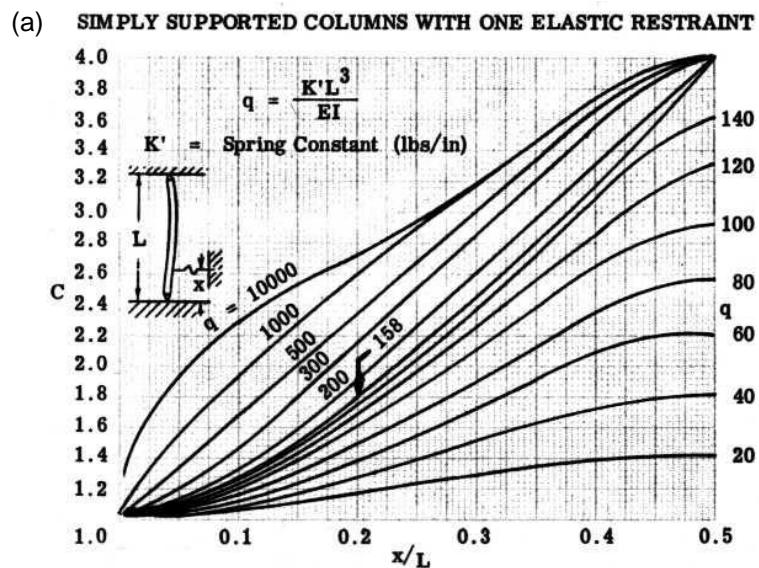


Fig. 2-10 Coeficiente de Fixação de Coluna com Apoio Elástico

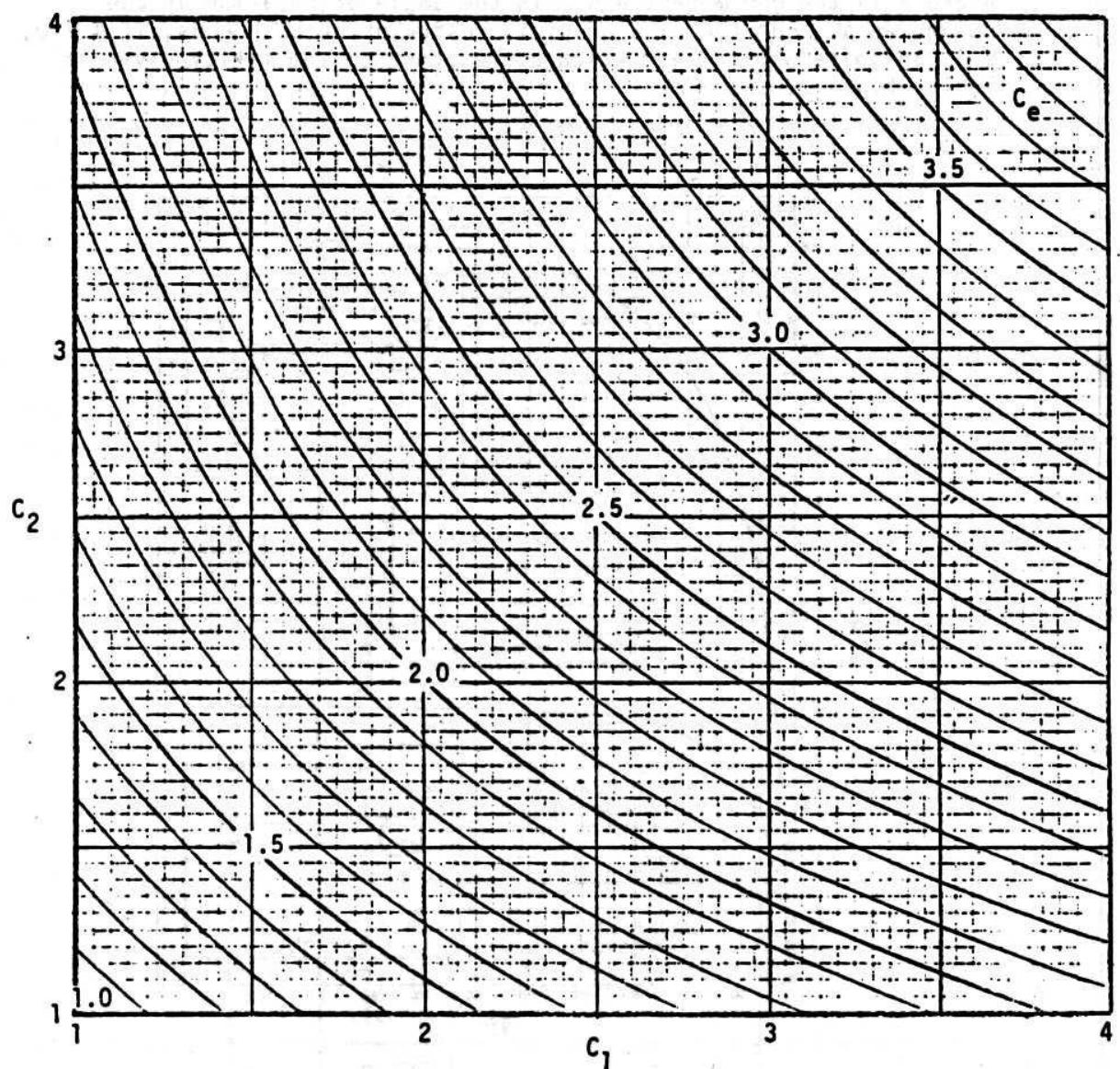


Fig. 2-11 Coeficiente de Fixação Efetivo para Coluna com Apoios Elásticos Distintos em ambas as Extremidades

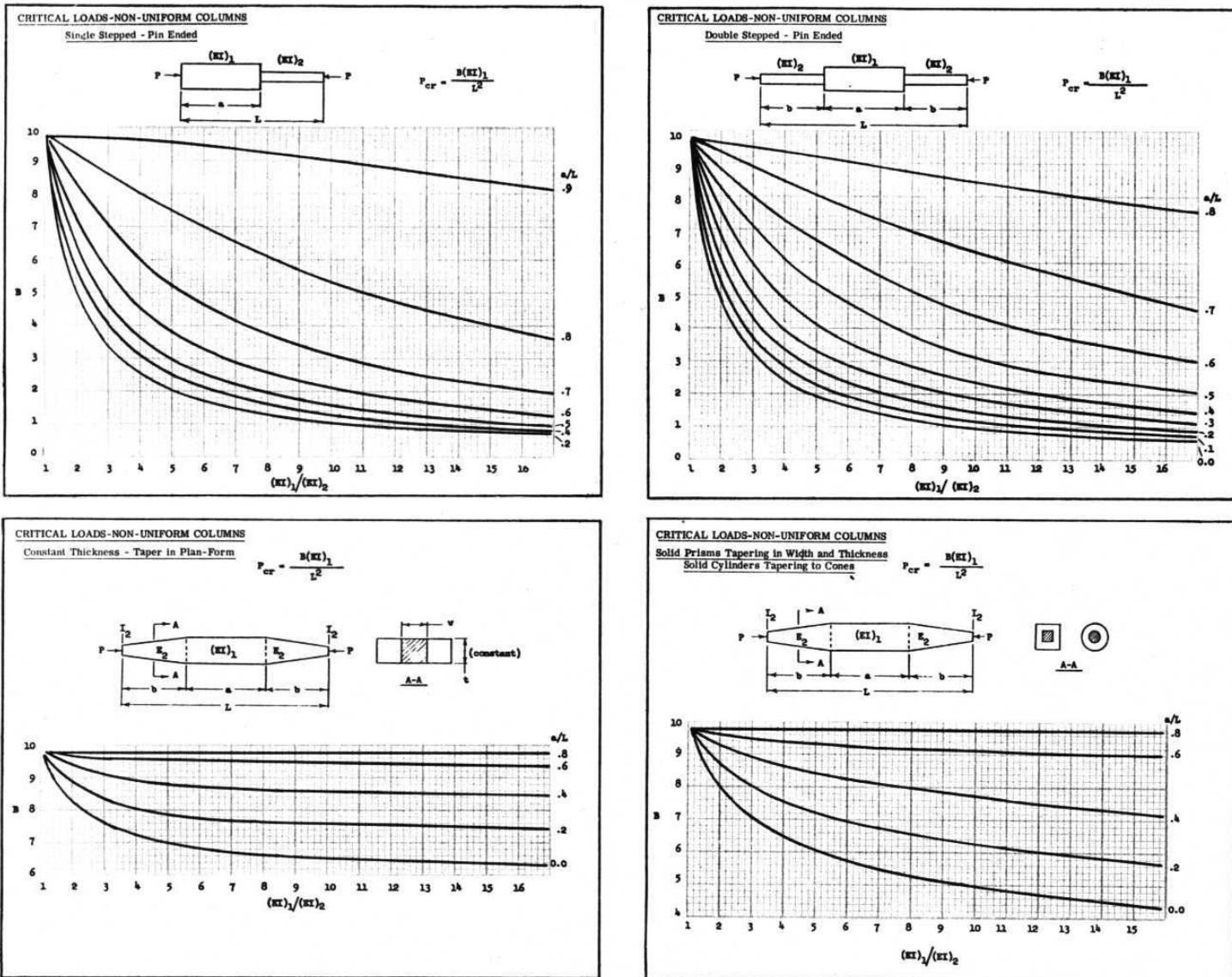


Fig. 2-12 Carga Crítica de Colunas de Seção Variável

2.7 COLUNAS CARREGADAS EXCENTRICAMENTE

Na derivação da carga de Euler, o membro foi assumido perfeitamente reto e o carregamento foi considerado ao longo do eixo central. Membros e carregamentos perfeitos, entretanto, não existem em problemas reais de engenharia. Pequenas excentricidades no carregamento e imperfeições na forma fazem sentir a sua presença em todas as colunas reais. É portanto desejável investigar o comportamento de uma coluna imperfeita e compará-lo com o comportamento previsto pela teoria de Euler.

Considere a coluna da Fig. 2-13, perfeitamente reta mas carregada excentricamente. Assume-se que o membro obedece à Lei de Hooke e que as deformações permaneçam pequenas. Equacionando o momento interno $-EIw''$ em qualquer seção, como o correspondente momento aplicado $P(e+w)$ resulta

$$EIw'' + P(e+w) = 0 \text{ ou } w'' + k^2 w = -k^2 e, \text{ onde } k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.41)$$

cuja solução geral é

$$w(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx - e \quad (2.42)$$

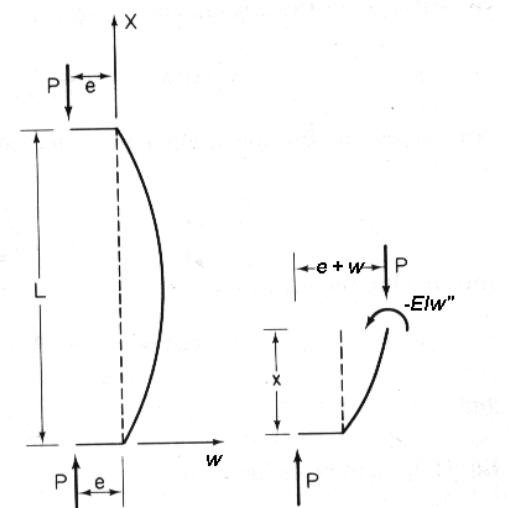


Fig. 2-13 Coluna Carregada Excentricamente

Aplicando as condições de contorno, $w(0) = 0$ resulta em $B = e$, e da condição $w(L) = 0$ obtém-se

$$A = e \frac{1 - \cos kL}{\sin kL}, \text{ de modo que a Eq. (2.222) pode ser escrita como}$$

$$y(x) = e \left(\cos kx + \frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \sin kx - 1 \right) \quad (2.43)$$

Fazendo $x = L/2$ e usando as identidades $\cos kl = 1 - 2 \sin^2 kl/2$ e $\sin kl = 2 \sin kl / 2 \cos kl / 2$, obtém-se a deflexão no centro da coluna, $w(L/2) = \delta$

$$\delta = e \left(\sec \frac{kL}{2} - 1 \right) = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right) - 1 \right] \quad (2.44)$$

A Fig.2-14 fornece uma representação gráfica da Eq. (2.44). A variação de δ com P/P_E é graficada para dois valores da excentricidade e .

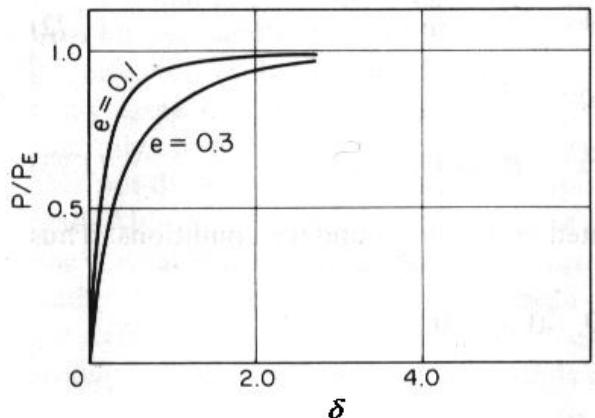


Fig. 2-14 Curva Carga-Deflexão para Coluna Carregada Excentricamente

2.8 COLUNAS COM FORMAS IMPERFEITAS

Aqui será considerada uma coluna cujo eixo está inicialmente fletido. Mais uma vez é considerado que o comportamento do material é elástico linear e que as deflexões são pequenas, ou seja, são válidas todas as hipóteses feitas na teoria de Euler excetuando aquela que considera o eixo inicialmente reto.

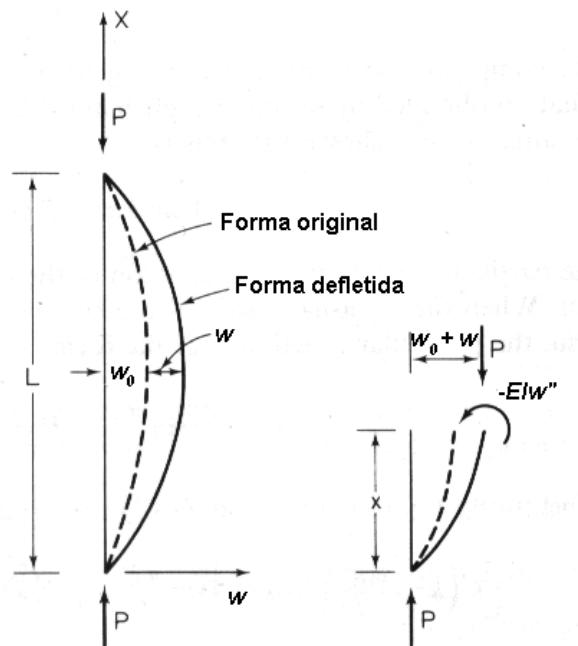


Fig. 2-15 Coluna com Deflexão Inicial

Considere a coluna simplesmente apoiada da Fig. 2-15. A deformação inicial do membro é dada por $w_0(x)$ e a deformação inicial devido à flexão, por $w(x)$. Equacionando os momentos interno e externo obtém-se

$$w'' + k^2 w = -k^2 w_0, \text{ com } k^2 = P/EI \quad (2.45)$$

A solução complementar (da equação homogênea) é

$$w_c(x) = A \operatorname{sen} kx + B \operatorname{cos} kx \quad (2.46)$$

Para obter a solução particular, considere $w_0(x)$ expressa por uma série de Fourier

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.47)$$

Se $w_0(x)$ é conhecida, pode-se obter os coeficientes de Fourier multiplicando-se ambos os lados da Eq. (2.47) por $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e integrar de 0 a L . Isto resulta em

$$w_m = \frac{2}{L} \int_0^L w_0(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx \quad (2.48)$$

A Eq. (2.45), então, pode ser rescrita na forma

$$w'' + k^2 w = -k^2 \sum_{n=1}^{\infty} w_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.49)$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, a solução particular desta equação é

$$w_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.50)$$

Substituindo w_p na Eq. (45) e equacionando os coeficientes dos termos em seno com o mesmo argumento, de ambos os lados da equação, resulta

$$c_n = \frac{w_n k^2}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - k^2} = \frac{w_n}{\frac{1}{k^2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - 1} = \frac{w_n}{n^2 \frac{P_E}{P} - 1} \quad (2.51)$$

A solução geral da Eq. (2.49) é, portanto,

$$w(x) = A \operatorname{sen} kx + B \operatorname{cos} kx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n^2 \frac{P_E}{P} - 1} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

A aplicação das condições de contorno, $w(0) = w(L) = 0$, leva a $A = B = 0$, de modo que

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n w_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.52)$$

onde

$$A_n = \frac{1}{n^2 \frac{P_E}{P} - 1} \quad (2.53)$$

é o fator de amplificação que é aplicado sobre a n-ésima componente de w_0 como resultado da aplicação da carga P . A deflexão total é obtida somando-se $w_0(x)$ e $w(x)$

$$w_T(x) = w_0(x) + w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + A_n) w_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.54)$$

Na prática, $w_0(x)$ e, portanto, w_n não é conhecido. Entretanto, pode-se esperar que w_n fique menor à medida que cresça n , e uma hipótese razoável é que a amplitude da componente de Fourier seja proporcional ao comprimento de onda da componente. Isto dá $w_n = \bar{w}(L/n)$, onde \bar{w} é suposto igual para todas as componentes. Nestas condições a Eq. (54) fica

$$\frac{w_T(x)}{L} = \frac{w_0(x) + w(x)}{L} = \bar{w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + A_n)}{n} w_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.55)$$

Valores de A_n como função de P/P_E computados pela Eq. (2.53) para $n = 1$ a 3, são dados na tabela. Observa-se, a menos que P/P_E seja pequeno, que o primeiro termo da Eq. (2.235) domina a série e serve como uma boa aproximação para a mesma.

P/P_E	A1	A2	A3
0,0	0,0	0,0	0,0
0,4	0,667	0,111	0,047
0,8	4,00	0,25	0,08
0,9	9,50	0,29	0,11
0,95	20,0	0,33	0,12
1,0	:	0,33	0,13

Substituindo a Eq. (2.53) no primeiro termo da Eq. (2.55) e calculando o resultado em $x = L/2$, tem-se

$$\frac{w_T(L/2)}{L} = \frac{\bar{w}}{1 - P/P_E} \quad (2.56)$$

Esta equação está representada graficamente na Fig. 2-16 para valores de deflexões iniciais $\bar{w} = w_1 / L = 0,01, 0,001$ e $0,0001$. Estes valores são representativos de colunas de manufatura de

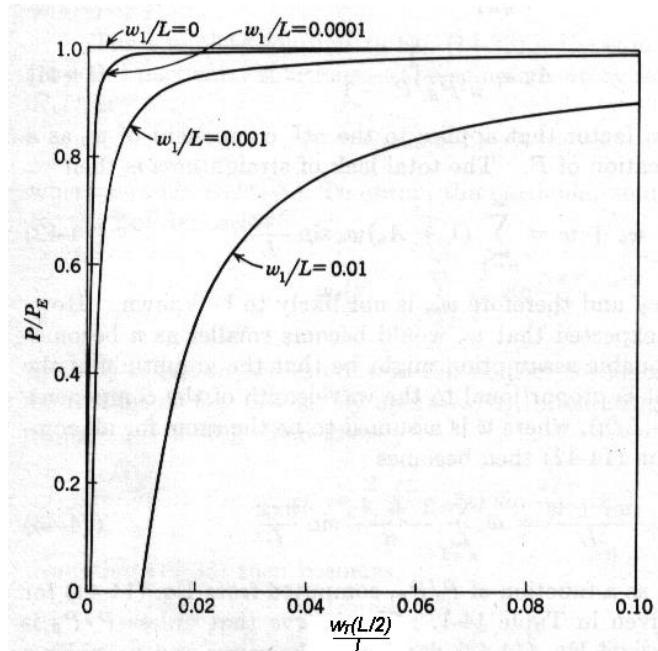


Fig. 2-16 Coluna com Imperfeições - Resultados da Teoria Linear

qualidade pobre, média e acima da média. Nota-se que quando P/P_E é pequeno, as deformações de flexão são pequenas, mas quando P/P_E se aproxima da unidade, as deformações de flexão aumentam rapidamente e tornam-se muito grandes. Quando a imperfeição original tende a zero, o comportamento da coluna imperfeita se aproxima daquela da coluna perfeita, que não admite deflexão até que $P/P_E = 1$. Entretanto, nota-se que a coluna, em vez de permanecer reta, a coluna com imperfeições tendendo a zero permanece praticamente reta até que o ponto de bifurcação da coluna perfeita é aproximado. Daí em diante, segue de perto a solução da coluna perfeita flambada.

A Eq. (2.56) indica que a deflexão no centro da coluna tende a infinito à medida que P/P_E tende para a unidade e que as deflexões são tanto maiores quanto maior for a imperfeição original. A análise linear mostra, então, que a capacidade de absorção de carga da coluna é sempre menor do que a carga de Euler, independentemente de quão pequena seja a imperfeição. Se a distorção inicial é considerável, a coluna experimenta deflexões consideráveis, sob cargas sensivelmente menores do que a de Euler.

Este resultado, entretanto, requer um exame mais cuidadoso porque, sob deflexões grandes, a aproximação para a curvatura dada por d^2w/dx^2 torna-se imprecisa, e a teoria linearizada de flexão não é mais aplicável. A teoria linear adotada também falha quando as deflexões no centro da coluna são grandes porque as tensões devido à compressão e flexão excedem o limite de proporcionalidade.

O comportamento da coluna levemente imperfeita e submetida a grandes deflexões pode ser estudado de forma análoga como visto na seção 2.15. Para tanto bastaria incluir o termo relativo à deflexão inicial na equação de equilíbrio,

$$\frac{\frac{d^2w}{ds^2}}{\left[1 - \left(\frac{dw}{ds}\right)^2\right]^{1/2}} + \frac{P}{EI} w = -\frac{P}{EI} w_0 \quad (2.57)$$

O denominador da primeira parcela poderia ser expandido numa série de Taylor e a retenção de um ou mais termos não lineares proveria uma aproximação. A deflexão inicial poderia ser aproximada pelo primeiro termo de uma série de Fourier e a equação resultante resolvida aproximadamente utilizando-se o método de Galerkin. Em seu texto, Rivello (Ref. 2.5) adota um procedimento alternativo. Ele deriva um potencial total aproximado incluindo os termos não-lineares mais relevantes e em seguida aplica o método de Rayleigh-Ritz. Os resultados obtidos são menos precisos do que aqueles que seriam obtidos da forma indicada acima em conjunto com o método de Galerkin. Como objetivo aqui, é tão somente discutir qualitativamente o comportamento da coluna imperfeita submetida a grandes deformações, a questão de precisão perde importância e o desenvolvimento realizado na Ref. 2.5 será omitido. O resultado obtido por Rivello para as deflexões é

$$\frac{w_T(L/2)}{L} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P/P_E - 1}{4 - 3P/P_E}} \quad (2.58)$$

que está representado graficamente na Fig. 2-17.

A Eq. (2.58) possui uma tangente horizontal em $P/P_E = 1$, que caracteriza a estabilidade neutra e a indeterminação das deflexões na teoria linear de pequenas deflexões. A Fig. 2-17 mostra que embora a configuração reta seja teoricamente possível para uma coluna perfeita quando $P/P_E > 1$, colunas com imperfeições infinitesimais apresentam deflexões aproximadas pela Eq. 2.238. Uma vez que qualquer coluna contém imperfeições, mesmo que pequenas, a Eq. (2.58) é a única solução (aproximada) de interesse.

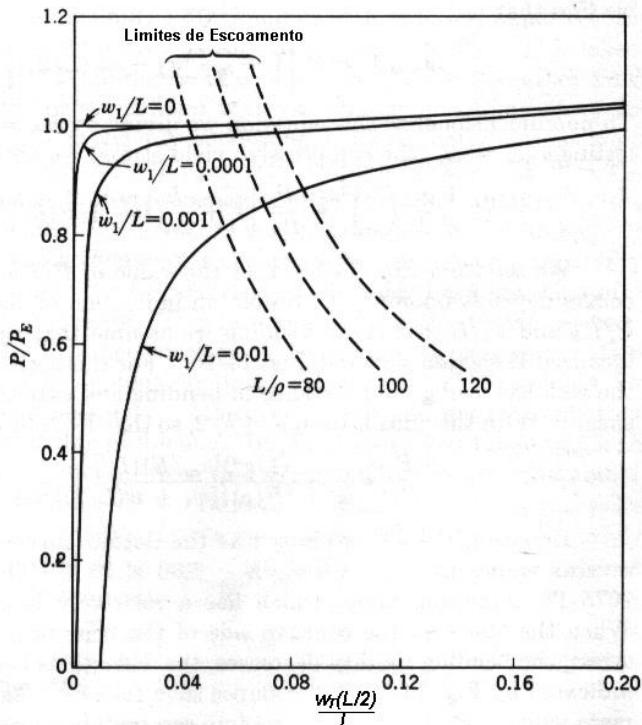


Fig. 2-17 Coluna com Imperfeições - Resultados da Teoria Não-Linear

A teoria não-linear adotada para a derivação da Eq. (2.58) falha quando as tensões devidas à compressão direta e flexão excedem o limite de proporcionalidade. Para obter uma indicação de quando este efeito se torna importante, Rivello assumiu um material elástico perfeitamente plástico, com a razão da tensão de escoamento pelo módulo de elasticidade igual a $6,66 \times 10^{-3}$ e uma seção idealizada em I, onde a contribuição da alma para a rigidez em flexão é desprezada. A aproximação pretende simular a liga de alumínio 7075-T6, mesmo que grosseiramente. Os resultados desta análise estão mostrados pelas curvas tracejadas na Fig. 2-25, para alguns valores L/ρ , onde ρ é o raio de giração da seção. Quando as fibras do lado côncavo da coluna excedem a tensão de escoamento, a rigidez em flexão da coluna decresce, o aumento das deformações é acelerado e o colapso logo se estabelece. Em consequência, o valor último de P/P_E resistido pela coluna é aproximadamente aquele correspondente ao ponto de interseção das curvas dos w_1/L e L/ρ .

Para colunas que falham numa tensão média dentro do regime elástico, as Figs. 2-24 e 2-25 permitem tirar-se as seguintes conclusões:

- 1) A posição reta é a única configuração de equilíbrio possível para colunas com imperfeições tendendo a zero, até que $P = P_E$;
- 2) Em $P = P_E$ as deflexões, para a coluna com imperfeições tendendo a zero, crescem rapidamente até que as fibras do lado côncavo excedem o limite de proporcionalidade;
- 3) Colunas com imperfeições usuais (relativamente pequenas) não fletem apreciavelmente até que P se aproxime de P_E . As deflexões crescem rapidamente à medida que P se aproxima de P_E , seguindo de perto a curva para colunas com imperfeições tendendo a zero;

- 4) As deformações que crescem rapidamente logo atingem a tensão de escoamento e a coluna prática (pequenas imperfeições) entra em colapso quando $P \geq P_E$;
- 5) As deflexões no colapso são pequenas o suficiente para permitir o uso da teoria linear, na qual a curvatura é aproximada por d^2w/dx^2 ;
- 6) Colunas de manufatura pobre**, com imperfeições sensíveis, **entram em colapso sob cargas sensivelmente menores do que a de Euler.**

A coincidência física de que a capacidade última de absorção de carga de uma coluna com pequenas imperfeições, como aquelas manufaturadas para uso aeronáutico, pode ser prevista pela teoria linear para a coluna perfeita é afortunada. Significa que colunas que falham numa tensão média no regime elástico podem ser projetadas através da fórmula simples de Euler, não sendo necessária uma análise não-linear relativamente complicada.

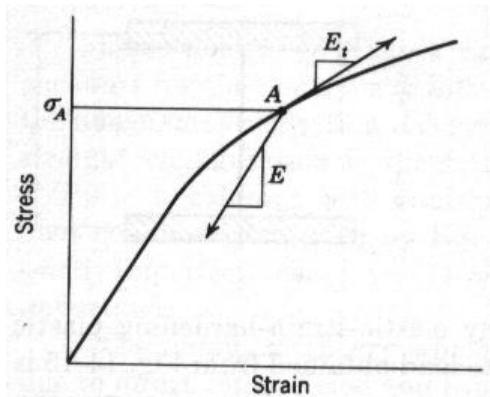
As conclusões relativas ao problema de colunas com deflexão inicial são aplicáveis também às colunas carregadas com pequenas excentricidades e às colunas com pequenas cargas laterais. Por outro lado, a Eq. (2.56) fornece um **critério alternativo de estabilidade** que pode ser enunciado como “*a carga crítica é aquela sob a qual as deformações de um sistema levemente imperfeito tendem a infinito*”. Desta forma, a carga crítica pode ser obtida através da análise linear de um sistema com qualquer tipo de imperfeição (deformação inicial, cargas excêntricas ou cargas laterais). Há situações em que esta análise é mais simples do que a solução do problema de auto-valor resultante da análise da coluna perfeita.

Não se deve, entretanto, concluir que o resultado de uma análise linearizada é capaz de prever a carga de colapso para qualquer problema de flambagem. Em placas e cascas a carga de colapso pode ser consideravelmente diferente daquela prevista pela análise da condição de equilíbrio neutro sob pequenas deformações. De fato, na próxima seção será visto que a condição de estabilidade neutra de uma coluna perfeita não é capaz de prever adequadamente a carga de falha de uma coluna imperfeita se a tensão média na falha exceder o limite de proporcionalidade.

2.9 FLAMBAGEM PLÁSTICA DE COLUNAS

Euler derivou a equação da flambagem de uma coluna perfeita em 1759. Na época, acreditava-se que a fórmula seria aplicável tanto para colunas esbeltas, quanto para colunas curtas. Quando, no início do século 19, ensaios em laboratório mostraram que a fórmula era não-conservativa para colunas curtas, acreditou-se que o trabalho de Euler era completamente errôneo e o mesmo foi descartado por um período considerável. Em 1845, Lamarle indicou que o trabalho de Euler era válido somente no regime elástico. Considère e Engesser, em 1989, chegaram à mesma conclusão de que a fórmula de Euler era válida para colunas esbeltas. Ambos também perceberam que a fórmula de Euler poderia ser utilizada para colunas curtas, desde que o módulo de elasticidade E fosse substituído por um módulo efetivo para flambagem plástica. O foco da questão, então, mudou: “qual seria este módulo efetivo?”

Para entender o dilema que se instalou à época, considere o diagrama tensão-deformação. Durante



a flambagem, quando a coluna passa da posição reta para a posição fletida, qual seria o comportamento das fibras nas partes côncava e convexa do membro? Seja σ_A a tensão de compressão em todas as fibras da coluna, ainda na posição reta, no momento da flambagem. Com a flexão da coluna, duas possibilidades devem ser consideradas:

- todas as fibras continuam comprimindo ao se dar a flexão, de modo que o módulo efetivo para a seção é o módulo tangente E_t . Isto só é possível, se a carga continua aumentando durante a flambagem;
- as fibras do lado côncavo comprimem, portanto segundo o módulo tangente E_t , e as fibras do lado convexo伸展, portanto segundo o módulo de elasticidade E . Uma situação de carga constante durante a flambagem (como aquela da teoria linearizada de Euler para flambagem elástica) exige que haja reversão de tensões no lado convexo.

Engesser acreditava que o módulo tangente era o módulo efetivo correto a ser utilizado. Considere não chegou a uma conclusão específica concernente ao valor do módulo efetivo mas ele sugeriu a possibilidade b) acima. Esta linha de raciocínio é a base para a *teoria do módulo duplo*, ou *módulo reduzido*, de acordo com a qual o módulo efetivo é função de ambos, o módulo de elasticidade e o módulo tangente (bem como da geometria da seção). Tão logo Engesser teve conhecimento do trabalho de Considère, reconheceu a sua validade e foi o primeiro a derivar o valor correto do módulo efetivo baseado na teoria do módulo duplo, que em valor é *necessariamente maior do que o módulo tangente*. Entretanto, somente em 1910, quando Von Karman redorreu de forma independente a teoria do módulo duplo, substanciando-a com ensaios em laboratório, ela foi universalmente aceita.

Nos aproximadamente 30 anos que se sucederam, a teoria do módulo duplo foi aceita como correta para a análise da flambagem plástica. Nos anos 1940, entretanto, aconteceu um extenso programa de ensaios em colunas de liga de alumínio, por parte da indústria aeronáutica. Ao contrário dos experimentos de von Karman, estes testes indicaram que a carga de falha é aproximadamente igual à carga fornecida pela teoria do módulo tangente. Os críticos responsabilizavam as imperfeições iniciais e pobres condições de controle dos ensaios (condições de controlo) pelos valores menores obtidos nestes ensaios do que aqueles obtidos por von Karman. Mas as condições dos testes realizados pela indústria eram típicas de condições operacionais (e não perfeitamente controladas como nos ensaios de von Karman) de modo que esta passou a utilizar a teoria do módulo tangente no projeto de aeronaves.

Finalmente, em 1947, Shanley resolveu o problema. Ele utilizou um modelo simples de duas barras rígidas conectadas entre si por uma célula deformável, constituída de dois elementos axiais separados por uma distância (um elemento representando a parte côncava e o outro a parte convexa). O conjunto é articulado nas extremidades e a curva tensão-deformação utilizada foi a bi-linear. Os detalhes podem ser encontrados na Ref. 2-3.

O resultado para a curva carga-deflexão da coluna de Shanley é reproduzido na Fig. 2-18.

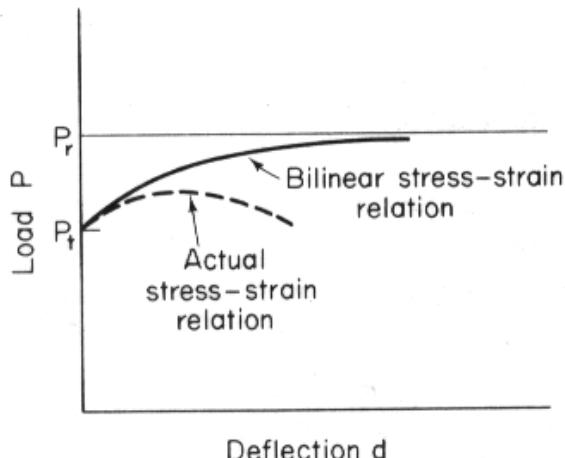


Fig. 2-18 Coluna de Shanley – Curva Carga-Deflexão

O comportamento é resumido pela curva sólida. A flexão inicia na carga do módulo tangente e progride com o incremento da carga axial. Com grandes deflexões laterais a carga axial se aproxima da carga fornecida pela teoria do módulo reduzido. A diferença mais importante entre uma coluna real e a coluna de Shanley é que o decréscimo do módulo tangente é contínuo (e não bi-linear). Se uma variação contínua do módulo tangente é introduzida no modelo de Shanley, obtém-se a curva tracejada cuja carga máxima está entre a carga tangente e a carga reduzida. Ensaios de laboratório mostram ser isto um fato e também que a carga máxima está mais próxima da carga tangente.

A condição dada pela teoria do módulo duplo tem a vantagem dúbia de satisfazer o critério clássico de estabilidade, ou seja, do ponto de bifurcação da coluna reta sem variação da carga. Mas ela corresponde a um ponto de equilíbrio instável e realizável em laboratório somente sob condições muito controladas.

O engenheiro está interessado em achar a carga última que pode ser suportada por colunas com pequenas imperfeições e não a carga de bifurcação de uma coluna reta. Sob imperfeições, a compressão e flexão procedem simultaneamente e um coluna falhará antes que a carga reduzida seja atingida. Finalmente, a teoria do módulo tangente fornece um valor para a carga crítica que é conservativo para colunas retas, ou com pequenas imperfeições.

Em consequência, a teoria a ser utilizada para a análise da flambagem plástica de colunas é a do módulo tangente.

Além de ser a mais indicada para projeto, a teoria do módulo tangente possui a grande vantagem de ser de mais fácil implementação. O módulo reduzido, além de depender do próprio módulo tangente,

depende também da geometria da seção. Em consequência, a teoria do módulo reduzido apresenta interesse pouco além do acadêmico, de modo que não será apresentada aqui. O leitor interessado pode encontrar a derivação nas Refs. 2.3 ou 2.5.

A teoria de Euler adaptada para a flambagem plástica de colunas pode então ser escrita na forma

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E_t I}{(L')^2} = \frac{c \pi^2 E_t I}{L^2} \quad (2.59)$$

onde L' é o comprimento efetivo da coluna e c o coeficiente de fixação. **O devido cuidado deve ser tomado nos casos em que o comprimento efetivo depende do módulo.** Em todas as instâncias da seção 2.6 (inclusive gráficos) em que aparece o módulo de elasticidade E , este deve ser substituído pelo valor relevante do módulo tangente E_t . Como o valor do módulo tangente não é conhecido à priori, a menos que seja utilizada uma representação como a de Ramberg-Osgood, o processo tem de ser iterativo.

A Eq. (2.59) é mais convenientemente escrita em termos de tensões. Dividindo ambos os lados pela área da seção transversal e fazendo uso da definição de raio de giração $\rho^2 = I/A$, obtém-se a **tensão admissível** para colunas:

$$F_c = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\frac{L'}{\rho}\right)^2} = \frac{c \pi^2 E_t}{\left(\frac{L}{\rho}\right)^2} \quad (2.60)$$

Para fins de projeto é conveniente traçar as curvas da tensão admissível F_c vs a razão de esbeltez efetiva L'/ρ para o material utilizado. Isto é facilmente realizável assumindo-se valores de F_c , achando os valores correspondentes de E_t da curva tensão deformação do material e calculando-se L'/ρ . Tais curvas para uma série de materiais são apresentadas nas Figs. 2-27 a 2-39. Nestas figuras, a linha tracejada horizontal é a tensão de escoamento. **Valores acima destas linhas de corte em projeto têm de ser substanciados através de ensaios.** Na Ref. 2.7 podem ser encontradas curvas adicionais.

A relação básica de Ramberg-Osgood para E_t , Eq. (1.15), pode ser escrita na forma

$$\frac{E_t}{E} = \frac{1}{1 + (3n/7)(F/F_{0.7})^{n-1}} \quad (2.61)$$

A Eq. (2.242) está representada graficamente na Fig. 2-40. Para um dado material, n , $F_{0.7}$ e E são conhecidos. Assumindo valores para a tensão F , a Fig. 2-40 pode ser utilizada para achar os valores correspondentes de E_t/E .

A Eq. (2.61) pode ser reescrita convenientemente na forma

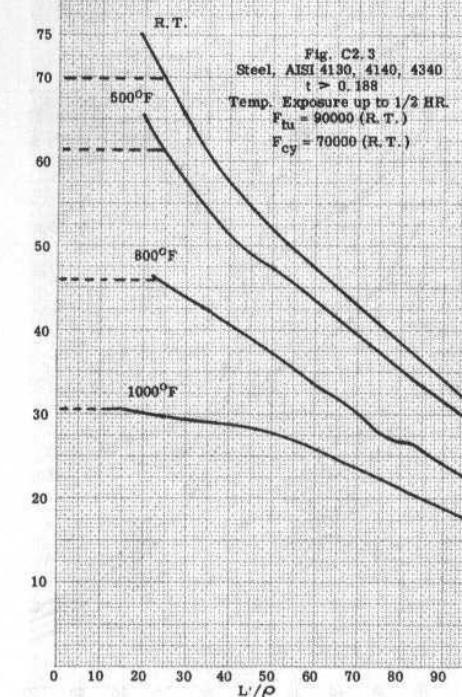


Fig. 2.27

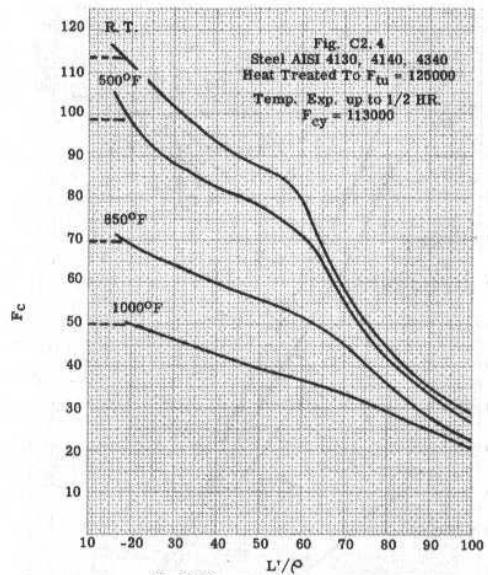


Fig. 2.28

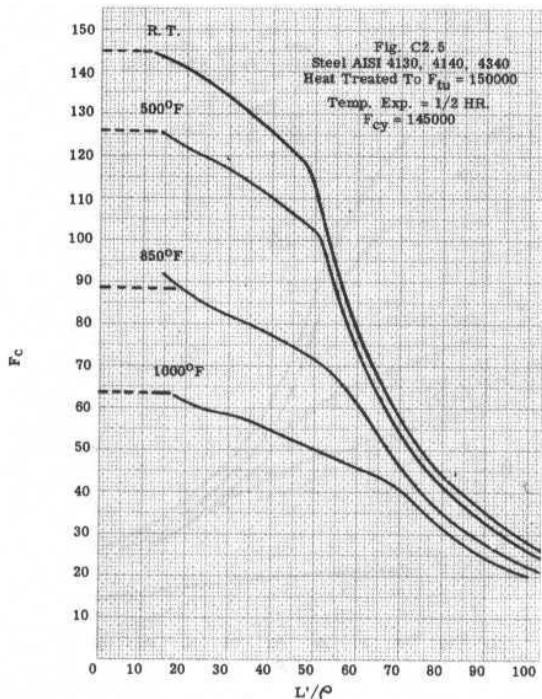


Fig. 2.29

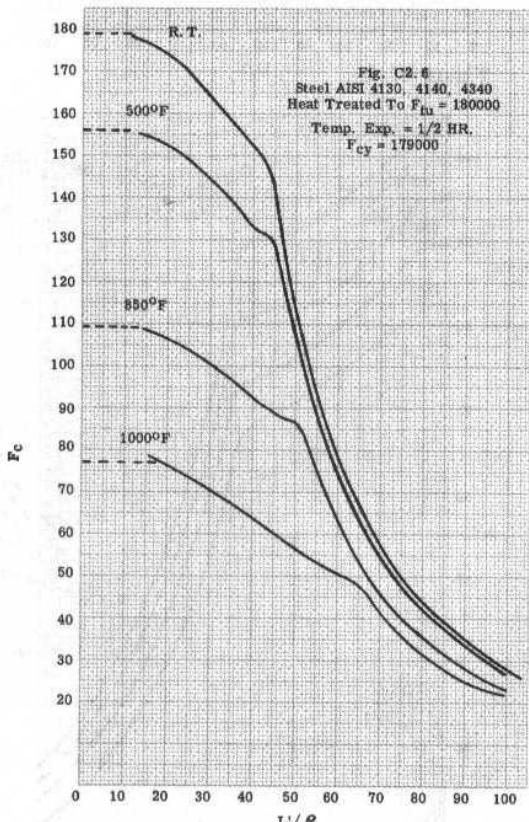


Fig. 2.30

Todas as tensões em ksi

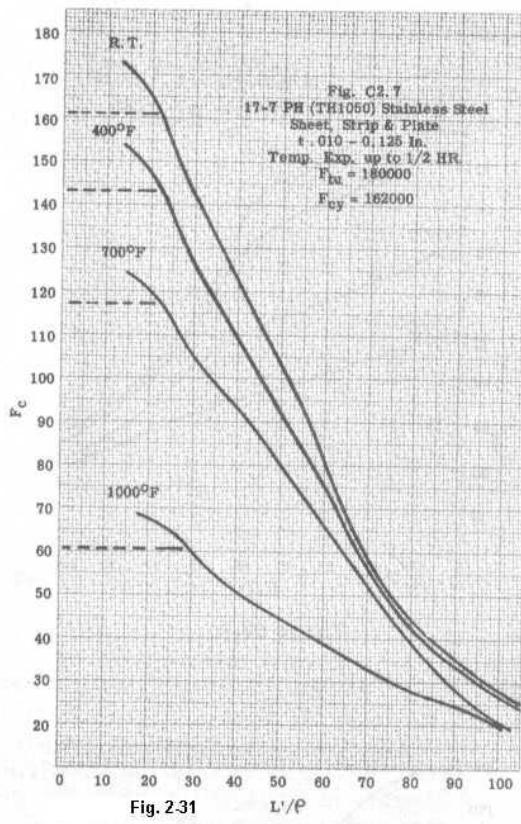


Fig. 2.31

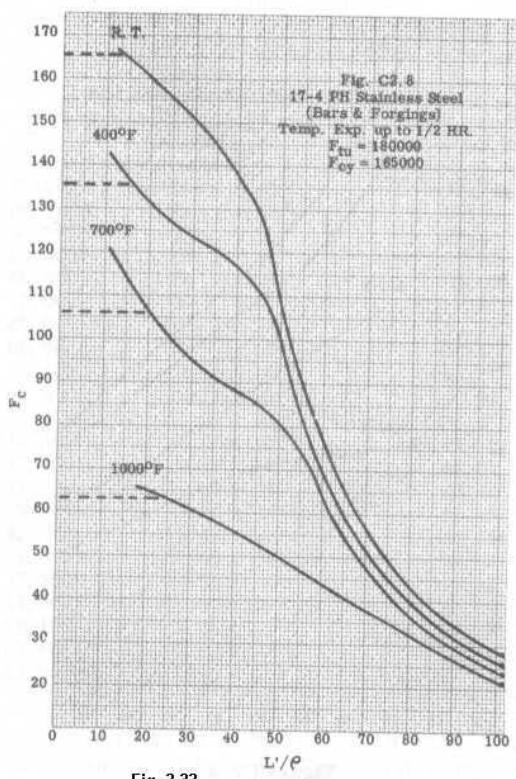


Fig. 2.32

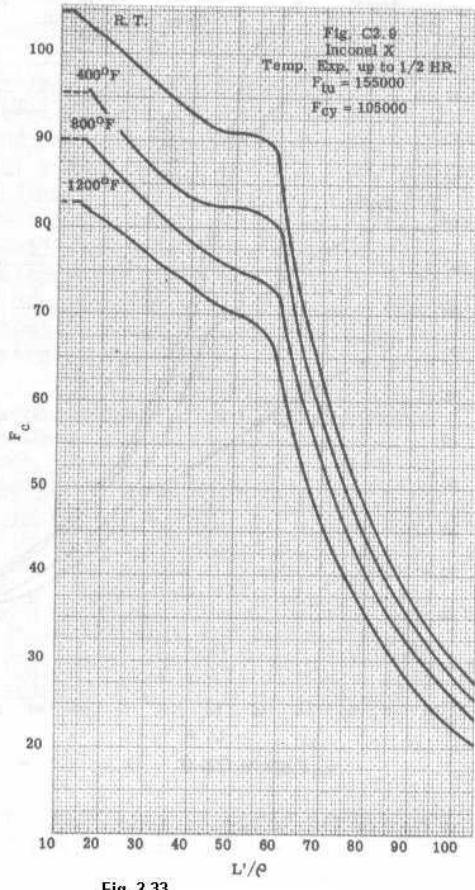


Fig. 2.33

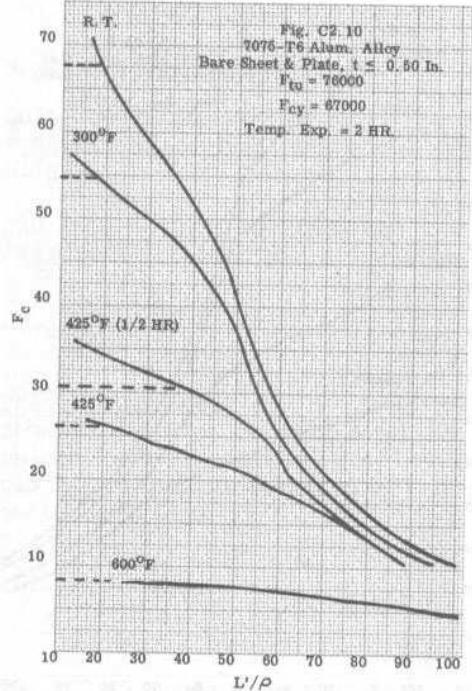


Fig. 2.34

Todas as tensões em ksi

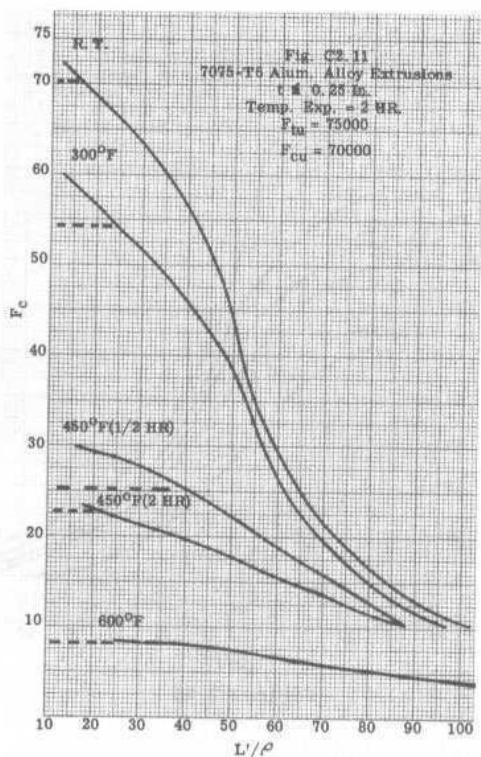


Fig. 2.35

F_c is in ksi

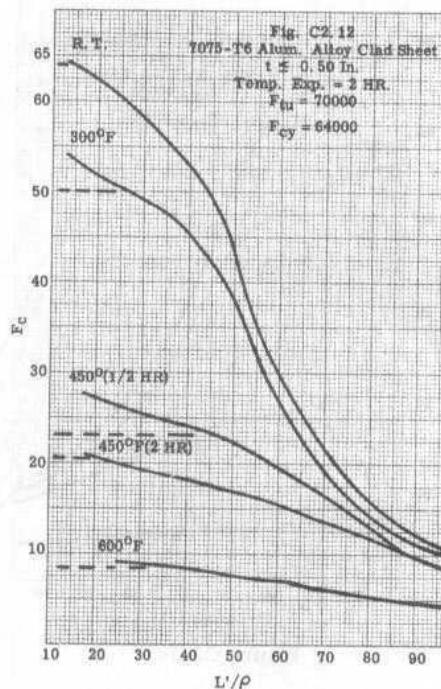


Fig. 2.36

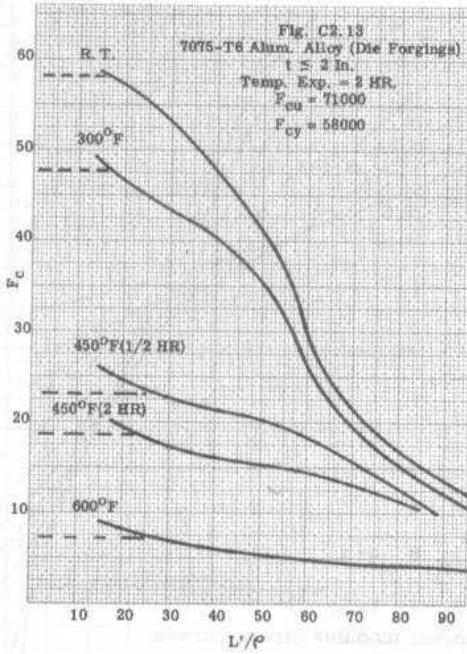


Fig. 2.37

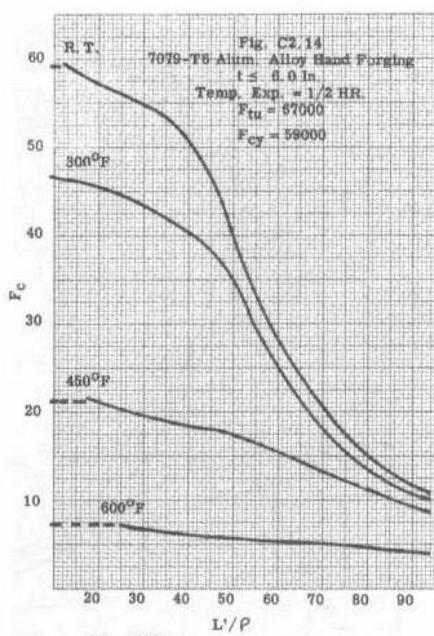


Fig. 2.38

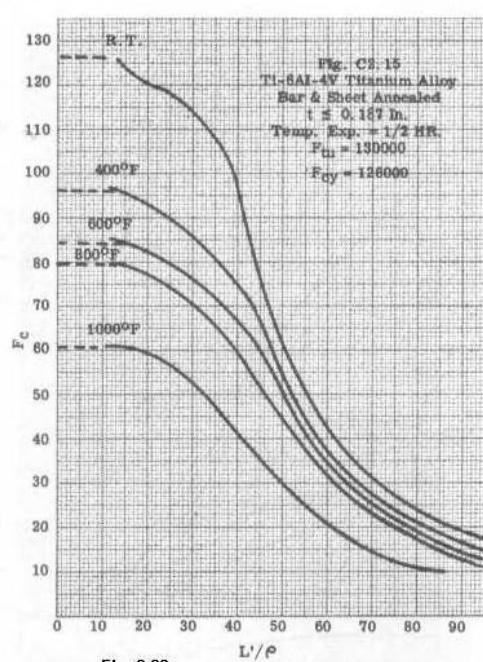


Fig. 2.39

F_c is in ksi

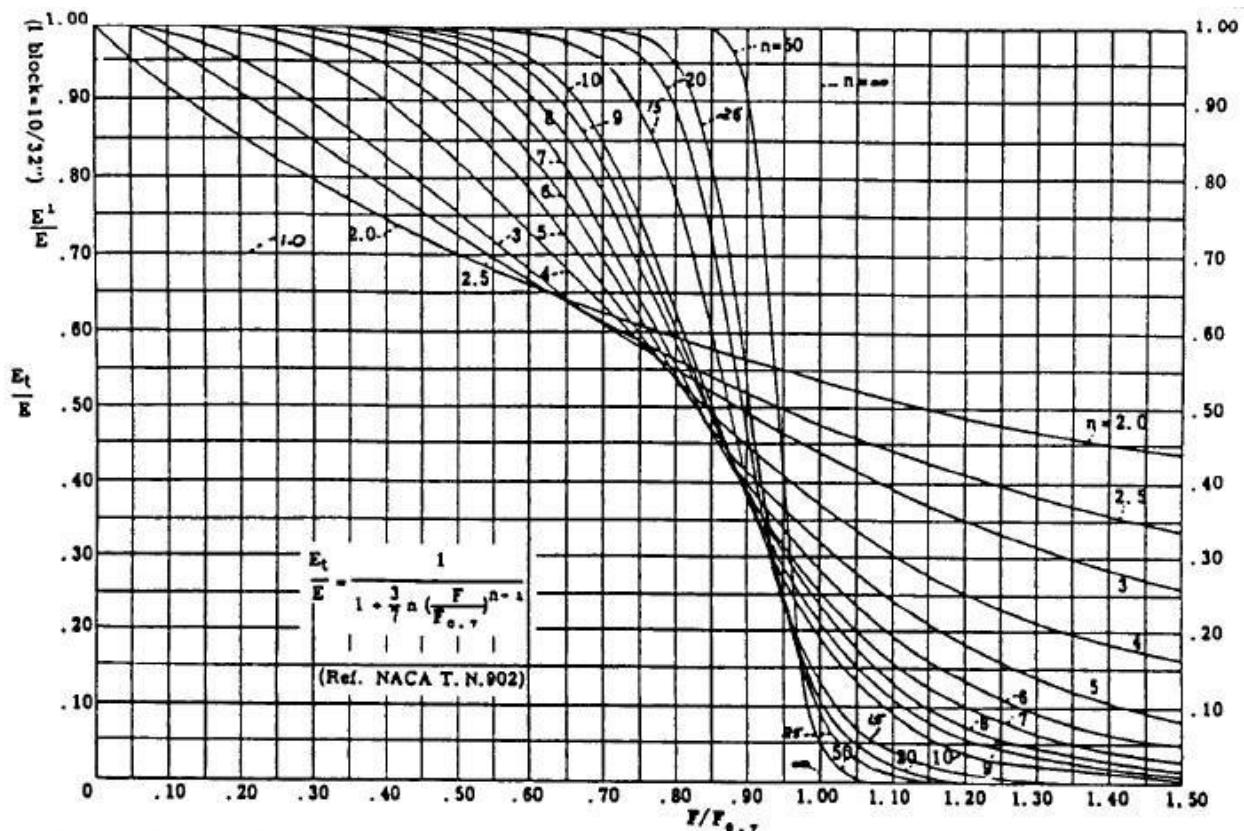


Fig. 2.40 Módulo Tangente Adimensionalizado

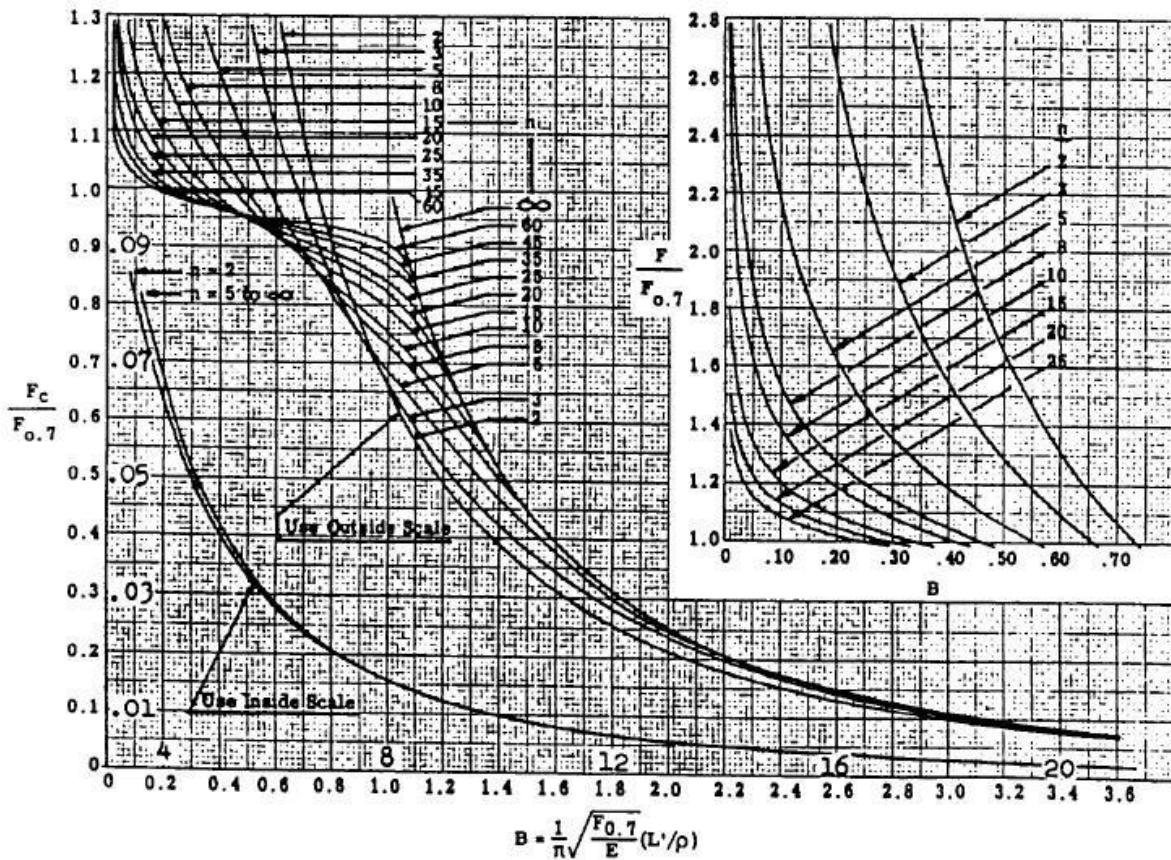


Fig. 2-41 Curvas de Coluna Adimensionalizadas - Parâmetros de Ramberg-Osgood

$$\frac{E_t}{F_c} \frac{F_{0.7}}{E} = \frac{(L/\rho)^2}{\pi^2} \frac{F_{0.7}}{E} = \frac{\left(\frac{L}{\rho}\right)^2}{c\pi^2} \frac{F_{0.7}}{E} = B^2 \quad (2.62)$$

Por outro lado, multiplicando-se ambos os lados da Eq. (2.61) por $F_{0.7}/F_c$, obtém-se

$$\frac{E_t}{E} \frac{F_{0.7}}{F_c} = \frac{1}{\frac{F_c}{F_{0.7}} + \frac{3}{7}n \left(\frac{F_c}{F_{0.7}}\right)^n} = B^2 = \frac{\left(\frac{L}{\rho}\right)^2}{\pi^2} \frac{F_{0.7}}{E} = \frac{\left(\frac{L}{\rho}\right)^2}{c\pi^2} \frac{F_{0.7}}{E} \quad (2.63)$$

Fixando n e assumindo valores de $\frac{F_c}{F_{0.7}}$, pode-se calcular $B = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{F_{0.7}}{E}} \frac{L}{\rho}$, utilizando a Eq.

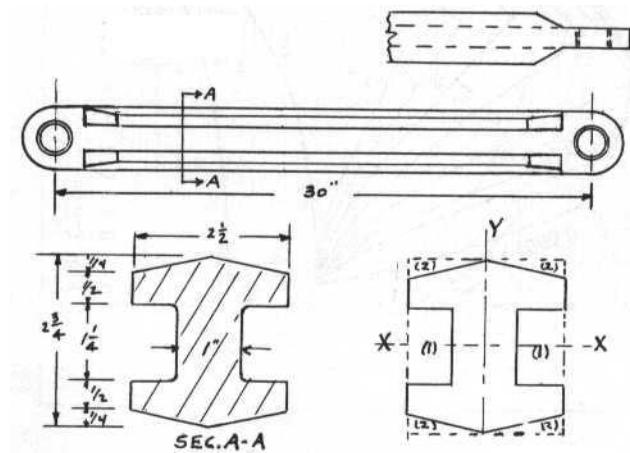
(2.63). A Fig. (2-41) mostra os gráficos de $F_c/F_{0.7}$ em função de B para diversos valores de n . O problema pode também ser resolvido diretamente, numa calculadora ou por processo iterativo como mostrado no Cap. 1. A equação de interesse é:

$$\frac{F_c}{F_{0.7}} = \frac{1}{1 + \frac{3n}{7} \left(\frac{F_c}{F_{0.7}}\right)^{n-1}} \pi^2 \frac{E}{F_{0.7}} \left(\frac{\rho}{L}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{3n}{7} \left(\frac{F_c}{F_{0.7}}\right)^{n-1}} \frac{Ec}{F_{0.7}} \pi^2 \left(\frac{\rho}{L}\right)^2 \quad (2.64)$$

2.10 EXEMPLOS DE ANÁLISE EM FLAMBAGEM DE COLUNAS

Nesta seção serão considerados alguns exemplos de análise de flambagem em colunas que deverão auxiliar o leitor na aplicação dos métodos e conceitos apresentados neste Capítulo.

EXEMPLO 2.1



A figura mostra um membro forjado de seção em I, de 30 in de comprimento, que é utilizado como um membro em compressão. Considerando que o coeficiente de fixação para flexão em torno do eixo x-x é 1 e aquele para flexão em torno do eixo y-y é 1.5, ache as tensões e cargas admissíveis se o membro é manufaturado dos seguintes materiais:

Caso 1: Liga Al 7079-T6 forjado manualmente, na temperatura ambiente;

Caso 2: como no Caso 1, mas sujeito a 1/2 hora na temperatura de 300° F;

Caso 3: como no Caso 2, mas 600° F;

Caso 4: Aço Inox 17-4 PH, forjado manualmente, na temperatura ambiente

Como a coluna pode falhar por flexão tanto em torno do eixo x quanto do eixo y, a resistência da coluna em flexão em torno de ambos os eixos deve ser calculada. Uma vez que a resistência da coluna é função do raio de giração da seção, o primeiro passo da solução consiste em se calcular os momentos de inércia em torno dos eixos x e y.

Cálculo de I_x : Considere inicialmente considerada um retângulo de dimensão 2,5" x 2,75" e subtraia as contribuições das porções (1) e (2):

$$I_x = \frac{1}{12} \times 2,5 \times 2,75^3 - 2 \times \frac{1}{12} 0,75 \times 1,25^3 - 4 \times \frac{1,25 \times 0,25}{2} \times \left(1,375 - \frac{0,25}{3} \right)^2 \approx 3,03 \text{ in}^4$$

(no cálculo acima foram desprezados os momentos de inércia dos triângulos em torno de seus eixos centroidais)

$$A = 2,5 \times 2,75 - 2 \times 0,75 \times 1,25 - 4 \times \frac{1,25 \times 0,25}{2} \approx 4,375 \text{ in}^2$$

$$\rho_x = \sqrt{\frac{3,03}{4,375}} \approx 0,83 \text{ in}$$

Cálculo de I_y :

$$I_y = \frac{1}{12} \times 2,75 \times 2,5^3 - 2 \times \left(\frac{1}{12} 1,25 \times 0,75^3 + 1,25 \times 0,75 \times 0,875^2 \right) - 4 \times \left\{ \frac{1,25 \times 0,25}{2} \times \left(1,25 - \frac{1,25}{3} \right)^2 + \frac{0,25 \times 1,25^3}{36} \right\} \approx 1,58 \text{ in}^4$$

$$\rho_y = \sqrt{\frac{1,58}{4,375}} \approx 0,60 \text{ in}$$

Para falha em torno do eixo x: $L' = L/\sqrt{c} = 30/\sqrt{1} = 30 \text{ in} \Rightarrow L'/\rho_x = 30/0,83 \approx 36$

Para falha em torno do eixo y: $L' = 30/\sqrt{1,5} = 24,6 \text{ in} \Rightarrow L'/\rho_y = 24,6/0,60 \approx 41$

Portanto, a falha é crítica para flexão em torno do eixo y, com $L'/\rho = 41$.

Caso 1: Usando a Fig. 2-38, para $L'/\rho = 41$ e temperatura ambiente obtém-se $F_c = 50,5$ ksi. A carga de falha é, portanto, $P = 50,5 \times 4,375 \approx 220$ kips.

Caso 2: A curva para 300°F na Fig. 2-38 fornece o valor $F_c = 40,4$ ksi, donde $P \approx 177$ kips.

Caso 3: A curva para 600°F na Fig. 2-38 fornece o valor $F_c = 6,1$ ksi, donde $P \approx 26,7$ kips. Portanto, sujeitando este membro a uma temperatura de 600°F durante ½ hora reduz a sua resistência de 220 kips à 26,7 kips, o que significa que a liga de alumínio é um material muito pobre para suportar cargas sob tais temperaturas, uma vez que a redução em resistência é muito grande.

Caso 4: A curva para temperatura ambiente da Fig. 2-32 fornece o valor $F_c = 135,2$ ksi, e em consequência $P \approx 591$ kips.

EXEMPLO 2.2

É solicitado resolver os Casos 1 e 2 do Exemplo anterior, utilizando os parâmetros de Ramberg-Osgood. Os dados relevantes para os materiais envolvidos são os seguintes:

Caso 1: Liga Al 7079-T6 forjada à mão, temp. amb.: $E_c = 10.500$ ksi, $F_{0.7} = 59,5$ ksi, $n = 26$, $F_{cy} = 59$ ksi

Caso 2: Liga Al 7079-T6 forjada à mão, ½ h. a 300°F: $E_c = 9.400$ ksi, $F_{0.7} = 46,5$ ksi, $n = 29$, $F_{cy} = 47$ ksi

Solução:

Caso 1: Resolvendo-se a Eq. (2.244) numa calculadora, ou por um processo iterativo, obtém-se $F_o/F_{0.7} = 0,854$, de modo que $F_c = 50,8$ ksi.

A Fig. 2-41 pode ser utilizada para fornecer o valor de $F_o/F_{0.7}$ diretamente. Basta calcular o parâmetro B e procurar o valor associado de $F_o/F_{0.7}$ na curva de $n = 26$:

$$B = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{59,5}{10.500}} 41 = 0,982 \Rightarrow \frac{F_c}{F_{0.7}} \approx 0,85 \Rightarrow F_c \approx 50,6 \text{ ksi}$$

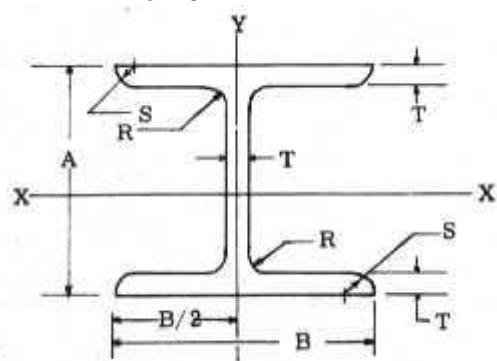
O resultado é praticamente o mesmo obtido no exemplo anterior!

Caso 2: A solução numérica da Eq. (2.244) fornece $F_o/F_{0.7} = 0,880$. A solução via Fig. 2.41 é

$$B = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{46,5}{9.400}} 41 = 0,918 \Rightarrow \frac{F_c}{F_{0.7}} \approx 0,88 \Rightarrow F_c \approx 40,9 \text{ ksi}$$

Mais uma vez, o resultado se aproxima bastante da solução obtida no exemplo anterior.

EXEMPLO 2.3



A figura mostra uma seção extrudada, cujas propriedades estão listadas numa tabela de seções padrões utilizadas por uma indústria aeronáutica:

$$A = \frac{1}{2} \text{ in} ; B = 1\frac{3}{4} \text{ in} ; T = \frac{1}{8} \text{ in} ; R = \frac{1}{8} \text{ in}$$

$$\text{Area} = 0,594 \text{ in}^2 ; I_{xx} = 0,2268 \text{ in}^4 ; I_{yy} = 0,1023 \text{ in}^4 ; \rho_{xx} = 0,618 \text{ in} ; \rho_{yy} = 0,415 \text{ in}$$

Um membro composto desta seção tem 32 in de comprimento e está simplesmente apoiado em ambas as extremidades. O membro é suportado lateralmente na direção x, de modo que a falha se dará por flexão em torno do eixo x-x. O material é extrusão de Liga Al 7075-T6, cujas propriedades e parâmetros de Ramberg-Osgood são:

Temperatura ambiente: $E_c = 10.500$ ksi, $F_{0.7} = 72$ ksi, $n = 16,6$, $F_{cy} = 70$ ksi
½ hora a 450°F: $E_c = 7.800$ ksi, $F_{0.7} = 29$ ksi, $n = 8,8$, $F_{cy} = 25$ ksi

O problema é determinar a tensão admissível nestas duas condições.

Solução:

$$\text{Apoio simples} \Rightarrow L' = L \cdot L'/\rho = 32/0,618 = 51,7$$

Caso 1: Resolvendo-se a Eq. (2.244) numericamente resulta em $F_c/F_{0,7} = 0,538$, ou $F_c = 38,7$ ksi.

Fazendo uso da Fig. 2-35, a tensão admissível pode ser lida diretamente para $L'/r = 51,7$ a curva para temperatura ambiente fornece $F_c = 38,5$ ksi.

Caso 2: A curva para $\frac{1}{2}$ hora a 450°F da Fig. 2-35, fornece uma tensão, para $L'/\rho = 51,7$, $F_c = 20$ ksi .

Para $n = 8,8$ e B calculado abaixo, a Fig. 2.41 fornece:

$$B = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{29}{7.800}} 51,7 = 1,00 \Rightarrow \frac{F_c}{F_{0,7}} \approx 0,735 \Rightarrow F_c \approx 21,3 \text{ ksi}$$

ou seja, um resultado um pouco maior do que através da curva do material.

EXEMPLO 2.4

Uma liga de alumínio muito comum na construção de aeronaves é a extrusão 2014-T6, cujas propriedades à temperatura ambiente são: $E_c = 10.700$ ksi, $F_{0,7} = 53$ ksi, $n = 18,5$, $F_{cy} = 53$ ksi . O problema é determinar a tensão admissível para a coluna do exemplo anterior à temperatura ambiente (Caso 1).

Solução:

Como a curva do material para este caso não está disponível, a solução será dada via o modelo de Ramberg-Osgood (Fig. 2-41).

$$B = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{53}{10.700}} 51,7 = 1,16 \Rightarrow \frac{F_c}{F_{0,7}} \approx 0,71 \Rightarrow F_c \approx 37,6 \text{ ksi}$$

É interessante notar que o resultado para a liga Al 2014-T^A, cuja tensão de escoamento em compressão é 53 ksi, forneceu uma tensão admissível (37,6 ksi) somente um pouco menor do que aquela (38,5) calculada para a liga Al 7075-T^A, cuja tensão de escoamento (72 ksi) é sensivelmente maior. Isto é devido ao fato de que a tensão admissível para um valor da razão de esbeltez $L'/\rho = 51,7$ está perto do limite proporcional, ou seja, o módulo tangente não é muito distinto do módulo de elasticidade.

Para ilustrar uma situação onde a liga 7075 é mais eficiente em comparação com a liga 2014, assuma que o membro tenha uma conexão rígida em sua extremidade, tal que o coeficiente equivalente de fixação seja $c = 2$. Nestas condições, $L' = 32 / \sqrt{2} = 22,6$ e $L'/\rho = 22,6/0,618 = 36,7$.

Para a liga 7075-T6, da Fig. 2-35 obtém-se $F_c = 58,3$ ksi.

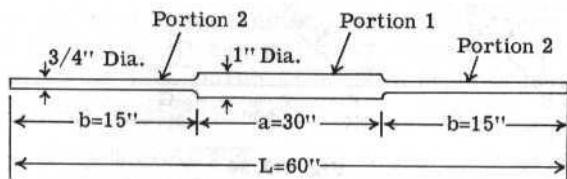
Para a liga 2014-T6, utilizando a Fig. 2-41

$$B = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{53}{10.700}} 36,7 = 0,823 \Rightarrow \frac{F_c}{F_{0,7}} \approx 0,87 \Rightarrow F_c \approx 46,1 \text{ ksi}$$

Como pode ser notado, a liga 7075 permitiria um peso menor do material estrutural requerido.

De uma maneira geral, deve ser notado que na região elástica o problema pode ser resolvido diretamente, sem fazer uso das curvas de coluna ou o modelo de Ramberg-Osgood, pois no regime elástico o módulo não varia. Não custa também lembrar que a Eq. (2.240) fornece a tensão admissível para um membro sujeito à falha primária por flexão. Não são consideradas as possibilidades de flambagem e/ou falha local ou falha por flambagem torsional ou flexo-torsional. Estes modos de falha serão considerados em capítulos mais adiante.

EXEMPLO 2.5



$$\text{PORÇÃO 1: } A_1 = 0,7854 \text{ in}^2; \quad I_1 = 0,0491 \text{ in}^4$$

Da parte relevante da Fig. 2-12, $P_{cr} = B(EI)/L^2$. Esta é a equação de Euler para falha sob flexão elástica. Se a razão a/L é igual a 1 (seção uniforme), B toma o valor de π^2 , ou aproximadamente 10 como indicado na figura. As curvas na Fig. 2-12 são aplicáveis somente para falha elástica. Quando a falha elástica se der no regime plástico, veja como proceder no exemplo 2.6. Como o membro da figura acima é bastante esbelto, assuma inicialmente que a falha se dará no regime elástico e depois verifique se a hipótese é verdadeira.

$$\frac{EI_1}{EI_2} = \frac{10.500 \times 0,0491}{10.500 \times 0,0155} \approx 3,17; \quad \frac{a}{L} = \frac{30}{60} = 0,5 \Rightarrow \text{Fig. 2-12} \Rightarrow B \approx 7,0$$

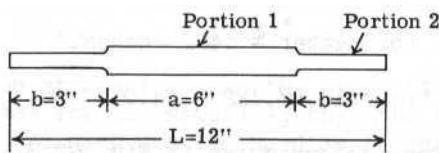
$$\text{de modo que } P_{cr} = \frac{BEI_1}{L^2} = \frac{7 \times 10.500 \times 0,0491}{60^2} = 1,00 \text{ kips}$$

As tensões em cada trecho são, então,

$$f_1 = 1 / 0,7854 = 1,28 \text{ ksi}; \quad f_2 = 1 / 0,4418 = 2,27 \text{ ksi}$$

Estas tensões de compressão estão abaixo do limite de proporcionalidade do material, de modo que E_c é constante e a solução está correta.

EXEMPLO 2.6



A figura mostra a coluna do exemplo anterior com as dimensões longitudinais encurtadas para 1/5 dos comprimentos originais. Não há alterações no que tange o material e seções transversais.

Propriedades da extrusão Al 7075-T6
 $E_c = 10.500 \text{ ksi}$, $F_{0.7} = 72 \text{ ksi}$, $n = 16,6$, $F_{cy} = 70 \text{ ksi}$

Esta coluna é relativamente curta, de modo que a tensão de falha pode estar na região plástica. Como o módulo não é constante, a solução tem de ser obtida por tentativa e erro. Como primeira tentativa, considere uma coluna com esbeltez igual à média da coluna da figura:

Primeira Tentativa:

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4} \therefore \rho_1 = 0,25 \text{ in}; \quad \rho_2 = 0,1875 \text{ in} \Rightarrow \rho_{\text{médio}} = 0,219 \text{ in}$$

A Fig. 2-35 é a curva de coluna para extrusões em liga de alumínio 7075-T6. Com $L/\rho = 12 / 0,219 \approx 55$, obtém-se $F_c = 33,5 \text{ ksi}$. Portanto,

$$P = F_c A = 33,5 \times 0,7854 = 26,3 \text{ kips}; \quad f_1 = 33,5 \text{ ksi} \text{ e } f_2 = 26,3 / 0,4418 = 59,5 \text{ ksi}$$

A tensão no trecho 2 está acima do limite de proporcionalidade, de modo que uma correção de plasticidade deve ser feita ao se utilizar as curvas aplicáveis da Fig. 2-12. Utilizando a Eq. (2.241) ou a Fig. 2-40 pode-se calcular o módulo tangente sob as duas tensões calculadas para as duas porções.

$$\text{Porção 1: } f_1 / F_{0.7} = 33,5 / 72 = 0,465 \Rightarrow E_{t1} = E = 10.500 \text{ ksi}$$

$$\text{Porção 2: } f_2 / F_{0.7} = 59,5 / 72 = 0,826 \Rightarrow E_{t2} = 0,735 E = 7.700 \text{ ksi} \text{ e}$$

$$\frac{EI_1}{EI_2} = \frac{10.500 \times 0,0491}{7.700 \times 0,0155} \approx 4,32; \quad \frac{a}{L} = \frac{6}{12} = 0,5 \Rightarrow \text{Fig. 2-12} \Rightarrow B \approx 5,8 \text{ e}$$

$$P_{cr} = 5,8 \times 10.500 \times 0,0491 / 12^2 = 20,8 \text{ kips.}$$

Como a carga calculada difere razoavelmente da carga tentativa de 26,3 kips, uma nova iteração é necessária.

Segunda Tentativa: Assuma uma carga crítica $P = 23,6$ kips

$$f_1 = 23,6 / 0,7854 = 30,05 \text{ ksi} \text{ e } f_2 = 23,6 / 0,4418 = 53,42 \text{ ksi}$$

$$\text{Porção 1: } f_1 / F_{0,7} = 30,05 / 72 = 0,417 \Rightarrow E_{t1} = E = 10.500 \text{ ksi}$$

$$\text{Porção 2: } f_2 / F_{0,7} = 53,42 / 72 = 0,742 \Rightarrow E_{t2} = 0,937 E = 9.840 \text{ ksi} \text{ e}$$

$$\frac{EI_1}{EI_2} = \frac{10.500 \times 0,0491}{9.840 \times 0,0155} \approx 3,38; \quad \frac{a}{L} = \frac{6}{12} = 0,5 \Rightarrow \text{Fig. 2-12} \Rightarrow B \approx 6,7 \text{ e}$$

$$P_{cr} = 6,7 \times 10.500 \times 0,0491 / 12^2 = 24 \text{ kips.}$$

Terceira Tentativa: Assuma uma carga crítica $P = 24$ kips

$$f_1 = 24 / 0,7854 = 30,56 \text{ ksi} \text{ e } f_2 = 24 / 0,4418 = 54,32 \text{ ksi}$$

$$\text{Porção 1: } f_1 / F_{0,7} = 30,56 / 72 = 0,424 \Rightarrow E_{t1} = E = 10.500 \text{ ksi}$$

$$\text{Porção 2: } f_2 / F_{0,7} = 54,32 / 72 = 0,754 \Rightarrow E_{t2} = 0,920 E = 9.660 \text{ ksi} \text{ e}$$

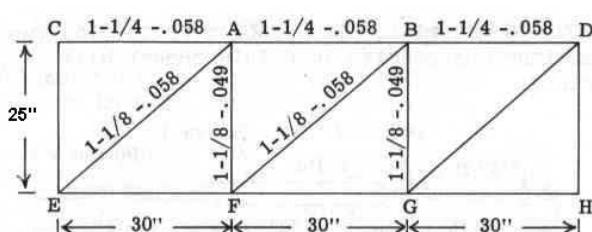
$$\frac{EI_1}{EI_2} = \frac{10.500 \times 0,0491}{9.660 \times 0,0155} \approx 3,44; \quad \frac{a}{L} = \frac{6}{12} = 0,5 \Rightarrow \text{Fig. 2-12} \Rightarrow B \approx 6,7 \text{ e}$$

$$P_{cr} = 6,7 \times 10.500 \times 0,0491 / 12^2 = 24 \text{ kips e a convergência foi obtida.}$$

NOTA IMPORTANTE:

Todos os tipos de colunas representadas na Fig. 2-12 são resolvidos de forma semelhante. Estes gráficos devem ser utilizados somente para colunas simplesmente apoiadas, **pois o coeficiente de fixação c para colunas com afilamento não é o mesmo daquele para colunas uniformes.**

EXEMPLO 2.7



A figura mostra uma treliça tubular de aço soldado de três vãos. O problema é determinar a tensão admissível para o membro AB. A resistência do membro AB depende dos coeficientes de fixação em A e B. O diâmetro e espessura de cada tubo estão indicados na figura. O material é aço AISI 4130 Normalizado à temperatura ambiente: $F_{tu} = 90$ ksi ; $F_{cy} = 70$ ksi ; $E_c = 29.000$ ksi ; $F_{0,7} = 61,5$ ksi ; $n = 6,8$

O membro AB está soldado a três outros tubos em ambas as extremidades. Como estes tubos são os mesmos em ambas as extremidades, o coeficiente de fixação nas extremidades A e B do membro são iguais.

Considere o tubo BD que é típico. O momento μ requerido em B para que esta extremidade sofra uma rotação unitária depende da condição de apoio em D. Se a extremidade D for engastada, $\mu = 4EI/L$ e se for simplesmente apoiada, $\mu = 3EI/L$. Sendo um pouco conservativo, considere que as barras convergindo para A e B sejam simplesmente apoiadas em suas extremidades afastadas. Portanto, tem-se:

$$\text{Membro AC: } I = \frac{\pi(r_0^4 - r_1^4)}{4} = \frac{\pi(0,625^4 - 0,567^4)}{4} = 0,03867 \text{ in}^4; \quad \frac{I}{L} = 0,001289 \text{ in}^3$$

$$\text{Membro AE: } I = \frac{\pi(0,5625^4 - 0,5045^4)}{4} = 0,02775 \text{ in}^4; \frac{I}{L} = 0,000711 \text{ in}^3$$

$$\text{Membro AF: } I = \frac{\pi(0,5625^4 - 0,5135^4)}{4} = 0,02402 \text{ in}^4; \frac{I}{L} = 0,000961 \text{ in}^3$$

$$\mu = \sum 3EI/L = 3(0,001289 + 0,000711 + 0,000961)29000 = 257,6 \text{ kips.in/rad}$$

Para o membro AB, $\mu L / EI = (257,6 \times 30) / (29.000 \times 0,03867) = 6,89$

A Fig. 2-10 (c) superior fornece então o coeficiente de fixação $c = 2,48$. Assim,

$$L' = \frac{L}{\sqrt{c}} = \frac{30}{\sqrt{2,48}} = 19,0 \text{ in} \quad A = \pi(0,625^2 - 0,567^2) = 0,2172 \text{ in}^2; \rho = \sqrt{\frac{0,03867}{0,2172}} = 0,422$$

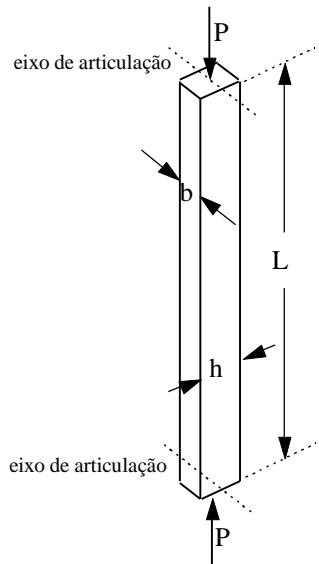
$$L'/\rho = 19,0 / 0,422 = 45,1 \Rightarrow \text{Fig. 2-29} \Rightarrow F_c = 55 \text{ ksi}$$

Como este nível de tensão está no regime elástico, o problema está resolvido. De outra forma seria necessária uma iteração, como no exemplo anterior.

OBSERVAÇÃO: Numa estrutura em treliça todos os membros suportam cargas axiais e cargas axiais afetam a habilidade dos membros em resistir rotações em suas extremidades. A presente solução é simplificada no sentido de que não foram considerados os efeitos de segunda ordem devidos às cargas axiais no cálculo da constante de mola μ do apoio elástico (mesmo porque o carregamento na estrutura não foi fornecido).

2.11 EXERCÍCIOS

EXERCÍCIO 2.1



Uma coluna simplesmente apoiada de seção retangular e comprimento L está sujeita a uma carga de compressão central P . A coluna é suportada de modo a flambar em torno de um eixo paralelo ao lado de comprimento b , como indicado na figura.

a) Determine a razão dos pesos de duas colunas manufaturadas de dois materiais distintos, supondo que ambas tenham a mesma carga crítica, o mesmo comprimento L e a mesma largura b . As propriedades dos dois materiais são, respectivamente, E_1, ω_1 e E_2, ω_2 , onde ω é o peso específico. Considere flambagem elástica.

b) Sejam os seguintes materiais, na temperatura ambiente:

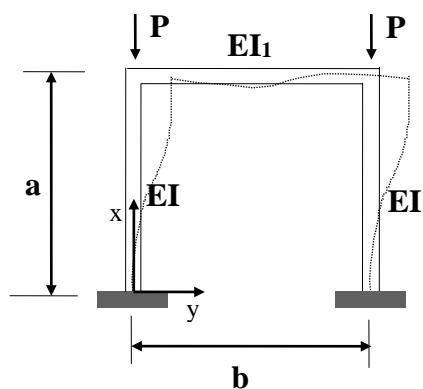
1. Liga de Aço 5 Cr-Mo-V ($E = 30.000 \text{ ksi}$ e $\omega = 0,281 \text{ lb/in}^3$)
2. Aço Inox 17-7 PH ($E = 30.000 \text{ ksi}$ e $\omega = 0,276 \text{ lb/in}^3$)
3. Liga de Alumínio 7075-T6 ($E = 10.500 \text{ ksi}$ e $\omega = 0,101 \text{ lb/in}^3$)
4. Liga de Magnésio AZ61A ($E = 6.300 \text{ ksi}$ e $\omega = 0,0647 \text{ lb/in}^3$)
5. Liga de Titânio 6A1-4V ($E = 16.400 \text{ ksi}$ e $\omega = 0,160 \text{ lb/in}^3$)

Qual deles daria o projeto mais leve?

EXERCÍCIO 2.2

Determine qual o aumento de temperatura ΔT necessário para causar a flambagem **elástica** de uma coluna de comprimento L uniformemente aquecida. A coluna tem seção constante (ρ = raio de giração = constante) e coeficiente de fixação c . Ambas as extremidades são rigidamente fixadas na direção axial (movimento axial impedido). Dados do material: E , α (coeficiente de dilatação térmica).

EXERCÍCIO 2.3



Considere o pórtico da figura. As colunas têm rigidez em flexão EI e a viga, EI_1 . Nestas condições:

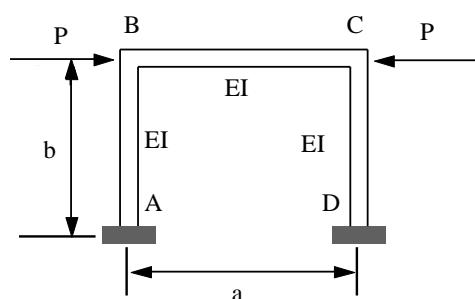
a) ache a equação característica da coluna para instabilidade anti-simétrica (vide figura)

b) resolva a equação acima para os casos particulares:

$$I_1 = 0 \text{ e } I_1 \rightarrow \infty$$

Na solução do problema, desconsidere as deformações axiais nas colunas, bem como aquelas de cisalhamento.

EXERCÍCIO 2.4

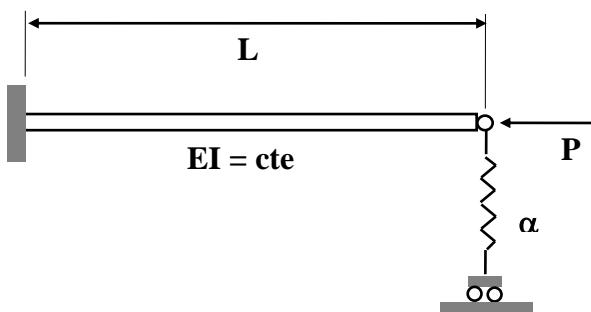


Um pórtico plano retangular ABCD é rigidamente fixado à fundação em A e D e está sujeito à ação de uma carga compressiva P , aplicada em cada uma das extremidades do membro horizontal BC. Admitindo que todos os membros têm a mesma rigidez em flexão EI , mostre que as cargas de flambagem para modos que são simétricos em relação à linha central vertical de simetria são dados pela equação transcendental:

$$ka/2 = -2(a/b) \tan(ka/2)$$

$$\text{onde } k^2 = P/EI$$

EXERCÍCIO 2.5



Uma barra uniforme de comprimento L e rigidez a flexão EI está engastada numa extremidade. Na outra, está articulada a uma mola, de constante α . A barra está submetida a uma carga central P .

Seja $\beta = \alpha L^3 / (EI)$

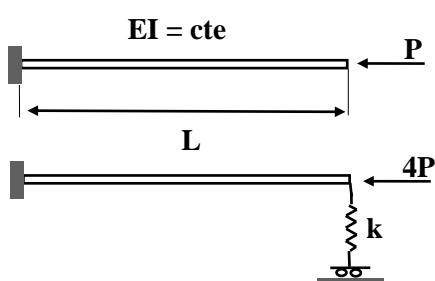
a) formule o problema de auto-valor correspondente (equação diferencial e condições de contorno)

b) ache a equação característica do problema, em função de k , β e L , onde $k^2 = P/EI$

c) resolva a equação característica e plote a solução P_{cr}/P_E em função de β onde P_E é a carga de Euler ($\pi^2 EI/L^2$)

d) verifique a solução encontrada, comparando com os resultados esperados para os valores extremos de β (0,4)

EXERCÍCIO 2.6

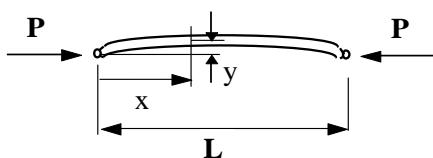


Uma coluna uniforme de comprimento L e rigidez em flexão EI , engastada numa extremidade e livre na outra, foi projetada de modo a apresentar carga crítica P .

Subseqüentemente esta coluna tem de suportar uma carga aumentada. Para tanto, é colocada uma mola lateral na extremidade livre.

Determine a constante de mola k necessária para que a carga crítica aumente para $4P$.

EXERCÍCIO 2.7



A coluna da figura é um tubo de seção circular, com diâmetro d e espessura t . O membro, quando descarregado, apresenta uma forma de curva que pode ser representada por:

$$y(x) = \delta \sin(\pi x/L)$$

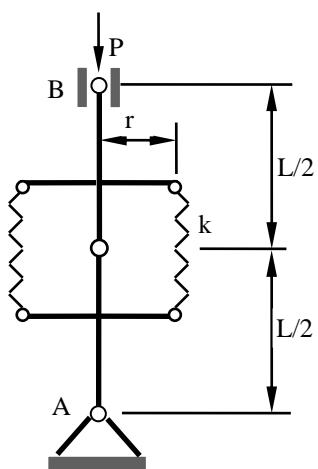
Mostre que, quando a carga P é aplicada, a tensão máxima no membro pode ser expressa por:

$$\sigma_{\max} = (P/\pi dt) [1 + 1/(1-\alpha) (4\delta/d)]$$

$$\text{onde } \alpha = P/P_E, P_E = \pi^2 EI/L^2$$

Considere t pequeno quando comparado a d , de modo a serem válidas as seguintes expressões:
área da secção do tubo = πdt , e momento de inércia = $\pi d^3 t / 8$

EXERCÍCIO 2.8



Uma coluna é composta de duas barras rígidas articuladas entre si e em A e B. A rótula em B está sujeita a uma carga axial P e pode deslizar livremente. Cada barra contém travessões rígidos, ligados entre si por molas lineares de constante k . Nestas condições, pede-se

- a carga crítica P_{cr} .
- seja θ o ângulo entre a barra e a vertical; plote P/P_{cr} vs. θ , para grandes deflexões.
- seja uma coluna imperfeita, apresentando uma deflexão inicial θ_0 ; nestas condições plote P/P_{cr} vs. θ , para grandes deflexões e para valores crescentes de θ_0 .

EXERCÍCIO 2.9

Para o material caracterizado abaixo, trace as curvas de projeto para colunas $F_{cr} \times (L'/\rho)$, onde F_{cr} é a tensão crítica, L' o comprimento efetivo e ρ o raio de giração da seção:

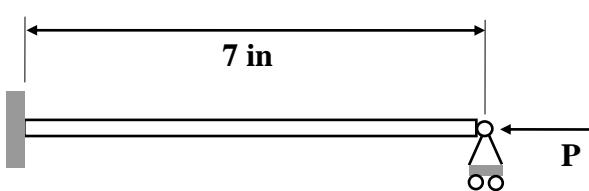
- Utilizando a teoria do módulo tangente para flambagem inelástica em associação com o modelo de Ramberg & Osgood;
- Utilizando a fórmula $F_{cr} = F_y - C(L'/\rho)^m$ para flambagem inelástica, onde C e m são determinados de forma a fazer com que esta curva tangencie a de Euler em $F_{cr} = F_p$; mostre o valor de m ;
- Utilizando a fórmula empírica da reta para flambagem inelástica ($F_{co} = F_y$);
- Utilizando a fórmula empírica da parábola de Johnson para flambagem inelástica ($F_{co} = F_y$).

Discuta os resultados obtidos acima.

Dados do Material: $F_p = 54,00$ ksi; $F_y = 70,67$ ksi; $F_{07} = 73,10$ ksi; $E = 10.500$ ksi; $n = 10,91$

Nota: F_{co} é a tensão de falha quando $L'/\rho = 0$

EXERCÍCIO 2.10



A coluna da figura tem seção quadrada de lado a , e é manufaturada utilizando-se o material do exercício 2.18.

Supondo a coluna perfeita, ache o valor mínimo de a tal que a coluna resista a uma carga central $P = 15$ kips (15.000 lb), sem falhar.

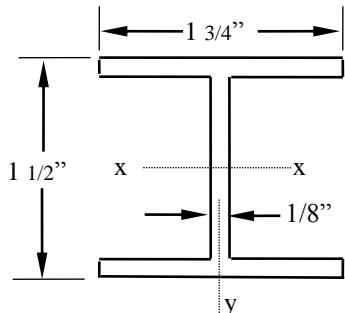
No caso de se tratar de projeto plástico, o valor de

a deve ser achado utilizando-se, respectivamente, cada um dos 4 modelos do exercício 2.18.

Discuta os resultados.

EXERCÍCIO 2.11

A figura mostra uma seção extrudada de uma coluna de comprimento 32". A coluna é apoiada lateralmente na direção y, de maneira que a falha se dará por flexão em torno do eixo x-x.



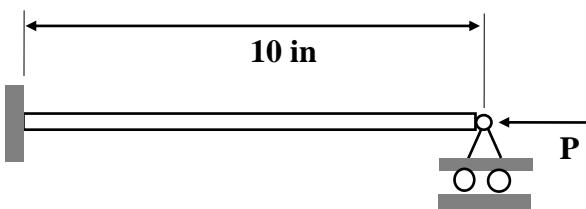
Dadas as propriedades mecânicas das seguintes ligas de alumínio:

- extrusão 2014-T6 ($n = 18,5$; $E_c = 10.700$ ksi; $F_{0.7} = 53$ ksi; $F_{cy} = 53$ ksi)
- extrusão 7075-T6 ($n = 16,6$; $E_c = 10.500$ ksi; $F_{0.7} = 72$ ksi; $F_{cy} = 70$ ksi)

- ache a tensão de falha para as colunas quando o coeficiente de fixação é $c = 1$ (faça os cálculos para ambos materiais);
- ache a tensão de falha para as colunas quando o coeficiente de fixação é $c = 4$ (faça os cálculos para ambos materiais);
- discuta os resultados encontrados; por que, em a) você achou resultados semelhantes apesar das tensões de escoamento dos materiais serem tão distintas? Por que o mesmo não ocorreu em b) ?

Para a solução do problema use a teoria do módulo tangente.

EXERCÍCIO 2.12

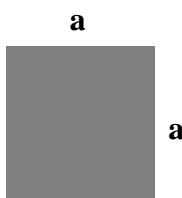


A coluna da figura tem seção circular de raio R e é manufaturada em extrusão de liga alumínio 7075-T6 ($n = 16,6$; $E_c = 10.500$ ksi; $F_{0.7} = 72$ ksi; $F_{cy} = 70$ ksi, $v = 0,3$).

Ache o valor mínimo de R tal que a coluna resista a uma carga central $P = 20$ kips, sem falhar.

$$\text{Dado: } I = \pi R^4 / 4$$

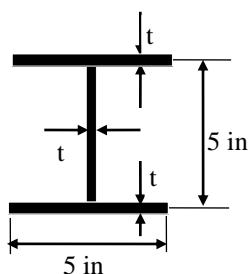
EXERCÍCIO 2.13



Uma coluna simplesmente apoiada numa extremidade e engastada noutra, de seção quadrada de lado a , forjada em liga de alumínio 7075-T6 ($E = 10.500$ ksi, $F_{cy} = 63$ ksi, $F_{0.7} = 63,8$ ksi, $n = 25$), está sujeita a uma carga de compressão de 40 kips. Pede-se:

- Qual o valor mínimo de a para que uma coluna de comprimento 40 in não flambe sob a carga dada?
- Qual o valor mínimo de a para que uma coluna de comprimento 15 in não flambe sob a carga dada?

EXERCÍCIO 2.14



A coluna de seção dada na figura tem comprimento e condições de contorno tais que

$$P_{cr} = 0,03 E_t I \text{ in}^{-2} .$$

Supondo que o material da coluna é liga de alumínio extrudado 7075-T6 ($n = 16,6$; $E_c = 10.500$ ksi; $F_{0.7} = 72$ ksi; $F_{cy} = 70$ ksi, $v = 0,3$), ache a espessura mínima para que a coluna resista a uma carga de 30 kips. Desconsidere possibilidade de flambagem local. Utilize a teoria do módulo tangente.

EXERCÍCIO 2.15

A relação entre a tensão e deformação de certo material em compressão é $10.500 \square \epsilon = f + 21 (f/49)^{16}$.

Assumindo ser válida a teoria do módulo tangente para barras uniformes deste material, plote o gráfico F_{cr} vs (L'/ρ) , onde F_{cr} é a tensão crítica, L' o comprimento efetivo da coluna, e ρ a raio de giração mínimo da seção.

Estime a carga crítica para uma coluna tubular manufaturada deste material, com diâmetro externo de 1,5 unidades, diâmetro interno de 0,08 unidades e comprimento efetivo de 20 unidades.

EXERCÍCIO 2.16

Determine qual o aumento de temperatura ΔT necessário para causar a flambagem de uma coluna de comprimento L uniformemente aquecida. A coluna (que está livre de tensões na temperatura ambiente de referência) tem seção constante (ρ = raio de giração = constante) e coeficiente de fixação c . Ambas as extremidades são rigidamente fixadas na direção axial (movimento axial impedido). Dados do material: n , E_c , $F_{0.7}$ (parâmetros de Ramberg-Osgood) e α (coeficiente de dilatação térmica).

EXERCÍCIO 2.17

Uma coluna de comprimento $L = 60$ in, que está conectada a molas torsionais de constante $\mu = 10.000$ kips-in/rad em ambas as extremidades, está sujeita a uma carga axial $P = 170$ kips. A área e o momento de inércia da seção transversal são, respectivamente, $A = 1,652$ in² e $I = 2,54$ in⁴. Se a coluna é manufaturada em Liga de Titânio 6AL-4V ($F_{cy} = 110$ ksi, $E = 15.500$ ksi, $F_{0.7} = 119,5$ ksi, $n = 13,7$, $F_{tu} = 120$ ksi), qual será a carga admissível? Qual será a margem de segurança?

EXERCÍCIO 2.18

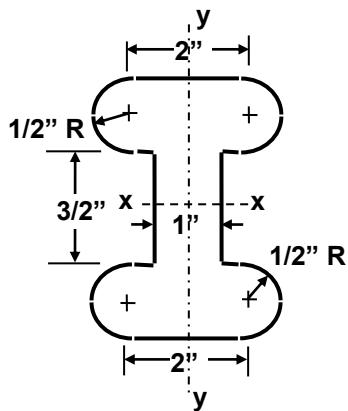
A liga de alumínio 6061-T6 em chapa, tratada termicamente e envelhecida tem as seguintes propriedades:

Temperatura ambiente: $E_c = 10.100$ ksi, $F_{tu} = 42$ ksi, $F_{cy} = 35$ ksi, $F_{0.7} = 35$ ksi, $n = 31$

Exposição de $\frac{1}{2}$ hora a 300°F : $E_c = 9.500$ ksi, $F_{cy} = 29,5$ ksi, $F_{0.7} = 29$ ksi, $n = 26$

Trace as curvas de coluna para o material acima nas duas condições fornecidas.

EXERCÍCIO 2.19



A figura mostra a seção transversal de um membro em compressão. Calcule a carga crítica na seguinte condição:

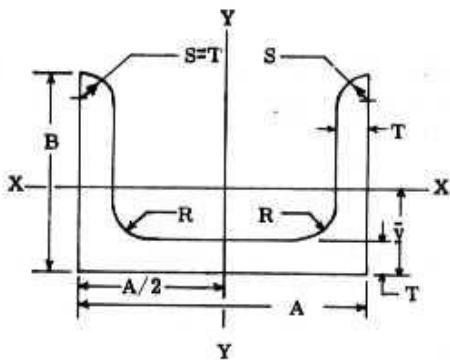
$L = 25$ in ; coeficiente de fixação = 1 para flexão em torno de x-x ; coeficiente de fixação = 1,5 para flexão em torno de y-y

Material Aço AISI tratado para $F_{tu} = 180$ ksi.

EXERCÍCIO 2.20

Como no Exercício 2.19, mas o membro está sujeito à uma temperatura de 850°F durante $\frac{1}{2}$ hora.

EXERCÍCIO 2.21



Duas seções extrudadas em canal idênticas são rebitadas para compor uma seção em I de uma coluna. As propriedades destas seções conforme dadas pelo manual de uma indústria aeronáutica são:

$$A = 1,25 \text{ in}, B = 1,5 \text{ in}, T = 0,125 \text{ in}, R = 0,125 \text{ in}$$

$$\text{Area} = 0,5 \text{ in}^2; \bar{y} = 0,56 \text{ in}; I_x = 0,1106 \text{ in}^4; I_y = 0,1292 \text{ in}^4$$

Se o membro tiver comprimento de 26 in, coeficiente de fixação $c = 1$, e o material é uma extrusão de liga de alumínio 7075-T6, qual é a carga de falha?

Se o membro é conectado rigidamente à estrutura adjacente de forma a que $c = 2$, qual será a carga de falha?

2.12 REFERÊNCIAS

- 2.1 *Boeing Design Manual*, Vol. 2, BDM-6232 Revision B: Column Fixity Coefficients and Effective Lengths, The Boeing Co., Seattle, 1995.
- 2.2 ESDU, Equivalent Lengths of Struts (for Use in Buckling Calculations), *ESDU Data Item no. 92038*, November 1992, Amendment in May 2000.
- 2.3 Chajes, A.: *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
- 2.4 Timoshenko, S.P. & Gere, J.M.: *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, NY, 1961.
- 2.5 Rivello, R.M.: *Theory and Analysis of Flight Structures*, McGraw-Hill, New York, NY, 1969.
- 2.6 Metallic Materials and Elements for Flight Vehicle Structures, *Military Handbook MIL-HDBK-5A*.
- 2.7 *Boeing Design Manual*, Vol. 2, BDM-6234: Euler / Euler-Engesser Columns, The Boeing Co., Seattle, 1989.
- 2.8 *Boeing Design Manual*, Vol. 2, BDM-6236: Johnson-Euler Column Equations, The Boeing Co., Seattle, 1989.

CAPÍTULO 3

FLAMBAGEM DE PLACAS

ÍNDICE DE SEÇÕES

3.1	INTRODUÇÃO	3.4
3.2	TEORIA DE PEQUENAS DEFLEXÕES DE PLACAS FINAS	3.4
3.3	EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE EQUILÍBRIO DE PLACAS EM FLEXÃO: TEORIA LINEAR	3.6
3.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO	3.8
3.5	CARGA CRÍTICA PARA COMPRESSÃO UNIAXIAL UNIFORME	3.9
3.6	COMPRESSÃO UNIAXIAL – BORDAS CARREGADAS SIMPLESMENTE APOIADAS	3.13
3.7	POTENCIAL TOTAL DE UMA PLACA EM FLEXÃO	3.21
3.8	A VARIAÇÃO DO POTENCIAL TOTAL	3.23
3.9	MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ: PLACA SOB COMPRESSÃO NÃO-UNIFORME	3.25
3.10	FLAMBAGEM DE PLACAS PLANAS SOB CARGAS DE FLEXÃO NO PLANO DA PLACA	3.28
3.11	MÉTODO DE GALERKIN – PLACAS PLANAS EM CISALHAMENTO	3.35
3.12	FLAMBAGEM DE PLACAS PLANAS SOB CARGAS DE CISALHAMENTO	3.38
3.13	PLACA EM COMPRESSÃO BIAXIAL	3.41
3.14	FLAMBAGEM DE PLACAS SOB CARREGAMENTOS COMBINADOS. CURVAS DE INTERAÇÃO	3.44
3.15	FLAMBAGEM DE PLACAS AFILADAS	3.56
3.16	FLAMBAGEM INELÁSTICA DE PLACAS	3.57
3.17	FATORES DE REDUÇÃO DEVIDO AO “CLADDING”	3.65
3.18	COMPORTAMENTO DE PLACAS APÓS A FLAMBAGEM E IMPERFEIÇÕES INICIAIS	3.66
3.19	LARGURA EFETIVA DE CHAPA	3.69
3.20	LARGURA EFETIVA DE VON KARMAN	3.71
3.21	A FALHA DE PLACAS	3.73
3.22	EXEMPLOS	3.76
3.23	EXERCÍCIOS	3.84
3.24	REFERÊNCIAS	3.89

ÍNDICE DE FIGURAS

3-1	COORDENADAS DE PLACAS E TENSÕES	3.5
3-2	FORÇAS NO PLANO DE UM ELEMENTO DE PLACA – PEQUENAS DEFLEXÕES	3.6
3-3	MOMENTOS FLETORES E TORSORES E FORÇAS DE CISALHAMENTO	3.6
3-4	PLACA SIMPLESMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO UNIAXIAL	3.9
3-5	COEFICIENTE DE FLAMBAGEM PARA PLACA EM COMPRESSÃO UNIAXIAL	3.12
3-6	TENSÃO CRÍTICA PARA PLACAS-COLUNA	3.15
3-7	PLACA-COLUNA COM BORDAS CARREGADAS SIMPLESMENTE APOIADAS	3.16
3-7	FLANGES SIMPLESMENTE APOIADOS	3.16
3-9	COEFICIENTE DE FLAMBAGEM EM COMPRESSÃO	3.17
3-10	COEFICIENTES DE FLAMBAGEM DE PLACAS PARA VÁRIOS VALORES DE RESTRIÇÃO DE ROTACIONAL NAS BORDAS DESCARREGADAS	3.18
3-11	COEFICIENTES DE FLAMBAGEM PARA PLACAS COM UMA BORDA LIVRE E OUTRA RESTRINGIDA ELASTICAMENTE	3.19
3-12	COEFICIENTES DE FLAMBAGEM PARA FLANGES E PLACAS INFINTAMENTE LONGAS EM FUNÇÃO DA RESTRIÇÃO ROTACIONAL NA BORDA	3.20
3-13	COEFICIENTE DE FLAMBAGEM PARA PAINÉIS REFORÇADOS LONGOS EM FUNÇÃO DE B/T E RIGIDEZ TORSIONAL DO REFORÇADOR	3.20
3-14	TENSÃO MÉDIA DE FLAMBAGEM PARA PLACA RETANGULAR DE ESPESSURA CONSTANTE E CARGA AXIAL VARIANDO LINEARMENTE	3.21
3-15	DESLOCAMENTO ELEMENTAR DAS FORÇAS NO PLANO DA PLACA	3.22
3-16	PLACA SIMPLESMENTE APOIADA SUBMETIDA À COMPRESSÃO NÃO-UNIFORME	3.25
3-17	PADRÃO DE FLAMBAGEM DE PLACA EM FLEXÃO	3.28
3-18	COEFICIENTE DE FLAMBAGEM DE PLACAS EM FLEXÃO PURA PARA VÁRIOS VALORES DE RESTRIÇÃO	

	ELÁSTICA NOS BORDOS DESCARREGADOS	3.29
3-19	COEFICIENTES DE FLAMBAGEM PARA PLACA PLANA SIMPLESMENTE APOIADA SUJEITA À FLEXÃO	3.30
3-20	COEFICIENTES DE FLAMBAGEM PARA PLACAS LONGAS ($A/B > 4$) SIMPLESMENTE APOIADAS NOS QUATRO BORDOS	3.31
3-21	COEFICIENTE DE FLAMBAGEM PARA PLACAS PLANAS CURTAS EM FLEXÃO: LADO DA TRAÇÃO SIMPLESMENTE APOIADO E LADO EM COMPRESSÃO ENGASTADO	3.32
3-22	COEFICIENTES DE FLAMBAGEM PARA PLACAS PLANAS LONGAS ($A/B > 2.4$) COM BORDOS TRACIONADOS SIMPLESMENTE APOIADOS E BORDOS COMPRIMIDOS ENGASTADOS	3.33
3-23	COEFICIENTES DE FLAMBAGEM DE PLACA PLANA EM FLEXÃO: BORDO TRACIONADO SIMPLESMENTE APOIADO E BORDO COMPRIMIDO LIVRE	3.34
3-24	COEFICIENTES DE FLAMBAGEM DE PLACA PLANA EM FLEXÃO: BORDO TRACIONADO ENGASTADO E BORDO COMPRIMIDO LIVRE	3.35
3-25	CURVAS PARA ESTIMAR O COEFICIENTE DE FLAMBAGEM EM CISALHAMENTO PARA PLACAS RESTRINGIDAS ELASTICAMENTE	3.39
3-26	COEFICIENTE DE FLAMBAGEM PARA PLACAS CARREGADAS EM CISALHAMENTO	3.40
3-27	GRÁFICOS PARA O CÁLCULO DE COEFICIENTES DE FLAMBAGEM EM ALMAS	3.40
3-28	FRONTEIRA DE ESTABILIDADE PARA COMPRESSÃO BI-AXIAL EM PLACA QUADRADA	3.42
5-29	COEFICIENTES DE FLAMBAGEM DE PLACAS PLANAS RESTRINGIDAS NA EXPANSÃO LATERAL. COEFICIENTE DE POISSON IGUAL A 0.3	3.43
3-30	CURVA DE INTERAÇÃO PARA PLACAS QUADRADAS OU LONGAS EM COMPRESSÃO BI-AXIAL	3.45
3-31	PLACA PLANA SOB CARREGAMENTO COMBINADO: FLEXÃO PURA + COMPRESSÃO LONGITUDINAL	3.46
3-32	PLACA PLANA SOB CARREGAMENTO COMBINADO: FLEXÃO PURA + CISALHAMENTO	3.47
3-33	PLACA PLANA SOB CARREGAMENTO COMBINADO: TENSÃO LONGITUDINAL+CISALHAMENTO ($A/B>1$)	3.48
3-34	PLACA PLANA SOB CARREGAMENTO COMBINADO: TENSÃO LONGITUDINAL+CISALHAMENTO ($A/B<1$)	3.48
3-35	PLACA PLANA SOB CARREGAMENTO COMBINADO: FLEXÃO + COMPRESSÃO + CISALHAMENTO	3.49
3-36	PLACA PLANA SOB CARREGAMENTO COMBINADO: FLEXÃO + COMPRESSÃO + CISALHAMENTO	3.49
3-37	PLACA PLANA SOB CARREGAMENTO COMBINADO: FLEXÃO + COMPRESSÃO BI-AXIAL	3.50
3-38	PLACA PLANA SOB CARREGAMENTO COMBINADO: FLEXÃO + CISALHAMENTO + COMPRESSÃO TRANSVERSAL: BORDOS DESCARREGADOS SIMPLESMENTE APOIADOS	3.52
3-39	PLACA PLANA SOB CARREGAMENTO COMBINADO: FLEXÃO + CISALHAMENTO + COMPRESSÃO TRANSVERSAL: BORDO SUPERIOR SIMPLESMENTE APOIADO, INFERIOR ENGASTADO	3.52
3-40	TRANSIÇÃO NA FORMA DA CURVA DE INTERAÇÃO PARA CISALHAMENTO E COMPRESSÃO TRANSVERSAL PARA PLACA PLANA SIMPLESMENTE APOIADA À MEDIDA QUE A/B MUDA DE 1 PARA ∞	3.53
3-41	PLACA PLANA SUBMETIDA À COMPRESSÃO BIAXIAL E CISALHAMENTO – BORDOS SIMPLESMENTE APOIADOS	3.54
3-42	PLACA PLANA SUBMETIDA A CARREGAMENTO COMBINADO: CARGA AXIAL TRANSVERSAL E COMPRESSÃO LONGITUDINAL – BORDOS SIMPLESMENTE APOIADOS	3.55
3-43	PLACA PLANA SUBMETIDA A CARREGAMENTO COMBINADO: CARGA AXIAL TRANSVERSAL E COMPRESSÃO LONGITUDINAL – BORDOS ENGASTADOS	3.56
3-44	COEFICIENTE DE FLAMBAGEM PARA PLACA RETANGULAR SIMPLESMENTE APOIADA COM AFILAMENTO EFICIENTE)CARGA E ESPESSURA VARIANDO EXPOENCIALMENTE)	3.57
3-45	VARIAÇÃO TÍPICA DOS FATORES INELÁSTICOS η/J COM A TENSÃO (LIGA DE ALUMÍNIO 2024-T3)	3.60
3-46	CURVAS DE CORREÇÃO DE PLASTICIDADE PARA PLACAS EM LIGAS ALCLAD	3.61
3-47	CURVAS DE CORREÇÃO DE PLASTICIDADE PARA FLAMBAGEM EM CISALHAMENTO (LIGAS ALCLAD)	3.61
3-48	TENSÃO CRÍTICA (LIGA AL 7073-T6 A TEMPERATURA AMBIENTE) COMO UTILIZADO PELA BOEING	3.62
3-49	GRÁFICO ADIMENSIONAL PARA TENSÃO DE FLAMBAGEM EM COMPRESSÃO OU FLEXÃO PARA FLANGES LONGOS ENGASTADOS OU PLACAS APOIADAS COM RESTRIÇÕES ELÁSTICAS NAS BORDAS	3.63
3-50	GRÁFICO ADIMENSIONAL PARA TENSÃO DE FLAMBAGEM EM COMPRESSÃO DE FLANGES LONGOS SIMPLESMENTE APOIADOS	3.63
3-51	GRÁFICO ADIMENSIONAL PARA TENSÃO DE FLAMBAGEM EM CISALHAMENTO DE PLACAS COM RESTRIÇÕES ELÁSTICAS NAS BORDAS	3.64
3-57	CORTE DE UMA CHAPA ALCLAD	3.65
3-58	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CLAD: NÚCLEO E COMBINAÇÕES CLAD-NÚCLEO	3.65
5-59	DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES E DESLOCAMENTOS EM PLACAS SUJEITAS A ENCURTAMENTO UNIFORME NAS EXTREMIDADES	3.67
3-59	COMPORTAMENTO DE PLACAS PERFEITAS E IMPERFEITAS SUBMETIDAS A ENCURTAMENTO UNIFORME NAS EXTREMIDADES	3.68
3-61	DISTRIBUIÇÕES DE TENSÃO EM PLACA FLAMBADA (REAL E ASSUMIDA)	3.69
3-62	LARGURAS EFETIVAS DE PLACAS EM COMPRESSÃO	3.70
3-63	VALORES DE K_c VS. B/T PARA PAINÉIS REFORÇADOS	3.72

3 FLAMBAGEM DE PLACAS

3.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos precedentes tratou-se da flambagem de membros uni-dimensionais, tais como colunas e vigas. A análise destes membros é relativamente simples, porque a flexão pode ser considerada se dar num único plano. Em comparação, a flambagem de uma placa envolve flexão em dois planos sendo, portanto, relativamente mais complexa. De um ponto de vista matemático, a maior diferença entre colunas e placas é que quantidades tais como deflexões e momentos fletores, que são funções de uma única variável independente em colunas, tornam funções de duas variáveis independentes em placas. Em consequência, o comportamento de placas é descrito por equações diferenciais parciais, enquanto que equações diferenciais ordinárias foram suficientes para descrever o comportamento de colunas.

Uma diferença significativa entre placas e colunas também é evidente se as suas características de flambagem são comparadas. Para uma coluna, a flambagem encerra a sua capacidade de resistir à carga axial, e a carga crítica, portanto, é a carga de falha para o membro. O mesmo, entretanto, não é verdadeiro em placas. Estes elementos estruturais podem, após ser atingida a carga crítica, continuar resistindo forças axiais crescentes, e não falham antes que uma carga sensivelmente maior do que a crítica é atingida. A carga crítica de uma placa não é, portanto, a sua carga de falha. Para se conhecer a capacidade de carregamento de uma placa é necessário considerar o seu comportamento após a flambagem.

A teoria da estabilidade desenvolvida neste capítulo é aplicável a dois grupos distintos de placas. Um inclui os elementos de placa relativamente pequenos dos quais são compostas formas estruturais tais como colunas de paredes finas em I, canal, ângulo, etc. Quando tal elemento flamba, somente aquele elemento e não o membro como um todo se deforma. Isto normalmente é referido como *flambagem local*. A outra categoria de placas à qual o material deste capítulo é aplicável é constituída dos painéis planos ordinários, tais como aqueles que podem ser encontrados em qualquer estrutura que tenha grandes superfícies planas.

3.2 TEORIA DE PEQUENAS DEFLEXÕES DE PLACAS FINAS

Considere a placa de espessura uniforme t , mostrada na Fig. 3-1a. Os eixos de coordenadas x e y são direcionados ao longo das bordas da placa e o eixo z é direcionado verticalmente, para baixo. O plano xy , à meia altura entre as duas faces da placa, é chamado de superfície média. A Fig. 3-1b mostra um elemento diferencial da placa. Em cada lado do elemento pode existir uma tensão normal σ e duas tensões de cisalhamento τ . Costuma-se designar planos num corpo físico pela direção de suas normais. A tensão normal atuando num plano então carrega a mesma designação que o plano. A designação da

tensão de cisalhamento consiste de duas partes; a primeira denota o plano sobre o qual age e a segunda, a direção da tensão.

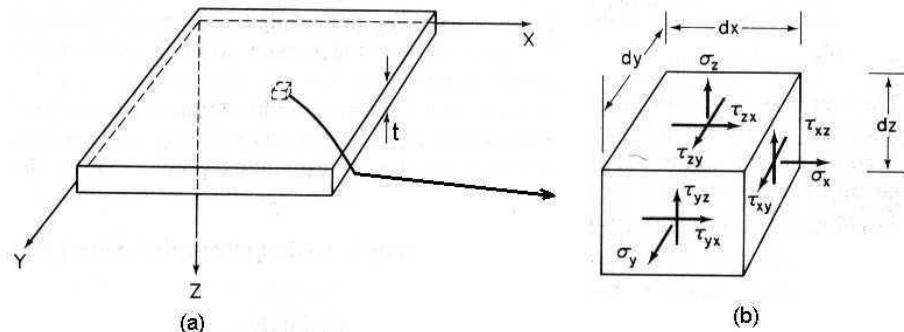


Fig. 5-1 Coordenadas da Placa e Tensões

Placas podem ser classificadas em três categorias: placas espessas, placas finas e membranas. Se a espessura da placa é considerável, se comparada às outras dimensões, deformações de cisalhamento tendem a ser da mesma ordem de grandeza das deflexões de flexão e, portanto, têm de ser consideradas na análise. Tais placas são denominadas de *placas espessas*. Por outro lado, *placas finas* são aquelas em que a espessura é pequena comparada às outras dimensões e deformações de cisalhamento são desprezíveis comparadas às deflexões de flexão. Um terceiro grupo conhecido por *membranas* consiste de placas cuja espessura é tão fina que a rigidez em flexão tende a zero, e cargas transversais devem ser resistidas quase que exclusivamente pela ação de membrana. Neste capítulo somente placas finas serão consideradas.

Costuma-se fazer as duas hipóteses dispostas abaixo no que concerne o comportamento de placas finas:

1. As deformações de cisalhamento γ_{xz} e γ_{yz} são desprezíveis, a linhas normais à superfície média antes da flexão permanecem retas e normais à superfície média durante a flexão.
2. A tensão normal σ_z e a deformação correspondente ε_z são desprezíveis e, portanto, a deflexão transversal de qualquer ponto (x, y, z) é igual à deflexão transversal do ponto correspondente $(x, y, 0)$ na superfície média.

Além de limitar a análise a placas finas, as seguintes idealizações são feitas aqui:

3. As deflexões transversais da placa são pequenas quando comparadas à espessura. Em consequência a extensibilidade da superfície média pode ser desprezada; isto é, a ação de membrana resultante da flexão é desprezível quando comparada com a ação da flexão propriamente dita.
4. O material da placa é homogêneo, isotrópico e segue a lei de Hooke.

Como consequência das hipóteses 1 e 2, a placa pode ser tratada como um problema de estado plano de tensão e as hipóteses 3 e 4 permitem descrever o comportamento da placa através de equações diferenciais parciais lineares a coeficientes constantes.

3.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE EQUILÍBRIO DE PLACAS EM FLEXÃO: TEORIA LINEAR

A derivação da equação diferencial de equilíbrio de placas em flexão a partir do equilíbrio de um elemento de placa pode ser encontrada em textos como as Refs. 3.1 a 3.4. A derivação completa será omitida aqui. Para fins de referência, alguns dos resultados intermediários e figuras para estabelecer a convenção de sinais serão apresentados. Numa seção posterior será apresentada a expressão para o potencial total de uma placa carregada em seu plano e sujeita à flexão. O cálculo de variações será então empregado para re-derivar a equação de equilíbrio e possíveis condições de contorno.

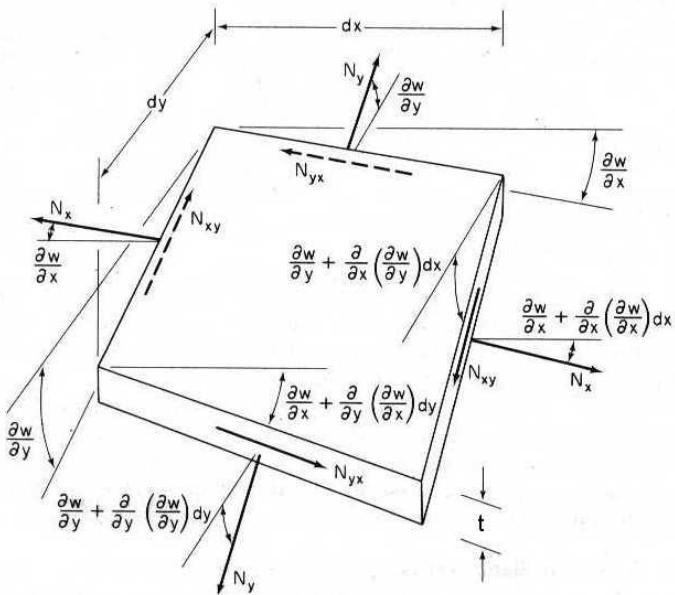


Fig. 5-2 Forças no Plano de um Elemento de Placa - Pequenas Deflexões

A Fig. 3-2 mostra um elemento de placa deformado submetido às forças distribuídas em seu próprio plano, N_x , N_y , N_{xy} e N_{yx} . O eixo z é dirigido para baixo e os sentidos positivos estão indicados.

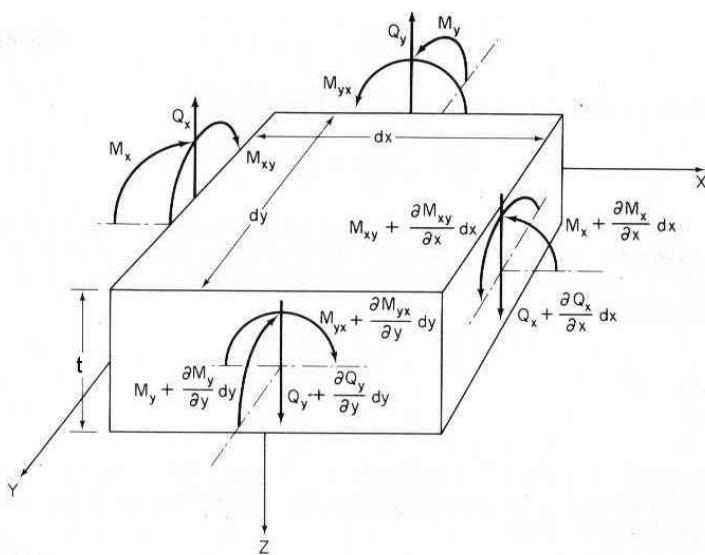


Fig. 5-3 Momentos Fletores e Torsões e Forças de Cisalhamento

A Fig. 3-3 mostra os momentos fletores e torsores, bem como as forças de cisalhamento. Estas quantidades também são distribuídas, ou seja, por unidade de comprimento. Notando que, para equilíbrio de momentos em torno do eixo z , $N_{xy} = N_{yx}$, a equação de equilíbrio na direção z pode ser escrita como

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Se os termos de ordem superior são desprezados, o equilíbrio de momentos em torno dos eixos x e y podem ser escritos, respectivamente, como

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (3.3)$$

As Eqs. (3.1) a (3.3) podem ser combinadas numa única. Basta derivar a Eq. (3.2) em relação a y , (3.3) em relação a x e substituir na Eq. (3.1):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.4)$$

A Eq. (3.4) contém 4 incógnitas: M_x , M_y , M_{xy} e w . Para obter-se uma solução, é óbvio que faltam mais três relações. Uma vez que não há mais condições de equilíbrio a serem utilizadas, estas relações adicionais terão que ser obtidas considerando-se a deformação da placa.

Os momentos são devidos às tensões, cuja magnitude é proporcional à distância da superfície média

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} z dz \quad (3.5)$$

A relação entre tensões e deformações para o estado plano de tensões é

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x - \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y - \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (3.6)$$

As relações entre deformações e deslocamentos de flexão w são dadas por

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.7)$$

Substituindo nas Eqs. (3.6) resulta em

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{xy} = \frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.8)$$

Na seqüência, a substituição das tensões de (3.8) nas Eqs. (3.5) resulta em

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.9)$$

onde D , a rigidez em flexão por unidade de largura da placa é dada por

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.10)$$

Substituindo, agora, as Eqs. (3.9) na equação de equilíbrio (3.4) resulta, finalmente, em

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.11)$$

Esta é a equação diferencial para uma placa carregada em seu plano. Segundo a convenção de sinais utilizada, as cargas de compressão são negativas. Como a flambagem está associada primordialmente a cargas de compressão, seria tedioso representar cargas e tensões críticas por quantidades negativas. Em consequência, da mesma forma que foi feito no estudo de colunas, a maioria dos textos que estuda a flambagem de placas convenciona um sinal positivo para uma carga de compressão, ou seja, os sinais das cargas no plano da placa são mudados em relação à convenção apresentada na Fig. (3-1). Nestas condições, a Eq. (3.11) é escrita na forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (3.12)$$

A equação (3.12) é a equação diferencial de equilíbrio para a flambagem de uma placa de espessura constante, as deformações são consideradas pequenas e o material, elástico linear.

3.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Antes de considerar casos específicos, vale discutir alguns dos problemas envolvidos na imposição das condições de contorno. Se as condições de contorno tivessem que ser satisfeitas exatamente, ou as tensões têm de estar em equilíbrio com as forças por unidade de área, aplicadas na borda, ou os deslocamentos têm de satisfazer as condições prescritas em todos os pontos da borda. O primeiro requisito, entretanto, é incompatível com as condições de equilíbrio no interior da placa, onde foi imposto o equilíbrio entre as **resultantes de tensão** e **forças aplicadas**. Além do mais, não se pode arbitrariamente especificar deslocamentos em todos os pontos da borda da placa sem violar a hipótese de que normais à superfície média permanecem normais e não mudam de comprimento quando a placa deforma. Por esta razão, o equilíbrio é simplesmente requerido entre resultantes de tensão e forças aplicadas na borda por unidade de comprimento e os deslocamentos são especificados somente na borda da superfície média.

Especificando as condições de contorno nesta forma aproximada compromete a precisão das tensões somente numa região estreita na borda da placa, pois, de acordo com o princípio de St. Venant,

as tensões a várias espessuras da borda dependem somente das resultantes de tensão e não de como são distribuídas através da espessura. Como na teoria de vigas, erros grosseiros podem ser cometidos no região da borda da placa ao se empregar a teoria simplificada. Se tensões são requeridas nesta área, é necessário recorrer-se a uma teoria mais complicada para placas grossas, como aquela desenvolvida por Reissner, ou à teoria tridimensional da elasticidade.

As condições de contorno usuais numa borda $x = \text{cte}$ são:

- a) engaste – deslocamento e rotação nulas, respectivamente:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

- b) apoio simples – deslocamento e momento fletor distribuído M_x nulos, respectivamente:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.14)$$

- c) livre – momento fletor distribuído e cisalhamento efetivo distribuído nulos, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{N_x}{D} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{N_{xy}}{D} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.15)$$

Por outro lado, as condições de contorno usuais numa borda $y = \text{cte}$ são:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{para engaste} \quad (3.16)$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para apoio simples} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{N_y}{D} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{N_{xy}}{D} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{para borda livre} \quad (3.18)$$

3.5 CARGA CRÍTICA PARA COMPRESSÃO UNIAXIAL UNIFORME

Considere a placa retangular simplesmente apoiada com lados de comprimento a e b , como mostrado na Fig. 3-4. A placa está sujeita a uma carga de compressão, N_x , por unidade de comprimento

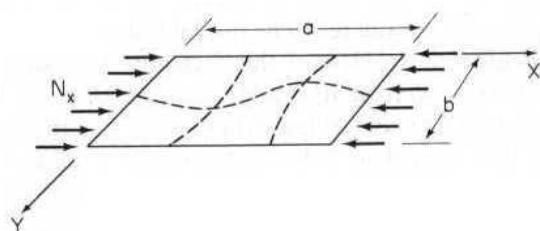


Fig. 5-4 Placa Simplesmente Apoiada com Carregamento Uniaxial

uniformemente distribuída ao longo das bordas $x = 0$ e $x = a$. Considera-se que as bordas da placa são livres para se mover no plano da placa e que, em consequência, cargas adicionais no plano da placa além daquelas aplicadas nas bordas não podem se desenvolver (note que, devido ao efeito do coeficiente de Poisson, se as bordas $y=0$ e $y=b$ não fossem permitidas se afastar, forças axiais de compressão na direção y se desenvolveriam na placa). Fazendo $N_y = N_{xy} = 0$, a Eq. 3.12 pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.19)$$

Uma vez que todas as bordas são simplesmente apoiadas, a deflexão lateral, assim como o momento fletor, se anulam em cada borda. Adotando o sistema de eixos da figura, as condições de contorno são:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } x = 0, a \quad (3.20)$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } y = 0, b \quad (3.21)$$

Tendo em vista a condição de que a deflexão ao longo de cada uma das bordas é nula, é evidente que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } x = 0, a \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } y = 0, b \quad (3.22)$$

Em consequência, as condições de contorno (3.20) podem ser simplificadas para

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } x = 0, a \quad (3.23)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } y = 0, b \quad (3.24)$$

Uma vez que a flexão da placa é limitada a pequenas deformações, somente as deformações de flexão necessitam ser consideradas. As deformações no plano da placa causadas pela flexão são consideradas desprezíveis. Diante deste fato, somente as condições de contorno que lidam com as deformações transversais são necessárias. As condições de contorno no plano da placa foram necessárias para determinar se, ou não, forças no plano da placa são induzidas durante a compressão axial da placa.

Para determinar o carregamento crítico de um sistema através do uso do conceito do equilíbrio neutro, é necessário determinar-se uma solução não trivial da equação de equilíbrio. No caso de uma placa esta equação é uma equação diferencial parcial, e como ainda não se lidou com este tipo de equação nos capítulos anteriores, algumas palavras introdutórias referentes à sua solução parecem em ordem.

A maior diferença entre uma equação diferencial ordinária e uma equação diferencial parcial é que a primeira pode ser satisfeita somente por uma função, enquanto que existem várias funções que satisfazem a última. Como consequência, a solução geral de uma equação diferencial parcial é mais difícil de ser obtida e de menor valor prático. Enquanto que a solução geral de uma equação diferencial ordinária fornece a forma da variável dependente com uma ou mais constantes arbitrárias a determinar, a solução geral de uma equação diferencial parcial somente descreve a variável dependente em termos genéricos e não dá a sua forma específica. Em consequência, é usual resolver a equação na forma de uma série.

Considere que a solução da Eq. (3-24) seja da forma

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

onde m e n representam o número de semi-ondas nas quais a placa flamba, respectivamente, nas direções x e y . Está claro que a solução considerada, de fato, satisfaz todas as condições de contorno. Falta então verificar se também é capaz de satisfazer a equação diferencial. Substituição das derivadas apropriadas na Eq. (3.19) leva a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (3.26)$$

A mão esquerda de (3.26) consiste de uma soma de um número infinito de funções independentes. A única maneira de tal soma se anular, é todas as parcelas se anularem, ou seja,

$$A_{mn} \left[\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{N_x}{D} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] = 0 \quad (3.27)$$

Esta expressão pode ser satisfeita ou se $A_{mn} = 0$ ou se o termo entre colchetes se anula. Se $A_{mn} = 0$, N_x pode assumir qualquer valor. Esta é a solução trivial a qualquer carga, desde que a placa permaneça reta. A solução não-trivial é obtida fazendo o termo entre colchetes igual a zero.

$$N_x = \frac{Da^2 \pi^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \text{ ou } N_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \quad (3.28)$$

De acordo com a Eq. (3.28), N_x depende das dimensões e das propriedades físicas da placa, bem como de m e n , o número de semi-ondas nas quais a placa flamba. Como o valor crítico de N_x é o menor valor que satisfaz a Eq. (3.28), é necessário determinar os valores de m e n que minimizam (3.28). É óbvio que N_x aumenta com o aumento de n , de modo que $n = 1$, ou seja, a placa flamba numa única semi-onda na direção y . O número de semi-ondas nas quais a placa flamba na direção x é determinada minimizando-se a Eq. (3.28) com relação a m :

$$\frac{d(N_x)}{dm} = \frac{2D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right) \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{m^2 b} \right) = 0 \Rightarrow m = \frac{a}{b} \quad (3.29)$$

A substituição de (3.29) em (3.28) leva a

$$(N_x)_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \quad (3.30)$$

Uma vez que uma placa simplesmente apoiada é obrigada a flamar num número inteiro de semi-ondas, a/b que, de acordo com (3.29) é igual a m , tem de ser um número inteiro. A carga crítica dada pela Eq. (3.29) é, portanto, somente válida quando a/b é um inteiro. Para placas nesta categoria, o padrão da flambagem consiste em ondas quadradas.

O caso mais geral, quando a/b não é um inteiro será agora considerado. A Eq. (3.28) pode ser escrita na forma

$$N_x = \frac{k\pi^2 D}{b^2}, \text{ onde } k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \quad (3.31)$$

O fator k depende do alongamento a/b , e de m e n , o número de semi-ondas nas quais a placa flamba. Como já visto, $n = 1$ leva ao menor valor de N_x ; isto é, a placa flamba numa única semi-onda na direção y . Para determinar o padrão de flambagem na direção x , deve-se considerar como k varia com a/b para diferentes valores de m . Quando $m = 1$ na Eq. (3.31), a variação de k com a/b está mostrada na Fig. 3-3.

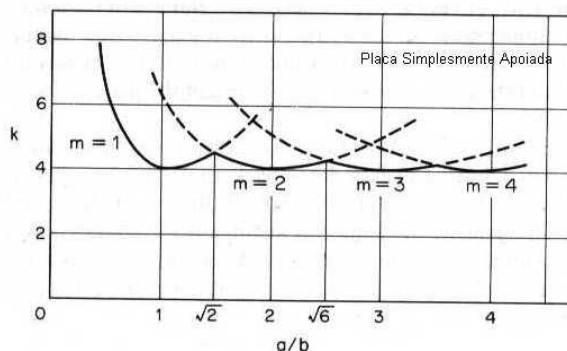


Fig. 5-5 Coeficiente de Flambagem para Placa em Compressão Uniaxial

De forma análoga, tomando $m = 2, 3, \dots$, as curvas indicadas na Fig. 3-5 são obtidas. É evidente destas curvas que existe um número ilimitado de k , correspondendo a um valor particular de a/b , que satisfazem a Eq. (3.31). Destes somente é de interesse aquele de menor valor. A curva sólida na Fig. 3-5, obtida conectando os ramos inferiores das várias curvas, dá o valor crítico de k como uma função de a/b . Além disto, a curva sólida indica o número de semi-ondas nas quais a placa flamba na direção x , correspondente a um dado valor de a/b . Por exemplo, o coeficiente de flambagem crítico k é dado para $m = 1$ para todas as placas com $a/b < \sqrt{2}$. Estas placas portanto flambam numa única semi-onda na direção x . Para placas com $\sqrt{2} < a/b < \sqrt{6}$ prevalece $m = 2$ e a placa flamba em duas semi-ondas na direção x .

Desde que a/b seja relativamente pequeno, k varia consideravelmente com o alongamento e uma curva como aquela dada na Fig. 3-5 é necessária para a obtenção do valor correto de k . Para $a/b > 4$,

entretanto, a variação de k do valor 4 é desprezível, e $k = 4$ é, portanto, uma aproximação satisfatória para placas longas, simplesmente apoiadas nos quatro bordos e submetidas à compressão uniaxial.

Tendo determinado a carga crítica de uma placa carregada uniaxialmente, é interessante fazer a comparação com a carga crítica de uma coluna. Para este fim é melhor substituir D por $E/12(1-\nu^2)$ e N_x por $\sigma_{cr}t$

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{(b/t)^2} \quad (3.32)$$

A expressão equivalente para a coluna é

$$\sigma_{cr} = \frac{c\pi^2 E}{(L/\rho)^2} \quad (3.33)$$

onde c é uma constante que depende das condições de contorno. A comparação entre as equações acima indica que a tensão crítica de ambas, placa e coluna, são diretamente proporcionais ao módulo de elasticidade e inversamente proporcionais à razão de dois comprimentos. A tensão na placa varia inversamente com o quadrado da razão entre a espessura e a largura, e a tensão na coluna varia com o inverso do quadrado da razão de esbeltez. A tensão crítica da coluna, portanto, depende do comprimento, enquanto que a da placa depende da largura e é independente do comprimento.

3.6 COMPRESSÃO UNIAXIAL – BORDAS CARREGADAS SIMPLESMENTE APOIADAS

Como visto na seção anterior, a equação diferencial de equilíbrio, e condições de contorno nas bordas carregadas são dadas pelas Eqs. (3.19) e (3.23)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.19)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } x = 0, a \quad (3.23)$$

Na seção anterior também foi visto que funções do tipo $\sin(m\pi x/a)$, que satisfazem as condições de contorno (3.23), são também capazes de satisfazer a Eq. (3.19). Seja

$$w(x, y) = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.34)$$

Substituindo na Eq. (3.19) resulta em

$$\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 f - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^4 f}{dy^4} - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 f \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = 0$$

que pode ser posta na forma

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{N_x}{D}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]f = 0 \quad (3.35)$$

A solução geral desta equação é (Ref. 3.5):

$$f(y) = C_1 \cosh \frac{\bar{\alpha}y}{b} + C_2 \sinh \frac{\bar{\alpha}y}{b} + C_3 \cos \frac{\bar{\beta}y}{b} + C_4 \sin \frac{\bar{\beta}y}{b} \quad (3.36)$$

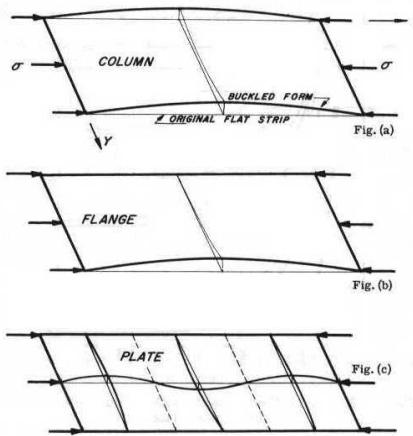
onde

$$\bar{\alpha} = \pi \left(\frac{mb}{a} \right)^{1/2} \left[\frac{mb}{a} + k_c^{1/2} \right]^{1/2} \quad (3.37)$$

$$\bar{\beta} = \pi \left(\frac{mb}{a} \right)^{1/2} \left[-\frac{mb}{a} + k_c^{1/2} \right]^{1/2} \quad (3.38)$$

$$k_c = \frac{12(1-\nu_e^2)\sigma_{cr}}{\pi^2 E} \left(\frac{b}{t} \right)^2 \quad (3.39)$$

O esboço abaixo mostra a transição do modo de flambagem de uma coluna para a placa, à medida que os bordos descarregados vão sendo apoiadas. Quando ambas os bordos descarregados são livres, o elemento estrutural é denominado de placa-coluna. Quando um dos bordos somente é livre, tem-se um que é conhecido por flange. Uma placa propriamente dita não tem bordos livres.



Para a placa-coluna (wide column), as condições de contorno para o bordo descarregado são o momento e o cisalhamento reduzido nulos, ou seja,

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0,b} = 0; \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=0,b} = 0 \quad (3.40)$$

A aplicação de (3.34) nas condições de contorno e posterior aplicação na solução (3.36) leva à seguinte equação característica:

$$\bar{p}^2 \bar{\beta} \tan(\bar{\beta}/2) + \bar{q}^2 \bar{\alpha} \tanh(\bar{\alpha}/2) = 0 \quad (3.41)$$

onde

$$\bar{p} = \bar{\alpha}^2 - \nu(m\pi b/a)^2 \quad \bar{q} = \bar{\beta}^2 - \nu(m\pi b/a)^2 \quad (3.42)$$

Para o flange simplesmente apoiado,

$$w(0) = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0,b} = 0; \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} = 0 \quad (3.43)$$

e a equação característica é dada por

$$\bar{p}^2 \bar{\beta} \operatorname{senh} \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} - \bar{q}^2 \bar{\alpha} \cosh \bar{\alpha} \operatorname{sen} \bar{\beta} = 0 \quad (3.44)$$

O coeficiente de flambagem para colunas largas e flanges é mostrado como função de ν e a/b nas Figs. 3-6 a 3-8. As soluções para colunas largas foram dadas por Hubolt e Stowell (Ref 3.6) usando a equação diferencial para bordas carregadas simplesmente apoiadas e um método de energia para bordas carregadas engastadas.

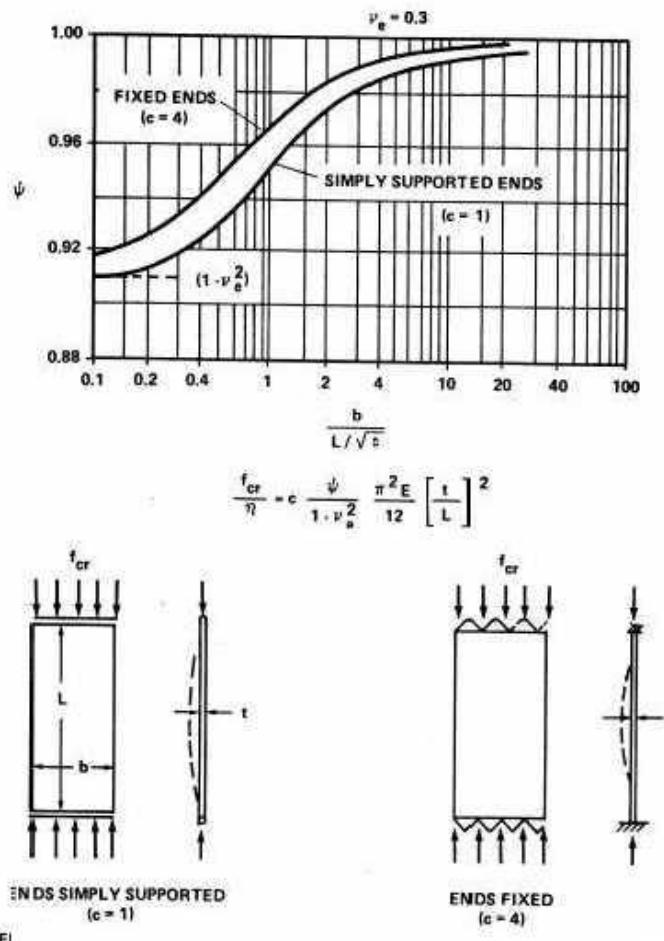


Fig. 5-6 Tensão Crítica para Placas-Coluna

O coeficiente de flambagem para um flange simplesmente apoiado foi derivado por Lundquist e Stowell (Ref. 3-7) na forma

$$k_c = \frac{6}{\pi^2} \left[(1-\nu) + \frac{(m\pi b/a)^2}{6} \right] \quad (3.45)$$

Quando a aresta descarregada é engastada,

$$k_c = 0,83 - 0,93\nu + 1,34\left(\frac{a}{m\pi b}\right)^2 + 0,10\left(\frac{m\pi b}{a}\right)^2 \quad (3.46)$$

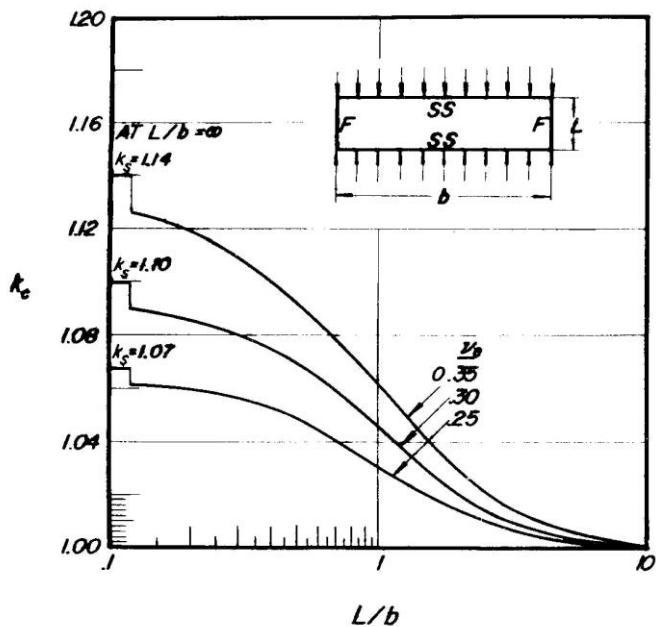


Fig. 5-7 Placa Coluna com Bordas Carregadas Simplesmente Apoiadas

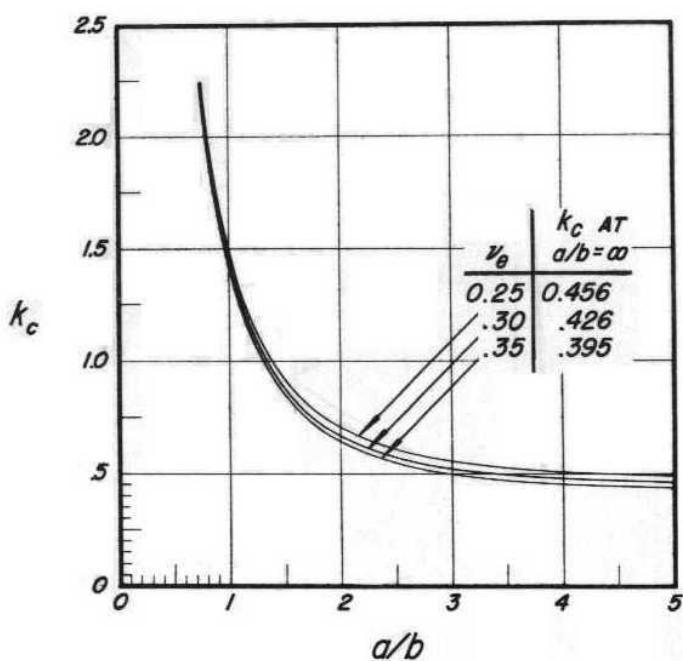


Fig. 5-8 Flanges simplesmente apoiados

Como pode ser visto a partir das soluções acima, o coeficiente de flambagem de uma placa simplesmente apoiada depende somente de mb/a e não depende do coeficiente de Poisson ν . Por outro lado os coeficientes da placa-coluna e flanges dependem também do coeficiente de Poisson. A influência do coeficiente de Poisson sobre o coeficiente de flambagem é devida aos termos do cisalhamento

reduzido nas bordas livres de flanges e placas-coluna. Condições de contorno tais como apoio simples não impõem requisitos de cisalhamento reduzido nulo, o que elimina a influência de ν .

O valor do coeficiente de flambagem para um elemento contendo uma borda descarregada livre depende do grau de curvatura anticlástica desenvolvida. Para elementos muito estreitos tais como uma viga, ocorre curvatura anticlástica completa e a rigidez em flexão é simplesmente EI . Para uma placa-coluna relativamente larga, a curvatura anticlástica é suprimida, de forma que a seção transversal permanece relativamente plana excetuando muito próximo das bordas livres. A restrição de curvatura anticlástica resulta num aumento na rigidez em flexão. Para um elemento muito largo a rigidez em flexão se aproxima de $E/(1-\nu^2)$. Esta condição limite é conhecida por flexão cilíndrica.

Placas-Coluna podem freqüentemente ser relativamente estreitas, caso em que a rigidez estará entre os dois valores limites discutidos. Este efeito pode ser notado nas Figs. 3-6 e 3-7.

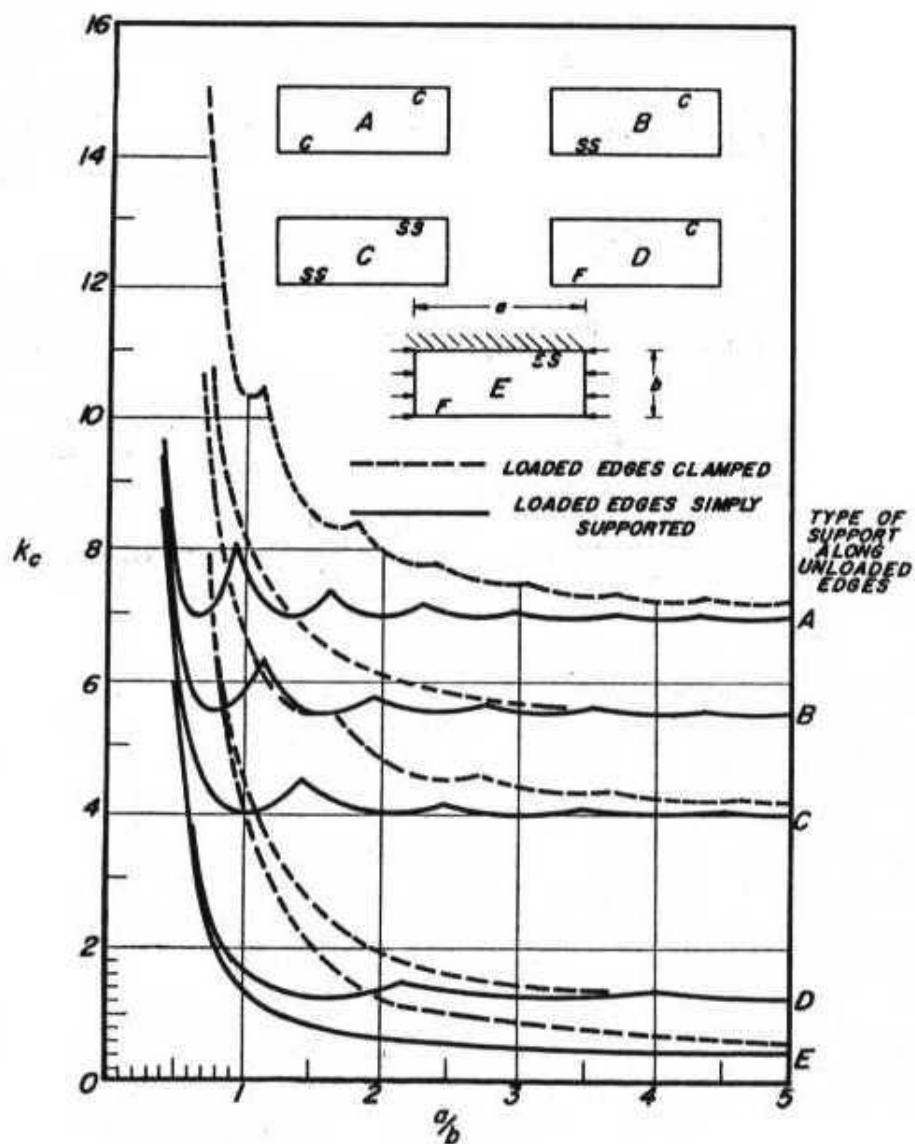


Fig. 5-9 Coeficientes de Flambagem em Compressão

A Fig. 3-9 mostra a variação do coeficiente de flambagem para placas retangulares em compressão como função de a/b para várias condições de contorno. As curvas envolvendo bordas livres são limitantes inferiores, válidos para a razão de Poisson entre 0,27 e 0,33. A letra C significa engaste, SS, apoio simples e F, livre. É aparente que, para valores de a/b maiores do que 4, o efeito de engastamento nas bordas carregadas torna-se desprezível, e uma placa engastada flamba, praticamente, sob a mesma carga de uma placa simplesmente apoiada nos bordos carregados.

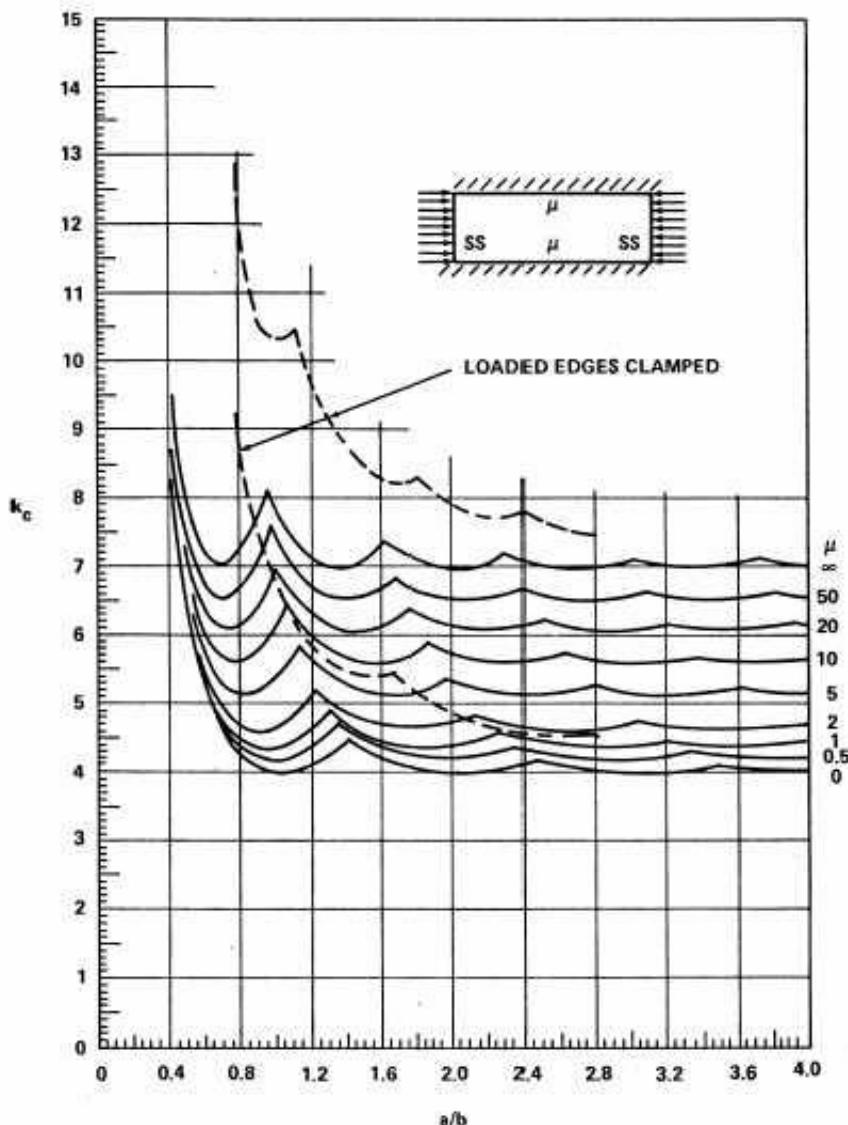


Fig. 5-10 Coeficientes de Flambagem de Placas para Vários Valores de Restrição Rotacional nas Bordas Descarregadas

O comportamento de placas comprimidas com várias quantidades de restrição elástica rotacional ao longo das bordas descarregadas é mostrado na Fig. 3-10. O coeficiente de restrição rotacional μ é dado por

$$\mu = \frac{4S_v b}{D} \quad (3.47)$$

onde S_v é a rigidez por unidade de comprimento do meio elástico resistente ou momento requerido para girar um comprimento unitário do meio elástico através de um ângulo de um quarto de radiano.

A Fig. 3-10 também pode ser utilizada quando as restrições elásticas são desiguais em ambos os bordos descarregados. Isto pode ser feito determinando o valor de k_c para μ em cada bordo. O valor efetivo pode então ser achado de

$$\bar{k}_c = (k_{c1} k_{c2})^{1/2} \quad (3.48)$$

A Fig. 3-11 mostra as curvas para o coeficiente de flambagem de uma placa com uma borda descarregada livre e outra submetida à restrição rotacional elástica.

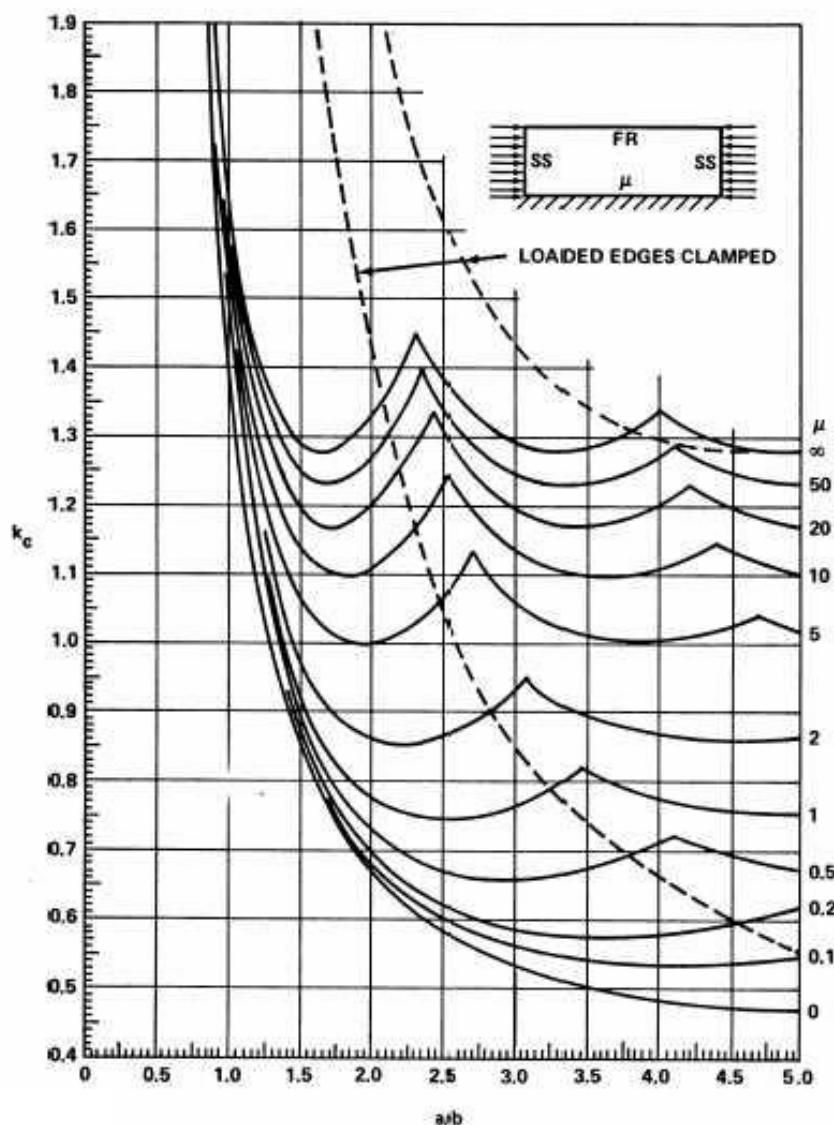


Fig. 5-11 Coeficientes de Flambagem para Placas com um Borda Livre e a outra Restringida Elasticamente

As restrições elásticas são matematicamente equivalentes a uma série de molas torsionais não conectadas entre si. Considerando que isto não conforma com o comportamento do membro de borda ou reforçador usuais num painel plano, é necessário determinar a rigidez de mola efetiva para que se possa fazer uso das Figs. 3-10 ou 3-11, como dado em (3.47). Entretanto, não é necessário determinar esta rigidez com grande precisão, uma vez que a influência de μ sobre k_c engloba uma grande gama de razões de rigidez, como mostrado na Fig. 3-12 para placas infinitamente longas. Quando a rigidez rotacional do reforçador foi achada, μ (ε na Fig. 3-12) pode ser computado fazendo-se a razão desta rigidez com a rigidez rotacional da placa.

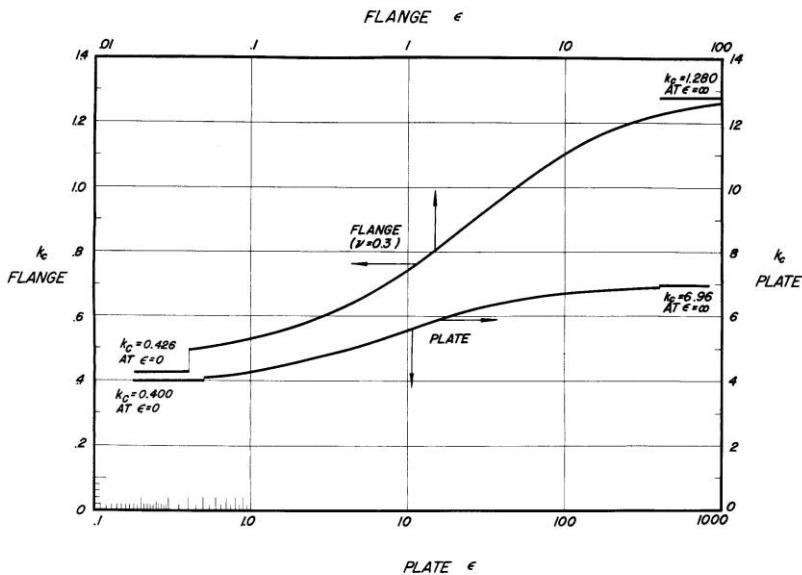


Fig. 5-12 Coeficientes de Flambagem para Flanges e Placas Infinitamente Longos em Função da Restrição Rotacional na Borda

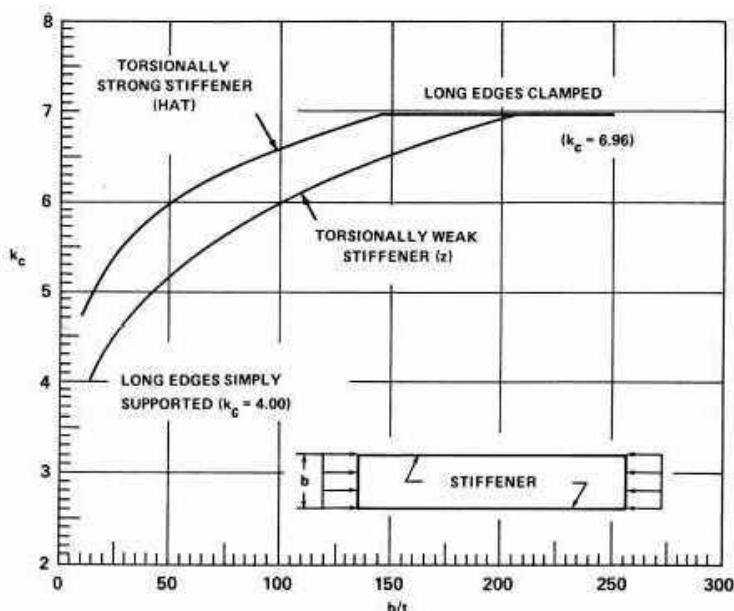


Fig. 5-13 Coeficiente de Flambagem para Painéis Longos Reforçadas em Função de b/t e Rrigidez Torsional do Reforçador

A partir de resultados de laboratório, Gerard construiu um gráfico para o coeficiente de flambagem de placas longas como função de b/t para reforçadores fortes e fracos (Fig. 3-13). Acima de $b/t = 200$ pode-se ver que a maioria dos reforçadores de fato tem um efeito de engastar a paca.

A Fig. 3-14 ilustra o caso onde a tensão de compressão varia linearmente sobre o comprimento da placa, um caso típico sendo aquele dos painéis na parte superior de uma asa em balanço sob condições normais de vôo.

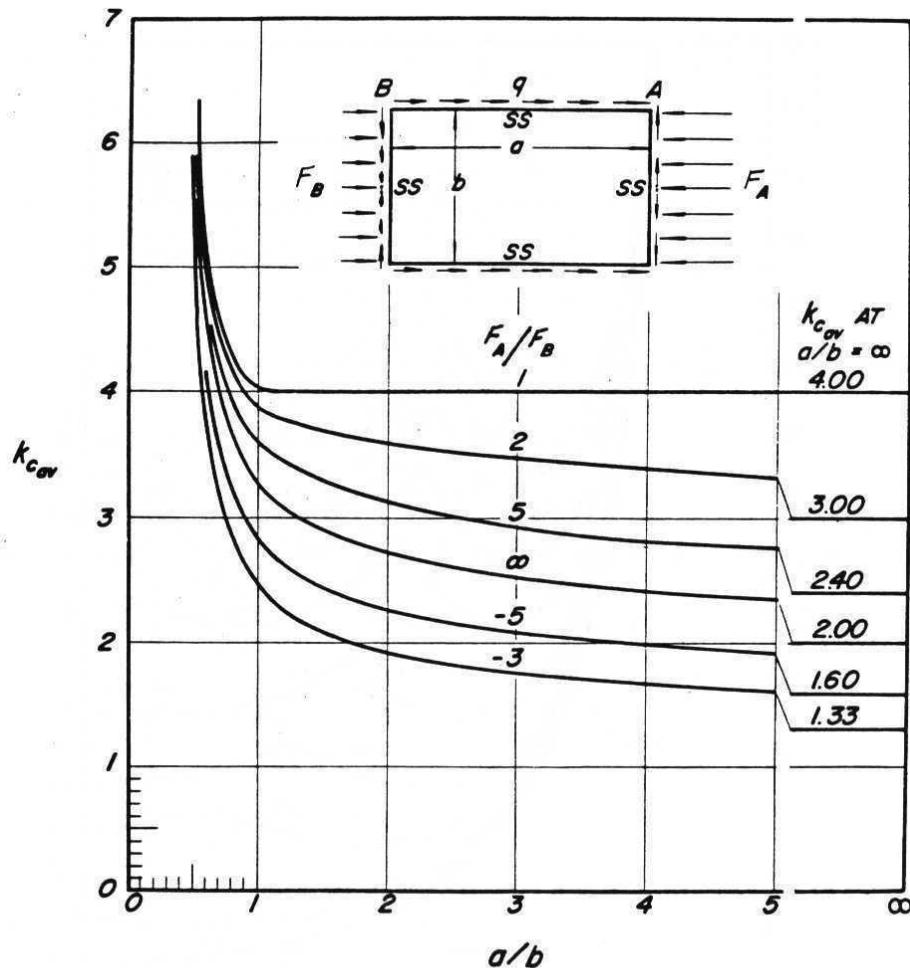


Fig. 5-14 Tensão média de Flambagem para Placa Retangular de Espessura Constante e Carga Axial Variando Linearmente

$$F_{av} = \frac{k_{cav} \pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

3.7 FLAMBAGEM DE PLACAS PLANAS SOB CARGAS DE FLEXÃO NO PLANO DA PLACA

A flambagem de placas submetidas a cargas de flexão pode ser analisada a partir da solução da equação de equilíbrio ou via um método de energia, como mostrado na Seção 3.9. Quando uma placa

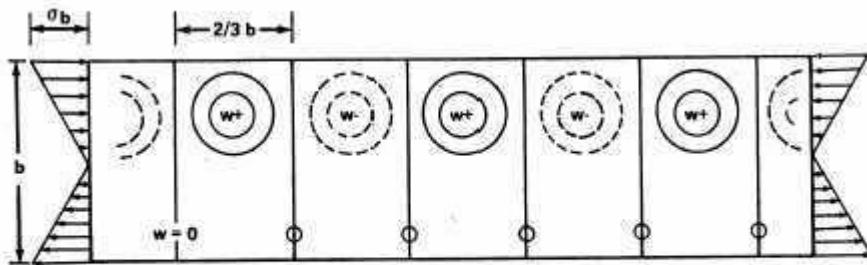


Fig. 5-17 Padrão de Flambagem de Placa em Flexão

em flexão flamba, o modo envolve um comprimento de onda relativamente curto. Para placas longas simplesmente apoiadas este comprimento de onda é $2/3b$, como mostrado na Fig. 3-17. Este comprimento de onda menor faz com que o coeficiente de flambagem em flexão seja maior do que em compressão.

A equação para flambagem elástica em flexão pura ou flexão + compressão axial é

$$\sigma_{cr} = \frac{k_b \pi^2 E}{12(1-\nu_e^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (3.79)$$

onde o coeficiente de flambagem k_b é fornecido na próxima série de figuras.

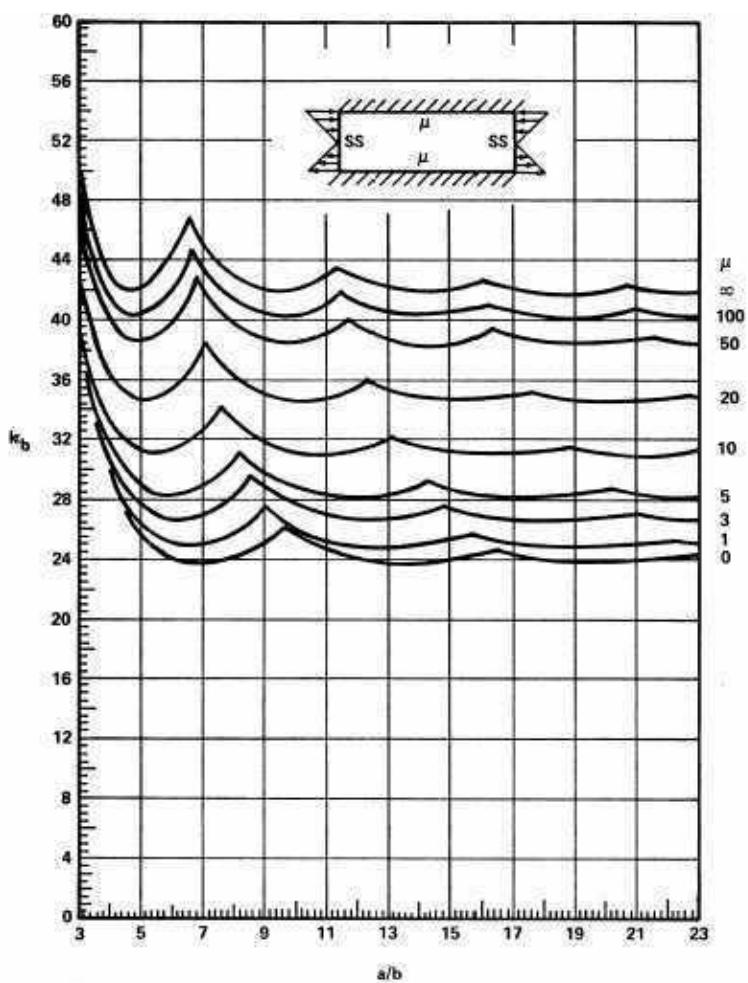
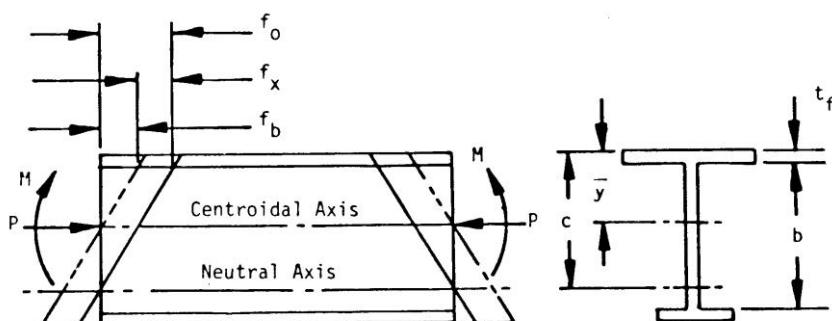


Fig. 5-18 Coeficiente de Flambagem de Placas em Flexão Pura para Vários Valores de Restrição Elástica nos Bordos Descarregados

A Fig. 3-18 mostra o coeficiente de flambagem de placas planas em flexão pura para vários valores de restrição elástica rotacional nos bordos descarregados. As curvas da Fig. 3-18 só devem ser aplicadas para placas longas ($a/b > 4$).

Quando uma compressão axial é aplicada à placa, em adição às tensões axiais da flexão pura no plano da placa, o eixo neutro não coincide com o eixo dos centróides, ou seja, como mostrado no esboço, c não é igual a \bar{y} .



O coeficiente de flambagem para placas carregadas desta maneira depende da distância entre o bordo em compressão e o eixo neutro (zero tensão), que é definido como $c = (1 + f_x/f_b)(\bar{y} - t_f)$ onde $f_0 = f_x + f_b$ = tensão no bordo em compressão, f_x = tensão axial, f_b = tensão de flexão máxima ao longo da borda comprimida da placa = $M(\bar{y} - t_f)/I$. As figuras a seguir fornecem o coeficiente de flambagem em função do parâmetro $\beta = b/c$.

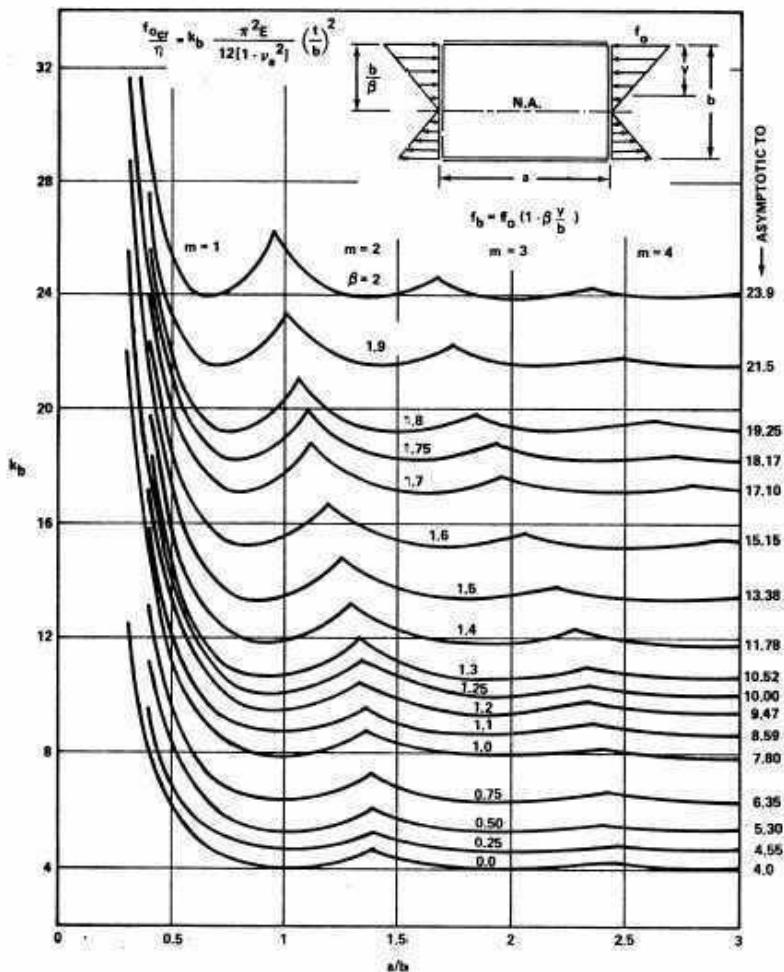


Fig. 5-19 Coeficientes de Flambagem para Placa Plana Simplesmente Apoiada Sujeita à Flexão

A Fig. 3-19 mostra os coeficientes de flambagem para uma placa simplesmente apoiada nos quatro bordos em função do parâmetro β . A Fig. 3-20 pode ser adotada para placas simplesmente apoiadas longas, $a/b > 4$,

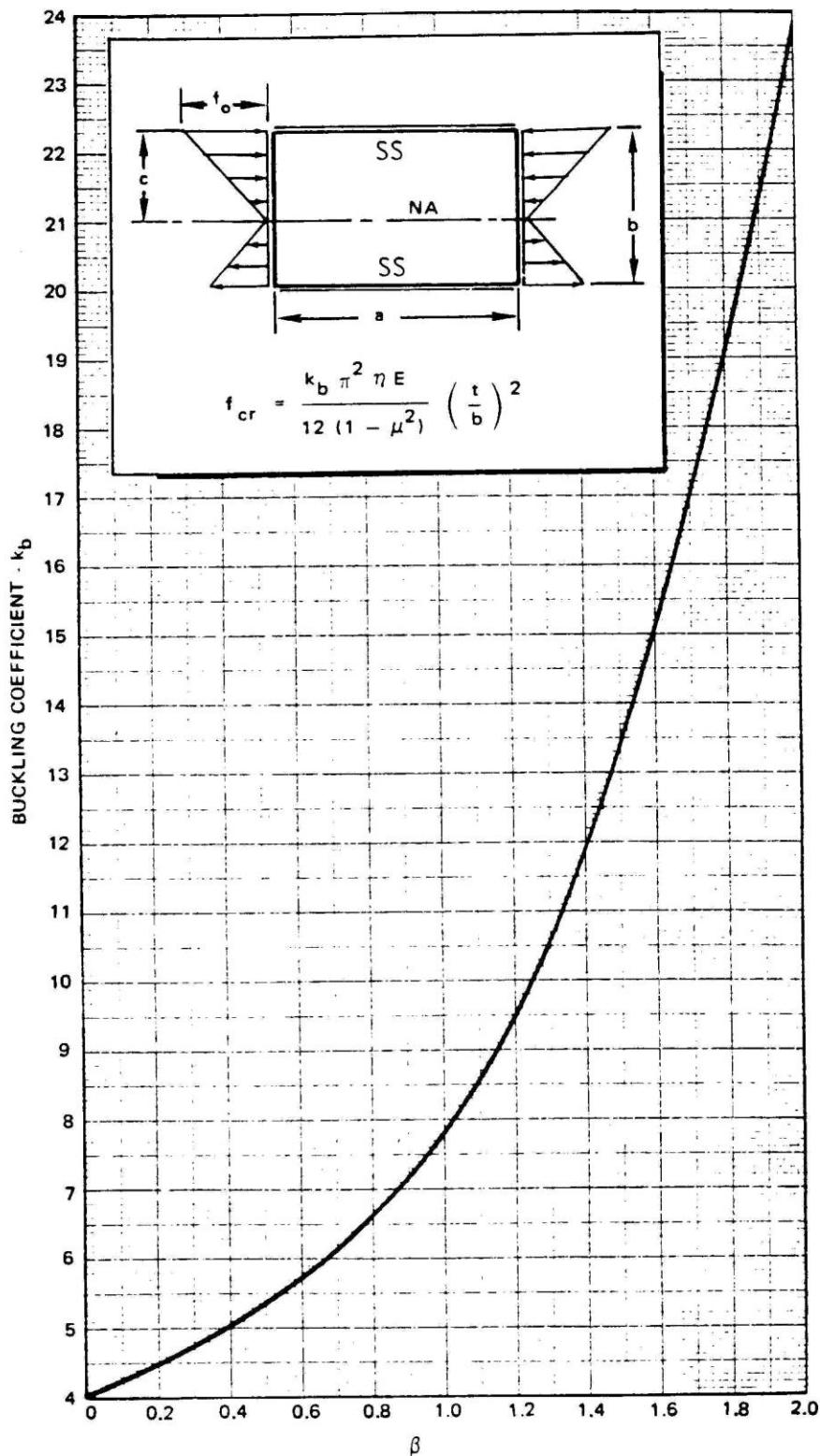


Fig. 5-20 Coeficientes de Flambagem para Placas Longas ($a/b > 4$) Simplesmente Apoiadas nos Quatro Bordos

A Fig. 3-21 mostra os coeficientes de flambagem de placas planas em função do parâmetro β quando o bordo submetido à tração é simplesmente apoiado e o bordo comprimido engastado.

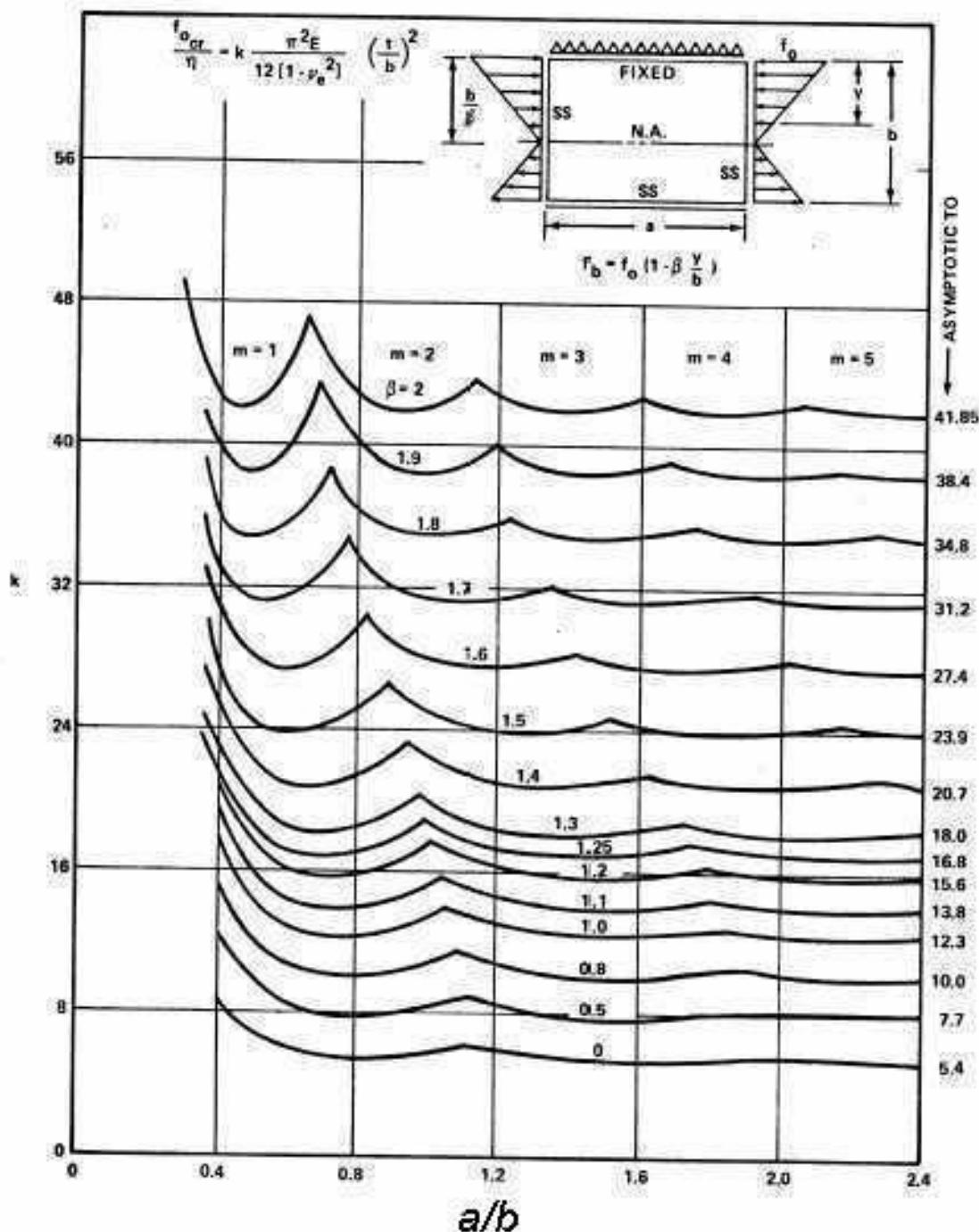


Fig. 5-21 Coeficiente de Flambagem para Placas Planas Curtas em Compressão: Lado da Tração Simplesmente Apoiado e Lado da Compressão Engastado

A Fig 3-22 mostra os coeficientes de flambagem para placas planas longas ($a/b > 2.4$) em flexão, com os bordos carregados e o bordo submetido à tração, simplesmente apoiados, e o bordo submetido à compressão, engastado.

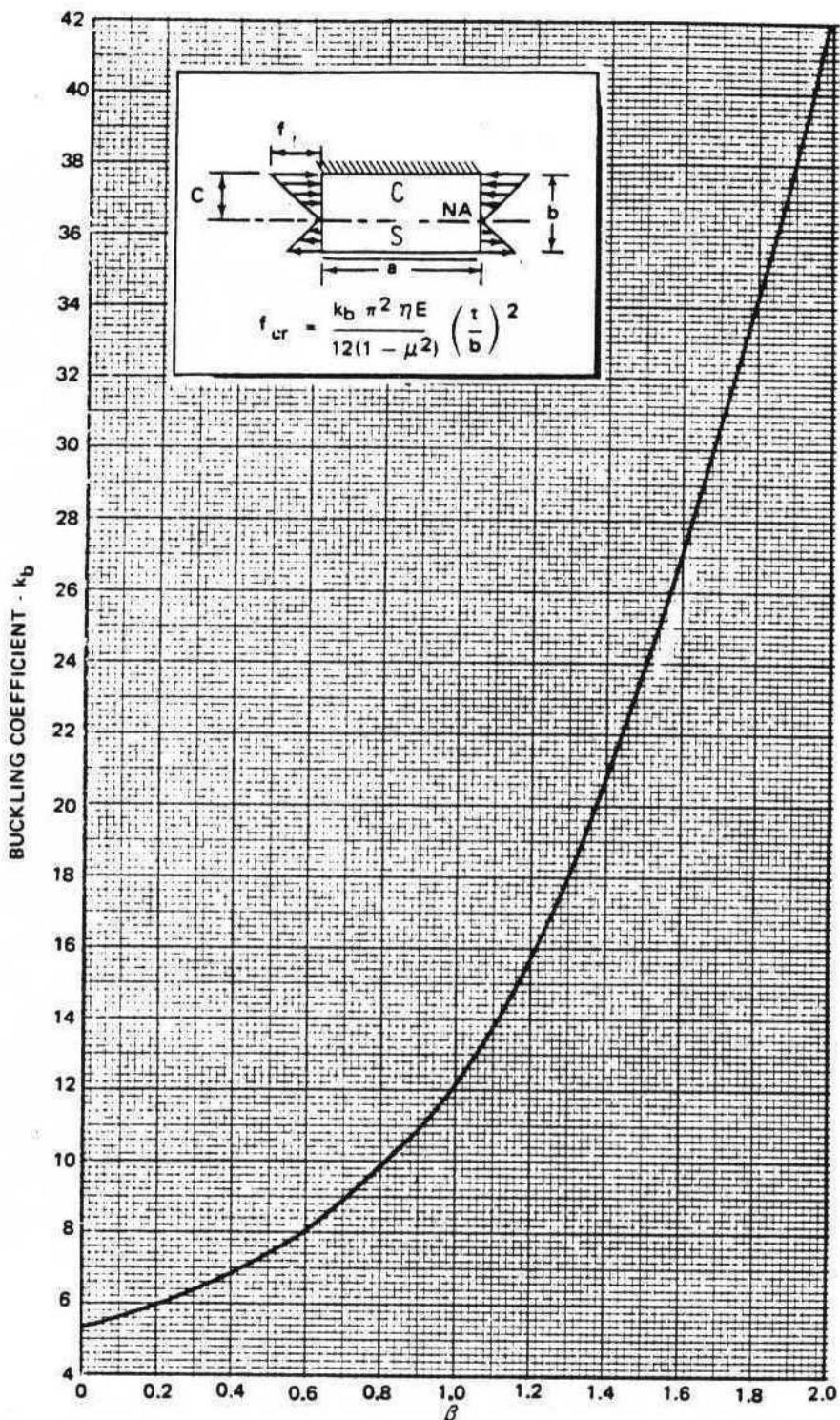


Fig 5-22 Coeficientes de Flambagem para Placas Planas Longas
($a/b > 2.4$) com Bordos Tracionados Simplesmente Apoiados e Bordos Comprimidos Engastados

A Fig. 3-23 mostra os coeficientes de flambagem de placas planas em flexão quando o lado da tração está simplesmente apoiado e o lado da compressão livre.

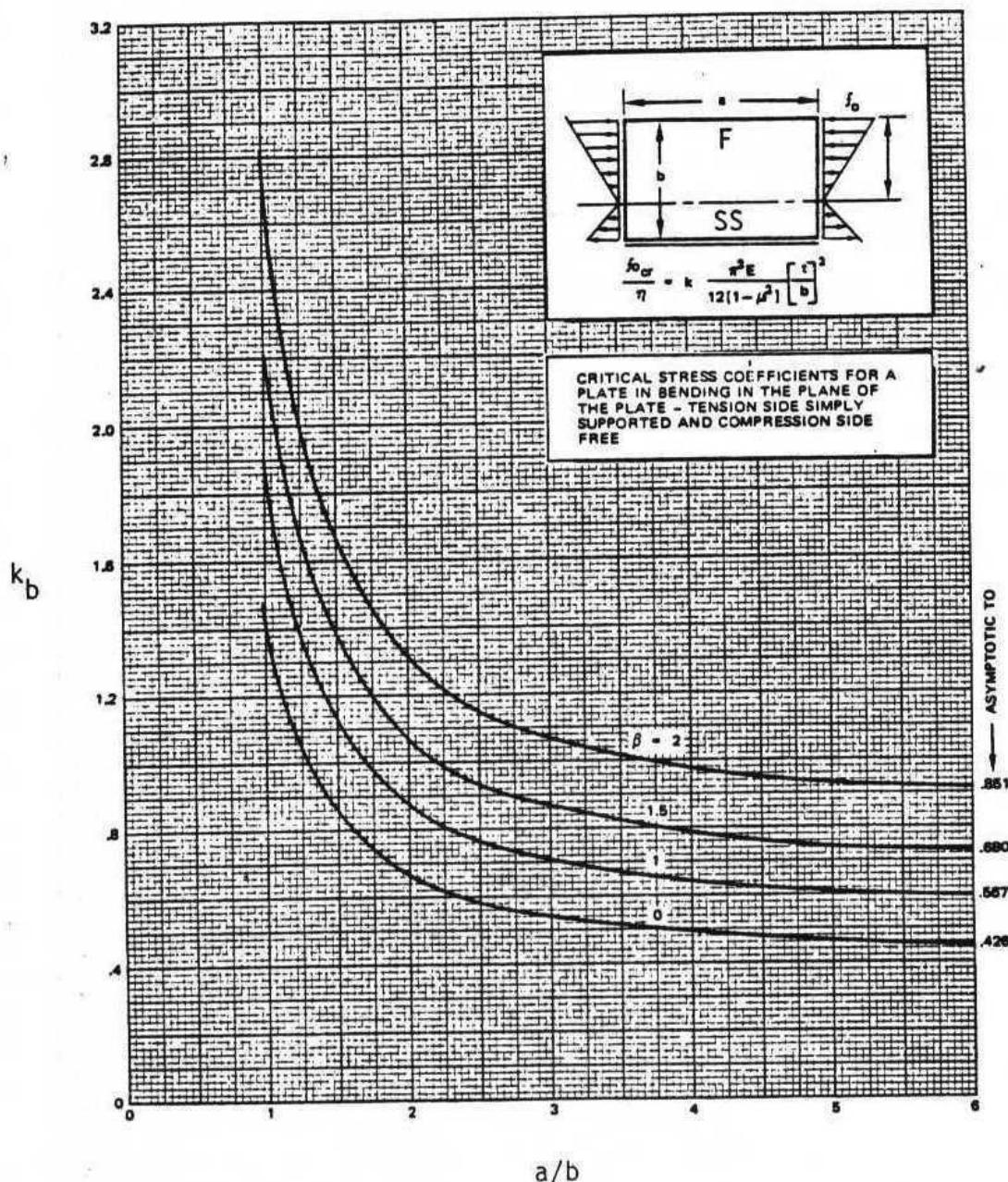


Fig. 5-23 Coeficientes de Flambagem de Placa Plana em Flexão:
Bordo Tracionado Simplesmente Apoiado e Bordo
Comprimido Livre

Finalmente, A Fig. 3-24 mostra os coeficientes de flambagem para Placas Planas em Flexão, quando o lado da tração é engastado e o lado da compressão é livre.

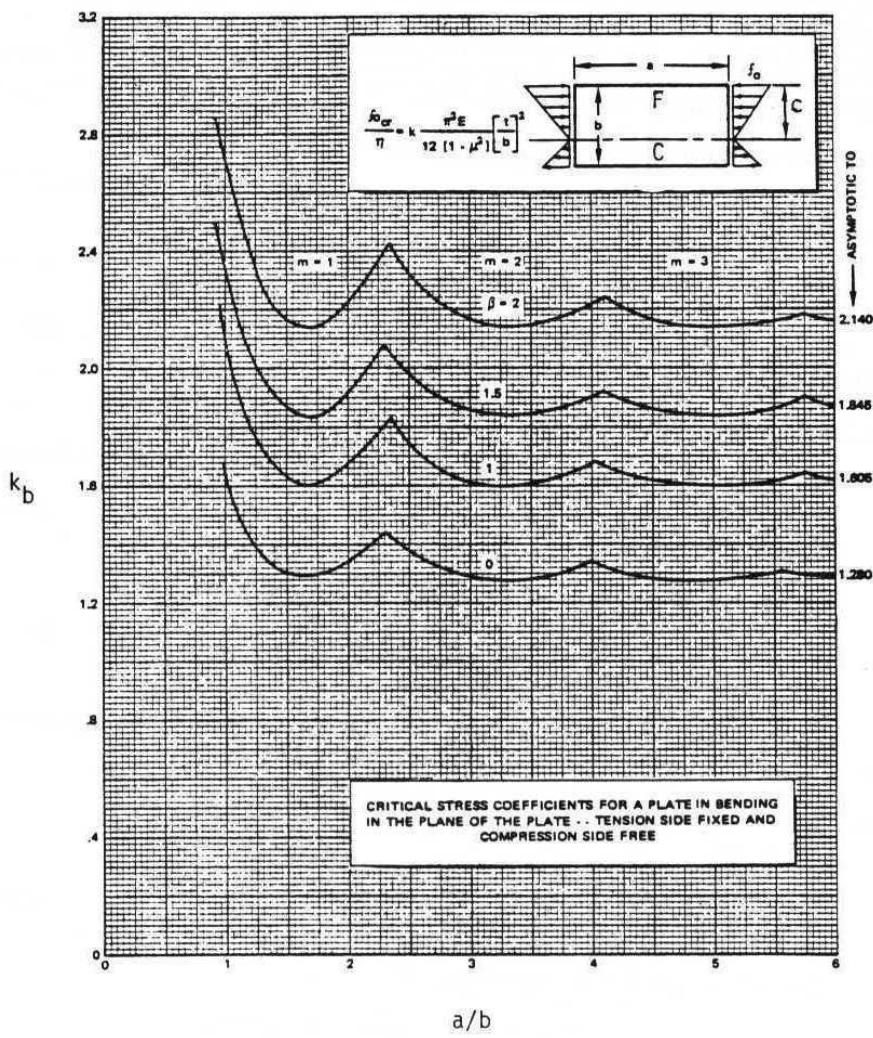


Fig. 5-24 Coeficientes de Flambagem de Placa Plana em Flexão:
Bordo Tracionado Engastado e Bordo Comprimido Livre

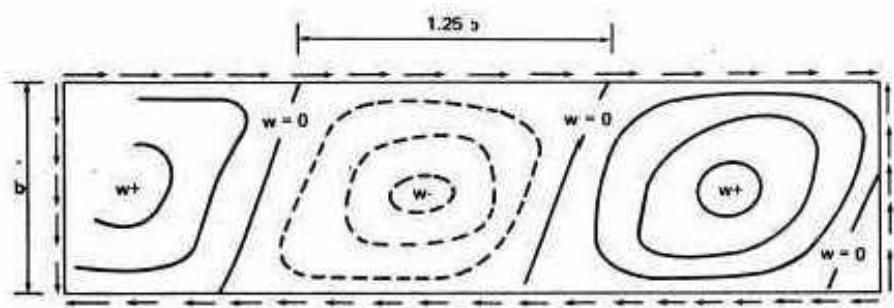
3.8 FLAMBAGEM DE PLACAS PLANAS SOB CARGAS DE CISALHAMENTO

A tensão crítica elástica de cisalhamento para placas planas sob várias condições de contorno é dada pela Eq. (3.88)

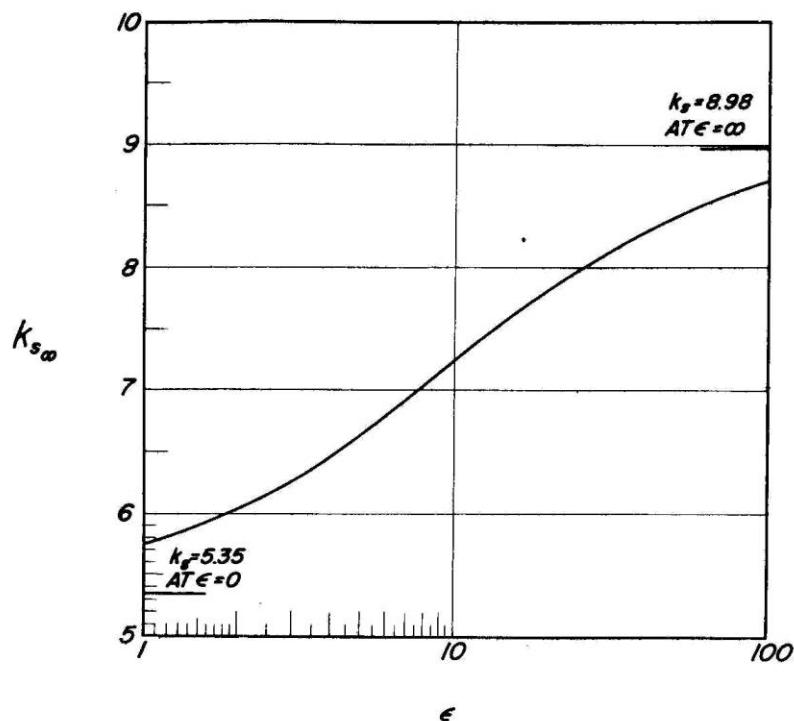
$$\tau_{cr} = \frac{\pi^2 k_s E}{12(1 - \nu_e^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (3.88)$$

onde b é sempre a dimensão menor da placa uma vez que todas as bordas carregam o cisalhamento.

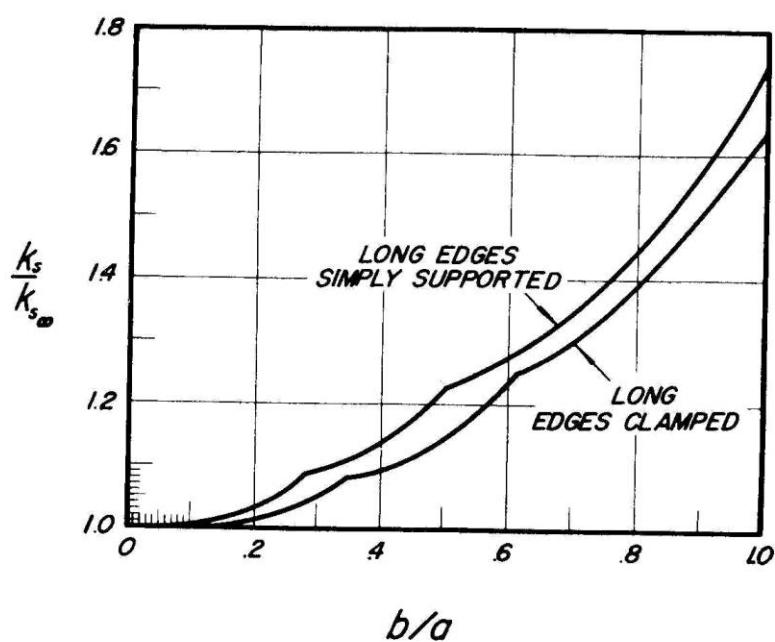
Uma placa longa retangular sujeita a cisalhamento puro produz tensões de compressão internas em planos que estão a 45° com as bordas. São estas tensões de compressão que produzem a flambagem do painel longo num padrão ilustrado no esboço abaixo. O comprimento de semi-onda na flambagem é $1,25b$.



A Fig. 3-25 permite estimar o coeficiente de flambagem em cisalhamento para placas com restrições elásticas. O parâmetro ϵ tem a mesma definição dada para μ em (3.47).



(a) k_{s_∞} as a function of ϵ .



(b) k_s/k_{s_∞} as a function of b/a .

Fig. 5-25 Curvas para Estimar o Coeficiente de Flambagem em Cisalhamento, para Placas Restringidas Elasticamente

A Fig. 3-26 mostra os coeficientes de flambagem de uma placa plana em cisalhamento com as condições de contorno de apoio simples ou engaste nos quatro bordos.

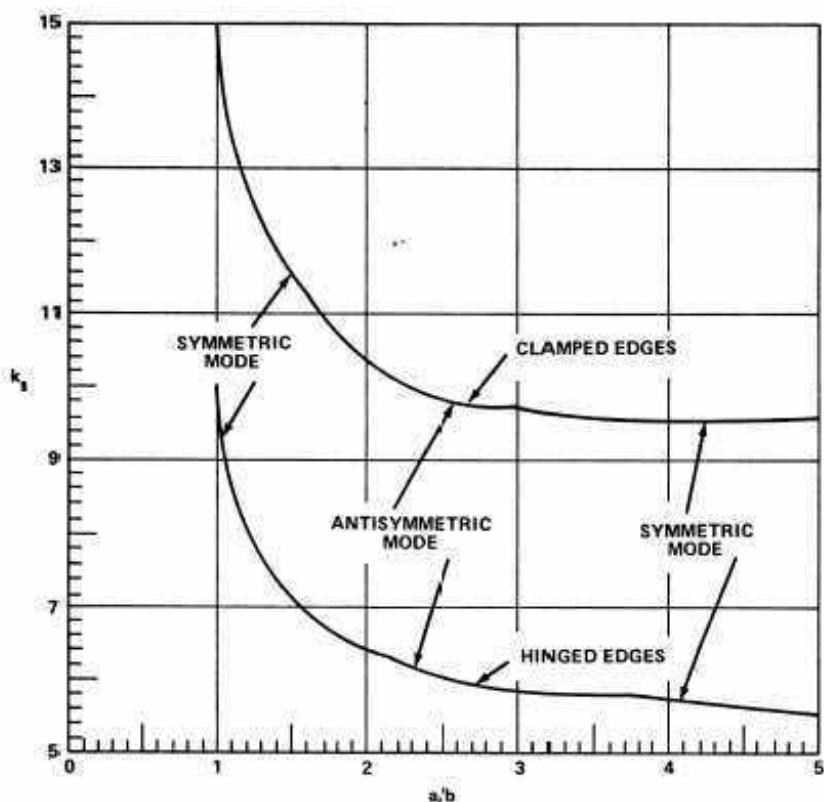


Fig. 3-26 Coeficiente de Flambagem para Placas Carregadas em Cisalhamento

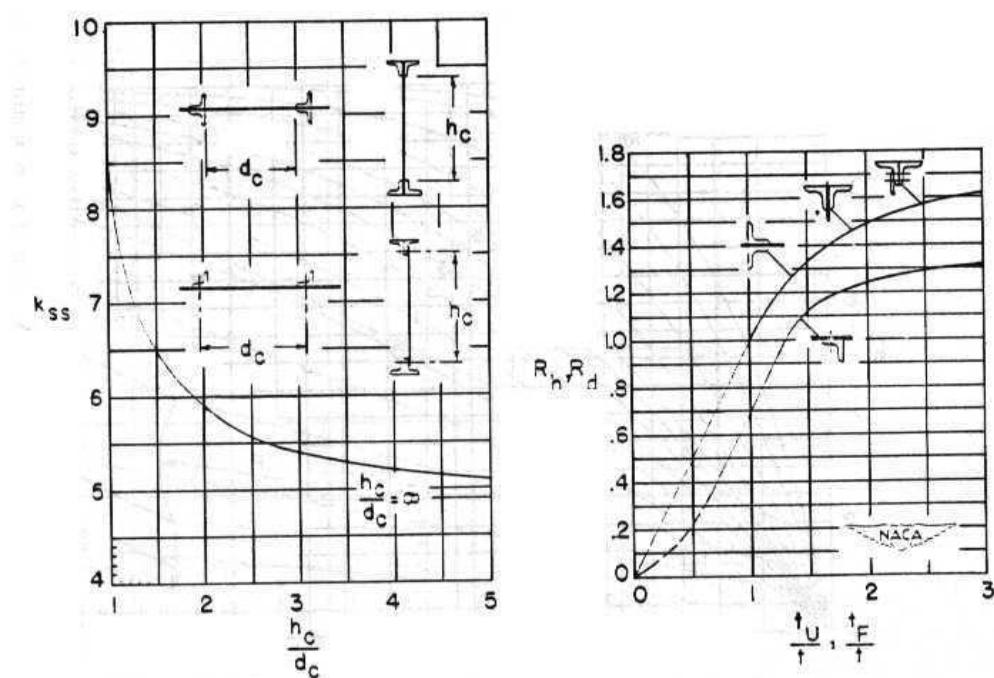


Fig. 5-27 Gráficos para o Cálculo de Coeficientes de Flambagem em Almas

Kuhn (Ref. 3.8) obteve dados para possibilitar estimar o coeficiente de flambagem de uma placa submetida ao cisalhamento entre os casos limites de apoio simples e engaste. Ele acha o coeficiente de flambagem a partir de uma equação semi-empírica

$$k_s = k_{ss} \left[R_h + \frac{1}{2} (R_d - R_h) \left(\frac{d_c}{h_c} \right)^3 \right] \quad (3.89)$$

onde k_{ss} é o valor teórico do coeficiente de flambagem em cisalhamento em placas simplesmente apoiadas (como dado na Fig. 3-26) e os coeficientes empíricos R_h e R_d dependem da restrição elástica ao longo das bordas de comprimento h_c e d_c , respectivamente. Estes coeficientes empíricos podem ser encontrados na Fig. 3-27. Como pode ser notado, os coeficientes dependem das razões t_u/t e t_f/t , onde t_u e t_f são as espessuras dos reforçadores ao longo dimensões h_c e d_c da placa. Note que k_{ss} é definido, na Fig. 3-27, de forma distinta do que k_s fora definido na Fig. 3-26. De fato, $k_{ss} = k_s \pi^2/12(1-\nu_e^2)$.

3.13 PLACA EM COMPRESSÃO BIAXIAL

A equação de equilíbrio de uma placa plana sob compressão bi-axial é dada por

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.90)$$

A solução exata do problema da placa simplesmente apoiada é do tipo

$$w(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.91)$$

Substituição na Eq. (3.90) leva a

$$\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 = \frac{1}{D} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 N_x + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 N_y \right] \quad (3.92)$$

Dividindo ambos os lados por $(m\pi^2/ab)^2$ resulta

$$\left[\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right]^2 = \frac{1}{D\pi^2} \left[b^2 N_x + \frac{n^2 a^2}{m^2} N_y \right] = \frac{N_x b^2}{D\pi^2} + \frac{N_y b^2}{D\pi^2} \left(\frac{na}{mb} \right)^2 \quad (3.93)$$

que pode ser posto na forma

$$\frac{N_x}{\left[\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right]^2 \frac{D\pi^2}{b^2}} + \frac{N_y}{\left[\frac{m^2 b^2}{na^2} + n \right]^2 \frac{D\pi^2}{b^2}} = 1 \quad (3.94)$$

Se os coeficientes de flambagem forem definidos como

$$k_x = \frac{N_x b^2}{D\pi^2}, \quad k_y = \frac{N_y b^2}{D\pi^2} \quad (3.95)$$

a Eq. (3.94) pode ser colocada na forma

$$\frac{k_x}{\left[\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right]^2} + \frac{k_y}{\left[\frac{m^2 b^2}{na^2} + n \right]^2} = 1 \quad (3.96)$$

Para o caso particular da placa quadrada, tem-se

$$\frac{k_x}{\left[m + \frac{n^2}{m} \right]^2} + \frac{k_y}{\left[\frac{m^2}{n} + n \right]^2} = 1 \quad (3.97)$$

Variando m e n é possível construir a região de estabilidade no domínio de k_x e k_y :

$$\begin{aligned} m=1, n=1 &\Rightarrow k_x + k_y = 4 \\ m=1, n=2 &\Rightarrow k_x + 4k_y = 25 \\ m=2, n=1 &\Rightarrow 4k_x + k_y = 25 \\ m=2, n=2 &\Rightarrow k_x + k_y = 16 \end{aligned} \quad (3.98)$$

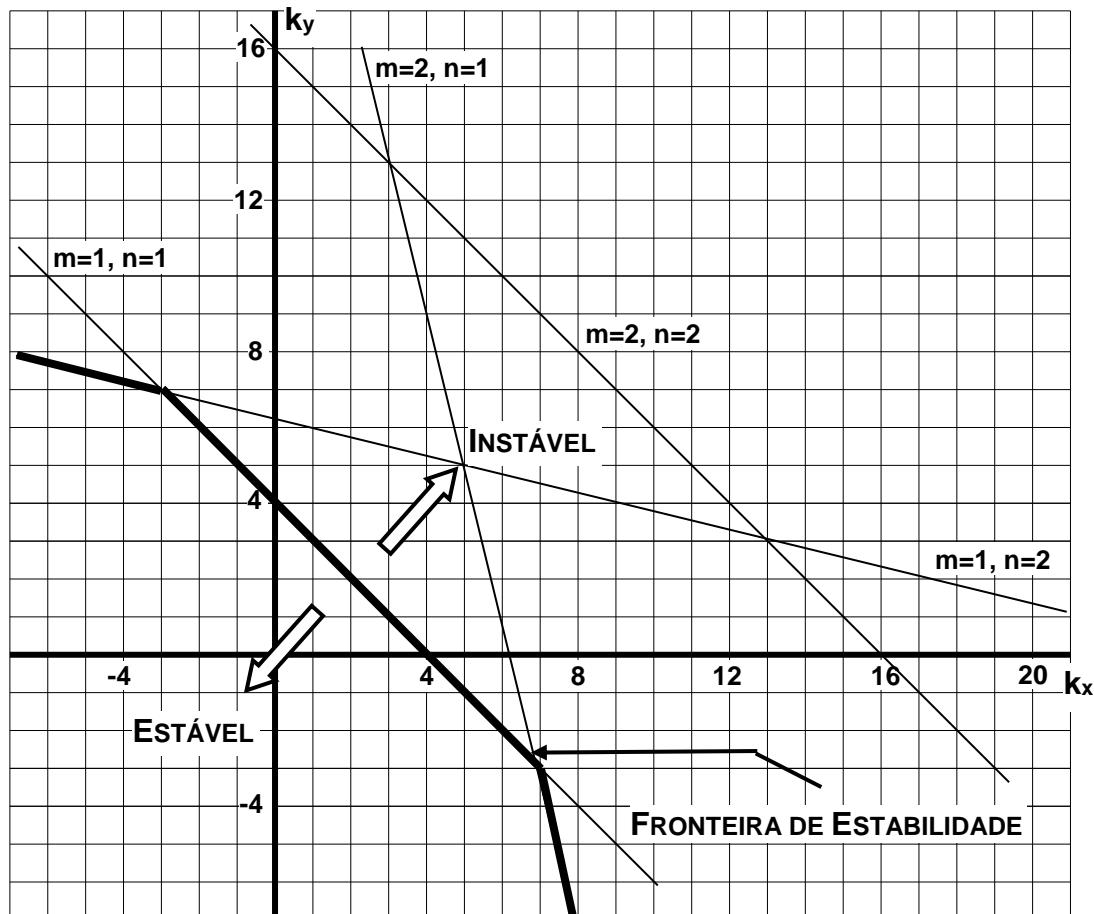


Fig. 3-28 Fronteira de Estabilidade para Compressão Bi-axial em Placa Quadrada

Note que o modo de flambagem com uma semi-onda em cada direção prevalece para a maioria dos casos encontrados na prática. Somente sob cargas consideráveis de tração numa das direções é que o coeficiente de flambagem crítico é determinado por um modo de flambagem distinto. Utilizando as Eqs. (3.98) é possível determinar-se o ponto de transição, por exemplo, de quando o modo com $m = 2$ e $n = 1$ passa a ser crítico:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 25 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ -3 \end{Bmatrix} \quad (3.99)$$

As condições para a transição do modo $m = 2$ e $n = 1$ para o modo $m = 3$ e $n = 1$ são

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ 100 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ -35 \end{Bmatrix} \quad (3.100)$$

Considere, agora, o caso de uma placa quadrada, simplesmente apoiada, carregada uniformemente na direção x e cujas bordas $y = \text{cte}$. (no sentido da aplicação da carga) são impedidas de se deslocar transversalmente (ao contrário da hipótese feita nas seções anteriores). Devido ao efeito de Poisson, o impedimento de deslocamento transversal induzirá tensões de compressão no sentido y :

$$N_y = \nu N_x \quad (3.101)$$

Os esforços de compressão N_y terão o efeito de diminuir o coeficiente de flambagem da situação em que as bordas são livres para se deslocarem transversalmente. Para $\nu = 0,3$, tem-se

$$N_y = 0,3N_x \Rightarrow k_y = 0,3k_x ; k_x + k_y = 1,3k_x = 4 \Rightarrow k_x = 3,077 \quad (3.102)$$

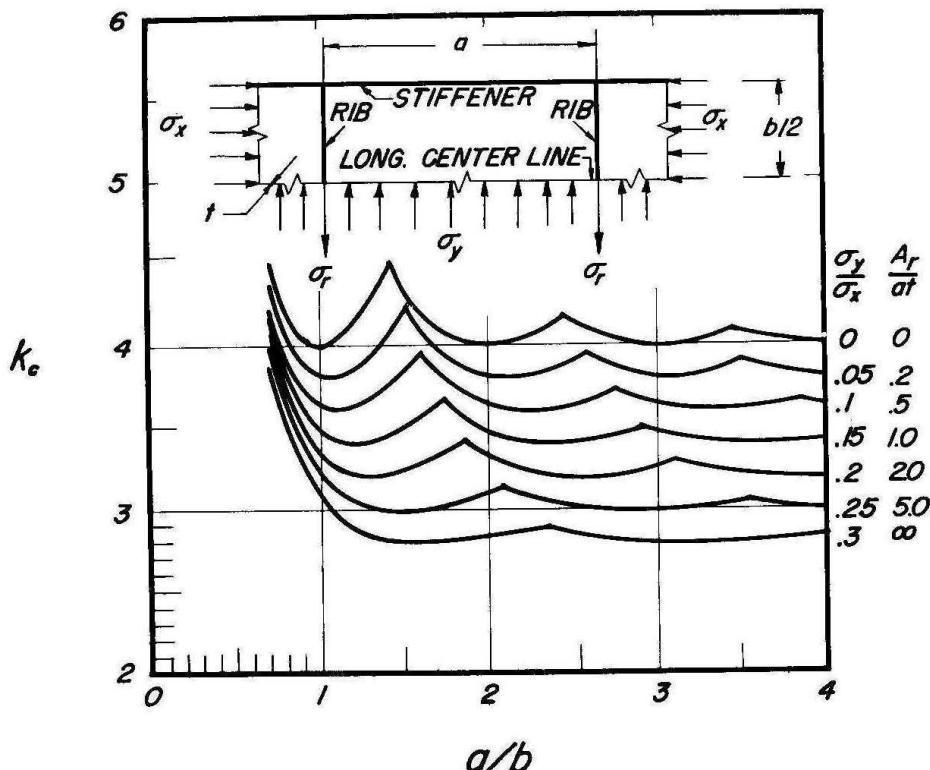


Fig. 5-29 Coeficientes de Flambagem de Placas Planas Restringidas na Expansão Lateral. Coeficiente de Poisson igual a 0,3

Noutras palavras, o coeficiente de flambagem que assumia o valor 4 para placas simplesmente apoiadas com as bordas não carregadas livres para se deslocarem transversalmente passa a aproximadamente 3 se estas bordas são rigidamente fixadas. Entre estes dois casos limites, há uma gama de situações que dependem da rigidez do elemento transversal sobre o qual a placa é fixada (elemento da nervura na asa ou da caverna na fuselagem). Seja A_r a área da seção transversal do elemento reforçante e assuma que o material da placa e reforçador transversal seja o mesmo. Nestas condições, a relação entre o carregamento induzido pelo carregamento longitudinal aplicado será

$$\frac{N_y}{N_x} = \frac{\nu(A_r/at)}{1 + (A_r/at)} \quad (3.103)$$

onde a e t são, respectivamente, o comprimento e espessura da placa. A Fig. 3-29 mostra os coeficientes de flambagem para uma placa plana carregada uniaxialmente em compressão, com (A_r/at) como parâmetro. As curvas são válidas para $\nu = 0,3$.

3.14 FLAMBAGEM DE PLACAS SOB CARREGAMENTOS COMBINADOS. CURVAS DE INTERAÇÃO

Na seção 3.10 foi estudado o problema da flambagem de placas planas sujeitas a carregamentos de flexão no plano da placa. Foram apresentadas curvas para permitir a determinação do coeficiente de flambagem crítico de diversos casos de carregamento e condições de contorno. O caso geral da flexão envolve uma distribuição linear de N_x em y , que pode ser obtida da soma de uma flexão pura e de uma compressão uniforme. O problema, portanto, poderia ser visualizado como o de uma combinação de carregamentos básicos: flexão pura + compressão uniforme.

Na seção 3.13 foi estudado o problema de flambagem de placas planas simplesmente apoiadas submetidas à compressão bi-axial, ou seja, uma combinação de compressão ao longo do eixo x + uma compressão ao longo do eixo y . Ficou claro, a partir da análise realizada na seção 3-13, que o problema de carregamentos combinados é relativamente mais complexo do que aquele que envolve tão somente carregamentos básicos. Como caso particular foi estudado o caso da placa quadrada. Uma vez que o padrão do modo de flambagem de placas longas também envolve semi-ondas quadradas, a solução encontrada também é válida para placas longas. Para cada razão a/b , entretanto, um procedimento como aquele adotado teria que ser repetido, ou seja, uma construção semelhante àquela da Fig. 3-28 teria que ser repetida.

Considere a Eq. (3.94)

$$\frac{N_x}{\left[\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right]^2 \frac{D\pi^2}{b^2}} + \frac{N_y}{\left[\frac{m^2 b^2}{na^2} + n \right]^2 \frac{D\pi^2}{b^2}} = 1 \quad (3.94)$$

aplicada a uma placa quadrada, na região em que a fronteira de estabilidade é produzida pelo modo com $m = 1$ e $n = 1$. Nestas condições, a Eq. (3.94) pode ser escrita na forma

$$\frac{N_x}{4 \frac{D\pi^2}{b^2}} + \frac{N_y}{4 \frac{D\pi^2}{b^2}} = 1 \quad (3.104)$$

Lembrando que

$$(N_x)_{cr} = 4 \frac{D\pi^2}{b^2}; \quad (N_y)_{cr} = 4 \frac{D\pi^2}{b^2}$$

são as cargas críticas da placa quando submetida, respectivamente, aos carregamentos N_x e N_y atuando sozinhos, a Eq. (3.104) pode ser colocada na forma

$$R_x + R_y = 1 \quad (3.105)$$

onde $R_x = N_x / (N_x)_{cr}$, $R_y = N_y / (N_y)_{cr}$ onde $(N_x)_{cr}$ e $(N_y)_{cr}$ são os carregamentos uniaxiais críticos quando cada um deles está agindo separadamente. Este mesmo método pode ser utilizado para determinar a combinação crítica de cargas para outros valores de a/b . Como observado anteriormente, quando a/b é grande, a placa flamba em painéis quadrados e a Eq. (3.105) vale novamente.

A Eq. (3.105) é conhecida como uma *equação de interação* porque descreve como os dois carregamentos estão interagindo. A equação pode ser plotada como uma *curva de interação*, como

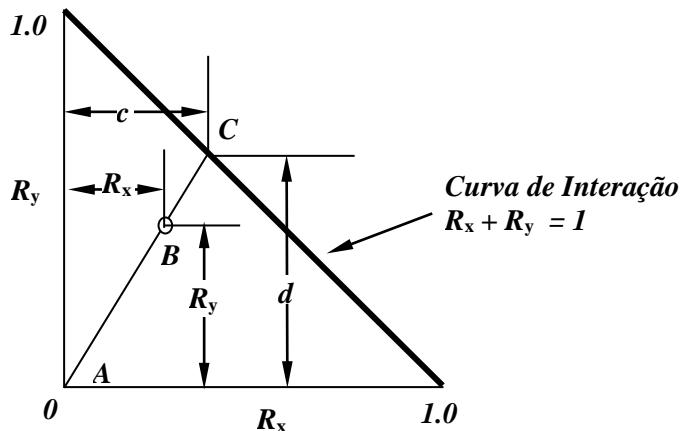


Fig. 3-30 Curva de Interação para Placas Quadradas ou Longas em Compressão Bi-axial

mostrado na Fig 3-30. A flambagem ocorre quando o ponto (N_x, N_y) está sobre ou acima da curva de interação. Para determinar a margem de segurança em relação à flambagem para pontos que caem abaixo ou acima da curva, assume-se que as cargas crescem proporcionalmente, ou seja, que N_y/N_x permanece constante durante o carregamento. Como resultado, a razão R_y/R_x é constante, e o ponto de projeto se desloca ao longo da linha ABC da Fig. 3-30 à medida que as cargas são aumentadas. A margem de segurança em B é, portanto,

$$MS = \frac{c}{R_x} - 1 \quad (3.106)$$

Da semelhança de triângulos, $R_x/c = R_y/d$, e da Eq. (3.105), $c + d = 1$ para os pontos sobre a curva de interação. Como resultado, $c = R_x / (R_x + R_y)$, e a Eq. (3.106) torna-se

$$MS = \frac{1}{R_x + R_y} - 1 \quad (3.107)$$

Equações de interação podem ser determinadas para outras combinações de cargas. Em geral, estas equações podem tomar a forma

$$R_a^\alpha + R_b^\beta + R_c^\gamma + \dots = 1 \quad (3.108)$$

onde a razão de carga ou tensão R_i é definida como

$$R_i = \frac{i - \text{ésima tensão ou carga agindo com o carregamento combinado}}{i - \text{ésima carga ou tensão crítica quando atuando sozinha}}$$

Os expoentes podem ser determinados teoricamente ou experimentalmente. No caso geral, os expoentes dependem dos carregamentos, condições de restrição nas bordas, e a/b .

Infelizmente, são relativamente poucos os casos em que uma equação de interação simples como a Eq. (3.108) se aplica e, em consequência, é possível derivar uma expressão para a margem de segurança. Na maioria dos casos a margem de segurança tem de ser estimada diretamente dos gráficos que fornecem as curvas de interação.

a) COMBINAÇÃO DE FLEXÃO E COMPRESSÃO LONGITUDINAL

A equação de interação que tem sido extensivamente utilizada no caso da combinação de flexão pura e compressão longitudinal é

$$R_b^{1.75} + R_c = 1 \quad (3.109)$$

Esta equação tem sido extensivamente utilizada na indústria aeroespacial e é mostrada, juntamente com as curvas para várias margens de segurança, na Fig. 3.31.

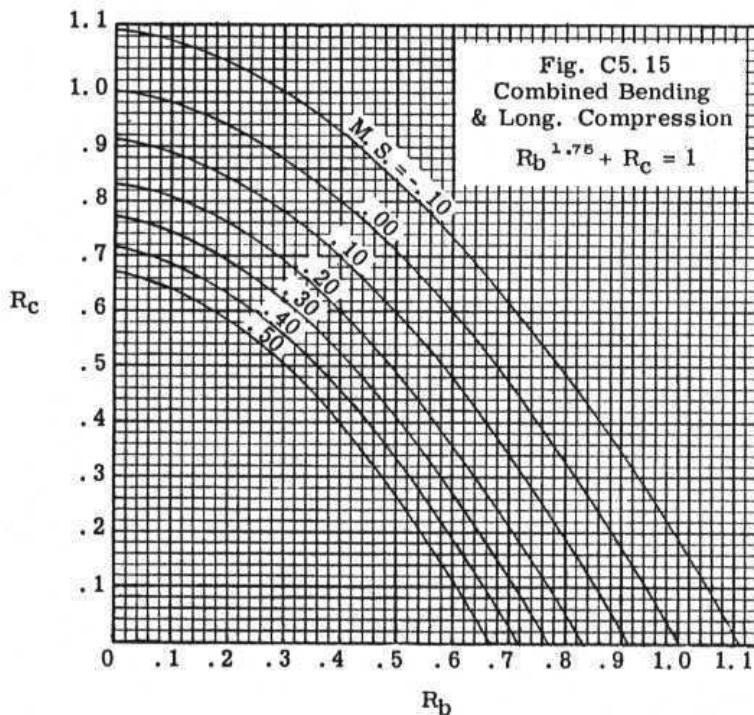


Fig. 5-31 Placa Plana sob Carregamento Combinado:
Flexão Pura + Compressão Longitudinal

b) COMBINAÇÃO DE FLEXÃO E CISALHAMENTO

A equação de interação para o caso da combinação de flexão pura e cisalhamento é

$$R_b^2 + R_s^2 = 1 \quad (3.110)$$

A expressão para a margem de segurança é

$$MS = \frac{1}{\sqrt{R_b^2 + R_s^2}} - 1 \quad (3.111)$$

A Fig. 3-32 mostra a equação (3.110) e curvas para diversas margens de segurança.

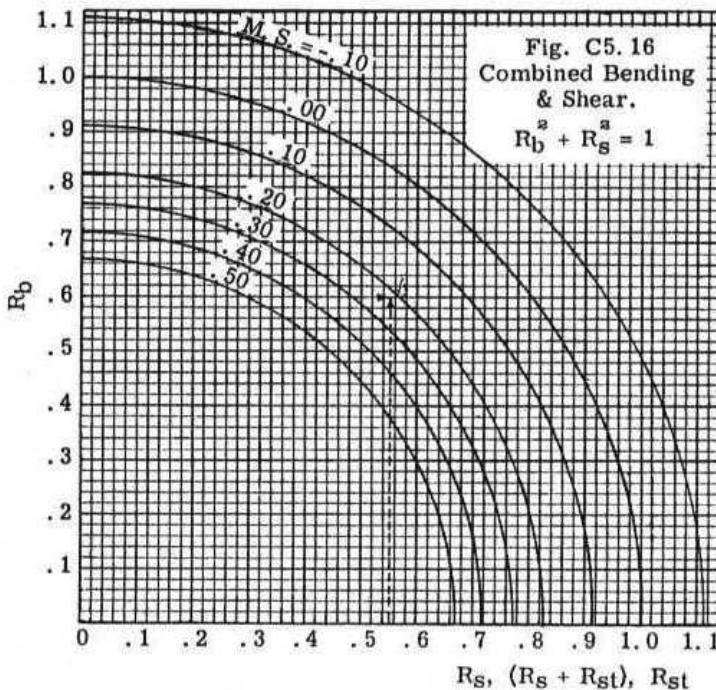


Fig. 5-32 Placa Plana sob Carregamento Combinado
Flexão Pura + Cisalhamento

c) COMBINAÇÃO DE CISALHAMENTO E TENSÃO LONGITUDINAL

A equação de interação para o caso da combinação de tensão longitudinal e cisalhamento é

$$R_L + R_s^2 = 1 \quad (3.112)$$

A expressão para a margem de segurança é

$$MS = \frac{2}{R_L + \sqrt{R_L^2 + 4R_s^2}} - 1 \quad (3.113)$$

A Fig. 3-33 mostra a equação (3.112) e curvas para diversas margens de segurança. Esta equação pode ser utilizada para placas simplesmente apoiadas com $a/b > 1$. Também pode ser utilizada para placas longas com bordas restrinvidas elasticamente. O caso de placas curtas simplesmente apoiadas, com a dimensão paralela ao carregamento axial menor do que a largura, é tratado na Fig. 3-34.

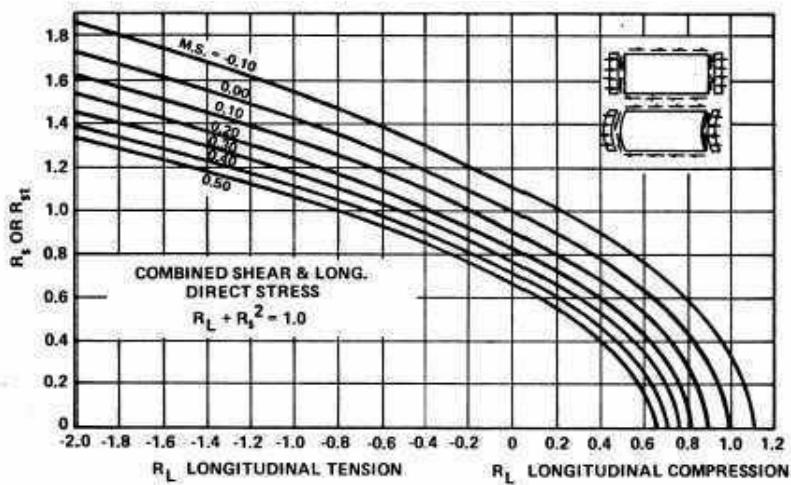


Fig. 5-33 Placas Planas sob Carregamento Combinado:
Tensão Longitudinal + Cisalhamento ($a/b > 1$)

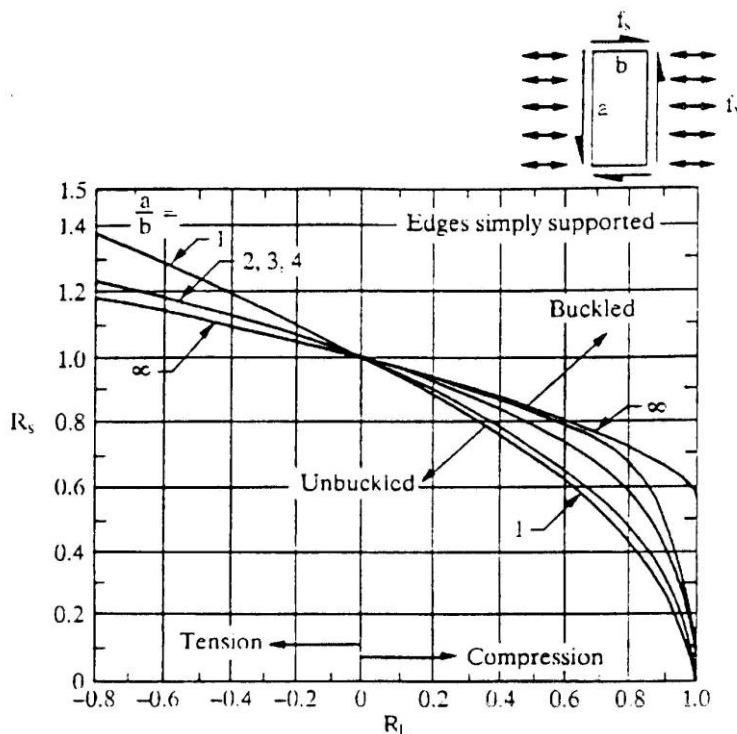


Fig. 5-34 Placa Plana sob Carregamento Combinado:
Tensão Longitudinal + Cisalhamento
Comprimento Menor do que a Largura

d) COMBINAÇÃO DE FLEXÃO, COMPRESSÃO LONGITUDINAL E CISALHAMENTO

As condições para flambagem sob compressão, flexão e cisalhamento combinados estão representadas pelas curvas de interação da Fig. 3-33. Esta figura diz se a placa flambará mas não dá a margem de segurança. Dadas as razões R_c , R_s e R_b : se o valor da curva R_c definida pelos valores dados de R_s e R_b é menor, numericamente, do que o valor dado de R_c então o painel flambará.

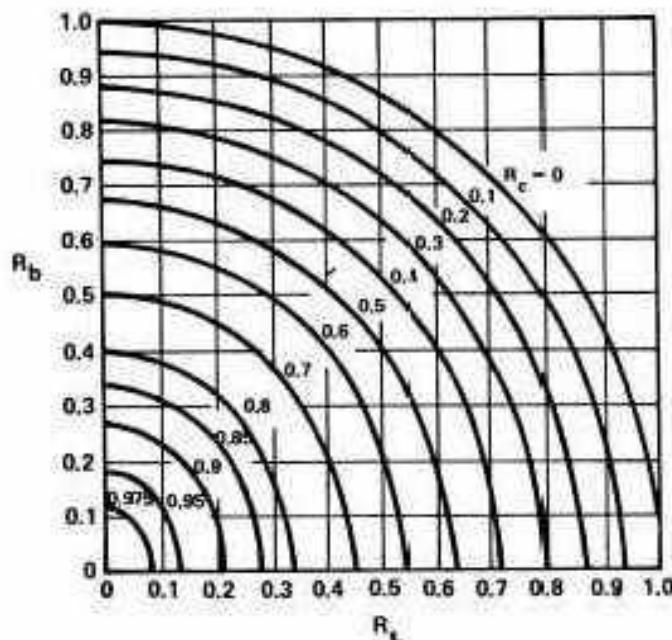


Fig. 5-35 Placa Plana sob Carregamento Combinado:
Flexão + Compressão Longitudinal + Cisalhamento

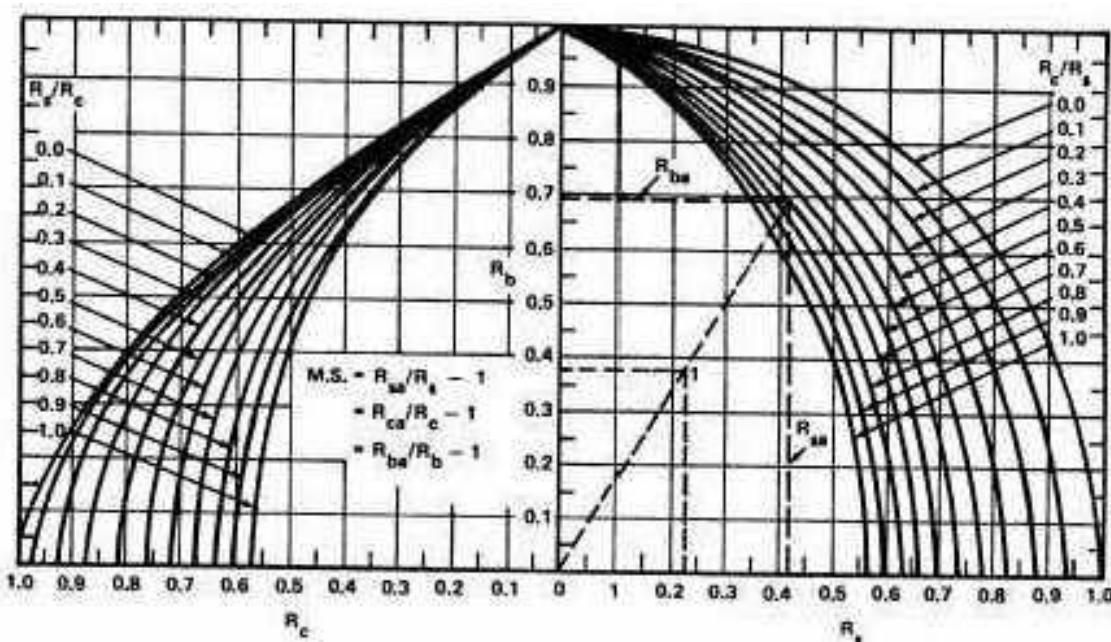


Fig. 5-36 Placa Plana sob Carregamento Combinado:
Flexão + Compressão Longitudinal + Cisalhamento

A margem de segurança pode ser determinada da Fig. 3-36. As linhas tracejadas indicam uma aplicação típica, onde $R_c = 0.161$, $R_s = 0.23$ e $R_b = 0.38$. O ponto 1 é inicialmente determinado para os valores específicos de R_s e R_b . A linha tracejada diagonal da origem através do ponto 1, interceptando a curva R_c / R_b relevante no ponto 2, fornece o cisalhamento admissível para os desejados cálculos de margem de segurança. (Nota: quando $R_c < R_s$ use a parte direita da figura; nos outros casos use a esquerda).

e) COMBINAÇÃO DE FLEXÃO E COMPRESSÃO BI-AXIAL

Uma investigação teórica por Noel (Ref 3.9) foi realizada sobre a flambagem de placas planas retangulares simplesmente apoiadas sob combinações críticas de flexão longitudinal e compressão bi-axial. As curvas de interação obtidas são apresentadas nas Figs. 3-37 vários alongamentos. Estas curvas podem ser utilizadas no caso limite de dois carregamentos tornando uma das razões de tensão igual a zero. Os resultados dos estudos que produziram estas curvas, e verificados pelas mesmas, indica que uma redução na tensão admissível de flexão, devido à adição de compressão lateral, é sensivelmente amplificada pela adição de pequenas cargas longitudinais.

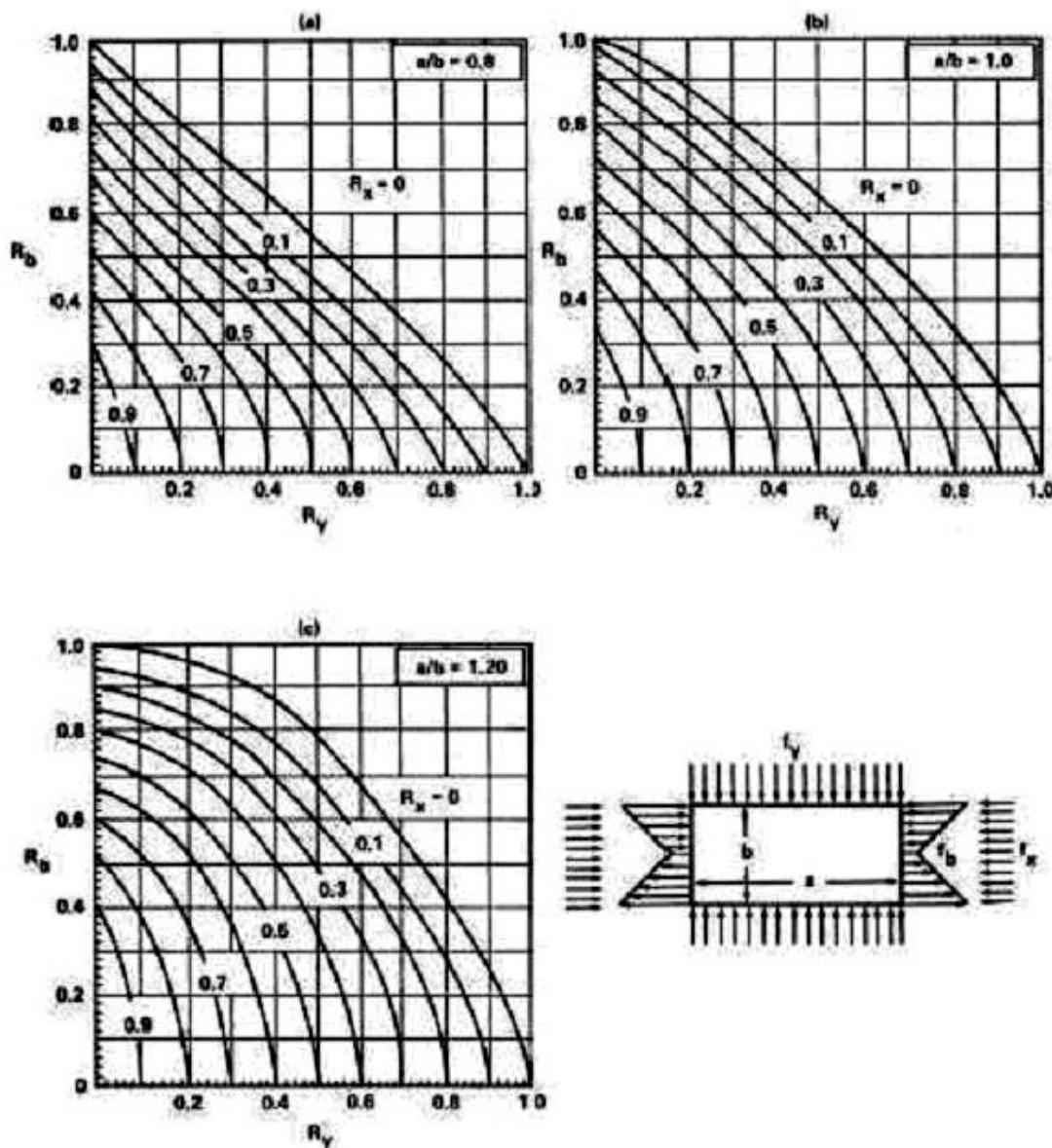


Fig. 3-37a Placa Plana sob Carregamento Combinado Flexão + Compressão Bi-Axial (continua)

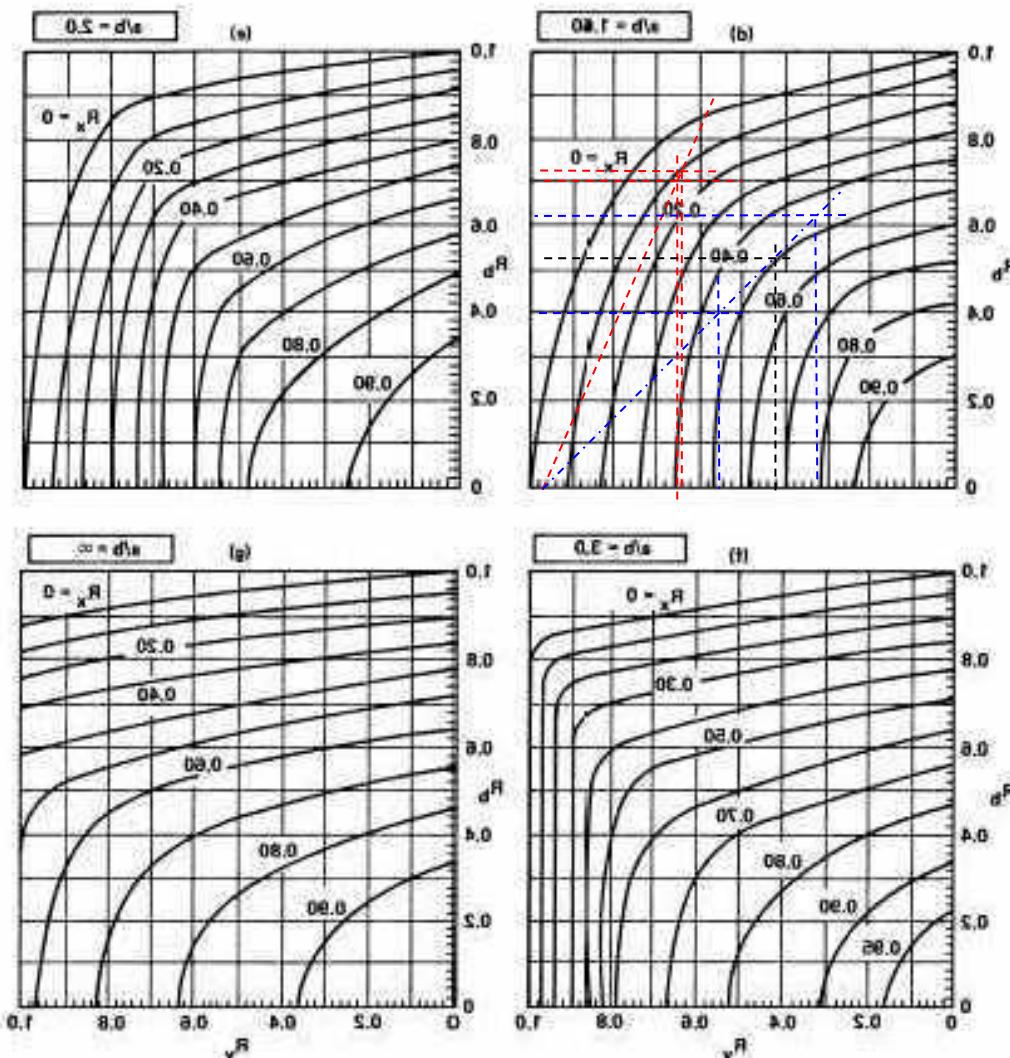


Fig. 3-37p Placa Plana sob Cargas Simultâneo Compressão, Flexão + Compressão Bi-Axial (conclusão)

f) COMBINAÇÃO DE FLEXÃO, CISALHAMENTO E COMPRESSÃO TRANSVERSAL

Superfícies de interação para flexão, cisalhamento e compressão transversal combinados foram estabelecidas por Johnson e Buchert (Ref. 3.10) para placas infinitamente longas. Os dois tipos de suportes considerados foram apoio simples ao longo de ambas as bordas descarregadas e apoio simples ao longo da borda em tração e engaste ao longo da borda em compressão. As curvas são apresentadas, respectivamente, nas Figs. 3-38 e 3-39.

No caso de compressão transversal e cisalhamento agindo sozinhas, Batdorf e Houbolt (Ref. 3.11) examinaram placas longas com bordas restrinvidas elasticamente. Eles acharam que uma fração apreciável da tensão crítica em cisalhamento puro pode ser aplicada à placa sem qualquer redução na compressão transversal necessária para produzir flambagem. Batdorf e Stein (Ref. 3.12) examinaram placas simplesmente apoiadas com alongamentos finitos e acharam que a curva para placas infinitamente longas requer correção para alongamentos finitos. Esta condição está mostrada na Fig. 3-40.

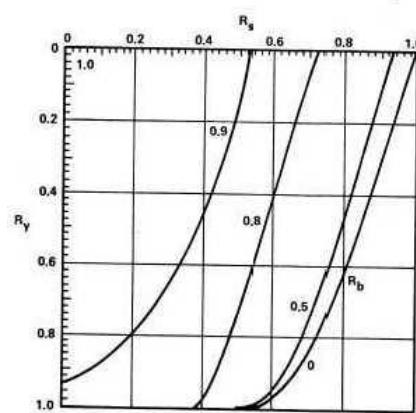
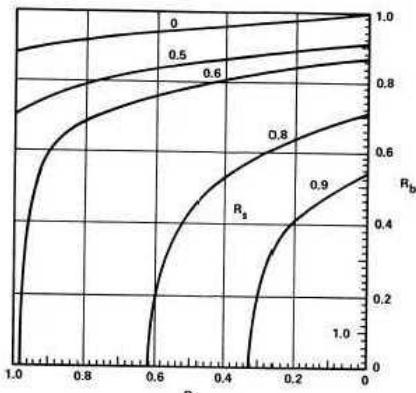
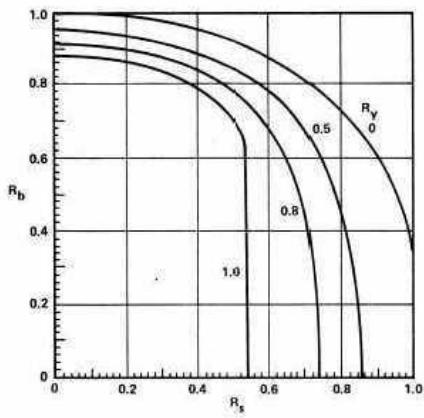
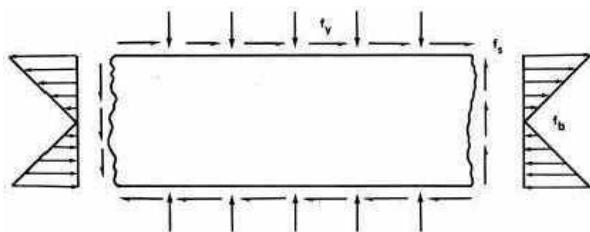


Fig. 5-38 Placa Plana sob Carregamento Combinado:
Flexão + Cisalhamento + Compressão Transversal

Bordos Descarregados Simplesmente Apoiados

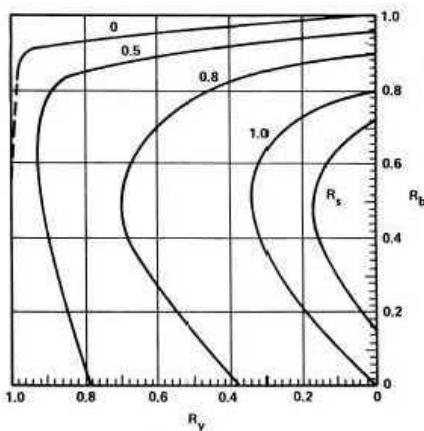
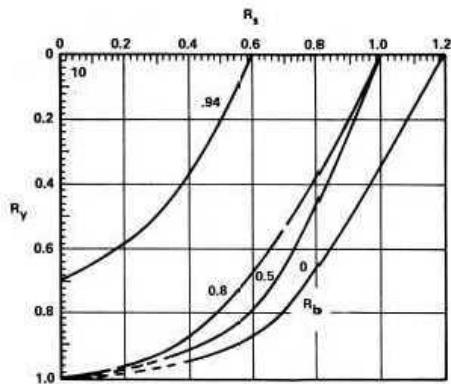
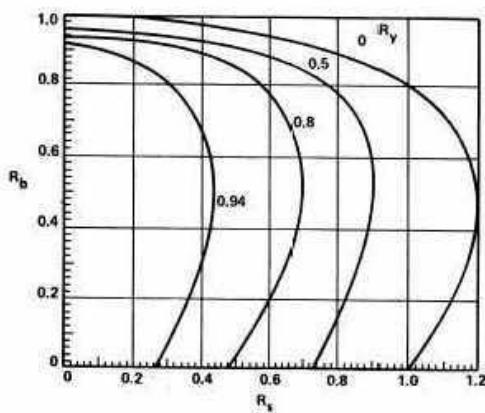
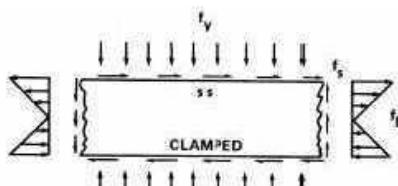


Fig. 5-39 Placa Plana sob Carregamento Combinado:
Flexão + Cisalhamento + Compressão
Transversal

Bordos: superior simplesmente apoiado; inferior engastado

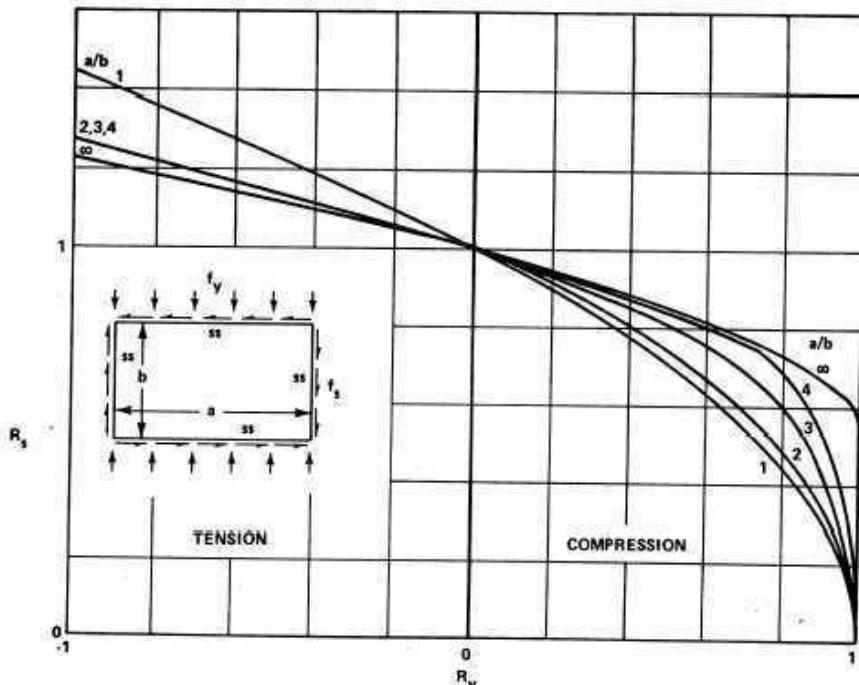


Fig. 5-40 TRANSITION IN THE FORM OF INTERACTION CURVE FOR SHEAR AND TRANSVERSE DIRECT STRESS FOR A SIMPLY SUPPORTED RECTANGULAR FLAT PLATE AS THE LENGTH-WIDTH RATIO CHANGES FROM 1 TO ∞ IN TERMS OF R_s AND R_y ($R_s = f_s/f_{s_{cr}}$, $R_y = f_y/f_{y_{cr}}$)

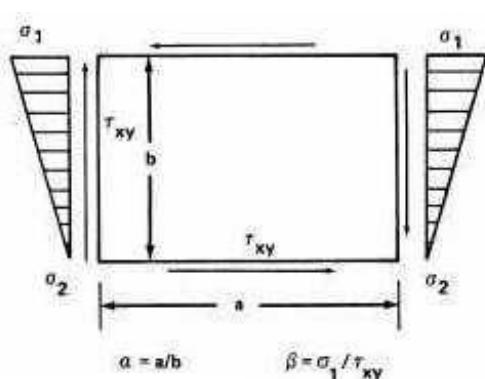
g) COMBINAÇÃO DE CISALHAMENTO E COMPRESSÃO BI-AXIAL

Superfícies de interação para cisalhamento e compressão bi-axial são fornecidas na Fig. 3-41.

h) COMBINAÇÃO DE CISALHAMENTO E COMPRESSÃO LONGITUDINAL NÃO-UNIFORME

Bleich (Ref. 3.14) apresenta uma solução para a flambagem de uma placa sujeita à cisalhamento e compressão longitudinal não-uniforme combinados, como mostrado no esboço. O coeficiente crítico de flambagem é: $k = 3,85\gamma^2\beta\sqrt{\beta^2 + 3(-1 + \sqrt{1 + 4/\beta^2\gamma^2})}$ onde $\gamma = \frac{5,34 + 4/\alpha^2}{7,7}$ para $\alpha \geq 1$: e

$$\gamma = \frac{4 + 5,34/\alpha^2}{7,7 + 22(1 - \alpha)^3} \text{ para } 1/2 \leq \alpha \leq 1$$



Placa Submetida a Cisalhamento e Compressão Não-Uniforme Combinados

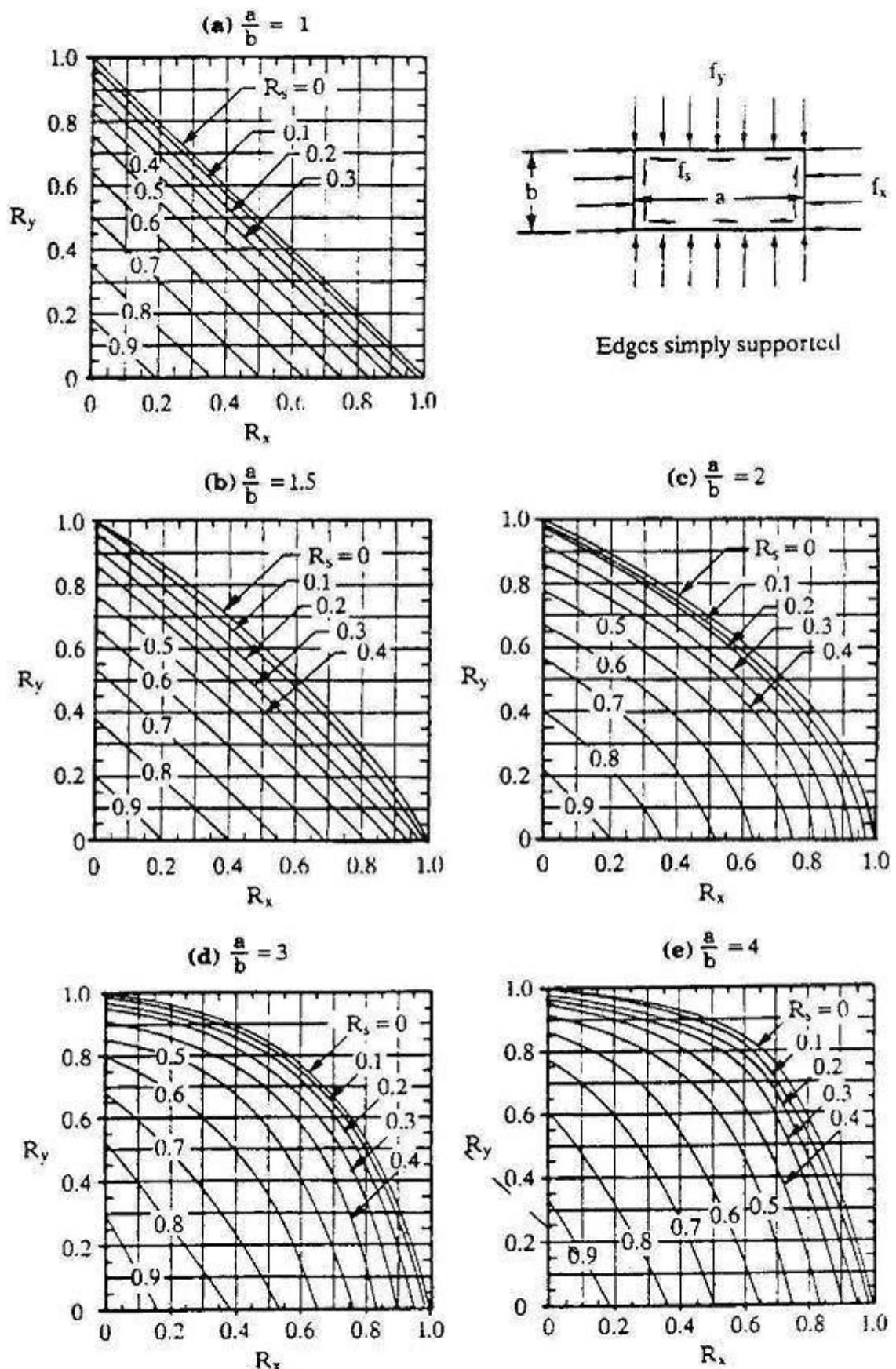


Fig. 5-41 Placa Plana Submetida à Compressão Biaxial e Cisalhamento - Bordos Simplesmente Apoiados

i) COMPRESSÃO BI-AXIAL

As curvas de interação para compressão bi-axial são mostradas nas figs. 3-42 e 3-43, respectivamente, para os casos de placas simplesmente apoiadas e engastadas.

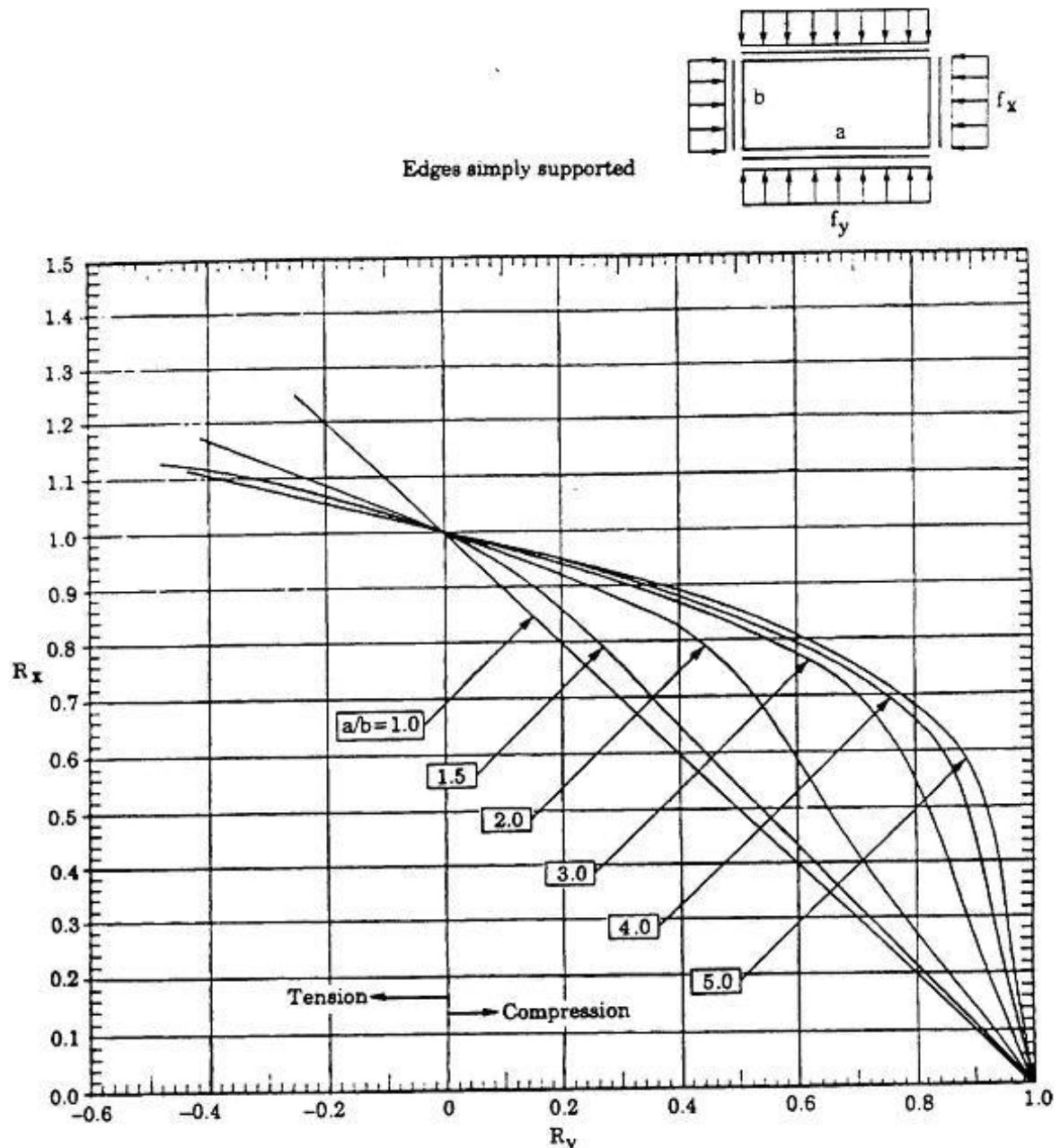


Fig. 5.42 Placa Plana Submetida a Carregamento Combinado:
Carga Axial Transversal e Compressão Longitudinal
Bordos Simplesmente apoiados

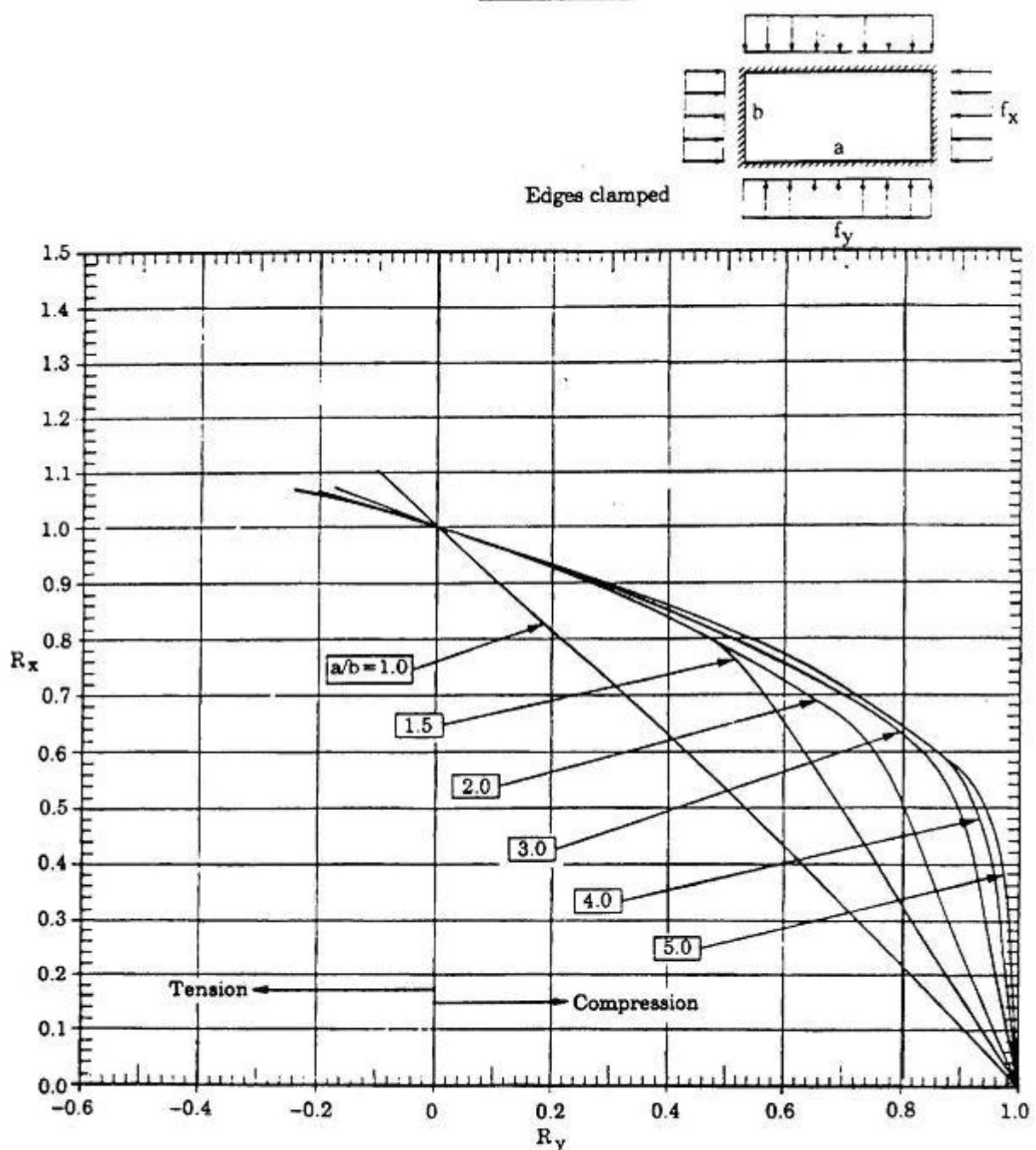


Fig. 5-43 Placa Plana Submetida a Carregamento Combinado:
Carga Axial Transversal e Compressão Longitudinal
Bordos Engastados

3.15 FLAMBAGEM DE PLACAS AFILADAS

Quando uma placa afilada atinge o estado de equilíbrio instável, a instabilidade é caracterizada por deflexões para fora do plano da placa numa região somente. As outras regiões da placa permanecem essencialmente livres de tais deflexões. Esta condição de instabilidade constitui um projeto ineficiente, uma vez que a mesma distribuição de cargas presumivelmente poderia ser sustentada por uma placa mais leve, afilada de maneira tal que a instabilidade sob o carregamento especificado seja caracterizado

por deflexões ao longo de toda a placa. Por esta razão, uma placa simplesmente apoiada, cujo afilamento é regido por uma lei exponencial, e submetida à cargas de compressão foi estudada e os resultados são mostrados na Fig. 3-44. A variação do carregamento ao longo da placa foi considerado ser produzido por tensões de cisalhamento suficientemente pequenas, de forma a ter influência desprezível nas características de flambagem da placa. O coeficiente de flambagem resultante é representado na figura em função do alongamento, para diversos valores do afilamento.

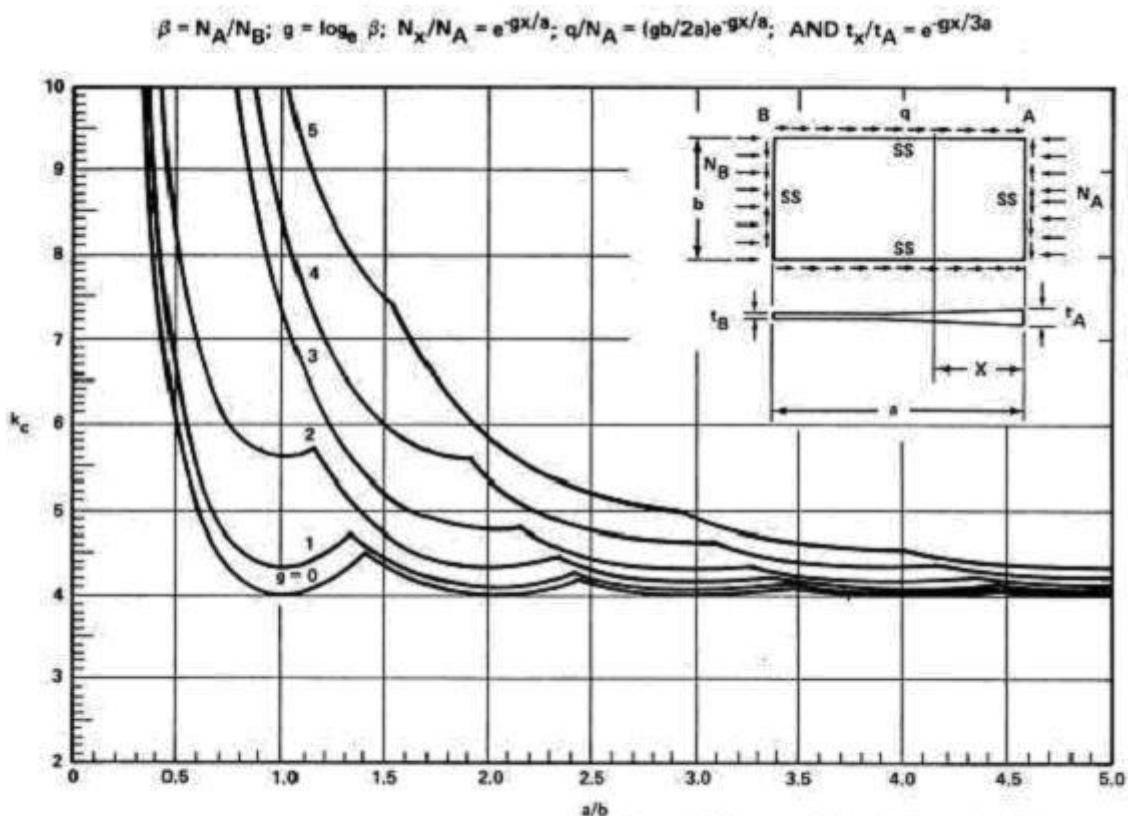


Fig. 5-44 Coeficiente de Flambagem para Placa Retangular Simplesmente Apoiada com Afilamento Eficiente (Carga e Espessura Variando Exponencialmente)

3.16 FLAMBAGEM INELÁSTICA DE PLACAS

Quando b/t é pequeno, σ_{cr} pode exceder o limite de proporcionalidade. A Eq. (3.32), aqui repetida,

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (3.32)$$

não é diretamente aplicável nestes casos porque a) a tensão não é mais relacionada à deformação pelo módulo de elasticidade E , b) porque ν depende da tensão, e c) porque num flange a condição de contorno do bordo livre Eq. (3.15) contém ν , de modo que k também depende da tensão.

É prática comum incluir todos estes efeitos num único *fator de correção de plasticidade* η

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{cr}}}{(\sigma_{\text{cr}})_{\text{elástico}}} \quad (3.114)$$

onde σ_{cr} é a tensão crítica corrigida para os efeitos de plasticidade e $(\sigma_{\text{cr}})_{\text{elástico}}$ é a tensão crítica elástica computada da Eq. (3.32). Nestas condições, pode-se escrever

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\eta k \pi^2 E}{12(1-\nu_e^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (3.115)$$

que é aplicável em todos os níveis de tensão, uma vez que η é igual a 1 na região elástica. A notação ν_e é usada na Eq. (3.115) para tornar explícito que o valor elástico da razão de Poisson é utilizado uma vez que o efeito inelástico de ν está contido em η .

Se, de um lado, há um consenso geral no que tange as equações tensão-deformação no regime elástico, não há equações tensão-deformação comumente aceitas, no regime inelástico, para todas as histórias e níveis de tensão. Dois métodos de ataque têm sido amplamente utilizados. Na *teoria da deformação*, as tensões e deformações são relacionadas pela lei

$$\sigma_i = E_s \varepsilon_i \quad (3.116)$$

para tensões crescentes, enquanto na *teoria incremental* elas são relacionadas por

$$d\sigma_i = E_t d\varepsilon_i \quad (5.117)$$

O descarregamento é considerado ocorrer elasticamente em ambos os casos. Os símbolos σ e ε denotam *intensidades efetivas de tensões e deformações*. Várias equações para σ e ε têm sido sugeridas por diferentes pesquisadores. Uma destas é a *teoria da energia de distorção* ou *cisalhamento-octaédrico* de Huber, Mises e Henki, que para o estado plano de tensões fornece

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2} \quad (3.118)$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2} \quad (3.119)$$

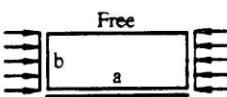
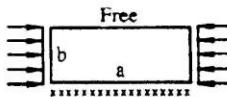
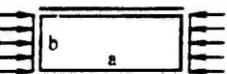
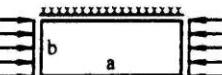
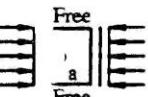
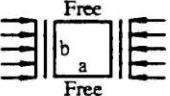
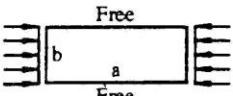
Nota-se que para carregamento uniaxial, $\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$, $\varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{xx}$, e $\gamma_{xy} = 0$ e as Eqs. (3.116) e (3.117) ficam reduzidas, respectivamente, às Eqs. (1.2) e (1.3) se a razão de Poisson é tomada igual à $\nu_p = \frac{1}{2}$, o valor da razão de Poisson para um material isotrópico perfeitamente plástico.

As teorias de flambagem de placas baseadas na teoria da deformação da Eq (3.118) têm tido melhor correspondência com resultados experimentais do que aquelas baseadas na teoria incremental. A questão de qual módulo, o elástico ou o plástico, deve ser utilizado no lado convexo de uma placa levemente flambada também aparece, como na teoria de flambagem inelástica de colunas. Se a placa permanece perfeitamente plana até a tensão crítica, o descarregamento no lado convexo teria que ocorrer elasticamente, e uma teoria de módulo reduzido seria aplicável. Por outro lado, se há pequenas

imperfeições iniciais, flexão e compressão precedem simultaneamente, e não há descarregamento elástico. Como em colunas, a teoria que não considera a reversão de deformações no lado convexo tem mostrado melhor correlação com dados experimentais. A teoria de flambagem inelástica de placas pode, consequentemente, ser considerada como uma generalização bi-dimensional da teoria do módulo tangente de colunas.

Tabela 5-1 Fatores de Correção de Plasticidade

$$j = (1 - \nu_e^2) / (1 - \nu^2)$$

Case	Type of Structure and Loading	Inelastic Factor, η / j
A	Long plate, one unloaded edge simply supported and one unloaded edge free	 $\frac{E_s}{E_c}$
B	Long plate, one unloaded edge clamped and one unloaded edge free	 $\frac{E_s}{E_c} \left(0.330 + 0.670 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3E_t}{4E_s}} \right)$
For long plates, the equations in this figure for η apply whether the loaded edges are simply supported or clamped.		
C	Long plate, both unloaded edges simply supported	 $\frac{E_s}{E_c} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3E_t}{4E_s}} \right)$
D	Long plate, both unloaded edges clamped	 $\frac{E_s}{E_c} \left(0.352 - 0.648 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3E_t}{4E_s}} \right)$
E	Short plate loaded as a column, loaded edges simply supported: $a/b \ll 1$	 $\frac{E_s}{4E_c} + \frac{3E_t}{4E_c}$
F	Square plate loaded as a column, loaded edges simply supported: $a/b = 1$	 $0.114 \frac{E_s}{E_c} + 0.886 \frac{E_t}{E_c}$
G	Long plate loaded as a column	 $\frac{E_t}{E_c}$
H	Flat or curved plate; edge conditions may be either simply sup- ported or clamped	 $\frac{G_s}{G}$
xxxxx Clamped edge — Simply supported edge		E_s and G_s are the secant modulus for compression and shear, respectively. E_t is the tangent modulus.