EES-60 – Sensores e Sistemas para Navegação e Guiamento
Prof. Jacques
15 de novembro de 2019 – Lista Computacional 2 Parte 4. Individual.
Análise da covariância verdadeira na implementação ingênua do filtro de Kalman que desconsidere análise de observabilidade ao problema de rastreio 1D de MRU quando há erro de *bias* no sensor de posição e o efeito sobre o viés no erro de estimação do filtro.
Prazo para entrega: 21 de novembro de 2019.

1. No exercício 5-12 da lista computacional 2 parte 2, analisou-se a observabilidade ao se aumentar o vetor de estado do filtro de Kalman, originalmente composto apenas por posição e velocidade, com o erro de *bias* no sensor de posição em um problema de rastreio unidimensional (1D) de movimento retilíneo uniforme (MRU) com incerteza no modelo de aceleração. Foi adotado um modelo dinâmico de constante aleatória (*random constant*) com incerteza para a evolução temporal do *bias* do sensor. O filtro de Kalman correspondente foi implementado no exercício 3 da lista computacional parte 3 e assim foi possível avaliar o desempenho obtido à luz da análise de observabilidade previamente realizada.

O vetor de estado verdadeiro é $\boldsymbol{x^T} = [\xi \quad \dot{\xi} \quad \overline{w}]$ e o modelo verdadeiro é:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \qquad z_k = [1 \quad 0 \quad 1]\boldsymbol{x} + v_k$$

em que ω_1 e ω_2 são processos contínuos no tempo, brancos, com média zero, não correlacionados entre si e cujas densidades espectrais de potência são $q_1=0{,}1^2[m^2/s^2/Hz]$ e $q_2=0{,}1^2[m^2/Hz]$. $\overline{w}$ é o erro de *bias* no sensor de posição. A matriz de covariância contínua no tempo do ruído de modelagem da dinâmica verdadeira é então:

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \end{bmatrix} \delta(t)$$

e sua discretização pode ser simplificada, aqui, para $\boldsymbol{Q_d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \end{bmatrix}.T_s$ em que $T_s = 1[s]$ é o intervalo de amostragem das medidas discretas no tempo z_k. O ruído discreto no tempo que corrompe a medida de posição v_k é branco, tem média zero, não tem correlação com o ruído de modelagem da dinâmica verdadeira e sua variância é $R=0{,}025[m^2]$.

Aqui, vamos realizar a análise da covariância verdadeira discreta no tempo, vista em sala, em duas distintas situações:

a) implementação ingênua em que o vetor de estado $\boldsymbol{x'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}.\boldsymbol{x}$ do filtro de Kalman usa modelo simplificado que desconsidera o bias no sensor de posição; e

b) implementação em que o vetor de estado $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}.\boldsymbol{x}$ do filtro de Kalman usa modelo simplificado que considera a representação do vetor de estado verdadeiro em duas bases – uma varrendo o subespaço observável e a outra, o não-observável – e cujas dinâmicas temporais são desacopladas entre si, conforme discutido em sala e inspirado no artigo *Control Theoretic Approach to Inertial Navigation Systems, Bar-Itzhack & Berman, Journal of Guidance, vol.11 no.3, May-June 1988*. O modelo simplificado a ser usado no filtro de Kalman consistirá do subsistema observável.

A matriz de covariância contínua no tempo do ruído de modelagem da dinâmica simplificada no filtro de Kalman, em ambas as situações a) e b), é:

$$\boldsymbol{Q}'(t) = \begin{bmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & q_1 \end{bmatrix} \delta(t)$$

e sua discretização pode ser simplificada, aqui, para $\boldsymbol{Q}'_{\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & q_1 \end{bmatrix} .T_s$.

Poderão ser apreciados tanto o impacto sobre o viés do erro verdadeiro de estimação $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{T}.\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}'$ ao se desconsiderar de forma ingênua o bias de sensor no modelo do filtro de Kalman, assim como também as limitações do processo de estimação advindas da falta de observabilidade completa no problema em tela em que o sensor de posição se mostra corrompido por erro de bias.

O vetor de estado verdadeiro concatenado com o erro verdadeiro de estimação é $\boldsymbol{x^c} = [\boldsymbol{x}^T \quad \boldsymbol{e}^T]^T$ e o correspondente segundo momento estatístico (matriz de valores quadráticos médios) inicial $\boldsymbol{C}(0) = E\{\boldsymbol{x^c}\boldsymbol{x^{cT}}\}$ a ser empregado na análise de covariância inicial é (posição inicial é a origem do eixo de coordenadas de posição; velocidade inicial assumida nominalmente constante 0,5[m/s]; *bias* verdadeiro de 1[m] no sensor de posição):

$$\boldsymbol{C}(0) = \begin{bmatrix} 0[m^2] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25[m^2/s^2] & 0 & 0 & 0{,}25[m^2/s^2] \\ 0 & 0 & 1[m^2] & 1[m^2] & 0 \\ 0 & 0 & 1[m^2] & 1[m^2] & 0 \\ 0 & 0{,}25[m^2/s^2] & 0 & 0 & 0{,}25[m^2/s^2] \end{bmatrix}$$

Assume-se que, inicialmente, a média do erro verdadeiro de estimação é $\bar{\boldsymbol{e}}(0) = \boldsymbol{0}$ em ambas as situações e, portanto, a covariância inicial $\boldsymbol{P}'^{+}(0)$ do erro de estimação computada pelo filtro de Kalman será o bloco 2x2 inferior direito de **C**(0), i.e., $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{e_0}\boldsymbol{e_0}^{\boldsymbol{T}})$.

1. Apresente os valores propagados e atualizados na diagonal de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{e_k}\boldsymbol{e_k}^{\boldsymbol{T}})$ e compare com os respectivos valores na diagonal da covariância $\boldsymbol{P}'(k)$ computada pelo filtro.

2. No caso a), experimente empregar nas equações de propagação da covariância do filtro $10.q_2$ no lugar de q_2 e observe o efeito. Isto corresponde a aumentar a incerteza no modelo de constante aleatória no filtro de Kalman para que as medidas sejam mais consideradas do que o estado propagado pelo modelo simplificado do filtro.

3. Analise os resultados e teça suas conclusões.