Lista 2 - Parte 2

Francisco Castro

Aesp 20

Equações relevantes p/ análise e implementação do filtro de Kalman

$$x_n = A\, x_{n-1} + B\, u_{n-1} + w_{n-1} \; ; \; cov(w) = R \quad (1)$$

$$z_n = H x_n + v_n \; ; \; cov(v) = Q \quad (2)$$

$$e_n^- = x_n - \hat{x}_n^- \quad (3)$$

$$e_n^+ = x_n - \hat{x}_n^+ \quad (4)$$

$$p^- = E\left[e_n^- (e_n^-)^T\right] \quad (5)$$

$$p^+ = E\left[e_n^+ (e_n^+)^T\right] \quad (6)$$

Portanto

$$\hat{x}_n^+ = \hat{x}_n^- + K_n (z_n - H \hat{x}_n) \quad (7)$$

$$K_n = P_n^- H^T (H P_n^- H^T + R)^{-1} \quad (8)$$

$$P_n^- = A P_{n-1}^+ A^T + Q \quad (P(k|k-1)) \quad (9)$$

$$P_n^+ = (I - K_n H) P_n^- \quad (P(k|k)) \quad (10)$$

S-1 | 1. No steady state,

$$P_n^+ = P_{n-1}^+ \xrightarrow{(9)} P_n^- = A\left[(I - K_n H) P_n^-\right] A^T + Q$$

$$\longrightarrow P_n^- = A P_n^- A^T - A K_n H P_n^- A^T + Q$$

$$\xrightarrow{(8)} P_n^- = A P_n^- A^T - A\left[P_n^- H^T (H P_n^- H^T + R)^{-1}\right] H P_n^- A^T + Q \quad (11)$$

P/ o caso escalar,

$$p_n^- = a^2 p_n^- - a^2 h^2 (p_n^-)^2 (p_n^- h^2 + r)^{-1} + q$$

$$\therefore p_n^- (1 - a^2) = - \frac{(a h p_n^-)^2}{p_n^- h^2 + r} + q$$

$$\therefore p_n^{-2} h^2 + p_n^- \left[(1-a^2) r - q h^2\right] - r q = 0 \rightarrow p_n^- = \frac{-\left[(1-a^2) r - q h^2\right] \pm \sqrt{\left[(1-a^2) r - q h^2\right]^2 - 4 h^2 r q}}{2 h^2} \quad (12)$$

DA ONDE TIRAMOS, DE (9)

$$p_n^+ = \frac{p_n^- - q}{a^2}$$

EM QUE p_n^- É DADO POR (12). ESTA É A COVARIÂNCIA $p_\infty = \lim_{n\to\infty} p(n|n)$.

2. A SIMULAÇÃO DA TRAJETÓRIA CONSTA NO ANEXO A1

3. $\hat{x}(0|0) = \frac{z(0)}{h} \longrightarrow \hat{\dot{x}}(0|0) = \frac{z(0) - z(-1)}{h}$

i) $E[\hat{x}(0|0)] = E\left[\frac{z(0)}{h}\right] = \frac{1}{h} E[h\,x(0) + w(0)] = x(0)$, POIS $E[w(0)] = 0$

ii) $E[\hat{\dot{x}}(0|0)] = E\left[\frac{z(0) - z(-1)}{h}\right] = \frac{1}{h} E\left[h(x(0) - x(-1)) + (w(0) - w(-1))\right] = (x(0) - x(-1))$

iii) $\mathrm{VAR}(\hat{x}(0|0)) = E\left[(\hat{x}(0|0) - E[\hat{x}(0|0)])^2\right]$

$$\overset{(i)}{=} E\left[(\hat{x}(0|0) - x(0))^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{h\,x(0) + w(0)}{h} - x(0)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{w(0)^2}{h^2}\right]$$

$$= \frac{1}{h^2} \cdot \mathrm{VAR}(w(0)) \qquad (E[w(0)] = 0)$$

$$= \frac{r}{h^2}$$

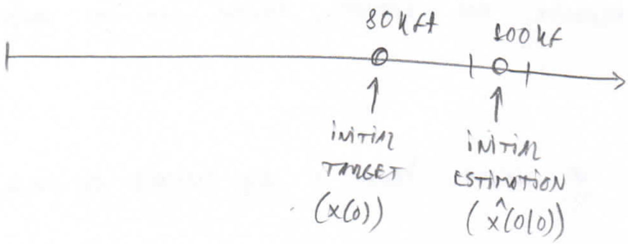
4. OS RESULTADOS CONSTAM NO ANEXO A2

5. NA SIMULAÇÃO, $p_n^+(\mathrm{END}) = 0.0951$. RESOLVENDO A EQUAÇÃO DESCRITA EM 1., TEMOS $p_\infty^+ = 0.0951$.
LOGO, HÁ CONSISTÊNCIA DE RESULTADOS.

6. VIDE ANEXO A3

7. DEVE-SE ALTERAR A VARIÂNCIA DO RUÍDO w, OU SEJA, r.

5-6



1. Temos que o range de aceitação baseia-se em $\sigma = \sqrt{10^6} = 10^3\ ft = 1 kf$ (desvio padrão). Logo, crê-se que o valor real da variável estimada está entre 95 kft e 105 kft com 99,9% de certeza (5σ). Contudo, sabe-se que não está. Portanto, a qualidade da estimativa inicial está ruim.

2. Temos uma incerteza muito grande na estimação, ou uma variância muito pequena inicialmente quanto ao range de estimativa que deveria ter p/ englobar a medida "real". Logo, o erro de estimação médio deve divergir do erro real.

3. Consideraria uma variância inicial de

$$5\sigma \geq 100 - 80 \quad \longrightarrow \quad \sigma \geq 4 \quad \longrightarrow \quad \boxed{var \geq 16\ kft^2}$$

5-12 * Original:

$$x = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F} x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}}_{\Gamma} v(k) \quad , \quad k \in [0, 99] \quad , \quad v(k) \text{ tq } E[v(k)] = 0 \text{ e } E[v(k)^2] = q$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$z(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x(k) + w(k) \quad , \quad w(k) \text{ tq } E[w(k)] = 0 \text{ e } E[w(k)^2] = r = 1 \quad , \quad k \in [1, 100].$$

$$E[v(k)\, w(k)] = E[v(k)] \cdot E[w(k)].$$

1. * Modificado:

$$x = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \underbrace{\bar{w} + w(k)}_{\text{biased noise}} = \xi(k) + \bar{w} + w(k) \longrightarrow z(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H'} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ \bar{w} \end{bmatrix}}_{x'} + w(k)$$

com isso,

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F'} x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'} \begin{bmatrix} v(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} \quad , \quad v(k),\ v_2(k) \text{ com média zero}$$

2. PROVAVELMENTE VAMOS CONSEGUIR UMA ESTIMAÇÃO DECENTE DOS ESTADOS, MESMO COM UM SENSOR COM BIAS, DADA A ADAPTAÇÃO DO MODELO A SER ESTIMADO.

CONTUDO, NÃO SERÁ POSSÍVEL $\underbrace{\text{ESTIMAR}}_{}$ À PRIORI O BIAS DO SENSOR. VENDO A SUA MATRIZ DE OBSERVABILIDADE $\left[C ; CA ; CA^2\right]$, TEMOS QUE O POSTO É 2, INDICANDO A OBSERVABILIDADE DE APENAS 2 ESTADOS, SÃO ELES $\xi + \bar{w}$ E $\dot{\xi}$ (JÁ QUE $\dot{\bar{w}} = 0$).

LISTA 2 - PARTE 3

01)

$$\hat{\xi}(0|0) = z(0) = \xi(0) + w(0)$$

$$\hat{\dot{\xi}}(0|0) = \frac{z(0) - z(-1)}{T} = \frac{\xi(0) - \xi(-1) + w(0) - w(-1)}{T}$$

i) $E\left[\hat{\xi}(0|0)\right] = E\left[\xi(0) + w(0)\right] = \xi(0)$

ii) $E\left[\hat{\dot{\xi}}(0|0)\right] = E\left[\frac{\xi(0) - \xi(-1) + w(0) - w(-1)}{T}\right] = \frac{\xi(0) - \xi(-1)}{T}$

iii)
$$\text{VAR}\left[\hat{\xi}(0|0)\right] = E\left[\left(\hat{\xi}(0|0) - E\left[\hat{\xi}(0|0)\right]\right)^2\right]$$

$$\overset{(i)}{=} E\left[\left(\xi(0) + w(0) - \xi(0)\right)^2\right]$$

$$= E\left[w(0)^2\right]$$

$$= \text{VAR}\left(w(0)\right) = R$$

iv)
$$\text{VAR}\left[\hat{\dot{\xi}}(0|0)\right] = E\left[\left(\hat{\dot{\xi}}(0|0) - E\left[\hat{\dot{\xi}}(0|0)\right]\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{\xi(0) - \xi(-1) + w(0) - w(-1)}{T} - \frac{\xi(0) - \xi(-1)}{T}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{w(0) - w(-1)}{T}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{T^2} E\left[w(0)^2 - 2w(0)w(-1) + w(-1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{T^2}\left(\underbrace{E\left[w(0)^2\right]}_{R} - \underbrace{2E\left[w(0)\right]E\left[w(-1)\right]}_{0} + \underbrace{E\left[w(-1)^2\right]}_{R}\right)$$

$$= \frac{2R}{T^2}$$

(continuação lista 02 - parte 2, questão 01)

iv) $\text{cov}\left(\hat{\xi}(0|0), \hat{\dot{\xi}}(0|0)\right) = E\left[\left(\hat{\xi}(0|0) - E\left[\hat{\xi}(0|0)\right]\right)\left(\hat{\dot{\xi}}(0|0) - E\left[\hat{\dot{\xi}}(0|0)\right]\right)\right]$

$$\overset{(iv)+(iii)}{=} E\left[\left(w(0)\right)\left(\frac{w(0)-w(-1)}{T}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{T} E\left[w(0)^2 - w(0)\,w(-1)\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left(\underbrace{E\left[w(0)^2\right]}_{R} - \underbrace{E\left[w(0)\right]E\left[w(-1)\right]}_{0}\right)$$

$$= \frac{R}{T}$$

Logo,

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} R & R/T \\ R/T & 2R/T^2 \end{bmatrix} \blacksquare$$

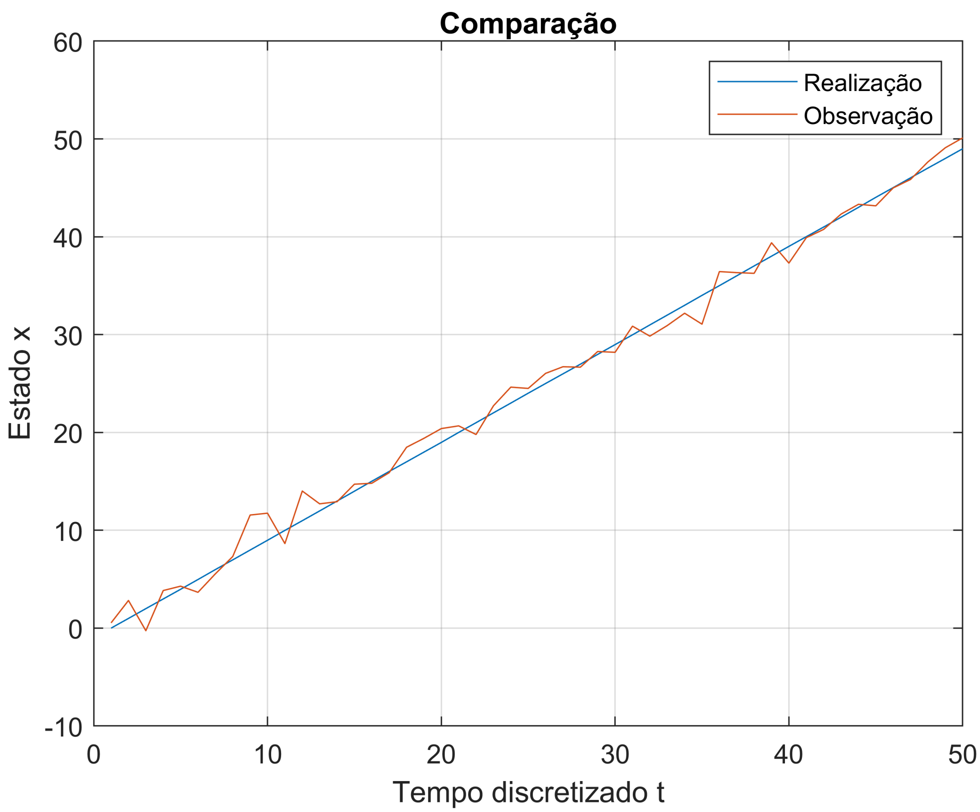
<u>02</u>| Vide anexo B1.

<u>03</u>| Vide anexo B2.

Anexo A1

Simulação da trajetória usando gerador de números aleatórios (problema 5-1.2)

```
clear

f = 1;
h = 1;
q = 0.01;
r = 1;

n = 1;
k = 50;

rng('default');
v = 0 + r.*randn(n,k);
w = 0 + q.*randn(n,k);
u = zeros(n,k)+1;
x(1) = 0;   % x0
z(1) = v(1);

result(1) = x(1);
for k = 2:50
    x(k) = f*x(k-1) + u(k-1) + w(k-1); % x_{k+1}
    z(k) = h*x(k) + v(k);
end

figure;
plot(1:k, x);
hold on;
plot(1:k, z);
grid on;
title("Comparação");
xlabel("Tempo discretizado t");
ylabel("Estado x");
legend("Realização", "Observação");
```


Comparação
Realização
Observação
Estado x
Tempo discretizado t
60
50
40
30
20
10
0
-10
0
10
20
30
40
50

Anexo A2-1

Programa de estimação do estado (problema 5-1.4)

```
clear

% Quantidade de iterações
k = 50;
n = 1;

% Realização
x = zeros(k,n);
u = (zeros(k,n)+1);
f = 1;
g = 1;

% Observação
z = zeros(k,n);
h = 1;

% Definição dos ruídos
rng('default');
r = 1;
q = 0.01;
w = 0 + q.*randn(k,n);
v = 0 + r.*randn(k,n);

% Definição dos estimadores de mínima covariância
p00 = r/h;
P_posteriori = p00;      % P(0|0)

% Condições iniciais
x(1) = 0;
z(1) = v(1);

% Inicialização dos vetores de estimação
x_priori = x;
x_posteriori = x;

% Evolução do estado
for i = 2:k
    % Realização: o estado evolui para x_n
    x(i,:) = (f*x(i-1,:)' + g*u(i-1,:)' + w(i-1,:)')';

    % Estimação: estimamos x-_n com base em x+_n-1
    x_priori(i,:) = (f*x_posteriori(i-1,:)'+g*u(i-1,:)')';

    % Obtemos P-_n a partir de P+_n-1
    P_priori(i,:) = f*P_posteriori(i-1,:)*f'+q;

    % Obtemos K_n a partir de P-_n
```

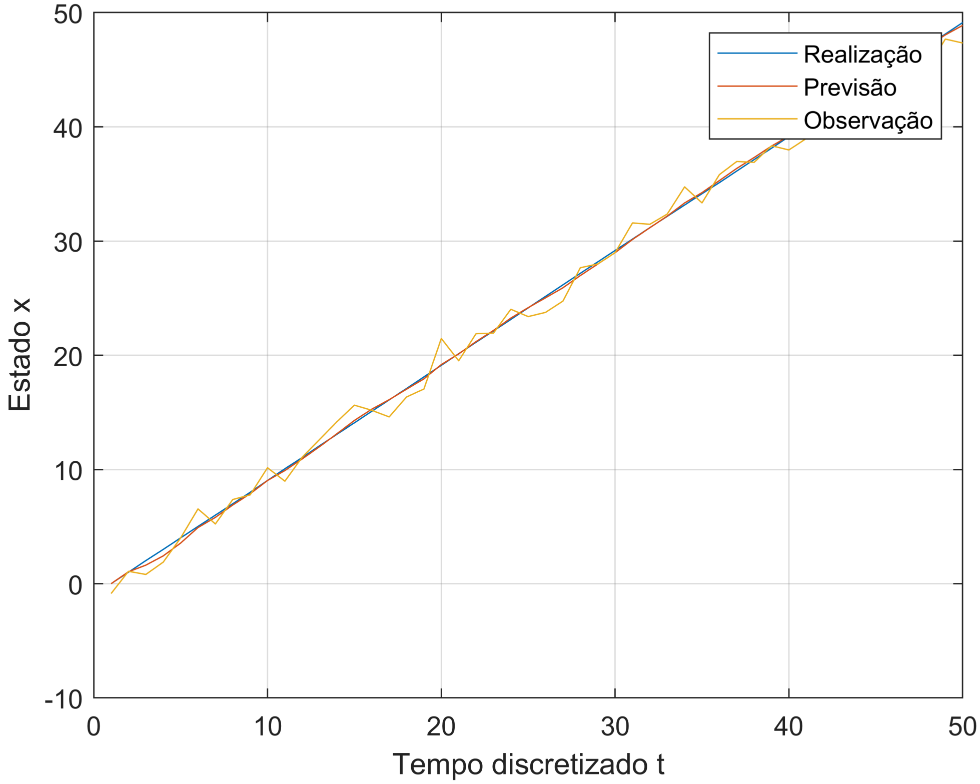
```
    K(i,:) = P_priori(i,:)*h'/(h*P_priori(i,:)*h'+r);

    % Obtemos P+_n a partir de P-_n
    P_posteriori(i,:) = (eye(n)-K(i,:)*h)*P_priori(i,:);

    % Observação: medimos z_n
    z(i,:) = (h*x(i,:)' + v(i,:)')';

    % Previsão (Filtro de Kalman): estimamos x+_n com base em x-_n, z_n e K_n
    x_posteriori(i,:) = x_priori(i,:)+(K(i,:)*(z(i,:)'-h*x_priori(i,:)'))';

end
```

Gera a tabela exibida no Anexo A2-2 com os resultados para a listagem das grandezas pedidas.

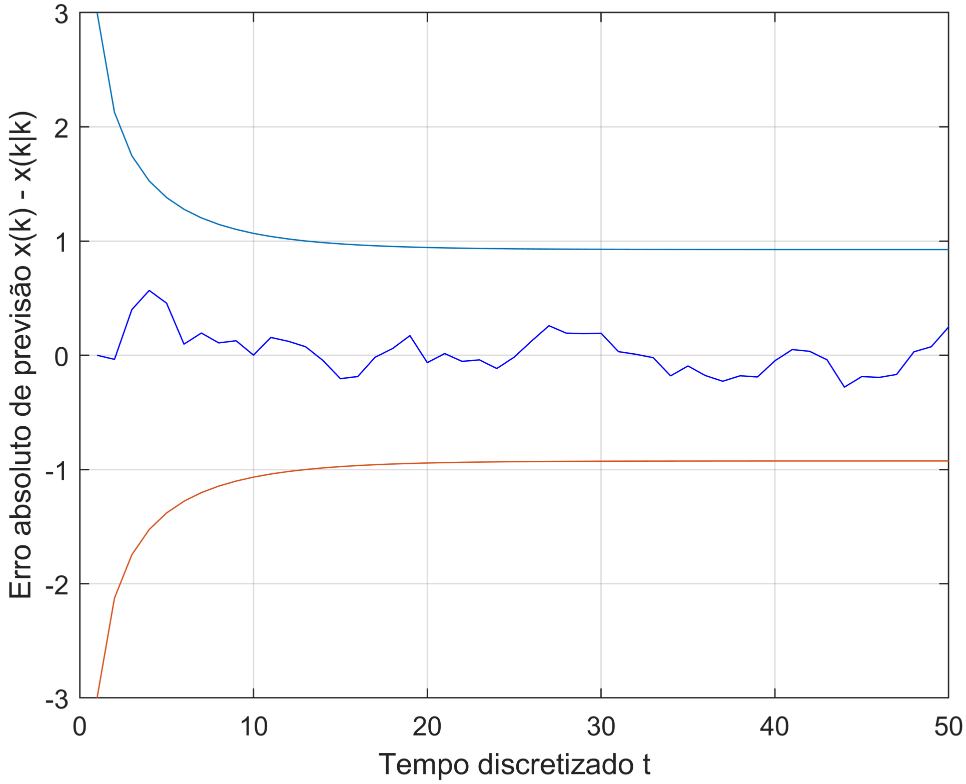
```
resultados(1:k,1) = 1:k;
resultados(1:k,end+1) = x;
resultados(1:k,end+1) = w;
resultados(1:k,end+1) = v;
resultados(1:k,end+1) = z;
resultados(1:k,end+1) = x_priori;
resultados(1:k,end+1) = P_priori;
resultados(1:k,end+1) = h*x_priori;
resultados(1:k,end+1) = h*P_priori*h'+r;
resultados(1:k,end+1) = z-h*x_priori;
resultados(1:k,end+1) = (z-h*x_priori)./((h*P_priori*h+r).^0.5);
resultados(1:k,end+1) = P_priori*h'./(h*P_priori*h'+r);
resultados(1:k,end+1) = x_posteriori;
resultados(1:k,end+1) = P_posteriori;
resultados(1:k,end+1) = x_posteriori./(P_posteriori.^0.5);
```

Plota os gráficos para visualização do processo de previsão e estimação.

```
figure;
plot(1:k, x);
hold on;
plot(1:k, x_posteriori);
hold on;
plot(1:k, z);
grid on;
xlabel("Tempo discretizado t");
ylabel("Estado x");
legend("Realização", "Previsão", "Observação");
```




```
figure
plot(1:k, x-x_posteriori, 'b');
hold on;
grid on;
plot(1:k, 3*sqrt(P_posteriori))
plot(1:k, -3*sqrt(P_posteriori))
xlabel("Tempo discretizado t");
ylabel("Erro absoluto de previsão x(k) - x(k|k)");
```



Erro absoluto de previsão x(k) - x(k|k)
Tempo discretizado t
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
10
20
30
40
50

Anexo A2-2

k	x(k)	v(k)	w(k)	z(k)	x_hat(k|k-1)	P(k|k-1)	z_hat(k|k-1)	S(k)	nu(k)	nu(k)/sqrt(S(k))	W(k)	x_hat(k|k)	P(k|k)	x_hat(k|k)/sqrt(P(k|k))
1	0	0,00538	-0,86365	-0,86365	0	0	0	1	-0,8637	-0,8215	0	0	1	0
2	1,00538	0,01834	0,07736	1,08274	1	1,01	1	2,01	0,08274	0,0787	0,50249	1,04157369	0,50249	1,46935706
3	2,02372	-0,02259	-1,21412	0,8096	2,041573692	0,512488	2,041573692	1,51249	-1,232	-1,1719	0,33884	1,62413424	0,33884	2,79014108
4	3,00113	0,00862	-1,1135	1,88763	2,624134243	0,348838	2,624134243	1,34884	-0,7365	-0,7006	0,25862	2,43365792	0,25862	4,78550471
5	4,00975	0,00319	-0,00685	4,0029	3,433657921	0,268621	3,433657921	1,26862	0,56924	0,5415	0,21174	3,55419051	0,21174	7,72390196
6	5,01294	-0,01308	1,53263	6,54557	4,554190509	0,221742	4,554190509	1,22174	1,99138	1,8943	0,1815	4,91561907	0,1815	11,5383483
7	5,99986	-0,00434	-0,76967	5,23019	5,915619073	0,191497	5,915619073	1,1915	-0,6854	-0,652	0,16072	5,80545779	0,16072	14,4811176
8	6,99552	0,00343	0,37138	7,3669	6,805457787	0,17072	6,805457787	1,17072	0,56144	0,5341	0,14582	6,88733016	0,14582	18,0358111
9	7,99895	0,03578	-0,22558	7,77337	7,887330165	0,155824	7,887330165	1,15582	-0,114	-0,1084	0,13482	7,87196582	0,13482	21,4393343
10	9,03473	0,02769	1,11736	10,1521	8,871965818	0,144817	8,871965818	1,14482	1,28012	1,2177	0,1265	9,03389864	0,1265	25,4000061
11	10,0624	-0,0135	-1,08906	8,97336	10,03389864	0,136498	10,03389864	1,1365	-1,0605	-1,0088	0,1201	9,90652435	0,1201	28,5853071
12	11,0489	0,03035	0,03256	11,0815	10,90652435	0,130104	10,90652435	1,1301	0,17496	0,1664	0,11513	10,926667	0,11513	32,2034072
13	12,0793	0,00725	0,55253	12,6318	11,926667	0,125126	11,926667	1,12513	0,70514	0,6708	0,11121	12,0050857	0,11121	35,9991907
14	13,0865	-0,00063	1,10061	14,1871	13,00508568	0,12121	13,00508568	1,12121	1,18206	1,1244	0,10811	13,1328739	0,10811	39,9423428
15	14,0859	0,00715	1,54421	15,6301	14,13287394	0,118107	14,13287394	1,11811	1,49724	1,4242	0,10563	14,2910288	0,10563	43,9711582
16	15,093	-0,00205	0,08593	15,179	15,29102883	0,115631	15,29102883	1,11563	-0,112	-0,1066	0,10365	15,2794155	0,10365	47,4602446
17	16,091	-0,00124	-1,49159	14,5994	16,27941545	0,113646	16,27941545	1,11365	-1,68	-1,5981	0,10205	16,1079729	0,10205	50,4239646
18	17,0898	0,0149	-0,7423	16,3475	17,10797291	0,112049	17,10797291	1,11205	-0,7605	-0,7234	0,10076	17,0313441	0,10076	53,6546398
19	18,1047	0,01409	-1,06158	17,0431	18,03134414	0,110759	18,03134414	1,11076	-0,9883	-0,9401	0,09971	17,9327991	0,09971	56,7895887
20	19,1187	0,01417	2,35046	21,4692	18,93279915	0,109715	18,93279915	1,10971	2,5364	2,4127	0,09887	19,1835668	0,09887	61,0102506
21	20,1329	0,00671	-0,6156	19,5173	20,18356679	0,108867	20,18356679	1,10887	-0,6663	-0,6338	0,09818	20,118155	0,09818	64,2065061
22	21,1396	-0,01207	0,74808	21,8877	21,11815499	0,108179	21,11815499	1,10818	0,76955	0,732	0,09762	21,1932778	0,09762	67,8315536
23	22,1276	0,00717	-0,19242	21,9351	22,19327784	0,107619	22,19327784	1,10762	-0,2581	-0,2456	0,09716	22,1681965	0,09716	71,1183625
24	23,1347	0,0163	0,88861	24,0233	23,16819653	0,107162	23,16819653	1,10716	0,85514	0,8135	0,09679	23,2509659	0,09679	74,7353132
25	24,151	0,00489	-0,76485	23,3862	24,25096588	0,10679	24,25096588	1,10679	-0,8648	-0,8226	0,09649	24,1675263	0,09649	77,8035844
26	25,1559	0,01035	-1,40227	23,7537	25,1675263	0,106486	25,1675263	1,10649	-1,4139	-1,3449	0,09624	25,0314577	0,09624	80,6886563
27	26,1663	0,00727	-1,42238	24,7439	26,03145768	0,106238	26,03145768	1,10624	-1,2876	-1,2248	0,09604	25,9078057	0,09604	83,6016168
28	27,1735	-0,00303	0,48819	27,6617	26,90780568	0,106036	26,90780568	1,10604	0,75393	0,7172	0,09587	26,9800844	0,09587	87,1369089
29	28,1705	0,00294	-0,17738	27,9931	27,98008444	0,10587	27,98008444	1,10587	0,01304	0,0124	0,09573	27,9813331	0,09573	90,4345027
30	29,1734	-0,00787	-0,19605	28,9774	28,98133312	0,105735	28,98133312	1,10573	-0,0039	-0,0038	0,09562	28,9809559	0,09562	93,7194582
31	30,1656	0,00888	1,41931	31,5849	29,98095588	0,105624	29,98095588	1,10562	1,60392	1,5257	0,09553	30,1341838	0,09553	97,4949855
32	31,1745	-0,01147	0,29158	31,466	31,13418376	0,105533	31,13418376	1,10553	0,33185	0,3157	0,09546	31,1658622	0,09546	100,871968
33	32,163	-0,01069	0,19781	32,3608	32,16586217	0,105459	32,16586217	1,10546	0,19493	0,1854	0,0954	32,1844583	0,0954	104,201873
34	33,1523	-0,00809	1,5877	34,74	33,18445827	0,105398	33,18445827	1,1054	1,55553	1,4797	0,09535	33,3327766	0,09535	107,947799
35	34,1442	-0,02944	-0,80447	33,3397	34,33277664	0,105349	34,33277664	1,10535	-0,993	-0,9446	0,09531	34,2381313	0,09531	110,9034
36	35,1148	0,01438	0,69662	35,8114	35,23813134	0,105308	35,23813134	1,10531	0,57325	0,5453	0,09527	35,2927476	0,09527	114,33943
37	36,1291	0,00325	0,83509	36,9642	36,29274758	0,105275	36,29274758	1,10527	0,67148	0,6387	0,09525	36,3567045	0,09525	117,803199
38	37,1324	-0,00755	-0,24372	36,8887	37,35670454	0,105248	37,35670454	1,10525	-0,468	-0,4452	0,09523	37,3121363	0,09523	120,913132
39	38,1248	0,0137	0,21567	38,3405	38,31213629	0,105226	38,31213629	1,10523	0,02838	0,027	0,09521	38,3148379	0,09521	124,17436
40	39,1385	-0,01712	-1,16584	37,9727	39,31483785	0,105207	39,31483785	1,10521	-1,3421	-1,2767	0,09519	39,1870767	0,09519	127,011152
41	40,1214	-0,00102	-1,14795	38,9735	40,18707669	0,105192	40,18707669	1,10519	-1,2136	-1,1544	0,09518	40,0715661	0,09518	129,886251
42	41,1204	-0,00241	0,10487	41,2253	41,07156611	0,10518	41,07156611	1,10518	0,15372	0,1462	0,09517	41,0861953	0,09517	133,182026
43	42,118	0,00319	0,72225	42,8402	42,08619526	0,10517	42,08619526	1,10517	0,75405	0,7173	0,09516	42,1579523	0,09516	136,662037
44	43,1212	0,00313	2,58549	45,7067	43,15795226	0,105162	43,15795226	1,10516	2,54872	2,4245	0,09516	43,4004766	0,09516	140,694845
45	44,1243	-0,00865	-0,66689	43,4574	44,40047664	0,105155	44,40047664	1,10516	-0,9431	-0,8971	0,09515	44,3107453	0,09515	143,649882
46	45,1157	-0,0003	0,18733	45,303	45,31074531	0,10515	45,31074531	1,10515	-0,0077	-0,0074	0,09515	45,310008	0,09515	146,892837
47	46,1154	-0,00165	-0,08249	46,0329	46,31000797	0,105145	46,31000797	1,10515	-0,2771	-0,2636	0,09514	46,2836406	0,09514	150,052209
48	47,1137	0,00628	-1,93302	45,1807	47,2836406	0,105142	47,2836406	1,10514	-2,1029	-2,0004	0,09514	47,0835692	0,09514	152,648006
49	48,12	0,01093	-0,43897	47,681	48,08356918	0,105139	48,08356918	1,10514	-0,4025	-0,3829	0,09514	48,0452728	0,09514	155,767932
50	49,1309	0,01109	-1,79468	47,3362	49,04527282	0,105136	49,04527282	1,10514	-1,709	-1,6257	0,09513	48,8826862	0,09513	158,484599

Anexo A3

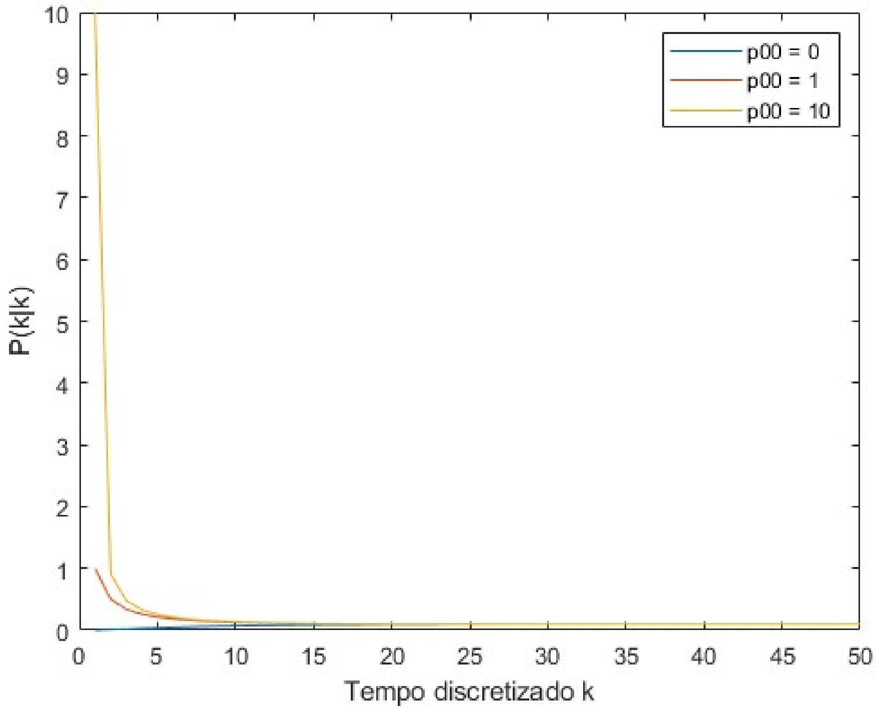


Figura A3-1. Listagem gráfica dos valores de P(k|k) para P(0|0) = 0, 1 e 10.

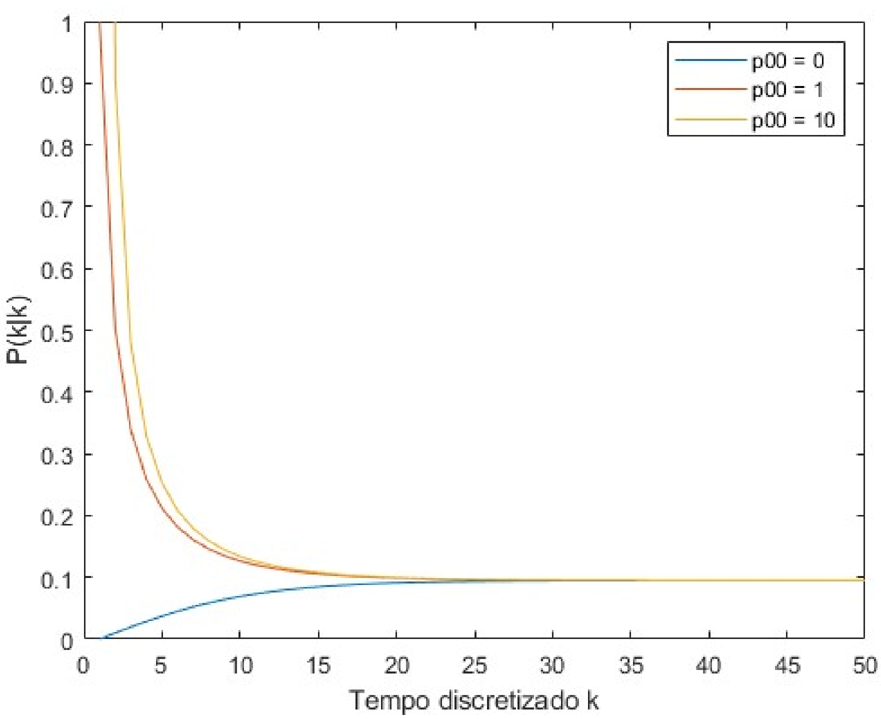


Figura A3-1. Listagem gráfica dos valores de P(k|k) para P(0|0) = 0, 1 e 10 com zoom no eixo y.

Anexo B1

Preparação

```
clear

% Quantidades e dimensões
k = 100;
n = 2;
T = 1;
```

Realização

```
x = zeros(k,n);
u = (zeros(k,n)+1);
F = [...
    1 T; ...
    0 1 ...
    ];
G = zeros(n);
TAU = [...
    T^2/2; ...
    T ...
    ];
```

Observação

```
z = zeros(k,1);
H = [1 0];
```

Ruídos

```
mu = [ 0 0 ];
q = 0.01;
r = 1;
w = randn(k, 1)*sqrt(q);
v = randn(k, 1)*sqrt(r);
Q = q;
R = r;
```

Condições iniciais

```
x(1,:) = [0 10];
z(1,:) = (H*x(1,:)' + v(1,:)')';
```

```
p00 = [...
    r r/T; ...
    r/T 2*r/T^2 ...
    ];
```

Inicialização dos vetores de estimação

```
x_priori = x;
x_posteriori = x;
P_posteriori = p00;      % P(0|0)
```

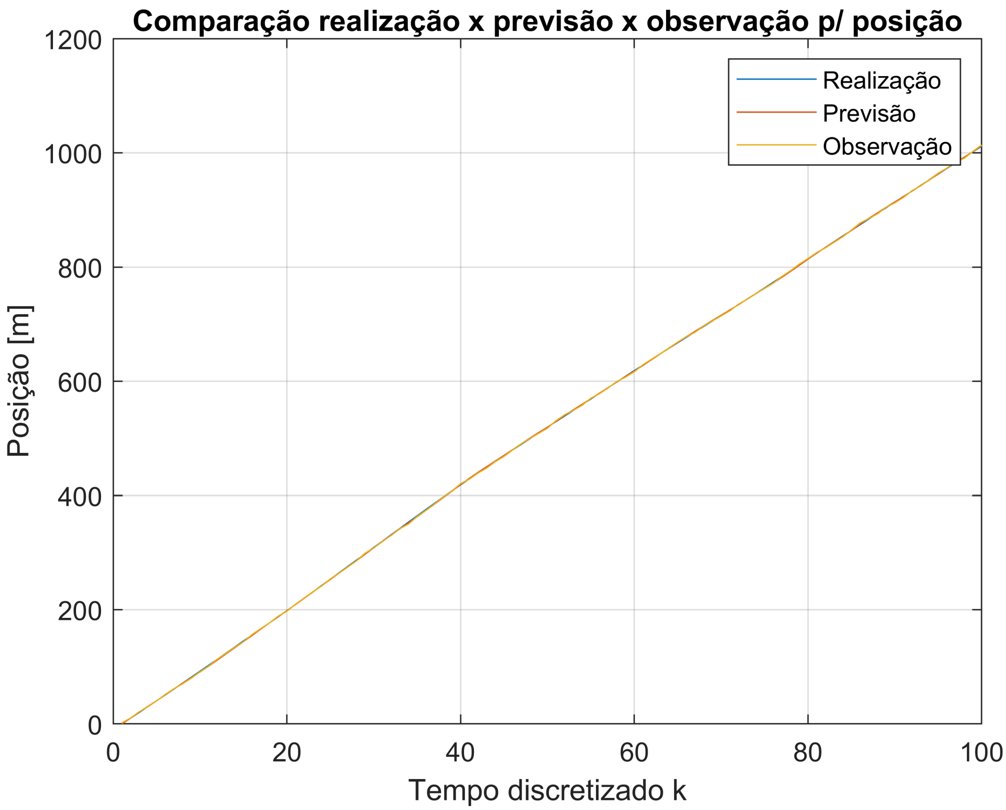
Evolução, previsão e estimação do estado

```
for i = 2:k
    % Realização: o estado evolui para x_n
    x(i,:) = (F*x(i-1,:)' + G*u(i-1,:)' + TAU*w(i-1,:)')';

    % Estimação: estimamos x-_n com base em x+_n-1
    x_priori(i,:) = (F*x_posteriori(i-1,:)'+G*u(i-1,:)')';

    % Obtemos P-_n a partir de P+_n-1
    P_priori = F*P_posteriori*F'+TAU*Q*TAU';

    % Obtemos K_n a partir de P-_n
    K = P_priori*H'/(H*P_priori*H'+R);

    % Obtemos P+_n a partir de P-_n
    P_posteriori = (eye(n)-K*H)*P_priori;
    variancia(i,:) = [P_posteriori(1,1),P_posteriori(2,2)];

    % Observação: medimos z_n
    z(i,:) = (H*x(i,:)' + v(i,:)')';

    % Previsão (Filtro de Kalman): estimamos x+_n com base em x-_n, z_n e K_n
    x_posteriori(i,:) = x_priori(i,:)+(K*(z(i,:)'-H*x_priori(i,:)'))';

end
```

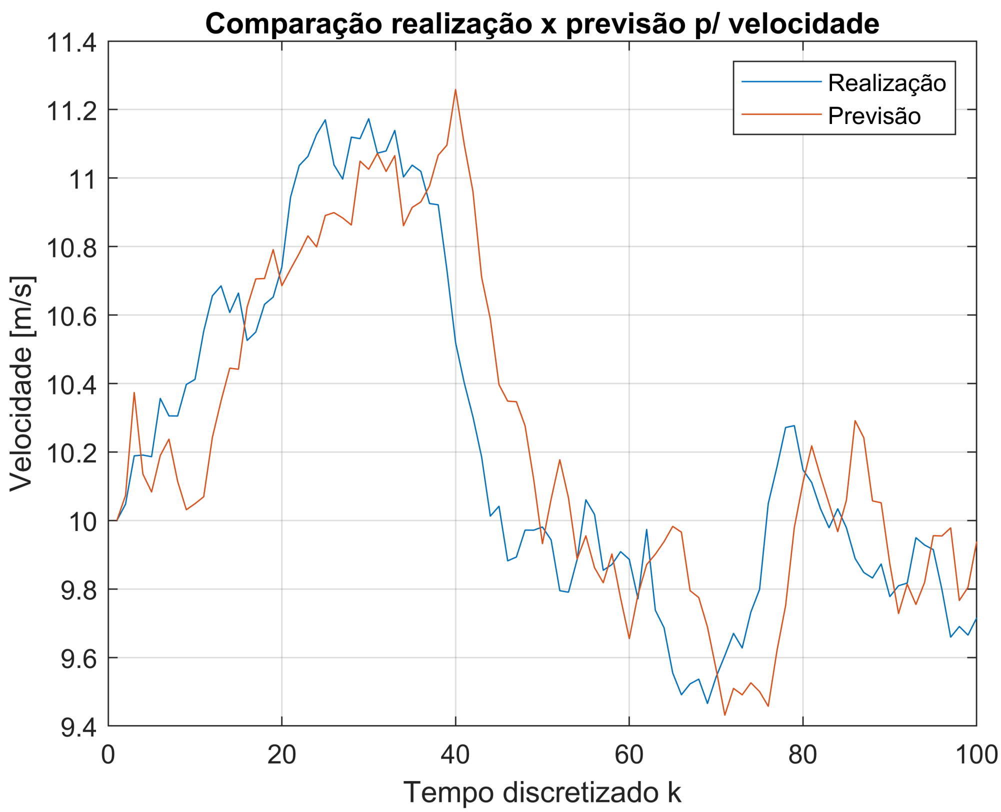
Plots

```
figure;
plot(1:k, x(:,1));
hold on;
plot(1:k, x_posteriori(:,1));
hold on;
plot(1:k, z(:,1));
grid on;
xlabel("Tempo discretizado k");
ylabel("Posição [m]");
```

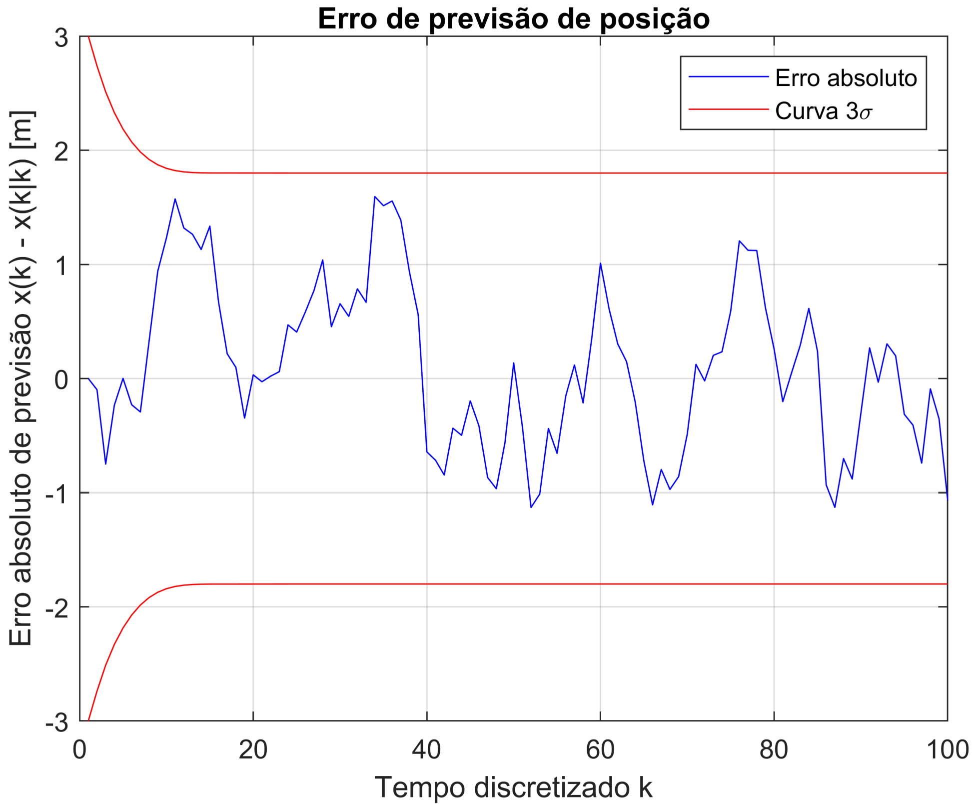
```
legend("Realização", "Previsão", "Observação");
title("Comparação realização x previsão x observação p/ posição");
```



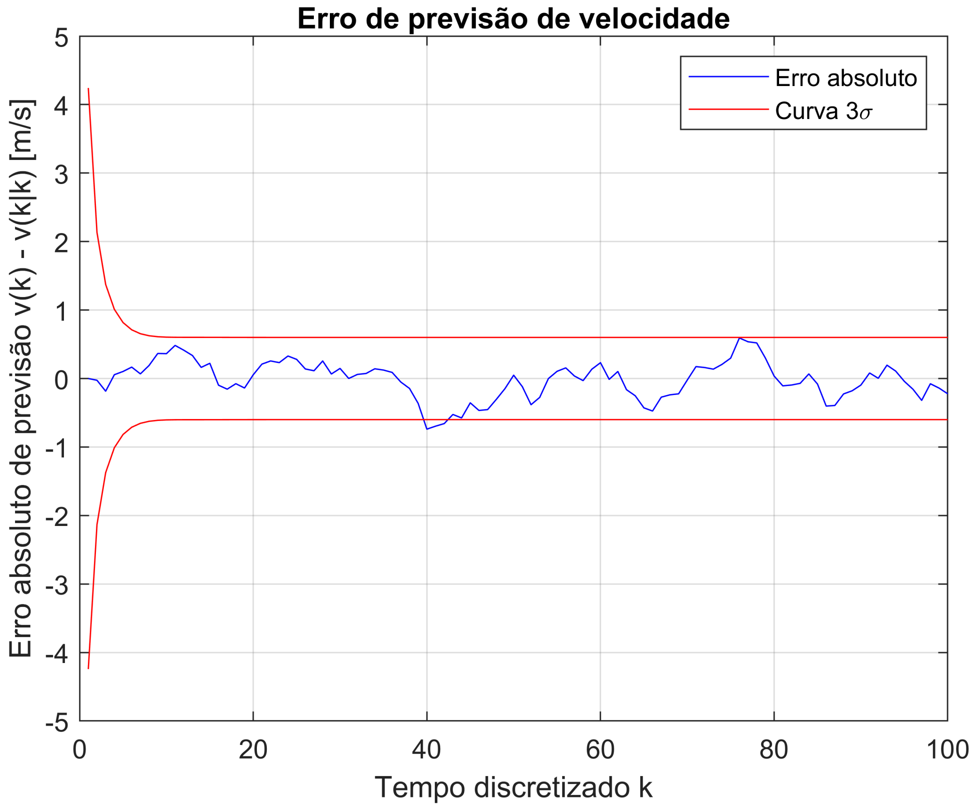

```
figure;
plot(1:k, x(:,2));
hold on;
plot(1:k, x_posteriori(:,2));
grid on;
xlabel("Tempo discretizado k");
ylabel("Velocidade [m/s]");
legend("Realização", "Previsão");
title("Comparação realização x previsão p/ velocidade");
```




```
erro_medicao = x-x_posteriori;
variancia(1,:) = [p00(1,1),p00(2,2)];
figure
plot(1:k, erro_medicao(:,1), 'b');
hold on;
grid on;
plot(1:k, 3*sqrt(variancia(:,1)), 'r')
plot(1:k, -3*sqrt(variancia(:,1)), 'r')
title("Erro de previsão de posição");
xlabel("Tempo discretizado k");
ylabel("Erro absoluto de previsão x(k) - x(k|k) [m]");
legend("Erro absoluto", "Curva 3\sigma");
```




```
figure
plot(1:k, erro_medicao(:,2), 'b');
hold on;
grid on;
plot(1:k, 3*sqrt(variancia(:,2)),'r')
plot(1:k, -3*sqrt(variancia(:,2)),'r')
title("Erro de previsão de velocidade");
xlabel("Tempo discretizado k");
ylabel("Erro absoluto de previsão v(k) - v(k|k) [m/s]");
legend("Erro absoluto", "Curva 3\sigma");
```



Erro de previsão de velocidade
Erro absoluto
Curva 3σ
Erro absoluto de previsão v(k) - v(k|k) [m/s]
Tempo discretizado k
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
20
40
60
80
100

Questão 02

Preparação

```
clear

% Quantidades e dimensões
k = 1000;
n = 3;
T = 1;
```

Realização

```
x = zeros(k,n);
u = (zeros(k,n)+1);
F = [...
    1 T 0; ...
    0 1 0;
    0 0 1 ...
    ];
G = zeros(n);
TAU = [...
    T^2/2 0; ...
    T 0; ...
    0 1 ...
    ];
TAU_real = [...
    T^2/2 0; ...
    T 0; ...
    0 0 ...
    ];
```

Observação

```
z = zeros(k,1);
H = [1 0 1];
```

Ruídos

```
mu = [ 0 0 ];
q = 0.01;
q2 = 0.0001;
sigma = [q 0; 0 q2];
r = 1;
RQ = chol(sigma);
```

```
RR = chol(r);
rng(1);
w = repmat(mu, k, 1) + randn(k, 2)*RQ;
rng(2);
v = randn(k, 1)*RR;
Q = sigma;
R = r;
```

Condições iniciais

```
x(1,:) = [0 10 10];
z(1,:) = (H*x(1,:)' + v(1,:)')';
p00 = [...
    r r/T 0; ...
    r/T 2*r/T^2 0; ...
    0 0 1 ...
    ];
```

Inicialização dos vetores de estimação

```
x_priori = x;
x_posteriori = x;
P_posteriori = p00;      % P(0|0)
```

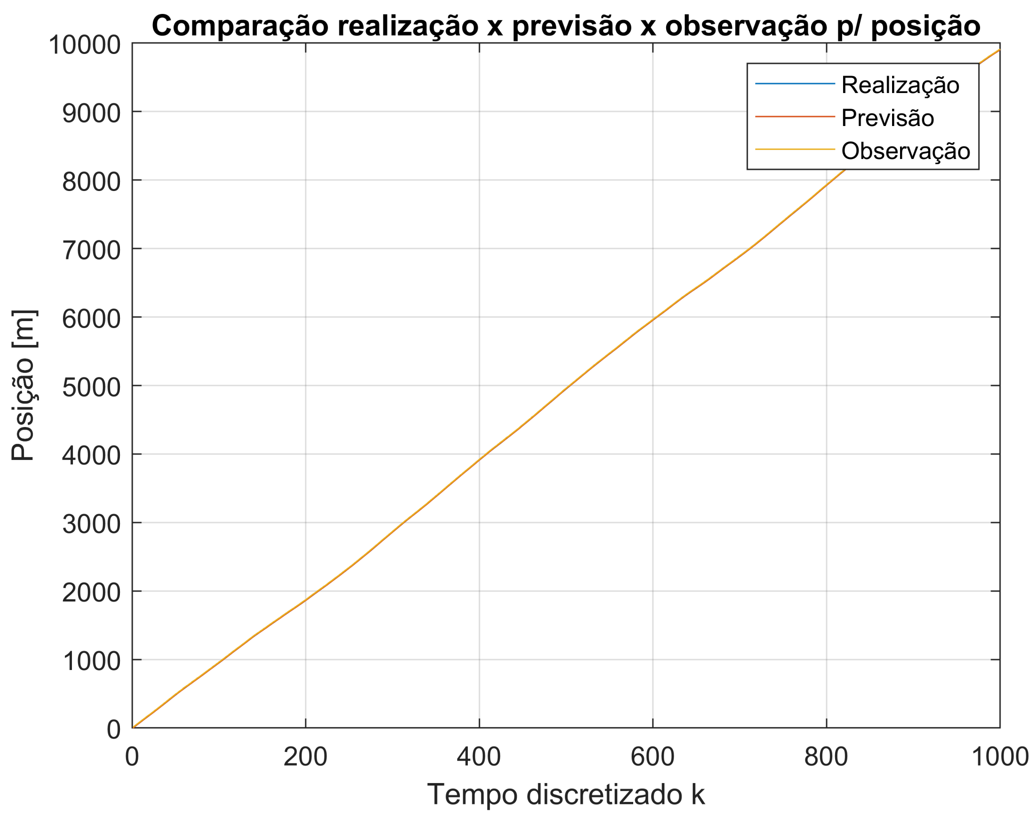
Evolução, previsão e estimação do estado

```
for i = 2:k
    % Realização: o estado evolui para x_n
    x(i,:) = (F*x(i-1,:)' + G*u(i-1,:)' + TAU_real*w(i-1,:)')';

    % Estimação: estimamos x-_n com base em x+_n-1
    x_priori(i,:) = (F*x_posteriori(i-1,:)'+G*u(i-1,:)')';

    % Obtemos P-_n a partir de P+_n-1
    P_priori = F*P_posteriori*F'+TAU*Q*TAU';

    % Obtemos K_n a partir de P-_n
    K = P_priori*H'/(H*P_priori*H'+R);

    % Obtemos P+_n a partir de P-_n
    P_posteriori = (eye(n)-K*H)*P_priori;
    variancia(i,:) = [P_posteriori(1,1),P_posteriori(2,2),P_posteriori(3,3)];

    % Observação: medimos z_n
    z(i,:) = (H*x(i,:)' + v(i,:)')';

    % Previsão (Filtro de Kalman): estimamos x+_n com base em x-_n, z_n e K_n
    x_posteriori(i,:) = x_priori(i,:)+(K*(z(i,:)'-H*x_priori(i,:)'))';
```

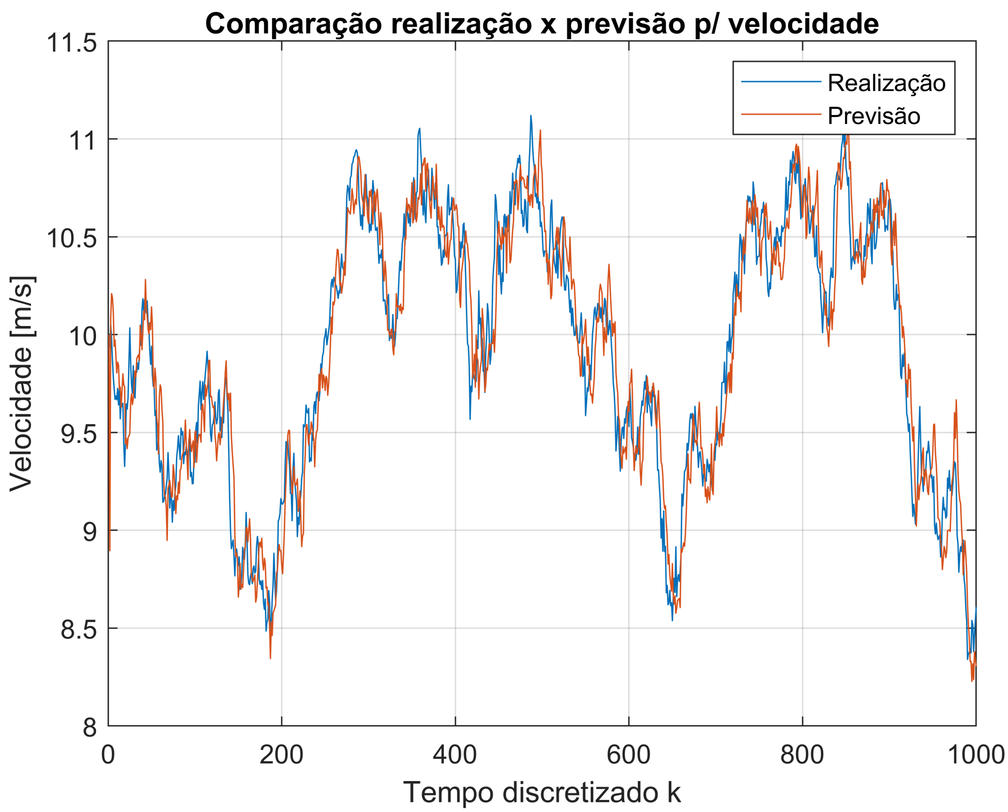
```
end
```

Plots

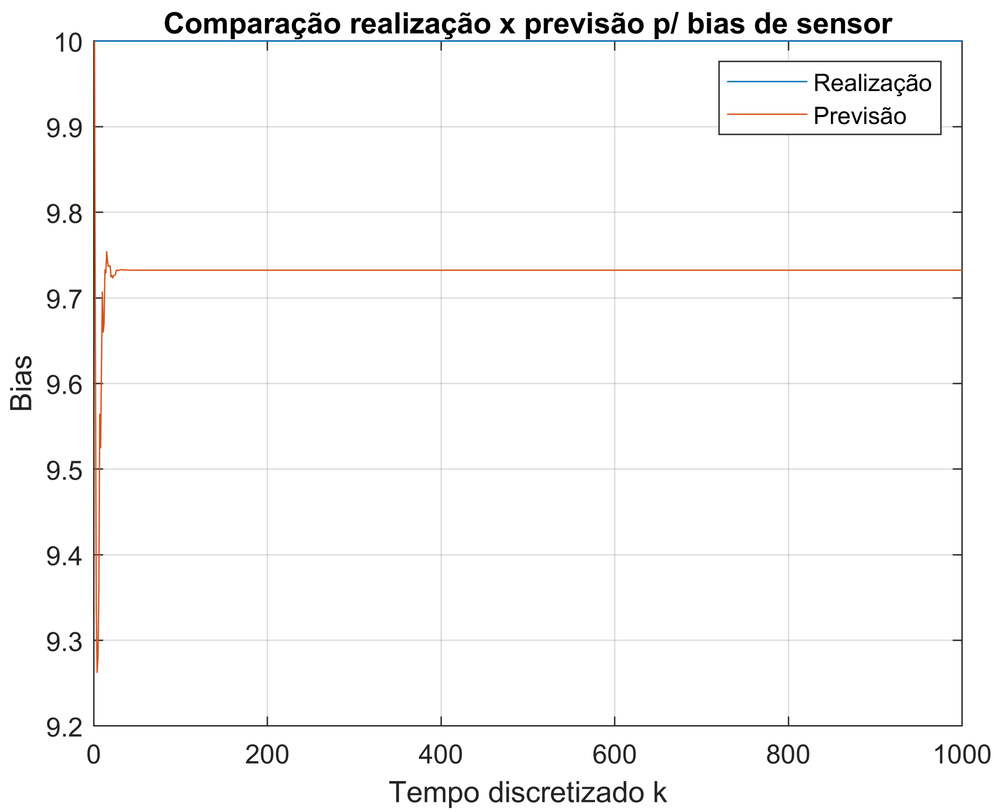
```
figure;
plot(1:k, x(:,1));
hold on;
plot(1:k, x_posteriori(:,1));
hold on;
plot(1:k, z(:,1));
grid on;
xlabel("Tempo discretizado k");
ylabel("Posição [m]");
legend("Realização", "Previsão", "Observação");
title("Comparação realização x previsão x observação p/ posição");
```



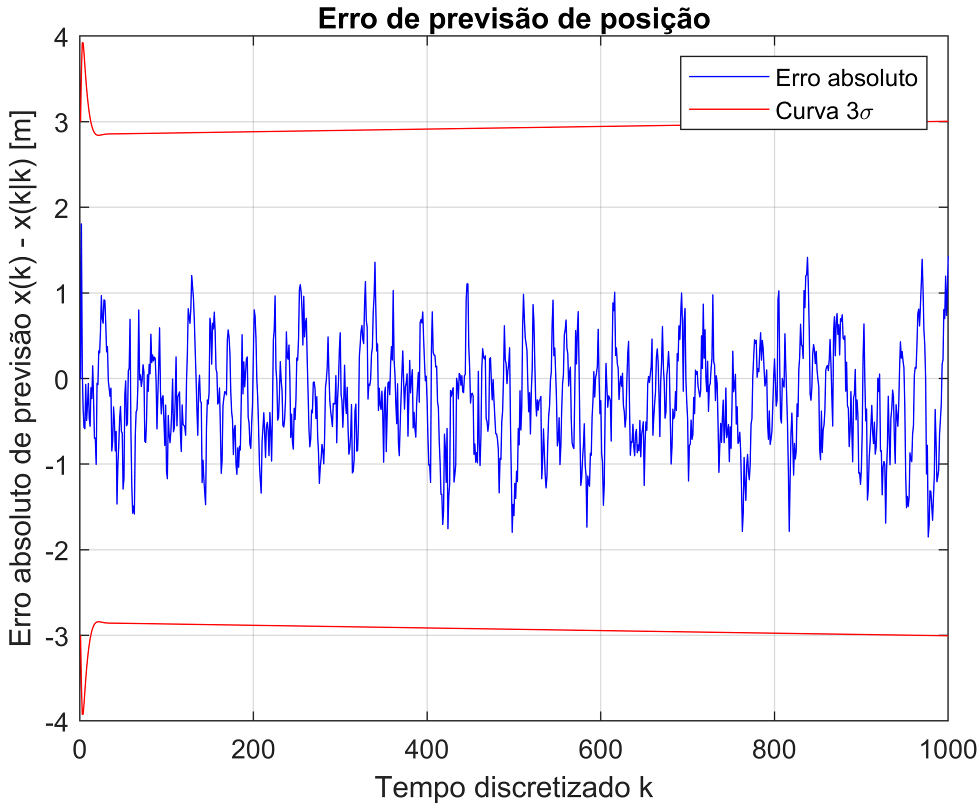

```
figure;
plot(1:k, x(:,2));
hold on;
plot(1:k, x_posteriori(:,2));
grid on;
xlabel("Tempo discretizado k");
ylabel("Velocidade [m/s]");
legend("Realização", "Previsão");
title("Comparação realização x previsão p/ velocidade");
```



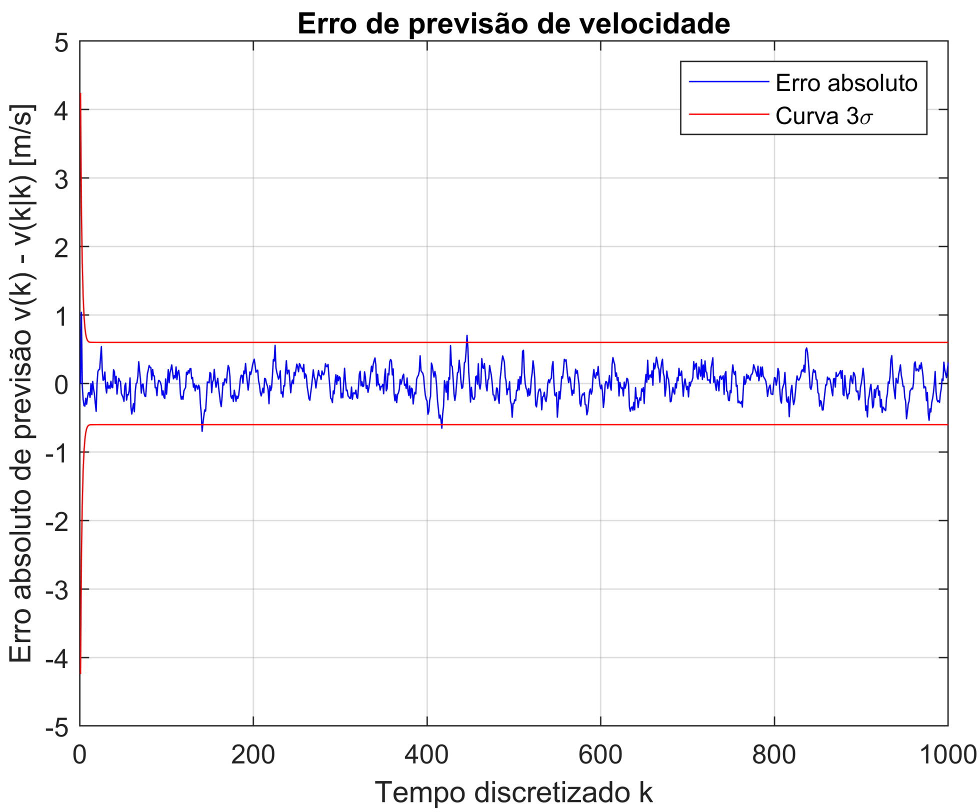

```
figure;
plot(1:k, x(:,3));
hold on;
plot(1:k, x_posteriori(:,3));
grid on;
xlabel("Tempo discretizado k");
ylabel("Bias");
legend("Realização", "Previsão");
    title("Comparação realização x previsão p/ bias de sensor");
```



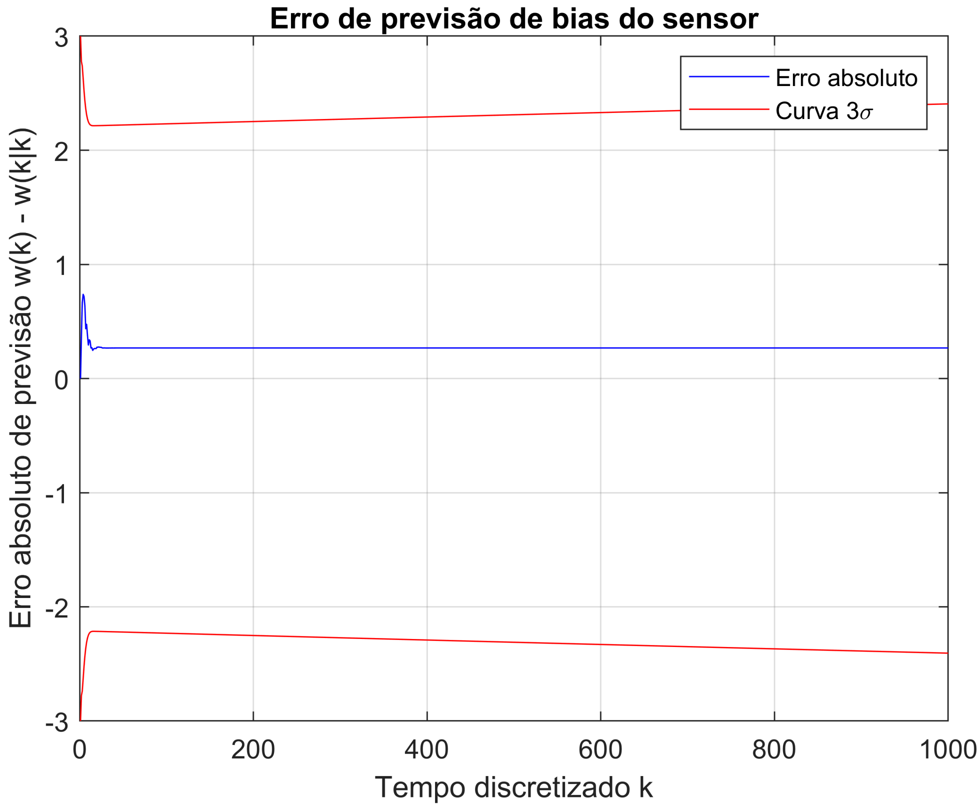

```
erro_medicao = x-x_posteriori;
variancia(1,:) = [p00(1,1),p00(2,2),p00(3,3)];
figure
plot(1:k, erro_medicao(:,1), 'b');
hold on;
grid on;
plot(1:k, 3*sqrt(variancia(:,1)), 'r')
plot(1:k, -3*sqrt(variancia(:,1)), 'r')
title("Erro de previsão de posição");
xlabel("Tempo discretizado k");
ylabel("Erro absoluto de previsão x(k) - x(k|k) [m]");
legend("Erro absoluto", "Curva 3\sigma");
```




```
figure
plot(1:k, erro_medicao(:,2), 'b');
hold on;
grid on;
plot(1:k, 3*sqrt(variancia(:,2)),'r')
plot(1:k, -3*sqrt(variancia(:,2)),'r')
title("Erro de previsão de velocidade");
xlabel("Tempo discretizado k");
ylabel("Erro absoluto de previsão v(k) - v(k|k) [m/s]");
legend("Erro absoluto", "Curva 3\sigma");
```




```
figure
plot(1:k, erro_medicao(:,3), 'b');
hold on;
grid on;
plot(1:k, 3*sqrt(variancia(:,3)),'r')
plot(1:k, -3*sqrt(variancia(:,3)),'r')
title("Erro de previsão de bias do sensor");
xlabel("Tempo discretizado k");
ylabel("Erro absoluto de previsão w(k) - w(k|k)");
legend("Erro absoluto", "Curva 3\sigma");
```


Erro de previsão de bias do sensor
Erro absoluto
Curva 3σ
Erro absoluto de previsão w(k) - w(k|k)
Tempo discretizado k
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
200
400
600
800
1000