

NAVSTAR (Navigation Signal, Time, and Range) GPS (Global Positioning System)

Pertence à família de sistemas de satélites para navegação global (GNSS – Global Navigation Satellite Systems)

Esta família inclui os sistemas GPS, GLONASS e Galileo.

1 – Descrição do sistema: segmento espacial – satélites

Originalmente empregou 21 satélites (SVs) operando e mais três de reserva. Em fevereiro 2016, havia 32 SVs, sendo um de reserva.

Giram em seis órbitas quase circulares, com inclinação de 55 graus em relação ao plano equatorial e separadas entre si de 60 graus ao longo da linha do equador. (Vide figura em arquivo)

Raio das órbitas – 26.500Km

Período das órbitas – cerca de 12 horas

Três ou quatro satélites operando em cada órbita

Espaçamento dos satélites na órbita não é o mesmo em todas as órbitas

A cada momento e em qualquer lugar da Terra há no mínimo quatro satélites visíveis sobre o horizonte com elevação de pelo menos 15 graus.

Em cada satélite há um relógio atômico de Césio extremamente acurado e cujo erro é conhecido ou pode ser estimado da referência de tempo do sistema GPS.

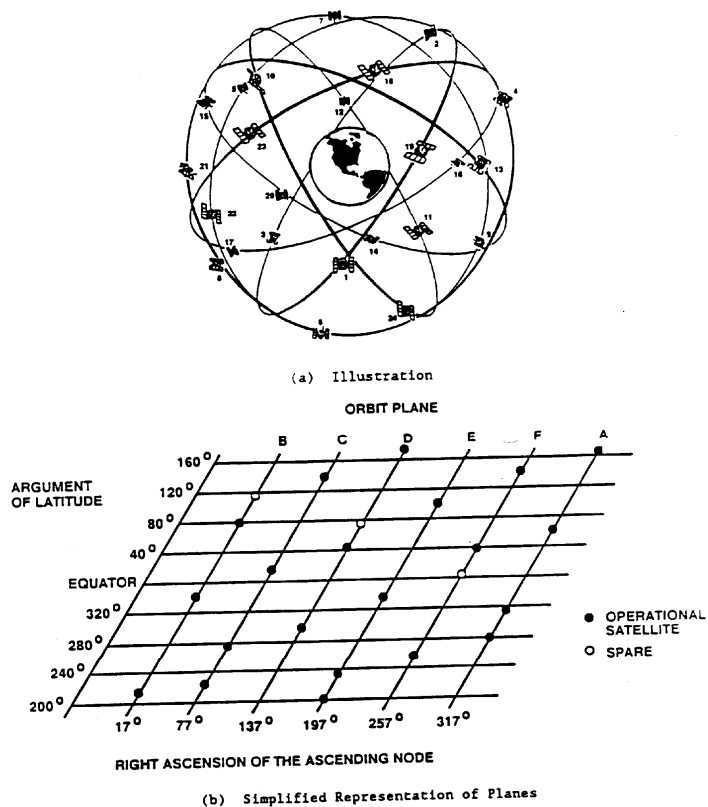


Figure 1. Six-Plane, 21-Satellite Constellation with Three Spares

2 – Descrição do sistema: comunicações

Os satélites transmitem para os receptores duas frequências, L1 – 1.575,42MHz e L2 – 1.227,60MHz, necessárias para estimar e corrigir o atraso de propagação pela ionosfera do sinal.

A frequência L1 é modulada por dois sinais do tipo pseudoaleatório: código C/A (*coarse acquisition*) e o código P (*precision*).

O (pseudo)código C/A tem comprimento de 1023 *chips* (bits) e uma taxa de transmissão (*chip rate*) de 1,023MHz, resultando em um período de 1ms.

O (pseudo)código P é secreto, composto pelo produto de dois códigos pseudoaleatórios, resultando em uma taxa de transmissão de 10,23MHz e com período de uma semana.

A frequência L2 é modulada somente pelo código P.

Outros sinais:

L3 – 1.381,05MHz é frequência usada para transmitir, dos satélites para estações de solo, dados de detecção e localização de detonações nucleares na atmosfera e espaço próximo. Os dados são empregados pelo United States Nuclear Detonation (NUDET) Detection System (USNDS) para monitorar a vigência de tratados de banimento de testes com artefatos nucleares.

L4 – 1.379,913MHz é usado para correções adicionais de propagação pela ionosfera .

L5 –1.176,45MHz foi adicionado no processo de modernização do GPS em 2010 para prover suporte a aplicações aeronáuticas civis voltadas à segurança de vida (*safety-of-life*).

Os satélites transmitem, em blocos de 1500 bits a uma taxa de 50 bits/s, uma mensagem de navegação que modula os códigos C/A e P.

A mensagem de navegação apresenta o seguinte teor:

Referência de tempo GPS

Dados de efeméride (dados da órbita do satélite transmissor da mensagem)

Dados para correção do atraso de propagação atmosférica

Dados de almanaque (dados das órbitas dos demais satélites)

Dados adicionais para a operação do receptor.

3 – Descrição do sistema – desempenho

C/A originalmente foi propositadamente degradado (SA – *Selective Availability*) aos usuários civis pelos operadores para acurácia de 100m aproximadamente. A partir de maio de 2000, SA foi temporariamente desativado. C/A a partir de 2015 fornece acurácia de posição no plano horizontal em torno de 4m, mas depende das condições de propagação do sinal, cobertura de SVs e geometria das linhas de visada entre as antenas do receptor e dos SVs.

O emprego de P provê maior robustez a *jamming*, *spoofing* e, originalmente, permitia acurácia de 10m em posição e 0,1m/s em velocidade, aproximadamente.

4 – Descrição do sistema – segmento de controle

A estação de controle fica em Colorado Springs, Colorado, Estados Unidos da América (o sistema foi desenvolvido, implementado e é mantido com recursos financeiros do contribuinte norte-americano, mas não há taxas pelo seu uso, aberto a todas as nacionalidades).

Estações de terra (Havaí, Kwajalein, Ilha de Ascensão, Ilha Diego Garcia) rastream os satélites e enviam mensagens à estação de controle. A estação de controle envia 3 vezes por dia mensagens de atualização para cada satélite.

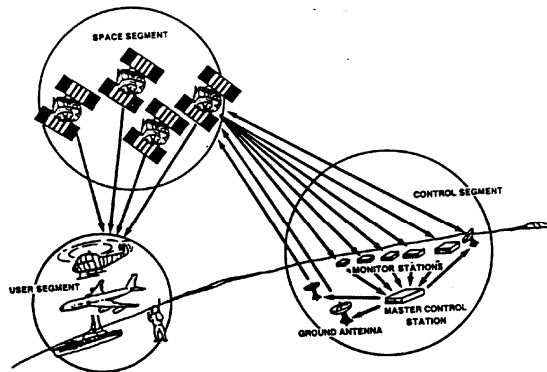


Figure 1.1 Navstar GPS Major Segments

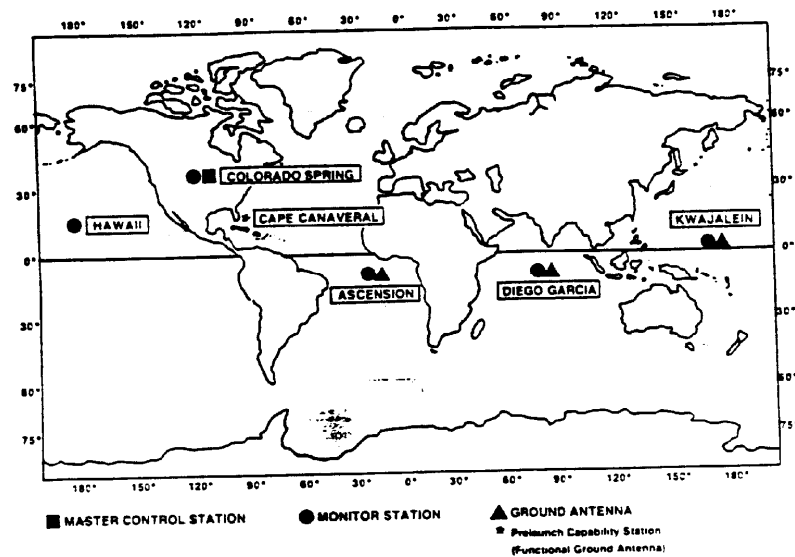
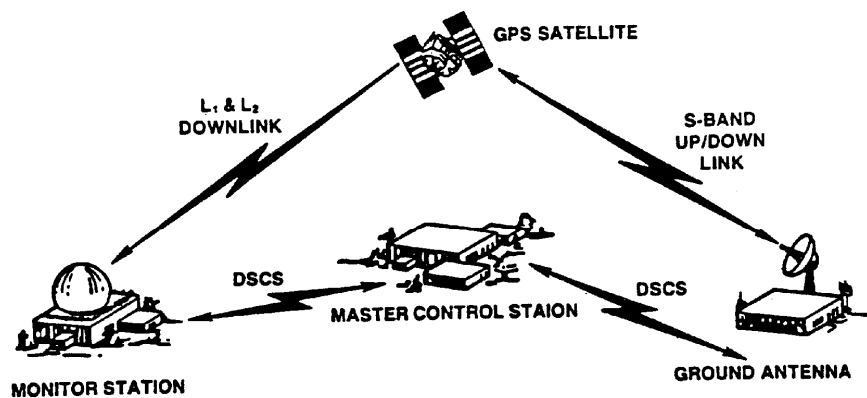


Figure 1.3 GPS Control Segment Locations



*DSCS = Defense Satellite Communication System

Figure 1.4 Monitor Station and Ground Antenna

5 – Descrição do sistema – segmento do usuário: receptor

O receptor embute elipsóides de referência para modelar a geóide, entre elas a elipsóide geocêntrica WGS-84.

O receptor contém um processador que coleta informação transmitida pelos satélites, no mínimo 4 para navegação em 3D. O processador computa a posição (e a velocidade) 3D da antena do receptor e o erro no relógio do receptor GPS.

O processador pode determinar, dos dados do almanaque, quais satélites estarão visíveis em um dado instante e suas respectivas posições no céu acima da localização estimada em que se encontra o receptor.

Um receptor atualmente possui 5 canais no mínimo e pode receber transmissões dos satélites visíveis, uma em cada canal.

O receptor identifica cada satélite que transmite pelo seu pseudocódigo individual. A mensagem de navegação informa ao receptor o instante GPS em que a transmissão do pseudocódigo foi enviada pelo satélite e o receptor mede, por correlação entre o pseudocódigo recebido e o sintetizado pelo receptor, em que instante do relógio do receptor (que difere do instante GPS devido a erros de relógio no receptor, pois este precisa ser de baixo custo) foi recebido o pseudocódigo. A diferença entre estes instantes de transmissão e recepção consiste na duração de tempo para que a mensagem chegue do satélite, incluindo erros de propagação e de relógio do receptor. Esta diferença é traduzida em uma distância chamada de *pseudodistância* ou *pseudoalcance*.

6 – Computação de posição

A distância computada ao i-ésimo satélite é $c\Delta T_i - c\tau - \Delta r_i$ sendo

c – velocidade da luz

ΔT_i – tempo computado para o sinal sair do i-ésimo satélite e chegar à antena do receptor

τ – erro constante (bias) no relógio do receptor

Δr_i – erro devido à ionosfera, atmosfera, etc.

Denotemos a pseudodistância e o bias de relógio por:

$\rho_i = c\Delta T_i$ – pseudodistância ao i-ésimo satélite

$b = c\tau$ – bias de relógio do receptor

É possível computar e eliminar o erro devido à ionosfera. Portanto, a distância entre o i-ésimo satélite à antena do receptor pode ser escrita como $\rho_i - b$. O quadrado da distância entre a antena e o i-ésimo satélite fica então:

$$(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2 = (\rho_i - b)^2$$

sendo

X_i, Y_i, Z_i as coordenadas **conhecidas** do i-ésimo satélite no sistema de coordenadas da terra S_e .

ρ_i a pseudodistância **conhecida** ao i-ésimo satélite

X, Y, Z as coordenadas **desconhecidas** do receptor no sistema de coordenadas da terra S_e .

O bias de relógio do receptor, b , também é desconhecido

Temos assim 4 incógnitas $\mathbf{X}^T = [X \ Y \ Z \ b]$ a estimar. Requer, no mínimo, 4 equações, i.e., 4 satélites, para obter estimativa.

6.1 – Computação da posição com 4 satélites:

As 4 equações associadas aos 4 satélites são:

$$\begin{aligned}\sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2} &= \rho_1 - b \\ \sqrt{(X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2 + (Z_2 - Z)^2} &= \rho_2 - b \\ \sqrt{(X_3 - X)^2 + (Y_3 - Y)^2 + (Z_3 - Z)^2} &= \rho_3 - b \\ \sqrt{(X_4 - X)^2 + (Y_4 - Y)^2 + (Z_4 - Z)^2} &= \rho_4 - b\end{aligned}$$

isto é:

$$\sqrt{(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2} = \rho_i - b \quad i=1,2,3,4$$

Considere uma estimativa inicial aproximada $\hat{\mathbf{X}}_0^T = [\hat{X}_0 \quad \hat{Y}_0 \quad \hat{Z}_0 \quad \hat{b}_0]$. Então:

$$\begin{aligned}X &= \hat{X}_0 + \Delta X \quad Y = \hat{Y}_0 + \Delta Y \quad Z = \hat{Z}_0 + \Delta Z \quad b = \hat{b}_0 + \Delta b \\ \hat{\rho}_{i0} - \hat{b}_0 &= \sqrt{(X_i - \hat{X}_0)^2 + (Y_i - \hat{Y}_0)^2 + (Z_i - \hat{Z}_0)^2} \quad i=1,2,3,4 \\ \rho_i &= \hat{\rho}_{i0} + \Delta \rho_i \quad i=1,2,3,4\end{aligned}$$

Substituindo nas equações de medida dos 4 satélites:

$$\hat{\rho}_{i0} + \Delta \rho_i - \hat{b}_0 - \Delta b = \sqrt{(X_i - \hat{X}_0 - \Delta X)^2 + (Y_i - \hat{Y}_0 - \Delta Y)^2 + (Z_i - \hat{Z}_0 - \Delta Z)^2} \quad i=1,2,3,4$$

Expandindo em série de Taylor e desprezando os termos de ordem dois $\Delta X^2, \Delta Y^2, \Delta Z^2$ ou superior:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{i0} + \Delta \rho_i - \hat{b}_0 - \Delta b &\approx \sqrt{(X_i - \hat{X}_0)^2 + (Y_i - \hat{Y}_0)^2 + (Z_i - \hat{Z}_0)^2} + \\ &+ \frac{(\hat{X}_0 - X_i)\Delta X + (\hat{Y}_0 - Y_i)\Delta Y + (\hat{Z}_0 - Z_i)\Delta Z}{\sqrt{(X_i - \hat{X}_0)^2 + (Y_i - \hat{Y}_0)^2 + (Z_i - \hat{Z}_0)^2}} \quad i=1,2,3,4\end{aligned}$$

e eliminando a solução nominal e considerando a igualdade no lugar da aproximação:

$$\Delta \rho_i = \frac{(\hat{X}_0 - X_i)}{\hat{\rho}_{i0} - \hat{b}_0} \Delta X + \frac{(\hat{Y}_0 - Y_i)}{\hat{\rho}_{i0} - \hat{b}_0} \Delta Y + \frac{(\hat{Z}_0 - Z_i)}{\hat{\rho}_{i0} - \hat{b}_0} \Delta Z + \Delta b \quad i=1,2,3,4 \quad (1)$$

Definindo os coeficientes

$$a_{i1} = \frac{(\hat{X}_0 - X_i)}{\hat{\rho}_{i0} - \hat{b}_0} \quad a_{i2} = \frac{(\hat{Y}_0 - Y_i)}{\hat{\rho}_{i0} - \hat{b}_0} \quad a_{i3} = \frac{(\hat{Z}_0 - Z_i)}{\hat{\rho}_{i0} - \hat{b}_0}$$

pode-se então representar (1) de forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \Delta b \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \rho_1 \\ \Delta \rho_2 \\ \Delta \rho_3 \\ \Delta \rho_4 \end{bmatrix}}_{\Delta \boldsymbol{\rho}} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{X} = \Delta \boldsymbol{\rho} \Rightarrow \Delta \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \Delta \boldsymbol{\rho}$$

então $\hat{\mathbf{X}}_1 = \hat{\mathbf{X}}_0 + \Delta \mathbf{X}$

Se $\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \Delta b \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \text{limiar}_x \\ \text{limiar}_y \\ \text{limiar}_z \\ \text{limiar}_b \end{bmatrix}$

computa-se mais uma iteração até que o critério de convergência seja atendido.

6.2 – Problemas na computação de posição com 4 satélites

Observe que $[a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3}]^T$ é um vetor unitário do i-ésimo satélite à posição estimada do receptor. Não há solução (acurada) se \mathbf{A} for (quase) singular, o que ocorre quando a geometria dos satélites no céu não é adequada e ao menos dois satélites apresentam linhas de visada coincidentes (ou muito próximas uma da outra). É preciso um satélite adicional com uma linha de visada bem distinta, ou extrapolar a estimativa de posição disponível até que os satélites movam-se ao longo de suas órbitas e saiam da geometria inadequada.

$\Delta \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho} - \hat{\boldsymbol{\rho}}$ é a diferença entre as pseudodistâncias medidas e as computadas de acordo com a estimativa de posição do receptor. Assumindo que, operando adequadamente, os erros de medida de pseudodistância apresentam $E\{\Delta \boldsymbol{\rho}\} = \mathbf{0}$, o seu efeito nos dois primeiros momentos centrais do erro de estimação é:

$$\begin{aligned} E\{\Delta \mathbf{X}\} &= \mathbf{A}^{-1} E\{\Delta \boldsymbol{\rho}\} = \mathbf{0} \\ \text{cov}\{\Delta \mathbf{X}\} &= E\{(\Delta \mathbf{X} - E\{\Delta \mathbf{X}\}) \cdot (\Delta \mathbf{X} - E\{\Delta \mathbf{X}\})^T\} = E\{\Delta \mathbf{X} \cdot \Delta \mathbf{X}^T\} = \\ &= \mathbf{A}^{-1} E\{\Delta \boldsymbol{\rho} \cdot \Delta \boldsymbol{\rho}^T\} \mathbf{A}^{-T} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{A}^{-T} \end{aligned}$$

Assumindo que os erros de medida de pseudodistância do receptor a cada satélite apresentam estatísticas iguais e que são não-correlacionados, então:

$$\mathbf{P} = \sigma^2 \mathbf{I} \Rightarrow \text{cov}\{\Delta \mathbf{X}\} = \sigma^2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{-T} = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$$

A figura de mérito GDOP (*geometric dilution of precision*) indica a qualidade da estimativa em função da geometria dos satélites no céu a cada instante e é definida por:

$$\text{GDOP} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}}$$

Note que

- o GDOP independe do sistema de coordenadas empregado para representar os vetores;
- o GDOP é o critério mais empregado pelo segmento de controle para posicionar os satélites no céu;

- o GDOP permite a seleção dos 4 melhores satélites a empregar na estimação de posição;
- Se considerarmos $\text{cov}\{\Delta\mathbf{X}\} / \sigma^2$ como a normalização do segundo momento central do erro de estimação de posição pela variância do ruído de medida de pseudodistância aos satélites, então:

$$\text{GDOP} = \sqrt{V_X + V_Y + V_Z + V_b}$$

sendo V_X, V_Y, V_Z, V_b as variâncias normalizadas de erro de estimação de posição e de bias de relógio do receptor, respectivamente, em função da geometria dos satélites no céu. São também definidas as figuras de mérito:

$$\text{PDOP} = \sqrt{V_X + V_Y + V_Z}$$

$$\text{HDOP} = \sqrt{V_X + V_Y} \quad \Rightarrow \quad \text{PDOP}^2 = \text{HDOP}^2 + \text{VDOP}^2$$

$$\text{VDOP} = \sqrt{V_Z}$$

$$\text{TDOP} = \sqrt{V_b} \quad \Rightarrow \quad \text{GDOP}^2 = \text{PDOP}^2 + \text{TDOP}^2$$

Após o GDOP, PDOP é o critério mais empregado para seleção dos 4 satélites.

6.3 – Estimação de posição empregando mais de 4 satélites

Considerando que há mais de 4 satélites com linhas de visada adequadas, o estimador por mínimos quadrados ponderados minimiza o erro quadrático no ajuste da estimativa aos erros de medida de pseudodistância, ponderando individualmente os erros de cada satélite. Assim:

$$(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2 = (\rho_i - b)^2 \quad i=1,2,...,n \quad n>4$$

Definindo os vetores abaixo

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ b \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{S}_1, \mathbf{X}) \\ f_2(\mathbf{S}_2, \mathbf{X}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{S}_n, \mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

$$f_i(\mathbf{S}_i, \mathbf{X}) = \sqrt{(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2} + b = \rho_i - v_i \quad i=1,2,...,n \quad (1)$$

sendo v_i o erro de medida do pseudoalcance do i -ésimo satélite. É possível anotar (1) de forma matricial como a seguir:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{f}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n, \mathbf{X}) + \mathbf{v} \quad (2)$$

Assumindo uma estimativa inicial $\hat{\mathbf{X}}_0^T = [\hat{X}_0 \quad \hat{Y}_0 \quad \hat{Z}_0 \quad \hat{b}_0]$ para \mathbf{X} e linearizando (2) em torno desta estimativa inicial:

$$\Delta \boldsymbol{\rho} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}_0} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n, \hat{\mathbf{X}}_0) \Delta \mathbf{X} + \mathbf{v} \quad (3)$$

sendo $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}_0 + \Delta \mathbf{X}$, $\boldsymbol{\rho} = \hat{\boldsymbol{\rho}}_0 + \Delta \boldsymbol{\rho}$ e $\hat{\rho}_{i0} = \sqrt{(X_i - \hat{X}_0)^2 + (Y_i - \hat{Y}_0)^2 + (Z_i - \hat{Z}_0)^2} + \hat{b}_0$. O estimador que minimiza o erro quadrático ponderado é formulado como

$$\hat{\Delta \mathbf{X}}_{\text{WLS}} = \min_{\Delta \mathbf{X}} (\Delta \boldsymbol{\rho} - \mathbf{F} \Delta \mathbf{X})^T \mathbf{W} (\Delta \boldsymbol{\rho} - \mathbf{F} \Delta \mathbf{X}) = \min_{\Delta \mathbf{X}} \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v}$$

sendo $\mathbf{W} > 0$ a matriz de pesos positiva definida. O estimador ótimo que minimiza o critério acima é (vide Gelb, A. (Edit), Applied Optimal Estimation, M.I.T. Press, Cambridge, MA, USA, 1974, pp.23, 24, 103):

$$\hat{\Delta \mathbf{X}}_{\text{WLS}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W}^{-1} \Delta \boldsymbol{\rho} \quad (4)$$

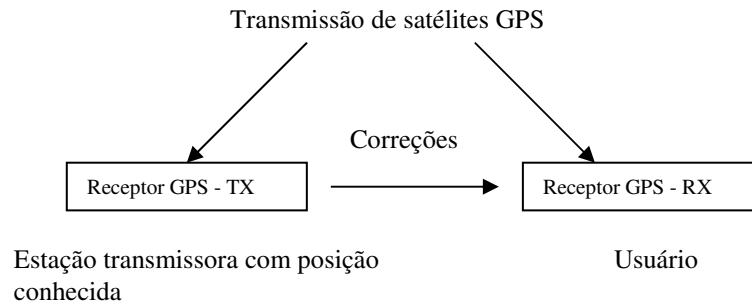
O algoritmo para solução GPS é:

- Dados \mathbf{W} e a estimativa inicial $\hat{\mathbf{X}}_0^T = [\hat{X}_0 \quad \hat{Y}_0 \quad \hat{Z}_0 \quad \hat{b}_0]$, computar \mathbf{F} e $\Delta \boldsymbol{\rho}$;
- Computar $\hat{\Delta \mathbf{X}}_{\text{WLS}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W}^{-1} \Delta \boldsymbol{\rho}$;
- Computar $\hat{\mathbf{X}}_1 = \hat{\mathbf{X}}_0 + \hat{\Delta \mathbf{X}}_{\text{WLS}}$;
- Se $\hat{\Delta \mathbf{X}}_{\text{WLS}} < [\lim_X \quad \lim_Y \quad \lim_Z \quad \lim_b]^T$ então pare,

Caso contrário, retornar ao passo (a) com a nova estimativa inicial $\hat{\mathbf{X}}_1$.

6.7 – GPS diferencial

Assume-se que um receptor estacionário está localizado em posição muito bem conhecida e transmite a outros receptores que se movem em sua vizinhança, capazes de receber esta transmissão das devidas correções. O receptor que transmite as correções e o receptor móvel que recebe as correções precisam receber medidas dos mesmos satélites para que a correção diferencial seja eficaz.



6.8 – Integração INS/GPS: Fraca ou Forte (vide fusão sensorial e filtro de Kalman)

6.9 – Determinação de atitude com auxílio do GPS

Baseado na diferença de pseudodistância ou de fase da portadora transmitida pelo i -ésimo satélite ao chegar a cada uma de 3 antenas não colineares fixas ao veículo.