

Cap. 7 - Análise de Desempenho do Sistema Integrado via Filtragem de Kalman [12]

Uma análise estocástica detalhada das propriedades do filtro de Kalman foge ao escopo do presente texto. Este capítulo baseia-se em e segue a formulação descrita em [12]. De forma sucinta, é possível mostrar que, quando o ruído de modelo e o de medida são Gaussianos e brancos, a incerteza no estado inicial é Gaussiana e o processo é linear, então o filtro de Kalman tem as seguintes características:

1 - Sua estimativa é não polarizada, i.e., $E[\hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{x} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{e}} = E[\mathbf{e}] = E[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}] = \overline{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$

Obs.: $E[\mathbf{y}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{y} p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ onde $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ é a densidade de probabilidade conjunta do vetor de variáveis aleatórias \mathbf{Y} assumir o valor \mathbf{y} .

2 - Sua estimativa é a de máxima verossimilhança. Sob as hipóteses consideradas, o estado do filtro tem distribuição Gaussiana. O filtro, ao propagar a média e a covariância do erro de estimação, está propagando a distribuição do estado condicionada a toda a informação contida nas medidas disponíveis. Uma vez que esta distribuição condicionada é Gaussiana, e portanto simétrica, a média condicional (que é a estimativa do filtro) coincide com o modo (ponto de máximo de uma distribuição) e com a mediana (ponto abaixo do qual a probabilidade acumulada é 50%). Esta média condicional minimiza qualquer função custo quadrática positiva definida.

Obs.: $\mathbf{P} = E[\mathbf{e}\mathbf{e}^T - \bar{\mathbf{e}}\bar{\mathbf{e}}^T] = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T - E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})]E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T]]$

Portanto, da hipótese (1) acima: $\mathbf{P} = E[\mathbf{e}\mathbf{e}^T] = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T]$

3 - O filtro, apesar de tratar-se de um algoritmo linear, é o algoritmo ótimo (dentre todos, sejam lineares ou não) para a estimação do estado de um processo linear.

4 - O erro de estimação (ou resíduo) $\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ no k-ésimo instante de amostragem é estocasticamente ortogonal a todas as medidas $\mathbf{y}(i)$, $i=1,2,\dots,k$ anteriormente coletadas:

$$E[(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \cdot \mathbf{y}(i)] = 0$$

5 - O filtro de Kalman é assintoticamente estável, i.e., para um sistema observável, o efeito das condições iniciais $\hat{\mathbf{x}}(0), \mathbf{P}(0)$ - que sejam estatisticamente consistentes com o estado inicial “verdadeiro” $\mathbf{x}(0)$ - sobre as estimativas vão se atenuando à medida que k tende a infinito.

É natural tecer considerações sobre a validade das hipóteses sobre as quais as propriedades acima se sustentam. Apesar de sistemas dinâmicos em geral terem

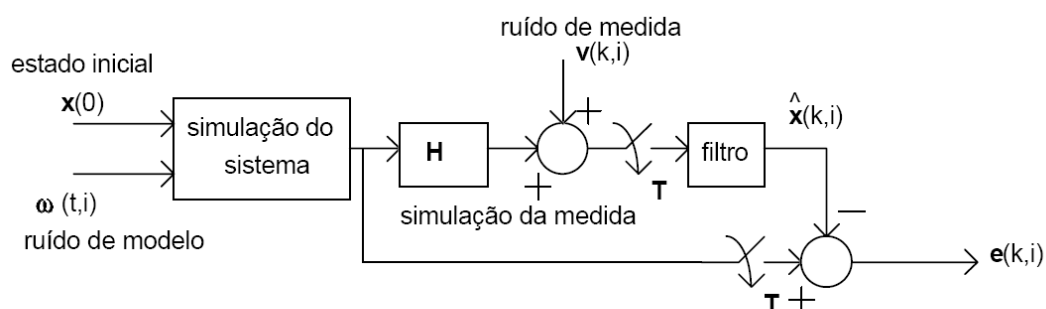
comportamento bastante diverso daquele previsto por modelos lineares, a hipótese de linearidade é viável quando as não-linearidades do sistema forem dadas à linearização e a distância à trajetória linearizada for pequena. Isto é factível em problemas de navegação quando há um auxílio externo como GPS ou rádio-navegação para manter o erro de navegação limitado.

A assunção de ruído branco é viável, pois ruído colorido pode ser modelado mediante aumento do modelo dinâmico e uso de ruído branco. Já a hipótese de ruído com distribuição Gaussiana se sustenta mediante invocação do Teorema do Limite Central. Caso a distribuição não seja Gaussiana, apesar de um estimador não-linear poder fornecer resultados melhores [10], o filtro de Kalman ainda é o melhor estimador linear não polarizado e com mínima variância.

A validade destas propriedades presume adicionalmente que o *modelo de projeto* embutido no filtro é um modelo exato e perfeito do sistema real, descrito da melhor forma possível pelo assim chamado *modelo verdadeiro*. Esta é uma assunção extremamente otimista! Durante o projeto, uma série de compromissos são considerados e, como resultado, o modelo de projeto freqüentemente não corresponde ao modelo verdadeiro. A seguir, estudar-se-ão métodos outros que não a simulação da matriz de covariância do filtro com o intuito de avaliar o desempenho do filtro sob condições mais realistas, i.e., quando o modelo de projeto difere do verdadeiro.

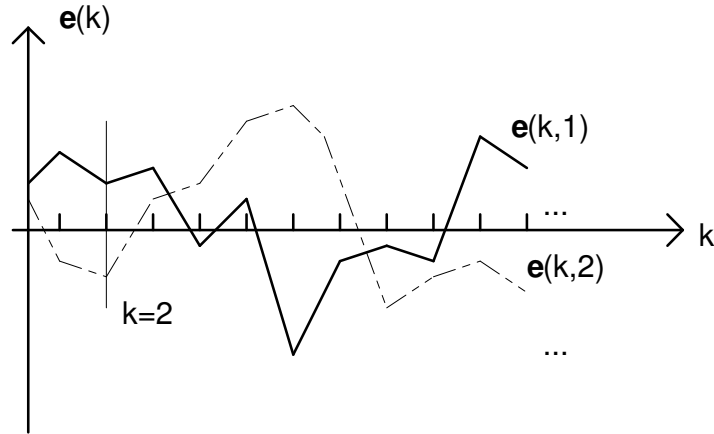
Simulação de Monte Carlo

Refere-se ao método de avaliação do software de navegação em uma simulação estocástica ao longo de alguma trajetória desejada, incluindo ruído aditivo nos sinais dos sensores.



Chaves fecham-se em instantes múltiplos do período de amostragem:
 $kT, k=0,1,2,3,\dots$

onde o argumento i indica a i -ésima realização do processo estocástico.



São geradas muitas realizações do erro, cada uma com uma distinta realização dos ruídos de modelo e de medida. Para um k fixo, ao processo estocástico $\mathbf{e}(k,i)$ está associada uma variável aleatória que assume, a cada realização, um valor distinto. Assim, a cada k computam-se as estatísticas do erro:

$$\bar{\mathbf{e}}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}(k,i) ; \quad \mathbf{P}(k) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [\{\mathbf{e}(k,i) - \bar{\mathbf{e}}(k)\} \{\mathbf{e}(k,i) - \bar{\mathbf{e}}(k)\}^T]$$

A primeira motivação para esta avaliação é testar o software de navegação em um ambiente controlado antes de realizar testes em campo. A avaliação permite detectar erros de programação, a necessidade de se utilizar um modelo de projeto mais rebuscado, que inclua estados adicionais, ou, em etapa posterior visando implementação em campo, se o software executa corretamente em tempo real, i.e., no intervalo de tempo a ele alocado. Adicionalmente, há interesse de saber se a média do erro de estimação é não polarizado. Para que os resultados sejam estatisticamente válidos, numerosas realizações fazem-se necessárias.

A segunda motivação para a avaliação é a realização de uma análise estatística do desempenho real do sistema de navegação para comparação com a estimativa computada pelo filtro da estatística que descreve seu desempenho, i.e., a matriz de covariância \mathbf{P} computada pelo filtro. Esta comparação é importante para *sintonizar* o filtro, i.e., fazer com que o filtro dotado do modelo de projeto tenha um desempenho próximo daquele que seria alcançado com o uso do modelo verdadeiro, o qual é mais complexo e que, por isso, acarretaria em custo computacional proibitivo se empregado em tempo real. Este tipo de análise pode ser realizado de forma mais eficiente em termos computacionais pela técnica de análise da covariância verdadeira.

Cabe ressaltar que a exatidão dos resultados obtidos mediante simulação de Monte Carlo e análise da covariância verdadeira dependem da exatidão do modelo verdadeiro empregado.

Análise da Covariância Verdadeira

De forma geral, o modelo empregado no filtro difere do "verdadeiro" em uma ou mais das seguintes formas:

- 1 - A ordem do estado do filtro é reduzida
- 2 - O estado do filtro é uma combinação linear do estado "verdadeiro"
- 3 - O modelo do filtro tem erros nos seus parâmetros, i.e., os valores das matrizes ϕ, Q, H, R são diferentes daqueles do modelo "verdadeiro".

Observa-se que 1) e 2) podem ser matematicamente descritos por uma matriz de transformação.

Exemplo 1: Alinhamento inicial com veículo estacionário em posição conhecida

A sequência de rotações do vetor desalinhamento ψ que levam do LLLN verdadeiro S_t para o LLLN computado S_p é $S_t \rightarrow \frac{1}{\psi_N} \xrightarrow{2} \frac{3}{\psi_E} \rightarrow S_p$, fornecendo, assumido-se ângulos diminutos, a DCM:

$$D_p^t = \begin{bmatrix} 1 & \psi_D & -\psi_E \\ -\psi_D & 1 & \psi_N \\ \psi_E & -\psi_N & 1 \end{bmatrix}$$

Dada a representação da velocidade de rotação da Terra no S_t , $\Omega_t = [\Omega_c \lambda \quad 0 \quad -\Omega_s \lambda]^T$, sua representação no S_p é:

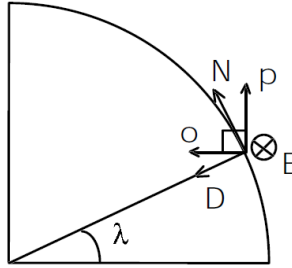
$$\Omega_p = D_p^t \Omega_t = \begin{bmatrix} \Omega_c \lambda + \psi_E \Omega_s \lambda \\ -\psi_D \Omega_c \lambda - \psi_N \Omega_s \lambda \\ \psi_E \Omega_c \lambda - \Omega_s \lambda \end{bmatrix}$$

Para que a plataforma, estabilizada ou analítica, busque manter a orientação desejada apesar da rotação da Terra, o computador de bordo comanda sua precessão (real ou a computação da DCM equivalente, respectivamente) com velocidade angular $\Omega_c \approx \Omega_t$. Entretanto, devido ao desalinhamento, surge o desalinhamento entre S_t e S_p , causada pela diferença entre a precessão comandada e a necessária para acompanhar a rotação da Terra. Para uma plataforma estabilizada (sinal positivo no termo de deriva de plataforma estabilizada na equação de desalinhamento dada por $\dot{\psi} + \Omega \times \psi = +\epsilon$):

$$\boldsymbol{\Omega}_t - \boldsymbol{\Omega}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \dot{\Psi}_N \\ \dot{\Psi}_E \\ \dot{\Psi}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Psi_E \Omega s \lambda \\ \Psi_D \Omega c \lambda + \Psi_N \Omega s \lambda \\ -\Psi_E \Omega c \lambda \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega s \lambda & 0 \\ \Omega s \lambda & 0 & \Omega c \lambda \\ 0 & -\Omega c \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_N \\ \Psi_E \\ \Psi_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde $+\boldsymbol{\varepsilon}$ é a deriva da plataforma estabilizada.

Intencionando simplificar a representação do modelo dinâmico acima, deseja-se transformar a descrição do desalinhamento $\boldsymbol{\Psi}$ no modelo acima de $\{NED\}$ para outro sistema de referência, $\{pEo\}$, conforme mostrado abaixo:



A transformação é dada por:

$$\mathbf{D}_{pEo}^{NED} = \begin{bmatrix} c\lambda & 0 & -s\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ s\lambda & 0 & c\lambda \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Psi}_{pEo} = \mathbf{D}_{pEo}^{NED} \boldsymbol{\Psi}_{NED}$$

e, substituindo em (1), o modelo dinâmico resultante com desalinhamento descrito em $\{pEo\}$ passa a ser:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi}_p \\ \dot{\Psi}_E \\ \dot{\Psi}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & -\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_p \\ \Psi_E \\ \Psi_o \end{bmatrix} + \mathbf{D}_{pEo}^{NED} \begin{bmatrix} \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{bmatrix} \quad (2)$$

A excitação causada pela deriva $\boldsymbol{\varepsilon}$ é modelada como ruído branco $\boldsymbol{\omega}'$ e (2) será designado o *modelo de projeto* empregado no filtro.

Considere agora que na realidade a deriva é representada mais fielmente por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\omega}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ é uma constante e $\boldsymbol{\omega}$ é ruído branco. Assim sendo, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{0}$ e, aumentando o vetor de estados em (1) para incluir o termo constante na deriva $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, obtém-se a dinâmica do estado "verdadeiro" \mathbf{x} :

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi}_N \\ \dot{\Psi}_E \\ \dot{\Psi}_D \\ \dot{\epsilon}_{0N} \\ \dot{\epsilon}_{0E} \\ \dot{\epsilon}_{0D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\Omega s\lambda & 0 & \mathbf{I}_3 \\ \Omega s\lambda & 0 & \Omega c\lambda & \\ \hline 0 & -\Omega c\lambda & 0 & \mathbf{0}_3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Psi_N \\ \Psi_E \\ \Psi_D \\ \epsilon_{0N} \\ \epsilon_{0E} \\ \epsilon_{0D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_N \\ \omega_E \\ \omega_D \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}$$

A equação de medida considera adicionalmente que os sensores disponibilizam medida de Ψ_N relacionada com o estado "verdadeiro" \mathbf{x} e corrompida por ruído branco v conforme abaixo:

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\mathbf{x} + v$$

O modelo dinâmico acima e a correspondente equação de medida são denominados de *modelo verdadeiro*. Além disto, a medida, $y = \Psi_N + v$, precisa também ser relacionada com o modelo de projeto usando a DCM \mathbf{D}_{NED}^{pEo} :

$$\Psi_N = \Psi_p c\lambda + \Psi_o s\lambda \rightarrow y = [c\lambda \ 0 \ s\lambda] \begin{bmatrix} \Psi_p \\ \Psi_E \\ \Psi_o \end{bmatrix} + v$$

Esta é a equação de medida associada ao modelo de projeto.

Sumarizando o exemplo, tem-se que:

Modelo verdadeiro:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi}_N \\ \dot{\Psi}_E \\ \dot{\Psi}_D \\ \dot{\epsilon}_{0N} \\ \dot{\epsilon}_{0E} \\ \dot{\epsilon}_{0D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\Omega s\lambda & 0 & \\ \Omega s\lambda & 0 & \Omega c\lambda & \mathbf{I}_3 \\ 0 & -\Omega c\lambda & 0 & \\ \hline & \mathbf{0}_3 & & \mathbf{0}_3 \end{array} \right] \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\Psi}_N \\ \dot{\Psi}_E \\ \dot{\Psi}_D \\ \epsilon_{0N} \\ \epsilon_{0E} \\ \epsilon_{0D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_N \\ \omega_E \\ \omega_D \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_N \\ \Psi_E \\ \Psi_D \\ \epsilon_{0N} \\ \epsilon_{0E} \\ \epsilon_{0D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + v$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}$$

$$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + v$$

Modelo de projeto:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi}_p \\ \dot{\Psi}_E \\ \dot{\Psi}_o \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & -\Omega & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_p \\ \Psi_E \\ \Psi_o \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}'} + \mathbf{D}_{pEo}^{NED} \begin{bmatrix} \epsilon_N \\ \epsilon_E \\ \epsilon_D \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} c\lambda & 0 & s\lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_p \\ \Psi_E \\ \Psi_o \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}'} + v$$

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}'\mathbf{x}' + \boldsymbol{\omega}'$$

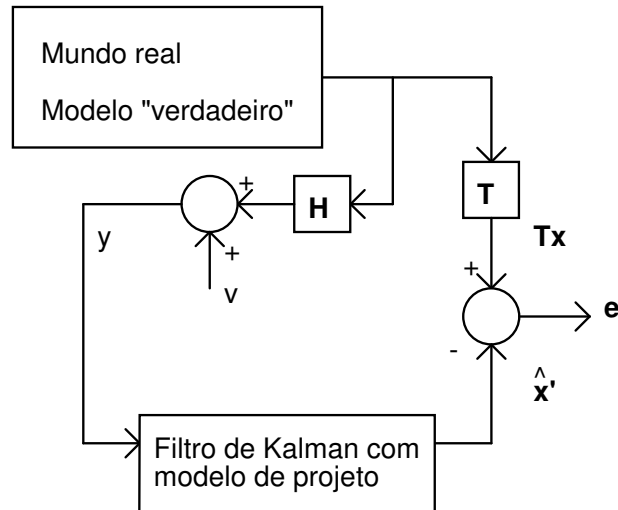
$$y = \mathbf{H}'\mathbf{x}' + v$$

Definindo-se a transformação $\mathbf{T} = \left[\mathbf{D}_{pEo}^{NED} \mid \mathbf{0}_3 \right]$, tem-se então que $\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x}$, onde \mathbf{x}' é o estado de ordem reduzida do filtro, obtido a partir da combinação linear das componentes do estado verdadeiro \mathbf{x} . Notar também que \mathbf{F}' , \mathbf{H}' , \mathbf{Q}' são diferentes de \mathbf{F} , \mathbf{H} , \mathbf{Q} .

O erro verdadeiro na estimação do filtro é, portanto, definido como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{T}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}'$$

$$Ex.: \begin{bmatrix} \Psi_p \\ \Psi_E \\ \Psi_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_p \\ \hat{\Psi}_E \\ \hat{\Psi}_o \end{bmatrix}$$



Sistema acoplado: filtro excitado por medidas do mundo real e erro "verdadeiro"

Desta forma, interessa-nos computar a covariância do erro verdadeiro $\mathbf{P}_e = \text{cov}\{\mathbf{e}\}$. Se, em vez disto, simplesmente analisarmos a covariância computada pelo filtro, estaremos investigando o comportamento de $\mathbf{P}_e' = \text{cov}\{\mathbf{e}'\}$, que não representa o desempenho real do filtro. Isto ocorre porque a sequência de ganhos do filtro não é ótima devido às limitações de seu modelo, já mencionadas. O filtro "enxerga" o mundo de forma distorcida, através do seu modelo de projeto, uma simplificação do mundo, e computa ganhos que ele, filtro, considera ótimos para seu modelo. Entretanto, os ganhos são sub-ótimos para o modelo "verdadeiro". Mais ainda, o uso de um modelo simplificado viola os requisitos de otimalidade que foram empregados na derivação das equações do filtro, baseada na hipótese de um modelo que descreve o mundo de maneira fidedigna. Em suma, o uso de ganhos sub-ótimos remove a garantia de não-polarização e mínima variância do erro de estimação. A partir de agora, trataremos da seguinte questão: dado que desejamos avaliar o desempenho real do filtro, como computar \mathbf{P}_e ?

COMO COMPUTAR P_e ?

As relações com que trabalharemos agora, relacionadas com a propagação entre as medidas do estado e do erro, são:

Transformação entre o estado "verdadeiro" e do filtro

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

Erro "verdadeiro" na estimação do filtro

$$\mathbf{e} = \mathbf{T}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}'$$

Modelo "verdadeiro"

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)\end{aligned}$$

Modelo de projeto

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{F}'\mathbf{x}' + \boldsymbol{\omega}' \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}'(k)\mathbf{x}'(k) + \mathbf{v}(k)\end{aligned}$$

Convém salientar que o vetor de medidas \mathbf{y} sendo considerado é discreto no tempo e é o mesmo em ambos os modelos.

Derivando a equação de erro em relação ao tempo:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}' = \mathbf{T}(\mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{F}'\hat{\mathbf{x}}'$$

(Obs.: $\dot{\hat{\mathbf{x}}}' = \mathbf{F}'\hat{\mathbf{x}}'$ estima propagação entre medidas)

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{T}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{F}'\hat{\mathbf{x}}' + \underbrace{\mathbf{F}'\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{F}'\mathbf{T}\mathbf{x}}_{\text{soma e subtrai mesmo termo} = 0}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}'\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{F}'\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{F}'\hat{\mathbf{x}}' + \mathbf{T}\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{T}\mathbf{F} - \mathbf{F}'\mathbf{T})\mathbf{x} + \mathbf{F}'(\mathbf{T}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}') + \mathbf{T}\boldsymbol{\omega}$$

e portanto:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{T}\mathbf{F} - \mathbf{F}'\mathbf{T})\mathbf{x} + \mathbf{F}'\mathbf{e} + \mathbf{T}\boldsymbol{\omega}$$

Para analisar o desempenho "verdadeiro" do filtro excitado por medidas do mundo real, representa-se o sistema acoplado em que o *estado aumentado* é a concatenação do estado e erro "verdadeiros", \mathbf{x} e \mathbf{e} , respectivamente, como a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}\mathbf{F} - \mathbf{F}'\mathbf{T} & \mathbf{F}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}$$

Sejam as seguintes definições:

$$\mathbf{x}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}; \quad \Delta\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{F} - \mathbf{F}'\mathbf{T}; \quad \mathbf{F}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{F} & \mathbf{F}' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

Então:

$$\dot{\mathbf{x}}^c = \mathbf{F}^c \mathbf{x}^c + \mathbf{G}^c \boldsymbol{\omega}$$

A discretização do modelo dinâmico aumentado visto acima resulta em:

$$\mathbf{x}_k^{c-} = \boldsymbol{\phi}_{k-1}^c \mathbf{x}_{k-1}^{c+} + \boldsymbol{\omega}_{k-1}^c$$

sendo $\boldsymbol{\phi}^c = e^{\mathbf{F}^c T}$ a matriz de transição do estado aumentado e onde $\boldsymbol{\phi}_k^c = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\phi}_k & \mathbf{0} \\ \hline \Delta \boldsymbol{\phi}_k & \boldsymbol{\phi}'_k \end{array} \right]$; $\boldsymbol{\omega}_k^c = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{T} \end{array} \right] \boldsymbol{\omega}_k$. A seqüência branca $\boldsymbol{\omega}_k$ possui a mesma estatística que o processo ruído branco $\boldsymbol{\omega}$ nos instantes da discretização.

Definamos a matriz $\mathbf{C} \Delta \mathbf{E} \{ \mathbf{x}^c \mathbf{x}^{cT} \}$, a qual é matriz de segundo momento. **C não é matriz de covariância.** Da equação acima, partamos para a computação da matriz **C** associada:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k^- = \mathbf{E} \{ \mathbf{x}_k^{c-} \mathbf{x}_k^{c-T} \} &= \boldsymbol{\phi}_{k-1}^c \mathbf{E} \{ \mathbf{x}_{k-1}^{c+} \mathbf{x}_{k-1}^{c+T} \} \boldsymbol{\phi}_{k-1}^{cT} + \\ &+ \boldsymbol{\phi}_{k-1}^c \mathbf{E} \{ \mathbf{x}_{k-1}^{c+} \boldsymbol{\omega}_{k-1}^{cT} \} + \mathbf{E} \{ \boldsymbol{\omega}_{k-1}^c \mathbf{x}_{k-1}^{c+T} \} \boldsymbol{\phi}_{k-1}^{cT} + \mathbf{E} \{ \boldsymbol{\omega}_{k-1}^c \boldsymbol{\omega}_{k-1}^{cT} \} \end{aligned}$$

Com relação à correlação cruzada $\mathbf{E} \{ \mathbf{x}_{k-1}^{c+} \boldsymbol{\omega}_{k-1}^{cT} \}$ vista acima, notar que a atualização do estado concatenado no instante k-1, \mathbf{x}_{k-1}^{c+} , utiliza a medida \mathbf{y}_{k-1} , a qual é corrompida pelo ruído de medida \mathbf{v}_{k-1} , que por sua vez não possui correlação com $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$. Além disto, a atualização em tela utiliza também a propagação do estado concatenado, \mathbf{x}_{k-1}^{c-} , o qual depende de $\boldsymbol{\omega}_{k-2}$, que por sua vez também não possui correlação com $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$. Portanto as correlações cruzadas são nulas e resulta que:

$$\mathbf{C}_k^- = \boldsymbol{\phi}_{k-1}^c \mathbf{C}_{k-1}^+ \boldsymbol{\phi}_{k-1}^{cT} + \mathbf{Q}_{k-1}^c$$

Por que há o interesse em \mathbf{C}_k ? Lembrando que

$$\mathbf{C}_k = \left[\begin{array}{c|c} \text{nonono} & \text{ononon}^T \\ \hline \text{ononon} & \mathbf{C}_k^e = \mathbf{E} \{ \mathbf{e} \mathbf{e}^T \} \end{array} \right]$$

i.e., nos k-ésimos instantes amostrados o seu bloco inferior direito fornece o segundo momento do erro verdadeiro $\mathbf{e} = \mathbf{T}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}'$; entretanto, se $\mathbf{E} \{ \mathbf{e} \} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{C}_k^e = \mathbf{P}_k^e$. Neste caso, \mathbf{C}_k^e é a matriz de covariância verdadeira entre o vetor de estado estimado pelo filtro e os correspondentes componentes do estado "verdadeiro". Relembrando que na derivação das equações do filtro de Kalman foi imposta a condição de não polarização de $\mathbf{E} \{ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \} = \mathbf{0}$, notamos que, por outro lado, não necessariamente $\mathbf{E} \{ \mathbf{T}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}' \} = \mathbf{E} \{ \mathbf{e} \} = \mathbf{0}$, pois esta última condição não foi imposta para a computação do estado do filtro $\hat{\mathbf{x}}'$.

Dado o exposto acima, cabe questionar o que se deseja computar na análise da covariância verdadeira no caso geral em que $E\{\mathbf{T}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}'\} = E\{\mathbf{e}\} \neq \mathbf{0}$, \mathbf{P} ou \mathbf{C} ? Para responder a esta questão, relembremos que:

$$\mathbf{P}_e = E\{(\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}})(\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}})^T\} \quad ; \quad \mathbf{C}_e = E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\}$$

Suponhamos $\bar{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}$, i.e., $\hat{\mathbf{x}}'$ é uma estimativa polarizada de $\mathbf{T}\mathbf{x}$. Suponhamos adicionalmente que o erro de estimação seja próximo de seu valor esperado, i.e., $\mathbf{e} \approx \bar{\mathbf{e}}$. Então, apesar de $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_e \rightarrow \mathbf{0}$ mas $\mathbf{C}_e \rightarrow \bar{\mathbf{e}}\bar{\mathbf{e}}^T \neq \mathbf{0}$. Neste caso, certamente \mathbf{C}_e descreve melhor o fato de o modelo simplificado usado no filtro introduzir polarização no erro da estimativa. Assim sendo, *interessa-nos é computar \mathbf{C} para a análise do desempenho "verdadeiro" do filtro na análise de covariância, apesar de \mathbf{C} ser uma matriz de segundo momento, e não de covariância.*

Após a explanação acima, voltamos agora à computação de \mathbf{C} após a atualização da estimativa do filtro, ou seja, após ser incorporada a informação da medida mais recente. Notar que o estado verdadeiro \mathbf{x} não muda na atualização. Já $\hat{\mathbf{x}}'$ é atualizado pelo filtro como a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^{'+} &= \hat{\mathbf{x}}_k'^{-} + \mathbf{K}'_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}'_k \hat{\mathbf{x}}_k'^{-}) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k'^{-} + \mathbf{K}'_k (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}'_k \hat{\mathbf{x}}_k'^{-}) \end{aligned}$$

A partir da relação acima, define-se o erro "verdadeiro" após a atualização como:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^+ &\triangleq (\mathbf{T}\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{'+}) = \mathbf{T}\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k'^{-} - \mathbf{K}'_k (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{H}'_k \hat{\mathbf{x}}_k'^{-} + \mathbf{v}_k + \underbrace{\mathbf{H}'_k \mathbf{T}\mathbf{x}_k - \mathbf{H}'_k \mathbf{T}\mathbf{x}_k}_{=0}) \\ \mathbf{e}_k^+ &= \mathbf{e}_k^{-} - \mathbf{K}'_k [(\mathbf{H}_k - \mathbf{H}'_k \mathbf{T})\mathbf{x}_k + \mathbf{H}'_k (\mathbf{T}\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k'^{-}) + \mathbf{v}_k] \\ \mathbf{e}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k \mathbf{H}'_k) \mathbf{e}_k^{-} - \mathbf{K}'_k \underbrace{(\mathbf{H}_k - \mathbf{H}'_k \mathbf{T})\mathbf{x}_k}_{\Delta \mathbf{H}_k} - \mathbf{K}'_k \mathbf{v}_k \\ \mathbf{e}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k \mathbf{H}'_k) \mathbf{e}_k^{-} - \mathbf{K}'_k \Delta \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{K}'_k \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

Relembrando que \mathbf{x}_k não muda na atualização, o estado do sistema acoplado após a atualização do filtro é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}'_k \Delta \mathbf{H}_k & \mathbf{I} - \mathbf{K}'_k \mathbf{H}'_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k^{-} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}'_k \end{bmatrix} \mathbf{v}_k$$

Usando-se as seguintes definições:

$$\mathbf{x}_k^{c+} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k^+ \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}_k^{c-} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k^{-} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}'_k \Delta \mathbf{H}_k & \mathbf{I} - \mathbf{K}'_k \mathbf{H}'_k \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{K}_k^c \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}'_k \end{bmatrix}$$

chega-se então à equação de atualização do estado do sistema acoplado:

$$\mathbf{x}_k^{c+} = \mathbf{B}_k \mathbf{x}_k^{c-} + \mathbf{K}_k^c \mathbf{v}_k$$

Relembrando que $\mathbf{C} = E\{\mathbf{x}^c \mathbf{x}^{cT}\}$, sua atualização é analisada a seguir empregando a relação acima:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k^+ &= E\{\mathbf{x}_k^{c+} \mathbf{x}_k^{c+T}\} \\ \mathbf{C}_k^+ &= E\{[\mathbf{B}_k \mathbf{x}_k^{c-} + \mathbf{K}_k^c \mathbf{v}_k][\mathbf{B}_k \mathbf{x}_k^{c-} + \mathbf{K}_k^c \mathbf{v}_k]^T\} \\ \mathbf{C}_k^+ &= E\{\mathbf{B}_k \mathbf{x}_k^{c-} \mathbf{x}_k^{c-T} \mathbf{B}_k^T + \mathbf{B}_k \mathbf{x}_k^{c-} \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^{cT} + \mathbf{K}_k^c \mathbf{v}_k \mathbf{x}_k^{c-T} \mathbf{B}_k^T + \mathbf{K}_k^c \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^{cT}\} \end{aligned}$$

Com relação à correlação cruzada $E\{\mathbf{x}_k^{c-} \mathbf{v}_k^T\}$ vista acima, notar que a propagação do estado concatenado no instante k , \mathbf{x}_k^{c-} , é corrompida pelo ruído de modelo \mathbf{w}_{k-1} , o qual não possui correlação com o ruído de medida \mathbf{v}_k . Além disto, a propagação em tela utiliza também a atualização do estado concatenado, \mathbf{x}_{k-1}^{c+} , o qual depende de \mathbf{v}_{k-1} , que por sua vez também não possui correlação com \mathbf{v}_k . Portanto as correlações cruzadas são nulas e resulta a seguinte atualização de \mathbf{C} :

$$\mathbf{C}_k^+ = \mathbf{B}_k \mathbf{C}_k^- \mathbf{B}_k^T + \mathbf{K}_k^c \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^{cT}$$

Sumário inicial das relações empregadas na análise da covariância verdadeira

$$1 - \Delta \mathbf{F} = \mathbf{T} \mathbf{F} - \mathbf{F}' \mathbf{T}$$

$$2 - \mathbf{F}^c = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \hline \Delta \mathbf{F} & \mathbf{F}' \end{array} \right] \xrightarrow{\text{discretização}} \phi_k^c$$

$$3 - \mathbf{Q}^c = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{T} \end{array} \right] \mathbf{Q} \left[\mathbf{I} \mid \mathbf{T}^T \right] \xrightarrow{\text{discretização}} \mathbf{Q}_k^c$$

$$4 - \Delta \mathbf{H}_k = \mathbf{H}_k - \mathbf{H}_k' \mathbf{T}$$

$$5 - \mathbf{B}_k = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{K}_k' \Delta \mathbf{H}_k & \mathbf{I} - \mathbf{K}_k' \mathbf{H}_k' \end{array} \right]$$

$$6 - \mathbf{K}_k^c = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_k' \end{array} \right]$$

$$7 - \mathbf{C}_k^- = \phi_{k-1}^c \mathbf{C}_{k-1}^+ \phi_{k-1}^{cT} + \mathbf{Q}_{k-1}^c$$

$$8 - \mathbf{C}_k^+ = \mathbf{B}_k \mathbf{C}_k^- \mathbf{B}_k^T + \mathbf{K}_k^c \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^{cT}$$

Rodar em paralelo as equações da covariância computada pelo filtro \mathbf{P}'_k , baseado no modelo simplificado, para gerar a sequência de ganhos sub-ótima \mathbf{K}'_k , o qual é substituído em (6):

$$\mathbf{P}_k'^- = \phi_{k-1}' \mathbf{P}_{k-1}'^+ \phi_{k-1}'^T + \mathbf{Q}_{k-1}'$$

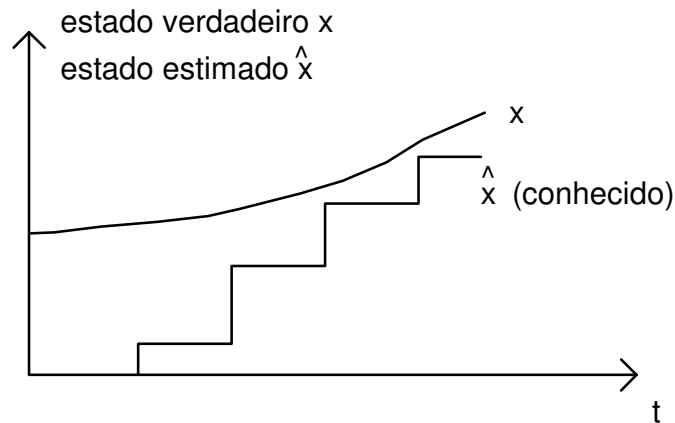
$$\mathbf{K}'_k = \mathbf{P}_k'^- \mathbf{H}_k'^T [\mathbf{H}_k' \mathbf{P}_k'^- \mathbf{H}_k'^T + \mathbf{R}_k]^{-1}$$

$$\mathbf{P}_k'^+ = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k \mathbf{H}_k'] \mathbf{P}_k'^-$$

Enfim, é importante ressaltar que a análise da covariância verdadeira apresentada objetiva sintonizar *off line* a intensidade da incerteza no modelo simplificado, \mathbf{Q}'_k , de forma que a covariância computada pelo filtro \mathbf{P}'_k tenha um comportamento próximo daquele exibido pelo bloco inferior direito \mathbf{C}_k^c da matriz de segunda ordem \mathbf{C}_k . As condições iniciais de $\mathbf{C}(0)$ podem ser conhecidas porque a análise *off line* usa os sinais gerados pelo modelo "verdadeiro" (na literatura, *ground truth*) para simular o mundo real.

Correção impulsiva do INS com estimativas - Impulsive Reset Control (IRC) [12]

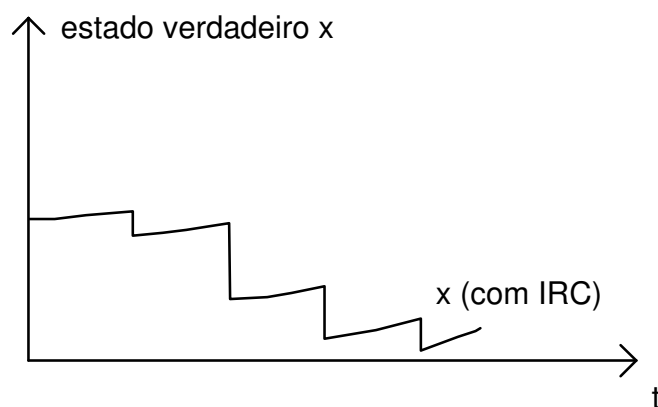
Seja x o *bias* de um acelerômetro um dos componentes estimados por um filtro de Kalman **linearizado (LKF) em torno da trajetória computada pelo INS**. O gráfico abaixo ilustra seu valor "verdadeiro" e a estimativa:



Na abordagem empregando o filtro de Kalman estendido (EKF), as estimativas atualizadas do estado do filtro são utilizadas para continuamente realizar:

- a) a calibração dos sensores inerciais mediante eliminação dos bias e derivas estimados;
- b) a correção da parametrização de atitude empregada para descrever a atitude do veículo por meio da eliminação dos ângulos de desalinhamento estimados.

Assim, há realimentação de informação do filtro para o INS e o EKF emprega para propagação do estado um modelo linearizado em torno da trajetória do INS **corrigida pelas estimativas**. O gráfico abaixo ilustra esta abordagem aplicada à figura acima:



Notar que agora o estado "verdadeiro" é modificado e a questão que se coloca é: como este fato é computado na análise de covariância verdadeira?

No caso do filtro ótimo, o qual emprega o modelo "verdadeiro", o erro "verdadeiro" é $\mathbf{e} = \mathbf{T}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}'$, com $\mathbf{T}=\mathbf{I}$. Portanto, $\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{x}}$ e o erro verdadeiro torna-se $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$. Uma vez que IRC remove $\hat{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} e $\hat{\mathbf{x}}$ de $\hat{\mathbf{x}}$, após o *reset* este erro fica sendo:

$$\mathbf{e}^r = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \Rightarrow \mathbf{e}^r = \mathbf{e}$$

Portanto, no caso do filtro ótimo o erro \mathbf{e} não é afetado e, portanto, a covariância computada \mathbf{P} não é afetada pelo IRC. Ressalte-se, entretanto, que o estado "verdadeiro" muda. A questão que se põe agora é: como se considera IRC na análise de covariância verdadeiro quando se trata de filtro sub-ótimo?

Em geral, IRC acarreta em ter o estado "verdadeiro" sendo modificado segundo:

$$\mathbf{x}_k^r = \mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} \quad (a)$$

em que o sobrescrito r acima indica “após *reset*”. Por sua vez, o filtro precisa receber a informação de que o estado "verdadeiro" foi alterado pelo IRC. Isto é expresso, no caso de *full reset*, como a seguir:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{r+} = \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} - \mathbf{I} \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} = \mathbf{0}$$

Objetivando cunho mais geral, por exemplo, para que possamos ter a liberdade de realizar *reset* parcial, escrevamos pois:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{r+} = \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} - \mathbf{A}_k' \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_k') \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} \quad (b)$$

As relações (a) e (b) acima serão agora empregadas para computar o erro "verdadeiro" após o *reset*:

$$\mathbf{e}_k^{r+} = \mathbf{T}\mathbf{x}_k^{r+} - \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^{r+}) - (\mathbf{I} - \mathbf{A}_k') \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} = \mathbf{T}\mathbf{x}_k - (\mathbf{T}\mathbf{A}_k + \mathbf{I} - \mathbf{A}_k') \hat{\mathbf{x}}_k^{r+}$$

(Obs.:desconsidere superscrito + do estado verdadeiro após reset logo após igualdade!!)

Seja $\mathbf{G} \triangleq \mathbf{T}\mathbf{A}_k + \mathbf{I} - \mathbf{A}_k'$. Então:

$$\mathbf{e}_k^{r+} = \mathbf{T}\mathbf{x}_k - \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_k^{r+} + \underbrace{\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_k^{r+} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_k^{r+}}_{=0} = \mathbf{G}(\mathbf{T}\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{r+}) + (\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{T}\mathbf{x}_k$$

Dado que $\mathbf{I} - \mathbf{G} = \mathbf{A}_k' - \mathbf{T}\mathbf{A}_k$, o erro "verdadeiro" após o *reset* é expresso por:

$$\mathbf{e}_k^{r+} = \mathbf{G}\mathbf{e}_k^{r+} + (\mathbf{A}_k' - \mathbf{T}\mathbf{A}_k)\mathbf{T}\mathbf{x}_k \quad (c)$$

O estado \mathbf{x}^{cr} consiste na concatenação do erro "verdadeiro" após *reset* e do estado “verdadeiro” após *reset* \mathbf{x}^r . Computemos, a partir de (a), \mathbf{x}^r em termos do erro “verdadeiro” \mathbf{e} e do estado “verdadeiro” \mathbf{x} :

$$\mathbf{x}_k^r = \mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} + \underbrace{\mathbf{A}_k \mathbf{T} \mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{T} \mathbf{x}_k}_{=0} = \mathbf{A}_k (\mathbf{T} \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{r+}) + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_k \mathbf{T}) \mathbf{x}_k \quad (d)$$

Concatenando (c) e (d) resulta em:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^r \\ \mathbf{e}_k^{r+} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k^{c+r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A}_k \mathbf{T} & \mathbf{A}_k \\ (\mathbf{A}_k' - \mathbf{T} \mathbf{A}_k) \mathbf{T} & \mathbf{G} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_k} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^+ \\ \mathbf{e}_k^+ \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k^{c+}} \Rightarrow \mathbf{x}_k^{c+r} = \mathbf{D}_k \mathbf{x}_k^{c+}$$

Relembrar que \mathbf{x}_k^+ é o estado verdadeiro imediatamente antes do *reset*, enquanto que após o *reset* o estado verdadeiro passa a ser \mathbf{x}_k^{r+} .

A matriz de segunda ordem associada ao estado concatenado após *reset* é então:

$$\mathbf{C}_k^{r+} = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{x}_k^{c+r} \mathbf{x}_k^{c+rT} \right\} = \mathbf{D}_k \mathbf{E} \left\{ \mathbf{x}_k^{c+} \mathbf{x}_k^{c+T} \right\} \mathbf{D}_k^T = \mathbf{D}_k \mathbf{C}_k^+ \mathbf{D}_k^T$$

Em seguida, será apresentado o sumário do algoritmo completo para análise de covariância verdadeira considerando correção impulsiva com as estimativas – também chamado de controle com *reset* impulsivo (IRC) [12]:

Sumário do algoritmo completo para análise da covariância verdadeira incluindo *reset*

$$1 - \Delta \mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{F} - \mathbf{F}'\mathbf{T}$$

$$2 - \mathbf{F}^c = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \hline \Delta \mathbf{F} & \mathbf{F}' \end{array} \right] \xrightarrow{\text{discretização}} \phi_k^c$$

$$3 - \mathbf{Q}^c = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{T} \end{array} \right] \mathbf{Q} \left[\mathbf{I} \mid \mathbf{T}^T \right] \xrightarrow{\text{discretização}} \mathbf{Q}_k^c$$

$$4 - \Delta \mathbf{H}_k = \mathbf{H}_k - \mathbf{H}_k' \mathbf{T}$$

$$5 - \mathbf{B}_k = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{K}_k' \Delta \mathbf{H}_k & \mathbf{I} - \mathbf{K}_k' \mathbf{H}_k' \end{array} \right]$$

$$6 - \mathbf{K}_k^c = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_k' \end{array} \right]$$

$$7 - \mathbf{C}_k^- = \phi_{k-1}^c \mathbf{C}_{k-1}^+ \phi_{k-1}^{cT} + \mathbf{Q}_{k-1}^c$$

$$\mathbf{C}_k^+ = \mathbf{B}_k \mathbf{C}_k^- \mathbf{B}_k^T + \mathbf{K}_k^c \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^{cT}$$

Com *Reset* (IRC):

$$\mathbf{D}_{11} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_k \mathbf{T} \quad \mathbf{D}_{12} = \mathbf{A}_k$$

$$\mathbf{D}_{21} = (\mathbf{A}_k' - \mathbf{T} \mathbf{A}_k) \mathbf{T}$$

$$8 - \mathbf{D}_{22} = \mathbf{T} \mathbf{A}_k + \mathbf{I} - \mathbf{A}_k'$$

$$\mathbf{D}_k = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \hline \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right]$$

$$9 - \mathbf{C}_k^{+r} = \mathbf{D}_k \mathbf{C}_k^+ \mathbf{D}_k^T \quad (\text{usar no passo 7 na próxima } k\text{-ésima iteração})$$

Rodar em paralelo as equações da covariância computada pelo filtro \mathbf{P}'_k , baseado no modelo simplificado, para gerar a sequência de ganhos sub-ótima \mathbf{K}'_k , o qual é substituído em (6):

$$\mathbf{P}_k'^- = \phi_{k-1}' \mathbf{P}_{k-1}'^+ \phi_{k-1}'^T + \mathbf{Q}_{k-1}'$$

$$\mathbf{K}'_k = \mathbf{P}_k'^- \mathbf{H}_k'^T [\mathbf{H}_k' \mathbf{P}_k'^- \mathbf{H}_k'^T + \mathbf{R}_k]^{-1}$$

$$\mathbf{P}_k'^+ = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k \mathbf{H}_k'] \mathbf{P}_k'^-$$

A seguir utilizaremos um exemplo sobre estimação do desalinhamento empregando medidas de atitude em relação a duas estrelas, i.e., medidas de dois *star trackers*, para melhor compreender os passos envolvidos no algoritmo acima.

Conforme já visto, em uma plataforma estabilizada mecanicamente a velocidade angular ω (nominal, suposta conhecida) do sistema computado S_c em relação ao inercial S_i , a deriva da plataforma ϵ e o ângulo de desalinhamento ψ relacionam-se por meio de $\dot{\psi} = \dot{\psi} = -\omega^{ci} \times \psi + \epsilon$. Adicionalmente, a deriva é modelada como processo estocástico composto pela adição de constante aleatória com movimento browniano (também conhecido por processo de difusão) e com adição de ruído branco. Portanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_N \\ \dot{\psi}_E \\ \dot{\psi}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = u_1 + u_2 + \omega_1$$

$$\dot{u}_1 = 0; \dot{u}_2 = \omega_2; u = u_1 + u_2 \Rightarrow \epsilon = u + \omega_1; \dot{u} = \omega_2$$

Assim sendo, o modelo "verdadeiro" é:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{u} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \quad \omega_z \quad -\omega_y}^w & & & \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \\ \hline & & & \mathbf{0}_3 \end{array} \right]}_F \underbrace{\begin{bmatrix} \psi \\ u \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}}_{\omega} \quad (\dot{x} = Fx + \omega)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{4 \times 3} & | & \mathbf{0}_{4 \times 3} \end{bmatrix}}_H x_k + v_k \quad (y_k = Hx_k + v_k)$$

Já o modelo de projeto é:

$$\underbrace{\dot{\psi}}_{x'} = \underbrace{W}_{F'} x' + \underbrace{\omega_1}_{\omega'} \quad (\dot{x}' = F' x' + \omega')$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{4 \times 3} \end{bmatrix}}_{H'} x'_k + v_k \quad (y_k = H' x'_k + v_k)$$

Portanto $T = [I_3 \mid \mathbf{0}_3]$ e $Tx = \Psi$ e $e = \Psi - \hat{\Psi}$. Desta forma, seguindo os passos do sumário, tem-se que:

1) -

$$\Delta F = TF - F'T = [I_3 \mid \mathbf{0}_3] \left[\begin{array}{c|c} W & I_3 \\ \hline \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{array} \right] - W[I_3 \mid \mathbf{0}_3]$$

$$= [W \mid I_3] - [W \mid \mathbf{0}_3] = [\mathbf{0}_3 \mid I_3]$$

2) -

$$\mathbf{F}^c = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \hline \Delta \mathbf{F} & \mathbf{F}' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{W} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \hline \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \hline \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{W} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{discretização}} \phi_k^c$$

3) - Sejam \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 as intensidades de ruído associadas ao modelo dinâmico do desalinhamento ψ e da deriva ε , respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^c &= \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{T} \end{array} \right] \mathbf{Q} \left[\mathbf{I} \mid \mathbf{T}^T \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_6 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{1(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_{2(3 \times 3)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_6 \\ \hline \mathbf{I}_3 \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{Q}_{1(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_{1(3 \times 3)} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_{2(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline \mathbf{Q}_{1(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_{1(3 \times 3)} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{discretização}} \mathbf{Q}_k^c \end{aligned}$$

$$4) - \Delta \mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}' \mathbf{T} = [\mathbf{H}_{4 \times 3} \mid \mathbf{0}_3] - \mathbf{H}_{4 \times 3} [\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{0}_3] = \mathbf{0}_{4 \times 6}$$

5) - \mathbf{K}'_k é a sequência de ganhos computada pelo filtro; então:

$$\mathbf{B}_k = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{K}'_k \Delta \mathbf{H}_k & \mathbf{I} - \mathbf{K}'_k \mathbf{H}'_k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_6 & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{I}_3 - \mathbf{K}'_k \mathbf{H}_{4 \times 3} \end{array} \right]$$

$$6) - \mathbf{K}_k^c = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{K}'_k \end{array} \right]$$

$$7) - \mathbf{C}_k^- = \phi_{k-1}^c \mathbf{C}_{k-1}^+ \phi_{k-1}^{cT} + \mathbf{Q}_{k-1}^c$$

$$\mathbf{C}_k^+ = \mathbf{B}_k \mathbf{C}_k^- \mathbf{B}_k^T + \mathbf{K}_k^c \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^{cT} = \mathbf{B}_k \mathbf{C}_k^- \mathbf{B}_k^T + \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_6 & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{K}'_{k(3 \times 4)} \mathbf{R}_{(4 \times 4)} \mathbf{K}'_{k(3 \times 4)}^T \end{array} \right]$$

Se as estimativas dos ângulos de desalinhamento forem eliminados após cada medida e respectiva atualização, configura-se o *full reset* (IRC completo), conforme a seguir:

Realinhamento dos ângulos "verdadeiros" (IRC) é dado por *reset* completo:

$$\mathbf{x}_k^r = \mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} = \mathbf{x}_k - \left[\begin{array}{c} \hat{\psi}_{3 \times 1} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{array} \right] = \mathbf{x}_k - \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_3 \\ \hline \mathbf{0}_3 \end{array} \right] \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} \Rightarrow \mathbf{A}_k = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_3 \\ \hline \mathbf{0}_3 \end{array} \right]$$

Informação para o filtro do realinhamento realizado:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{r+} = \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} - \mathbf{A}'_k \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} = \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} - \mathbf{A}'_k \hat{\psi}_{k(3 \times 1)}^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^{r+} - \hat{\psi}_{k(3 \times 1)}^+ \Rightarrow \mathbf{A}'_k = \mathbf{I}_3$$

8) -

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{11} &= \mathbf{I} - \mathbf{A}_k \mathbf{T} = \mathbf{I}_6 - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & | & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_6 - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & | & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & | & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & | & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & | & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}_{12} &= \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}_{21} &= (\mathbf{A}'_k - \mathbf{T} \mathbf{A}_k) \mathbf{T} = (\mathbf{I}_3 - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & | & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & | & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} = \\
&= (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_3) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & | & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & | & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}_{22} &= \mathbf{T} \mathbf{A}_k + \mathbf{I} - \mathbf{A}'_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & | & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_3 \\
\mathbf{D}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & | & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & | & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & | & \mathbf{0}_3 & | & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & | & \mathbf{I}_3 & | & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & | & \mathbf{0}_3 & | & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$9) - \mathbf{C}_k^{+r} = \mathbf{D}_k \mathbf{C}_k^+ \mathbf{D}_k^T$$

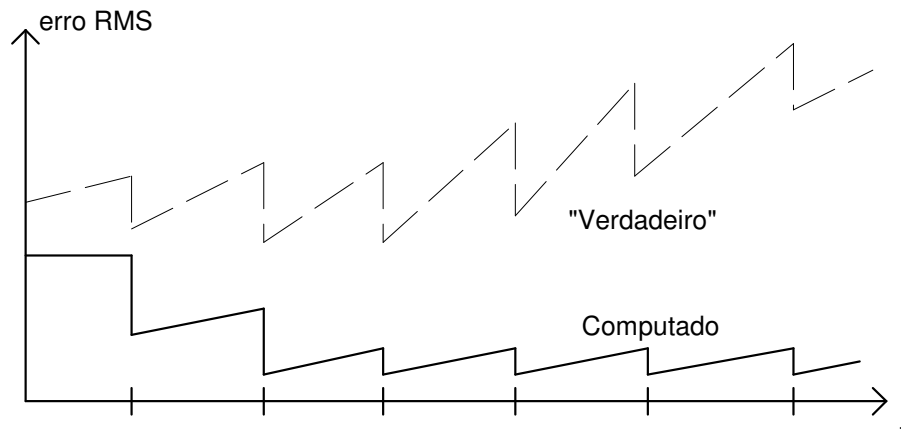
10) Rodar em paralelo as equações da covariância, \mathbf{P}'_k , computada pelo filtro baseado no modelo simplificado de forma a gerar a sequência de ganhos sub-ótima \mathbf{K}'_k , o qual é substituído em (6):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}'_k &= \boldsymbol{\phi}'_{k-1} \mathbf{P}'_{k-1} \boldsymbol{\phi}'_{k-1}^T + \mathbf{Q}'_{k-1} \\
\mathbf{K}'_k &= \mathbf{P}'_k \mathbf{H}'_k^T [\mathbf{H}'_k \mathbf{P}'_k \mathbf{H}'_k^T + \mathbf{R}'_k]^{-1} \\
\mathbf{P}'_k &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k \mathbf{H}'_k] \mathbf{P}'_k
\end{aligned}$$

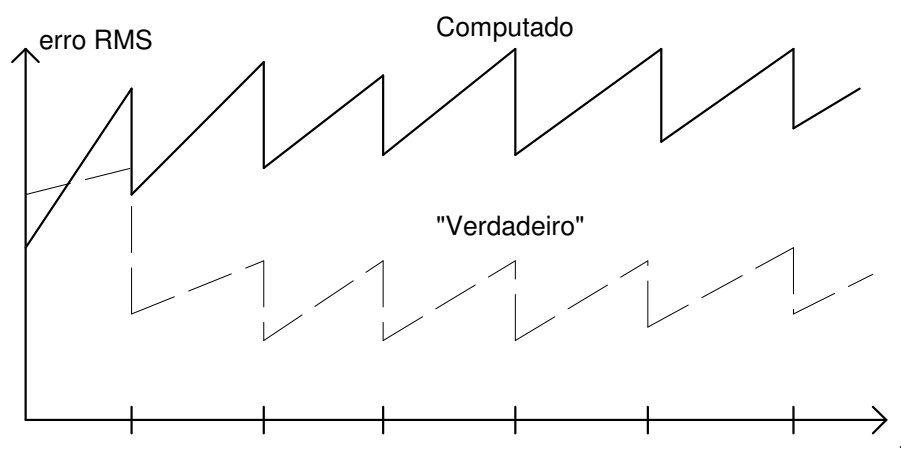
A análise da covariância verdadeira apresentada objetiva sintonizar *off line* a intensidade da incerteza no modelo simplificado do filtro, \mathbf{Q}'_k , de forma que a covariância computada pelo filtro \mathbf{P}'_k tenha um comportamento próximo daquele exibido pelo bloco inferior direito \mathbf{C}_k^e da matriz de segunda ordem \mathbf{C}_k . As condições iniciais de $\mathbf{C}(0)$ são conhecidas porque a análise *off line* usa os sinais gerados pelo modelo "verdadeiro" (na literatura, *ground truth*) para simular o mundo real.

Exemplo [13]: Sintonia de filtro por análise de covariância verdadeira.

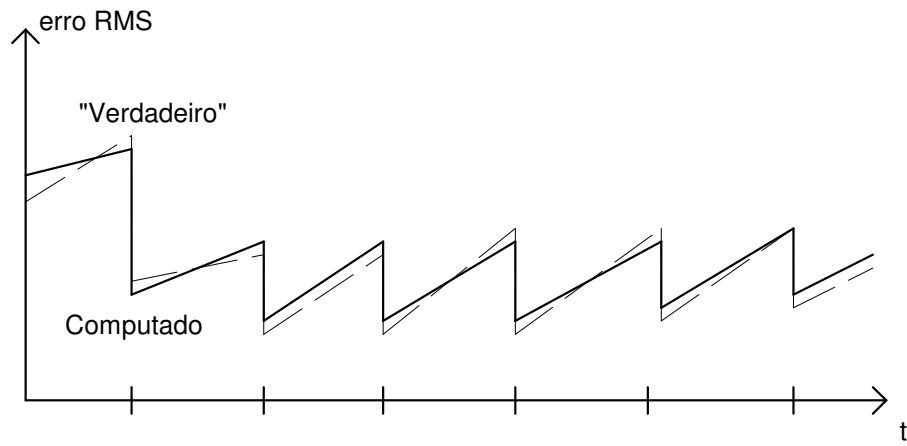
A linha tracejada indica a evolução temporal da raiz quadrada de elemento na diagonal do bloco inferior direito da matriz \mathbf{C}_k de segunda ordem, \mathbf{C}_k^{e-} e \mathbf{C}_k^{e+r} . Já a contínua, de elemento correspondente na matriz de covariância \mathbf{P}'_k e \mathbf{P}'_k computada pelo filtro. Três casos dignos de nota são ilustrados a seguir:



(a) Filtro subestima seus erros, implicando em computação de elementos com magnitude diminuta na matriz de ganho \mathbf{K}_k . Como resultado, as medidas são ignoradas e o erro "verdadeiro" de estimação torna-se significativamente maior do que o previsto pelo filtro no respectivo elemento de \mathbf{P}'_k . A este fenômeno chama-se divergência do filtro. Convém aumentar a magnitude de elementos na matriz \mathbf{Q}' .



(b) Filtro superestima seu erro de estimação, o que implica em computação de elementos com magnitude elevada na matriz de ganho \mathbf{K}_k . Como resultado, o peso excessivo colocado nas medidas acarreta rastreamento do ruído de medida e o filtro apresenta desempenho deficiente. Convém reduzir a magnitude de elementos na matriz \mathbf{Q}' .



c) Filtro adequadamente sintonizado

É área de pesquisa ativa a investigação de metodologias para sintonia (semi-) automática do filtro que realiza integração INS/GPS e INS/GPS/câmeras.

Bibliografia:

- [1] Siouris, G.M., (1993). *"Aerospace Avionics Systems: A Modern Synthesis"*, Academic Press, San Diego, CA, USA.
- [2] Faure, P. et al., (1971). *"Navigation Inertielle Optimale et Filtrage Statistique"*, Dunod, Paris.
- [3] Broxmeyer, C., (1964). *"Inertial Navigation Systems"*, McGraw-Hill, New York.
- [4] *"Inertial Guidance"*, (1962). Editado por Pittman, G.R.Jr., John Wiley & Sons, New York.
- [5] Bar-Itzhack, I.Y., (1990). Apostila do curso de sistemas de navegação e guiagem, Faculdade de Engenharia Aeroespacial, Technion - Israel Institute of Technology, Haifa (em hebraico).
- [6] Waldmann, J. (2001). Derivation of Coning Motion for Benchmarking Attitude Determination Algorithms, *Anais do III Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial*, Rio de Janeiro, RJ.
- [7] Waldmann, J. (2002). Relative Quaternion Discrete-Time Algorithm for Terrestrial Navigation with Strapdown Inertial Sensors, *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, RN, 2361-2366.
- [8] Waldmann, J. (2002). Attitude Determination Algorithms, Computational Complexity, and the Accuracy of Terrestrial Navigation with Strapdown Inertial Sensors, *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, RN, 2367-2372.
- [9] Savage, P.G. (1998). Strapdown Inertial Navigation System Integration Algorithm Design, Part 2: Velocity and Position Algorithms, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.21, No.2, pp.208-221.
- [10] Farrell, J.A. e Barth, M. (1998). *"The Global Positioning System and Inertial Navigation"*, McGraw-Hill, USA.
- [11] Brown, R.G. e Hwang, P.Y.C. (1992). Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, 2nd edition, John Wiley & Sons.
- [12] Bar-Itzhack, I.-Y. (1988). True Covariance Analysis, NASA - Goddard Space Flight Center, Technical Report, Code-554 R-E253 x6-8866, 41 pages.
- [13] Maybeck, P.S. (1979). Stochastic Models, Estimation, and Control, Volume 1, Academic Press.