

## Cap.6 - Filtro de Kalman e Integração do INS com Sensores Adicionais

Serão vistos aspectos básicos da teoria que suporta a implementação digital do filtro de Kalman,

Filtro de Kalman é uma extensão baseada em recursividade do método proposto por Gauss no século XIX para estimação de parâmetros das órbitas de planetas usando medidas astronômicas, de forma a minimizar o erro quadrático médio das estimativas. Como referências, podemos citar: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, 1809, Vol.II; e *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen*, circa 1816; vide ainda

<http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Gauss.html>

Trata-se de um algoritmo de estimação recursiva que processa as medidas à medida que se tornam disponíveis, em oposição ao processamento das medidas em lote (*batch*), requerendo este significativo aumento da carga computacional com o acúmulo de medidas por causa do aumento das dimensões da matriz a inverter;

Emprega-se o filtro para estimar variáveis de interesse de um sistema dinâmico porque sempre há erros nas medidas relacionadas com estas variáveis;

A questão que se coloca é: como combinar otimamente as medidas do sistema dinâmico de forma a estimar as variáveis de interesse a partir do conhecimento das estatísticas dos ruídos de medida e das incertezas no modelo dinâmico adotado? A resposta é dada pelo Teorema Fundamental da Estimação:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = E[\mathbf{x} | \mathbf{Y}_k]; \mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(k)\}$$

onde  $\mathbf{x}$  é a variável de interesse e sua estimativa ótima é o valor esperado condicionado ao conjunto de medidas acumuladas até o presente.

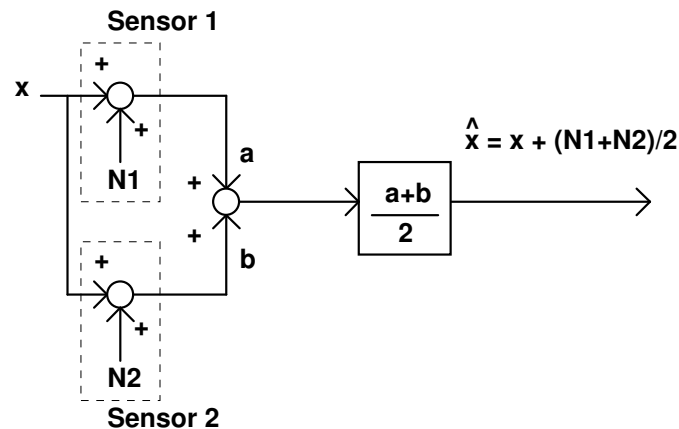
### 6.1 - Filtro Complementar

Começamos analisando a situação em que dois sensores fornecem medidas de uma mesma variável, sendo cada sensor corrompido por ruído com as seguintes estatísticas:

$$E[N_1] = E[N_2] = 0 \quad (\text{o ruído de cada sensor não é polarizado.})$$

$$E[N_1^2] = \sigma_1^2 = E[N_2^2] = \sigma_2^2 \quad (\text{sensores com intensidades de ruído iguais})$$

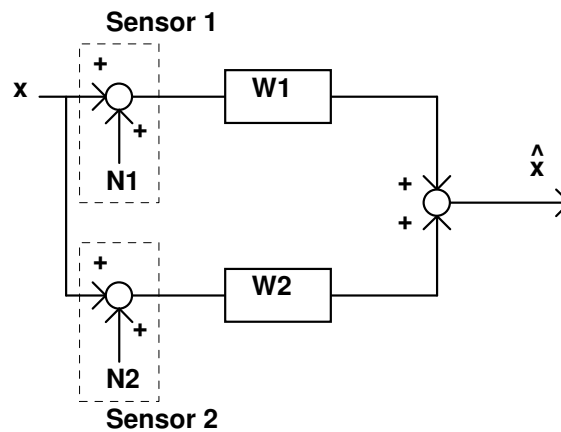
$E[N_1 N_2] = 0$  (os erros dos sensores não possuem correlação entre si, significando que os sensores produzem medidas com a mesma informação corrompida de forma não correlacionada.)



No caso das intensidades de ruído de sensor serem diferentes, i.e.,

$$E[N_1^2] = \sigma_1^2 \neq E[N_2^2] = \sigma_2^2$$

a estimativa ótima emprega a média ponderada, na qual a saída de cada sensor é ponderada pela sua respectiva intensidade de ruído, a qual representa a qualidade do sensor:



Temos então o seguinte estimador:

$$\hat{x} = W_1(x + N_1) + W_2(x + N_2) = (W_1 + W_2)x + W_1N_1 + W_2N_2$$

Para que este estimador não seja polarizado, impõe-se a restrição:

$$W_1 + W_2 = 1 \rightarrow W_1 = W \text{ e } W_2 = 1 - W$$

A estrutura resultante é:

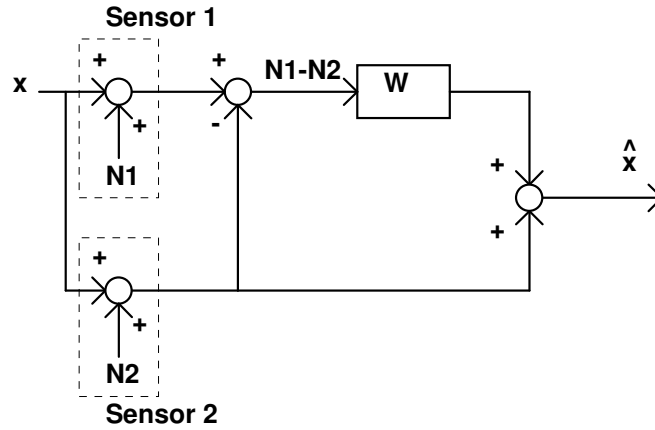


Fig.6.1 - Filtro complementar

e o estimador toma a seguinte forma:

$$\hat{x} = x + N_2 + W(N_1 - N_2) = x + N$$

onde  $N = N_2 + W(N_1 - N_2)$  e sua não polaridade fica evidente, pois:

$$E[N] = E[N_2] + W \cdot E[N_1 - N_2] = 0$$

Deseja-se computar o ganho ótimo  $W_{opt}$  de forma que a variância do erro de estimação  $E[N^2]$  seja minimizada, isto é:

$$W_{opt} = \arg \min_w E[N^2]$$

Temos que:

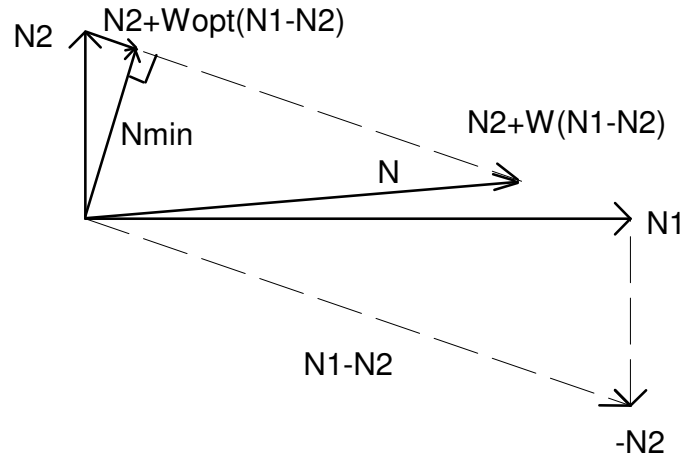
$$\begin{aligned} N^2 &= N_2^2 + 2N_2W(N_1 - N_2) + W^2(N_1^2 - 2N_1N_2 + N_2^2) \\ N^2 &= N_2^2(1 - W)^2 + W^2N_1^2 + 2WN_1N_2(1 - W) \\ E[N^2] &= \sigma_2^2(1 - W)^2 + \sigma_1^2W^2 \quad (E[N_1N_2] = 0) \end{aligned}$$

Como a otimização é sobre o domínio não restrito de  $W$  e assumindo que a função a minimizar é convexa, o ganho ótimo  $W_{opt}$  pode então ser obtido da condição necessária:

$$\left. \frac{dE[N^2]}{dW} \right|_{W=W_{opt}} = 0 \Rightarrow -2\sigma_2^2(1 - W_{opt}) + 2\sigma_1^2W_{opt} = 0$$

$$W_{opt} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (6.1)$$

A interpretação geométrica é vista na figura abaixo, a qual mostra a não correlação entre  $N_1$  e  $N_2$  através da ortogonalidade dos respectivos vetores  $N_1 \perp N_2$ :



O ganho ótimo causa um erro de estimativa ortogonal ao subespaço  $\{(N_1-N_2)\}$  gerado pelas medidas, conforme o Teorema da Projeção Ortogonal estudado em análise funcional. Aplicaremos o princípio visto acima ao sistema dinâmico  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k), \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n, \mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$ , visando a um estimador recursivo ótimo de  $\mathbf{x}_k$  que seja não polarizado e que minimize a variância do erro de estimação. A este estimador, na realidade um algoritmo de computador, dá-se o nome de filtro de Kalman quando  $\mathbf{f}(\cdot, \cdot), \mathbf{h}(\cdot)$  são funções lineares. O algoritmo, ligeiramente modificado para realizar linearização em torno do estado estimado, é freqüentemente usado com sistemas dinâmico não lineares em aplicações aeronáuticas diversas, quando é então denominado Filtro de Kalman Estendido.

## 6.2 - Estimação em sistema dinâmico

Considere por um breve momento o seguinte modelo dinâmico linear contínuo no tempo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}'$$

o qual descreve através do processo ruidoso branco  $\mathbf{w}'$  a incerteza do modelo. O modelo acima, discretizado com intervalo de amostragem  $T$ , resulta no seguinte modelo dinâmico discreto no tempo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k = \boldsymbol{\phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k$$

onde  $\boldsymbol{\phi}$  é a matriz de transição de estado e  $\mathbf{w}_k$  é uma sequência ruidosa branca com as seguintes estatísticas:

$$E[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0};$$

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q} \delta(k-j) \quad \text{delta de Kronecker: } \delta(k-j) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

A estimativa não polarizada de  $\mathbf{x}$  obtida a partir do modelo dinâmico pode ser escrita como:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  é o erro da estimação baseada no modelo dinâmico. Adicionalmente, um sensor fornece medidas que se relacionam com o estado do modelo dinâmico de acordo com:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_1(k)$$

onde  $\mathbf{n}_1(k)$  é uma seqüência ruidosa branca não correlacionada com  $\mathbf{w}_k$  e corrompendo as medidas com as seguintes estatísticas:

$$E[\mathbf{n}_1(k)] = \mathbf{0};$$

$$E[\mathbf{n}_1(k) \mathbf{n}_1(j)^T] = \mathbf{R} \delta(k-j)$$

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{n}_1(j)^T] = \mathbf{0}; \quad \forall k, j$$

A estrutura do filtro complementar visto na Fig. 6.1 é empregado aqui para obter-se a estimativa ótima de  $\mathbf{x}$  a partir de informação do modelo dinâmico que descreve sua evolução no tempo e de outras medidas fornecidas por sensores adicionais:

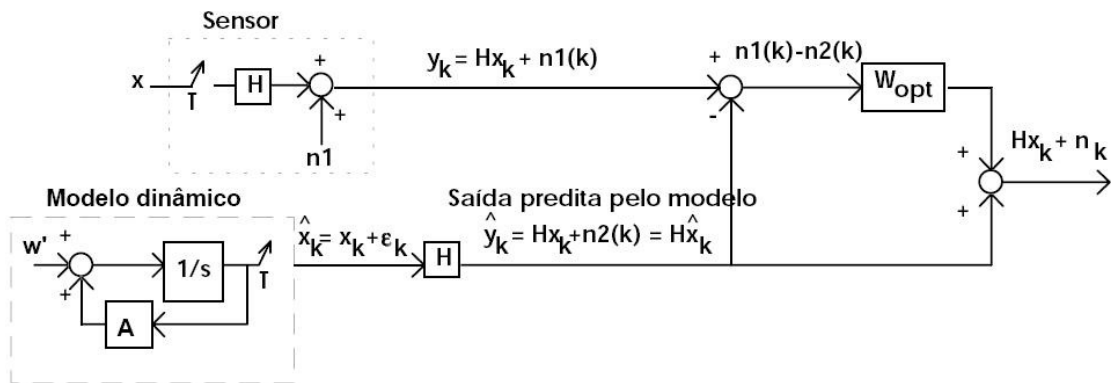


Fig. 6.2 - Filtro complementar para estimação em sistema dinâmico

As estatísticas de  $\mathbf{n}_2(k) = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(k)$ , o ruído da saída predita pelo modelo, são tais que não é correlacionado com o ruído na medida do sensor:

$$E[\mathbf{n}_1(k) \mathbf{n}_2(j)^T] = \mathbf{0}; \quad \forall k, j$$

Vimos no caso escalar que o ganho ótimo  $W_{\text{opt}}$  é dado por (6.1). Por extensão ao caso multivariável, temos que:

$$W_{\text{opt}} = E[\mathbf{n}_2(k)\mathbf{n}_2(k)^T] \cdot \{E[\mathbf{n}_2(k)\mathbf{n}_2(k)^T] + E[\mathbf{n}_1(k)\mathbf{n}_1(k)^T]\}^{-1} \quad (6.2)$$

onde, para  $r_{i,jk}$  indicando a correlação entre as componentes  $j$  e  $k$  de  $\mathbf{n}_i$ , tem-se que:

$$E[\mathbf{n}_2(k)\mathbf{n}_2(k)^T] = E[\mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_k\boldsymbol{\varepsilon}_k^T\mathbf{H}^T] = \mathbf{H}\mathbf{P}_k\mathbf{H}^T;$$

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \sigma_{2,1}^2 & \cdots & r_{2,1n}\sigma_{2,1}\sigma_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{2,1n}\sigma_{2,1}\sigma_{2,n} & \cdots & \sigma_{2,n}^2 \end{bmatrix}$$

$$E[\mathbf{n}_1(k)\mathbf{n}_1(k)^T] = \mathbf{R}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}^2 & \cdots & r_{1,1n}\sigma_{1,1}\sigma_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1,1n}\sigma_{1,1}\sigma_{1,n} & \cdots & \sigma_{1,n}^2 \end{bmatrix}$$

sendo  $\mathbf{P}_k \geq \mathbf{0}$  matriz simétrica positiva semidefinida, i.e., seus autovalores são todos maiores ou iguais a zero, e  $\mathbf{R} > \mathbf{0}$  positiva definida. Substituindo em (6.2):

$$W_{\text{opt}} = \mathbf{H}\mathbf{P}_k\mathbf{H}^T[\mathbf{H}\mathbf{P}_k\mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (6.3)$$

Percebe-se portanto que o ganho ótimo varia ao longo do tempo de acordo com a incerteza na estimação representada por  $\mathbf{P}_k$  e a qualidade dos sensores, por  $\mathbf{R}$ . O estimador resultante é um operador linear recursivo que age sobre as medidas e sobre a saída do modelo dinâmico. O diagrama equivalente ao filtro complementar é então:

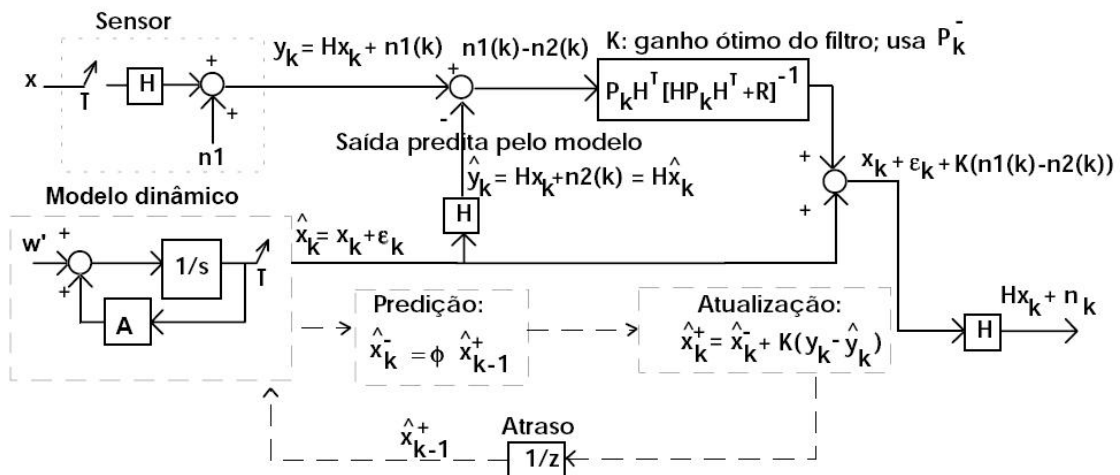
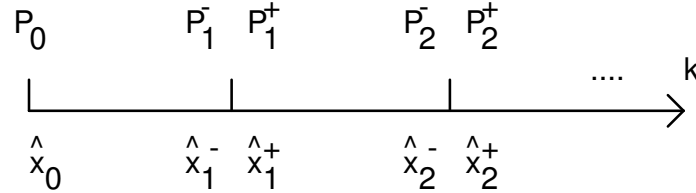


Fig. 6.3 - Estrutura do filtro de Kalman (Obs.:  $\mathbf{K}$  varia com índice  $k$ , i.e., trata-se de  $\mathbf{K}_k$ )

A estrutura recursiva baseia-se na predição e atualização das estimativas e respectivas incertezas, estas representadas pela evolução da matriz de covariância durante o processo recursivo, como esquematizado a seguir:



Será assumido aqui que o modelo empregado pelo filtro de Kalman representa fielmente a dinâmica do sistema e as características dos sensores, i.e., o filtro de emprega o modelo "verdade" (*true model* ou *ground-truth model*). Este modelo tem suas características lembradas a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k; & E[\mathbf{w}_k] &= \mathbf{0}; E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q} \delta(k-j) \quad \forall k, j = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_1(k); \\ E[\mathbf{n}_1(k)] &= \mathbf{0}; E[\mathbf{n}_1(k) \mathbf{n}_1(j)^T] = \mathbf{R} \delta(k-j); & E[\mathbf{w}_k \mathbf{n}_1(j)^T] &= \mathbf{0} \quad \forall k, j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Os estágios de predição e atualização são como a seguir:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \boldsymbol{\Phi} \hat{\mathbf{x}}_k^+; \hat{\mathbf{x}}_0^+ = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad \text{Predição} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) = \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{H} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{K}_k \mathbf{n}_1(k) \quad \text{Atualização} \end{aligned} \quad (6.6)$$

A questão agora é computar  $\mathbf{P}_k^-$ , a matriz de covariância do erro de estimação ao final do estágio de predição, necessária à computação de  $\mathbf{K}_k$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T] = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T] = \\ &= E[(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) + \mathbf{w}_{k-1})(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) + \mathbf{w}_{k-1})^T] \end{aligned}$$

Relembrando que a sequência de ruído de modelo  $\mathbf{w}_k$  é branca com média zero e não correlacionada com a sequência de ruído de sensor  $\mathbf{n}_1(k)$ , por sua vez também branca e com média zero, resulta que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= \boldsymbol{\Phi} E[(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+)(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+)^T] \boldsymbol{\Phi}^T + E[\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T] = \\ &= \boldsymbol{\Phi} \mathbf{P}_{k-1}^+ \boldsymbol{\Phi}^T + \mathbf{Q}; \mathbf{P}_0^+ = \mathbf{P}_0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

É necessário agora computar  $\mathbf{P}_k^+$ , a matriz de covariância do erro de estimação ao final do estágio de atualização. Assim:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k^+ &= E[\boldsymbol{\varepsilon}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}_k^{+T}] = \\ &= E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{n}_1(k))(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{n}_1(k))^T]\end{aligned}$$

Das hipóteses sobre as estatísticas de  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{n}_1(k)$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k^+ &= E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T - (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \mathbf{H}^T \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \\ &\quad + \mathbf{K}_k \mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \mathbf{H}^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{n}_1(k) \mathbf{n}_1(k)^T \mathbf{K}_k^T] \\ \mathbf{P}_k^+ &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T = \quad (\#) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{H}^T \mathbf{K}_k^T) + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T\end{aligned}\tag{6.8a}$$

Esta formulação para computação de  $\mathbf{P}_k^+$  é conhecida como *forma estabilizada*, por ser menos sujeita a erros numéricos; entretanto, requer mais cálculos. A *forma padrão*, a qual requer menos cálculos, mas mais sujeita a erros numéricos, pode ser derivada a partir de (#):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}) \mathbf{K}_k^T = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}) \mathbf{K}_k^T = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^-\end{aligned}\tag{6.8b}$$

Portanto, as equações (6.4), (6.5), (6.6), (6.7) e (6.8) constituem o algoritmo de estimação denominado filtro de Kalman, o qual é repetido a seguir para um entendimento mais claro na ordem de realização dos cálculos pelo computador de bordo:

Predição: Eqs.(6.4) e (6.7)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^- &= \boldsymbol{\Phi} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+; \hat{\mathbf{x}}_0^+ = \hat{\mathbf{x}}_0; \quad k=1,2,3,\dots \\ \mathbf{P}_k^- &= \boldsymbol{\Phi} \mathbf{P}_{k-1}^+ \boldsymbol{\Phi}^T + \mathbf{Q}; \mathbf{P}_0^+ = \mathbf{P}_0\end{aligned}$$

Computação do ganho ótimo: Eq.(6.5)

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1}$$

Atualização: Eqs. (6.6) e (6.8)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) \text{ (incorpora informação contida na medida)} \\ \mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- \text{ (k=k+1; retorna para estágio de predição)}\end{aligned}$$

Observa-se que o ganho  $\mathbf{K}_k$  pode ser computado *off-line*, o que é visto claramente no esquema a seguir:



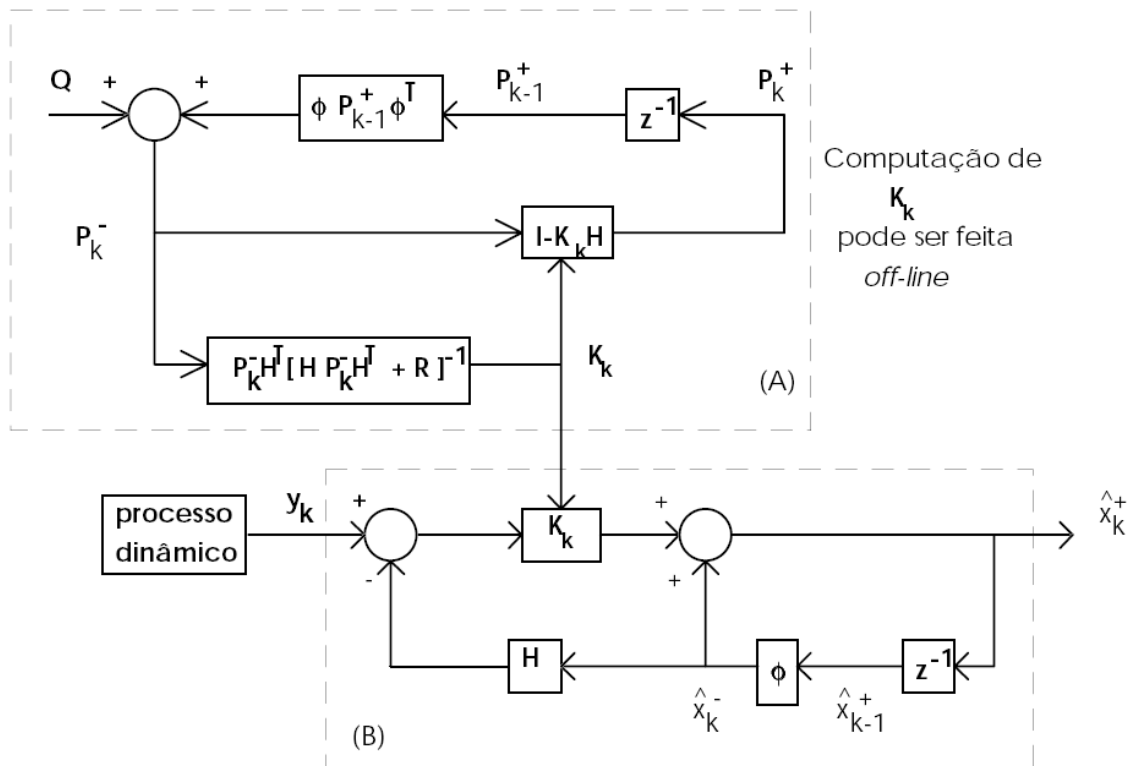
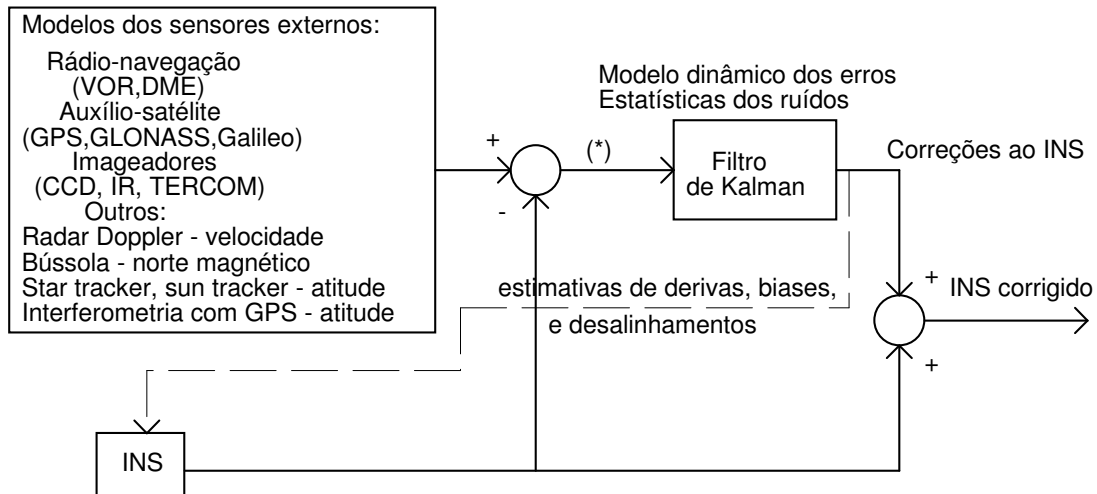


Fig. 6.4 - Estrutura computacional do filtro de Kalman

Na integração do INS com sensores adicionais, são usualmente adotadas as arquiteturas em malha aberta ou malha fechada para correção de erros e calibração dos sensores inerciais durante a operação, como mostrado na figura a seguir. Estes sensores, integrados ao INS, permitem limitar sobremaneira os erros de navegação e estimação de atitude sem a necessidade de girômetros e acelerômetros acurados (e caros!).

(\*) : Note que o filtro de Kalman aqui esboçado opera sobre a diferença existente entre os erros dos sensores e os erros do INS, não sobre a posição e velocidade. É a partir deste modelo dinâmico que se computa a matriz de transição de estados  $\Phi$ . Justifica-se, portanto, a análise de erros para a elaboração de um modelo dinâmico linear dos erros do INS.

As linhas contínuas indicam a arquitetura em malha aberta, na qual o filtro tem pequeno acoplamento com a operação do INS. Se algum sensor auxiliar falhar, o INS prossegue operando sem problemas, mas com erros que evoluem com o tempo conforme analisado anteriormente. Já as linhas tracejadas indicam o filtro de Kalman operando em malha fechada com o INS, corrigindo os erros de desalinhamento e calibrando os sensores inerciais mediante uso das estimativas de bias de acelerômetros e deriva dos girômetros. Esta arquitetura exige que hardware e software possuam grande confiabilidade, pois falhas nos sensores ou no filtro afetam a operação do INS de forma significativa.



Exemplos vários de integração INS/GPS e INS/Doppler são amplamente reportados nas referências adicionais abaixo:

Brown, R.G., and Hwang, P.Y.C. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, 2nd edition, Cap.10, John Wiley and Sons, New York, 1992.

Maybeck, P.S. Stochastic Models, Estimation, and Control, Vol.1, Cap.6, Academic Press, 1979.

Farrell, J., and Barth, M. The Global Positioning System and Inertial Navigation, McGraw-Hill, 1999.

**Exemplo:** Alinhamento inicial e calibração com veículo estacionário em posição conhecida.

$\Lambda(0), \lambda(0), h(0)$  são conhecidos;  $\Delta \mathbf{R} = \Delta \mathbf{V}_e = \mathbf{0}$ ;

$S_t = S_c \Rightarrow \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\psi}$

$\Rightarrow [\boldsymbol{\psi} \quad \nabla_b \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b]^T$  é o estado a estimar neste problema, onde:

$\boldsymbol{\psi} = [\psi_N \quad \psi_E \quad \psi_D]^T; \boldsymbol{\varepsilon}_b = [\varepsilon_{xb} \quad \varepsilon_{yb} \quad \varepsilon_{zb}]^T; \nabla_b = [\nabla_{xb} \quad \nabla_{yb} \quad \nabla_{zb}]^T$

Do modelo de erros visto anteriormente e relembrando que a DCM  $\mathbf{D}_p^b$  é obtida da solução inicial do problema de determinação de atitude, temos que:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\nabla}_b \\ \dot{\varepsilon}_b \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & \Omega_D & 0 & & \\ -\Omega_D & 0 & \Omega_N & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{D}_p^b \\ 0 & -\Omega_N & 0 & & \\ \hline & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \\ & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Psi \\ \nabla_b \\ \varepsilon_b \end{bmatrix} + \text{ruído de modelo}$$

Observe que:

- 1 - O vetor de estados foi aumentado para incluir o vetor com erros de bias de acelerômetro e de deriva de girômetro;
- 2 - Bias e deriva foram modelados como constantes desconhecidas, possivelmente sofrendo variações a médio e longo prazo. Esta incerteza reflete-se na adição de ruído àquelas constantes;
- 3 - O ruído de modelo será assumido branco e seus componentes não correlacionados; na literatura, a dinâmica de bias e deriva descrita como no modelo acima é conhecida como constante aleatória (*random constants*), dando origem a um processo de difusão devido a integração de ruído branco no tempo.

As medidas empregadas são:

Acelerômetros:

As medidas amostradas de força específica no sistema  $S_b$  considerando o desalinhamento entre  $S_{NED,t}$  e  $S_{NED,p}$  são descritas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{sp,medida,b} &= \mathbf{D}_b^t \mathbf{A}_{sp,t} + \nabla_b + \text{ruído\_acelerom} \\ \mathbf{D}_b^t &= \mathbf{D}_b^p \mathbf{D}_p^t \\ \Rightarrow \mathbf{A}_{sp,medida,b} &= \mathbf{D}_b^p (\mathbf{I} - \Psi \times) \mathbf{A}_{sp,t} + \nabla_b + \text{ruído\_acelerom} \\ \mathbf{A}_{sp,medida,b} &= \mathbf{D}_b^p \mathbf{A}_{sp,t} - \mathbf{D}_b^p [\Psi \times] \mathbf{A}_{sp,t} + \nabla_b + \text{ruído\_acelerom} \\ \mathbf{A}_{sp,medida,b} &= \mathbf{D}_b^p \mathbf{A}_{sp,t} + \mathbf{D}_b^p [\mathbf{A}_{sp,t} \times] \Psi + \nabla_b + \text{ruído\_acelerom} \end{aligned}$$

Notar que:

$$\mathbf{A}_{sp,t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g(\lambda, h) \end{bmatrix}^T \text{ é conhecido em } S_{NED,t}.$$

O filtro de Kalman utiliza como medida a diferença:

$$\delta \mathbf{A}_{sp,b} = \mathbf{A}_{sp,medida,b} - \mathbf{D}_b^p \mathbf{A}_{sp,t} = \mathbf{D}_b^p [\mathbf{A}_{sp,t} \times] \Psi + \nabla_b + \text{ruído\_acelerom}$$

$$\delta \mathbf{A}_{sp,b} = \nabla_b + \mathbf{D}_b^p \begin{bmatrix} 0 & g(\lambda, h) & 0 \\ -g(\lambda, h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{bmatrix} + \text{ruído\_acelerom}$$

$$\delta \mathbf{A}_{sp,b} = \left[ \mathbf{D}_b^p \begin{bmatrix} 0 & g(\lambda, h) & 0 \\ -g(\lambda, h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \mathbf{I}_3 \middle| \mathbf{0}_3 \right] \begin{bmatrix} \psi \\ \nabla_b \\ \varepsilon_b \end{bmatrix} + \text{ruído\_acelerom}$$

Cabe aqui ressaltar que, devido à coluna de zeros associada à variável  $\psi_D$ , as medidas de acelerômetro não contêm informação sobre o desalinhamento em torno da vertical local. Sua estimação motivará o uso de medidas dos girômetros.

Girômetros:

As medidas amostradas de velocidade angular da Terra, no sistema  $S_b$  considerando o desalinhamento entre  $S_{NED,t}$  e  $S_{NED,p}$  são descritas por:

$$\omega_{medida,b} = \mathbf{D}_b^t \Omega_t + \varepsilon_b + \text{ruído\_girom} = \mathbf{D}_b^p (\mathbf{I} - \Psi \times) \Omega_t + \varepsilon_b + \text{ruído\_girom}$$

$$\omega_{medida,b} = \mathbf{D}_b^p \Omega_t - [\Psi \times] \Omega_t + \varepsilon_b + \text{ruído\_girom} = \mathbf{D}_b^p \Omega_t + \mathbf{D}_b^p [\Omega_t \times] \Psi + \varepsilon_b + \text{ruído\_girom}$$

Notar que:

$$\Omega_t = [\Omega_N \quad 0 \quad \Omega_D]^T = [\Omega c \lambda \quad 0 \quad -\Omega s \lambda]^T \text{ é conhecido.}$$

O filtro de Kalman usa a seguinte diferença como medida:

$$\delta \omega_b = \omega_{medida,b} - \mathbf{D}_b^p \Omega_t = \varepsilon_b + \mathbf{D}_b^p \begin{bmatrix} 0 & \Omega s \lambda & 0 \\ -\Omega s \lambda & 0 & -\Omega c \lambda \\ 0 & \Omega c \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{bmatrix} + \text{ruído\_girom}$$

$$\delta \omega_b = \left[ \mathbf{D}_b^p \begin{bmatrix} 0 & \Omega s \lambda & 0 \\ -\Omega s \lambda & 0 & -\Omega c \lambda \\ 0 & \Omega c \lambda & 0 \end{bmatrix} \middle| \mathbf{0}_3 \middle| \mathbf{I}_3 \right] \begin{bmatrix} \psi \\ \nabla_b \\ \varepsilon_b \end{bmatrix} + \text{ruído\_girom}$$

Concatenando os dois conjuntos de medidas, a equação de medidas empregada pelo filtro de Kalman é:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{A}_{sp,b} \\ \delta \omega_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \nabla_b \\ \varepsilon_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ruído\_acelerom} \\ \text{ruído\_girom} \end{bmatrix}$$

com:

$$\mathbf{H}_1 = \left[ \mathbf{D}_b^p \begin{bmatrix} 0 & g(\lambda, h) & 0 \\ -g(\lambda, h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \mathbf{I}_3 \middle| \mathbf{0}_3 \right]$$

$$\mathbf{H}_2 = \left[ \mathbf{D}_b^p \begin{bmatrix} 0 & \Omega_s \lambda & 0 \\ -\Omega_s \lambda & 0 & -\Omega_c \lambda \\ 0 & \Omega_c \lambda & 0 \end{bmatrix} \middle| \mathbf{0}_3 \middle| \mathbf{I}_3 \right]$$

Neste exemplo, selecione uma latitude  $\lambda$ , altitude  $h$  e atitude  $\mathbf{D}_b^t$  para simular as medidas dos acelerômetros e girômetros cujos parâmetros são como a seguir (atenção às unidades que usar na implementação):

Cada girômetro: escolha  $\sigma_{\text{gir}} [^\circ/\text{h}]$  – desvio - padrão de vetor sequência branca aditiva

escolha  $\varepsilon [^\circ/\text{h}]$  – vetor deriva

Cada acelerômetro: escolha  $\sigma_{\text{acel}} [\text{mg}]$  – desvio - padrão de vetor sequência branca aditiva

escolha  $\nabla [\text{mg}]$  – vetor bias

Parte 1. LKF – filtro de Kalman linearizado em torno da solução de atitude do INS  $\mathbf{D}_b^p$  usando as medidas dos acelerômetros e girômetros.

Deseja-se refinar iterativamente a estimativa  $\hat{\Psi}_k^+$  do desalinhamento verdadeiro  $\Psi$  entre a DCM verdadeira  $\mathbf{D}_b^t$  (que é fixa no tempo e descreve a atitude inicial do veículo no solo) e a DCM computada pelo INS  $\mathbf{D}_b^p$  (também fixa, selecionada pelo aluno e que será usada nos modelos de dinâmica e medidas do filtro de Kalman linearizado; notar que quanto maior o desalinhamento inicial, maior o erro de linearização nos referidos modelos). Igualmente, desejam-se estimativas  $\hat{\nabla}_{b,k}^+$  do bias  $\nabla_b$  e  $\hat{\varepsilon}_{b,k}^+$  da deriva  $\varepsilon_b$ . Os erros de estimação após cada passo de atualização do filtro são definidos como a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_k^+ &= \Psi + \mathbf{e}_{\Psi,k}^+ \\ \hat{\varepsilon}_{b,k}^+ &= \varepsilon_b + \mathbf{e}_{\varepsilon,k}^+ \\ \hat{\nabla}_{b,k}^+ &= \nabla_b + \mathbf{e}_{\nabla,k}^+ \end{aligned}$$

A estimação empregará medidas inerciais à medida que vão se tornando disponíveis com período de amostragem  $T=1\text{s}$ . Para tal, é necessário discretizar o modelo dinâmico contínuo no tempo. Sugestão: empregue o método do segurador de ordem zero (*zero order hold*) da função `c2d(.)` do Matlab.

Sintonize o filtro, i.e., ajuste os termos na diagonal de  $\mathbf{Q}_d$ , a matriz de covariância do erro de modelagem discretizada, e de  $\mathbf{P}(0)$ . Experimente o efeito de variar  $\mathbf{P}(0)$  no desempenho do filtro.

a. Mostre os **erros de estimação** e seus desvios-padrões computados pelo filtro, os quais são dados pela raiz quadrada dos respectivos elementos na diagonal da matriz **P** de covariância do erro de estimação, tanto a propagada quanto a atualizada, a cada intervalo de amostragem. Verifique se os erros de estimação oscilam em torno de zero e se três desvios-padrões envolvem praticamente todas as amostras de erro, como seria esperado se os erros fossem Gaussianos.

b. Analise os resultados obtidos, em especial quanto às estimativas de deriva e bias.

c. Em vista do sinal de rotação da Terra ser de baixa magnitude em relação à força específica de reação à gravidade, o processo de girocompasso para determinação do Norte local é lento em relação a estimar a horizontal local. Acrescente um magnetômetro triaxial, assumido como não tendo erro sistemático e cujas medidas amostradas são corrompidas de forma aditiva com uma seqüência branca dotada de média nula e  $\sigma_{\text{mgt}} = 0,1^\circ$ , para obter informação que permita estimação mais rápida de  $\psi_D$ . Qual o efeito sobre a estimativa deste desalinhamento?

Parte 2. EKF – filtro de Kalman estendido. O EKF realiza a linearização em torno da solução de atitude do INS  $\mathbf{D}_{b,k}^{p,r}$ , a qual resulta de corrigir iterativamente a DCM que foi inicialmente computada pelo INS com a estimativa atualizada de desalinhamento, e usando as medidas dos acelerômetros e girômetros que são iterativamente calibradas pelas estimativas atualizadas acumuladas de bias e deriva, respectivamente.

Denomina-se *reset* o processo de corrigir a solução computada do INS e a calibração das medidas inerciais com as estimativas iterativamente refinadas do filtro de Kalman:

1. *reset* do desalinhamento no vetor de estado do EKF

$$\hat{\mathbf{D}}_{b,k}^t = \mathbf{D}_{b,k}^{p,r} = \mathbf{D}_{b,k-1}^{p,r} \hat{\mathbf{D}}_{p,k}^t = \mathbf{D}_{b,k-1}^{p,r} (\mathbf{I} - \hat{\Psi}_k^+ \times); \quad \mathbf{D}_{b,0}^{p,r} = \mathbf{D}_b^p \text{ usado no LKF}$$

$$\hat{\Psi}_k^{+,r} \leftarrow \mathbf{0}$$

2. *reset* da deriva no vetor de estado do EKF

$$\omega_{m,b,\text{cal},k} = \omega_{m,b,k} - \sum_{j=0}^k \hat{\epsilon}_{b,j}^+$$

$$\hat{\epsilon}_{b,k}^{+,r} \leftarrow \mathbf{0}$$

3. *reset* do bias no vetor de estado do EKF

$$\mathbf{A}_{\text{sp},m,b,\text{cal},k} = \mathbf{A}_{\text{sp},m,b,k} - \sum_{j=0}^k \hat{\mathbf{V}}_{b,j}^+$$

$$\hat{\mathbf{V}}_{b,k}^{+,r} \leftarrow \mathbf{0}$$

Notar que o EKF estima bias e deriva residuais remanescentes após a calibração dos sensores e *reset*, motivando o uso dos somatórios na calibração. Como o processo acima não altera a incerteza na estimação, apenas deslocando para a origem o vetor de erros de estimação no EKF, a matriz de covariância do erro de estimação **P** não será afetada pelo *reset*. Os erros a plotar após *reset* são:

$$\Psi_k^{+,r} = \Psi + \mathbf{e}_{\Psi,k}^{+,r} \Rightarrow \hat{\mathbf{D}}_{p,k}^{t,r} = (\mathbf{I} - \mathbf{e}_{\Psi,k}^{+,r} \times) = \mathbf{D}_{p,k}^{b,r} \mathbf{D}_b^t \rightarrow \mathbf{e}_{\Psi,k}^{+,r}$$

$$\sum_{j=0}^k \hat{\varepsilon}_{b,j}^+ = \varepsilon_b + \mathbf{e}_{\varepsilon,k}^{+,r} \Rightarrow \mathbf{e}_{\varepsilon,k}^{+,r} = \sum_{j=0}^k \hat{\varepsilon}_{b,j}^+ - \varepsilon_b$$

$$\sum_{j=0}^k \hat{\nabla}_{b,j}^+ = \nabla_b + \mathbf{e}_{\nabla,k}^{+,r} \Rightarrow \mathbf{e}_{\nabla,k}^{+,r} = \sum_{j=0}^k \hat{\nabla}_{b,j}^+ - \nabla_b$$

## Descrição sucinta do Sistema de Posicionamento Global Navstar GPS

GPS é um sistema de rádio-navegação baseado em satélites, provendo cobertura contínua ao redor do globo terrestre e sob quaisquer condições meteorológicas. Os receptores GPS medem atrasos temporais e decodificam mensagens recebidas de satélites com linha de visada direta à antena do receptor, objetivando estimar sua posição e o erro no relógio do receptor. O sistema consiste de três segmentos, espacial, de controle e do usuário.

### Segmento espacial:

Trata-se de um conjunto de 21 satélites artificiais no mínimo (em maio de 2000 contando com 24), distribuídos entre 6 planos orbitais inclinados de 55 graus com relação ao plano equatorial, percorrendo órbitas quase circulares com raio de aproximadamente 26.500km e período de cerca de 12h. A solução de navegação para o caso geral, em que as três coordenadas de posição e a de tempo são requeridas, requer a visibilidade de pelo menos quatro satélites. A geometria dos satélites visíveis à antena do receptor varia com o tempo. Portanto, a qualidade da solução de navegação também varia com o tempo no caso de receptor compatível apenas com sinais do Navstar GPS. Hoje, busca-se projetar receptores que operem também com sinais dos sistemas de posicionamento por satélites GLONASS (da antiga União Soviética) e Galileo (da Comunidade Européia), o que garantirá ampla cobertura global, dia e noite, sem queda na qualidade da navegação.

### Segmento de controle:

Estações terrestres de monitoração atualizam as informações disseminadas pelos satélites para os usuários, tais como almanaque da constelação, tempo, estado operacional, efeméride do satélite transmissor e mensagem com conteúdo de navegação combinada com sinal pseudoaleatório que se repete com um certo período.

### Segmento do usuário:

Consiste de antenas e receptores, providos de processadores digitais de sinais, que recebem em seus canais de recepção e decodificam as transmissões dos satélites para fornecer ao usuário sua posição, velocidade e tempo. Uma vez que o receptor GPS é passivo, i.e., não transmite sinais, o segmento espacial pode oferecer serviços para um número ilimitado de usuários simultaneamente. O GPS é um sistema que requer linha de visada direta entre receptor e satélite; em caso desta tornar-se obstruída, o sinal do satélite não será recebido.

### Sinais transmitidos:

Cada satélite transmite 3 códigos pseudoaleatórios, C/A, P e Y, para determinação de distância ao receptor e também envia dados de navegação. É empregado acesso múltiplo por divisão de código (CDMA - code-division multiple access) para enviar informações pelas portadoras, chamadas L1 e L2, as quais são compartilhadas por todos os satélites. As portadoras são moduladas pelos sinais que transmitem informações aos usuários.



L1 - frequência de 1.575,42MHz modulada por códigos pseudoaleatórios:

O código pseudoaleatório C/A tem comprimento de 1023 *chips* (em contraste com o termo usual *bit*, indicando que o código não possui informação) e uma taxa de 1,023MHz (*chip rate*), resultando em um período de 1ms. É empregado na aquisição inicial do satélite pelo receptor. Há um código C/A distinto para cada satélite e eles são ortogonais entre si, o que permite discriminar os satélites. Assim, ainda que todos os satélites transmitam nas mesmas portadoras L1 e L2, o receptor de GPS consegue travar (*lock on*) em um dado satélite e computar a correlação de uma versão, gerada internamente, do código C/A de um satélite com o sinal efetivamente recebido dele. Uma vez que o código C/A de cada satélite é distinto dos demais e eles são ortogonais entre si, a interferência entre satélites fica muito reduzida. Cada satélite é identificado por um número que distingue os seus códigos pseudoaleatórios daqueles dos demais. O código C/A é por sua vez modulado pela *mensagem de navegação*, a uma taxa de 50 bits/s, que o receptor decodifica em parâmetros da órbita do satélite, correções feitas ao relógio do sistema e correções referentes à propagação na ionosfera e nas camadas da atmosfera, entre outros. O uso isolado do L1 C/A com a mensagem de navegação caracteriza o nível de serviço de GPS denominado SPS - Standard Positioning System. A qualidade previsível para este nível de serviço, desde 1993, é de cerca de 100m horizontal 2drms ( $2 \times [\text{distance\_root\_mean\_square}]$ ) - é o raio do círculo contendo o erro de estimação com probabilidade 98%), 156m vertical (95%) e 340ns (95%) com relação ao referencial de tempo UTC (Universal Time Coordinate - também conhecido por Greenwich Mean Time). Técnicas de GPS diferencial podem reduzir estes erros significativamente.

Código pseudoaleatório P, com um comprimento de *chips* muito longo e uma taxa de 10,23MHz (*chip rate*), resultando em um período de 7 dias. Este código é propositalmente degradado mediante inserção de erros na estampa de tempo e nos dados de efeméride contidos na mensagem de navegação enviada pelo satélite. Usuários autorizados possuem receptores capazes de remover esta degradação proposital, conhecida como *disponibilidade seletiva* (SA - *available selectivity*) e assim obter posicionamento mais exato. Seu similar militar, o código pseudoaleatório Y, é encriptado e requer um módulo AS - *antispoofing*, de uso restrito ao DoD para aplicações militares, dotado de chave criptográfica visando à proteção contra interferência proposital. O uso dos códigos P (ou Y) caracterizam o nível de serviço denominado PPS - Precise Positioning System. A qualidade previsível para este nível de serviço, desde 1995, é de cerca de 22m horizontal 2drms, 28m vertical (95%) e 200ns (95%).

L2 - frequência de 1.227,60MHz modulada somente pelo código P e em aplicações militares pelo código Y. O emprego simultâneo de L1 e L2 pelo receptor permite estimar o atraso na propagação dos sinais pela ionosfera.

L5 - frequência de 1176,45MHz transmitida para uso civil com sinal empregado em operações de segurança e preservação da vida em atividades marítimas (International Convention for the Safety of Life at Sea - SOLAS - é um tratado internacional para preservação da segurança no mar iniciado em 1914 em resposta ao desastre do Titanic. Deverá ser implementado com o primeiro satélite GPS IIF em 2010. L5 apresenta potência mais elevada que L1 e L2, sua modulação é tal que o torna mais robusto a

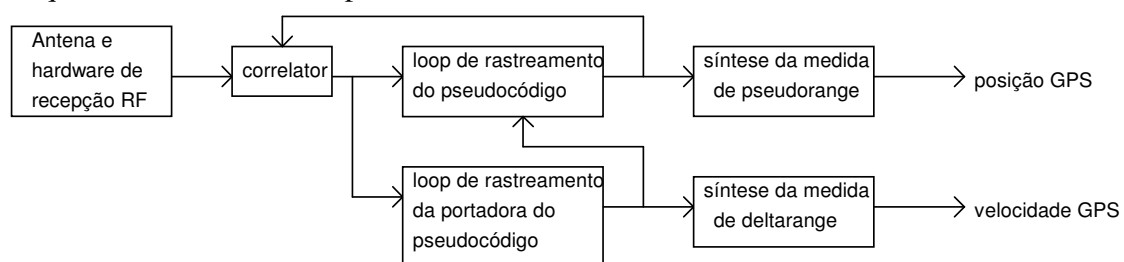
interferências, é uma banda catalogada no Aeronautical Radionavigation Services e está disponível em todo o mundo.

### Conceitos envolvidos no uso de GPS para navegação

A navegação por GPS baseia-se na medição do intervalo de tempo dispendido na propagação de uma mensagem do satélite até o receptor, determinando-se a distância relativa entre ambos. O receptor contém um relógio interno para obter o tempo da chegada do código, C/A, P ou Y, empregado para determinação de tal distância. Uma vez que o sinal se propaga à velocidade da luz, o intervalo de tempo, ao ser multiplicado pela velocidade da luz no vácuo  $c$ , converte-se em uma distância. Estas medidas de distância são denominadas *pseudoalcances* (ou *pseudodistâncias*) por serem adulteradas por erros de temporização no satélite e, principalmente, no receptor, por variações na velocidade da luz durante a propagação na ionosfera e nas várias camadas da atmosfera e pela ocorrência de múltiplos trajetos, entre outras fontes de erros menos significativos. Por exemplo, um erro de temporização de 1ms resulta em erro de distância de cerca de 300km, indicando a necessidade de compensação acurada deste tipo de erro.

Com a localização do satélite conhecida, mediante os dados de efeméride transmitidos na mensagem de navegação, e desconsiderando os erros no relógio do receptor, o emprego de sinais de três satélites com linhas de visada não colineares resulta em duas possíveis soluções de posição. Esta ambigüidade pode ser resolvida com o uso de informação prévia sobre a localização do receptor ou uso de mais um satélite. Quando o erro no relógio do receptor é considerado, todas as medidas de pseudoalcance são polarizadas igualmente pelo mesmo termo. Assim, em qualquer conjunto de medidas simultâneas de pseudoalcance há de se determinar quatro incógnitas, as três coordenadas espaciais do receptor e o erro de relógio do receptor, requerendo esta computação pelo menos quatro medidas de pseudoalcance que não sejam colineares.

### Esquema funcional de receptor GPS:



### Variáveis observadas:

#### 1 - Pseudorange

Medida de tempo decorrido entre a transmissão da mensagem do satélite e sua decodificação no receptor. Deve-se à distância entre o satélite transmissor e o receptor e ao erro do relógio do receptor em relação ao do satélite, entre outras fontes de erro.

Obtido pelo correlator, que detém uma cópia do pseudocódigo, e por comparação entre a estampa de tempo na mensagem enviada pelo satélite e o tempo marcado pelo relógio do receptor. No caso de P-code, o erro de medida do pseudorange é modelado como sendo branco com um desvio padrão  $\sigma_{P\text{-code}} \approx 1\text{m}$ .

$$\rho_i = \psi_i + \beta_{p,i} + v_{p,i,P\text{-code or C/A-code}}; i = 1, 2, 3, 4 \text{ é o respectivo satélite}$$

$$\psi_i = [(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2]^{1/2} + c\Delta t$$

onde  $[X_i \ Y_i \ Z_i]^T$  e  $[x \ y \ z]^T$  são as coordenadas do satélite e do receptor, respectivamente, no sistema de coordenadas  $S_e$ ,  $\psi_i$  é a medida de pseudorange para o  $i$ -ésimo satélite isenta de ruído,  $\Delta t$  é o erro entre o tempo marcado pelo relógio do receptor e o do sistema e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.  $c\Delta t$  é comumente denominado de *clock bias* (em unidade de distância) do receptor ou erro de relógio do receptor. As variáveis que requerem estimação são quatro,  $[x \ y \ z \ c\Delta t]^T$ . Os erros de medida de pseudorange são:

$\beta_{p,i}$  - termo que inclui o erro intencional de disponibilidade seletiva (S/A, *selective availability*), o devido a atraso de propagação na troposfera e estratosfera e o existente no conteúdo das informações de efeméride do satélite. Pode ser removido ou significativamente atenuado por meio de emprego de GPS diferencial, técnica que utiliza um receptor em coordenadas bem conhecidas transmitindo correções para outros receptores nas vizinhanças.

$v_{p,i,P\text{-code or C/A-code}}$  - ruído modelado como branco.

## 2 - Deltarange

Taxa de variação na fase da portadora, a qual é usada como uma aproximação do deslocamento Doppler na direção do satélite. Esta variação ocorre por causa do movimento relativo ao longo da linha de visada entre receptor e satélite e do erro na frequência do relógio do receptor. O movimento do satélite ao longo da referida linha de visada é computável da informação de efeméride enviada pelo satélite. A medida de deltarange permite determinar a velocidade do receptor na direção do satélite e o erro na frequência do relógio do receptor. A medida instantânea de fase da portadora, em unidade de distância (metros), é dada por

$$\lambda\phi_i = \psi_i + N_{\phi,i} + \beta_{\phi,i} + v_{\phi,i}; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da portadora,  $\phi_i$  é a fase medida,  $N_{\phi,i}$  é o erro devido à ambigüidade de ciclo completo na determinação da fase,  $\beta_{\phi,i}$  contém os erro passíveis de remoção ou atenuação significativa por GPS diferencial e  $v_{\phi,i}$  é ruído assumido como branco.

A seguir, os modelos dinâmicos empregados por filtros de Kalman embutidos no software do receptor para emprego de GPS no modo *stand-alone*, i.e., em modo de operação isolada sem uso de informação externa à do GPS.

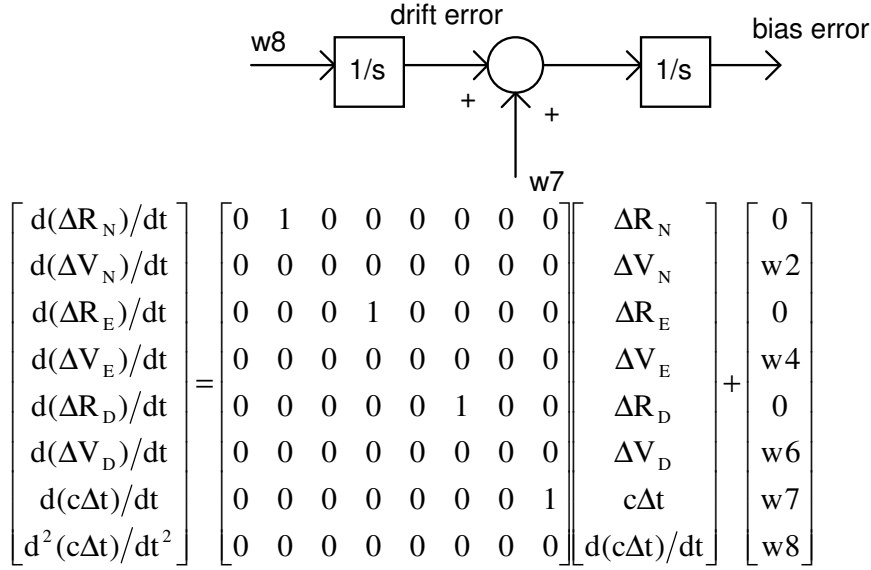
## Modelos dinâmicos de Filtros de Kalman embutidos em receptores GPS

### 1 - Modelo PV para receptor movendo-se com velocidade aproximadamente constante

O seguinte modelo de erro para o *clock bias* será assumido:

*clock bias error*:  $c\Delta t$

*clock drift error*:  $d(c\Delta t)/dt$



onde os ruídos são brancos, com média nula, não correlacionados e com intensidades dadas por:

$$E[w2^2] = E[w4^2] = E[w6^2] = S_p$$

$$E[w7^2] = S_f \quad ; \quad E[w8^2] = S_g$$

A discretização deste modelo para um intervalo de amostragem  $T$  pequeno produz então a matriz de transição de estados:

$$\phi(T) \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}T = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e \mathbf{w}d = \begin{bmatrix} 0 \\ w2d \\ 0 \\ w4d \\ 0 \\ w6d \\ w7d \\ w8d \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbf{w}d$  é um vetor de seqüências ruidosas brancas com média nula e intensidades adequadas para representar o processo ruidoso contínuo no tempo, como visto a seguir. A

matriz de transição de estados é composta de blocos  $\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}, \phi_{44}$  idênticos ao longo da diagonal principal. Informalmente, tem-se para a sequência ruidosa que:

$$\mathbf{w}d = \int_0^T \phi(t - \tau) \mathbf{w}(., \tau) d\tau$$

Os blocos da matriz de intensidade  $\mathbf{Q}d$  do ruído de modelo são então:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}d_{11} &= E \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ w_{2d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & w_{2d} \end{bmatrix} \right] = \int_0^T \int_0^T \phi_{11}(T - \tau) E \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ w_{2d}(., \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & w_{2d}(., \sigma) \end{bmatrix} \right] \phi_{11}^T(T - \sigma) d\sigma d\tau = \\ &= \int_0^T \int_0^T \phi_{11}(T - \tau) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_p \end{bmatrix} \delta(\sigma - \tau) \phi_{11}^T(T - \sigma) d\sigma d\tau = \\ &= \int_0^T \int_0^T \phi_{11}(T - \tau) \mathbf{W}_{11} \delta(\sigma - \tau) \phi_{11}^T(T - \sigma) d\sigma d\tau = \int_0^T \phi_{11}(T - \tau) \mathbf{W}_{11} \phi_{11}^T(T - \tau) d\tau \\ \mathbf{Q}d_{11} &= \mathbf{Q}d_{22} = \mathbf{Q}d_{33} = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T - \tau & 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} S_p T^3/3 & S_p T^2/2 \\ S_p T^2/2 & S_p T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observa-se portanto a correlação no modelo dinâmico dos erros de posição e velocidade de cada canal do sistema de coordenadas NED, decorrente da discretização do processo contínuo no tempo. Com relação ao relógio do receptor:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}d_{44} &= E \left[ \begin{bmatrix} w_{7d} \\ w_{8d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{7d} & w_{8d} \end{bmatrix} \right] = \int_0^T \int_0^T \phi_{44}(T - \tau) E \left[ \begin{bmatrix} w_{7d}(., \tau) \\ w_{8d}(., \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{7d}(., \sigma) & w_{8d}(., \sigma) \end{bmatrix} \right] \phi_{44}^T(T - \sigma) d\sigma d\tau = \\ &= \int_0^T \int_0^T \phi_{44}(T - \tau) \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ 0 & S_g \end{bmatrix} \delta(\sigma - \tau) \phi_{44}^T(T - \sigma) d\sigma d\tau = \\ &= \int_0^T \int_0^T \phi_{44}(T - \tau) \mathbf{W}_{44} \delta(\sigma - \tau) \phi_{44}^T(T - \sigma) d\sigma d\tau = \int_0^T \phi_{44}(T - \tau) \mathbf{W}_{44} \phi_{44}^T(T - \tau) d\tau \\ \mathbf{Q}d_{44} &= \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ 0 & S_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T - \tau & 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} S_f T + S_g T^3/3 & S_g T^2/2 \\ S_g T^2/2 & S_g T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então:

$$\mathbf{Q}d = \text{diagonal}(\mathbf{Q}d_{11}, \mathbf{Q}d_{22}, \mathbf{Q}d_{33}, \mathbf{Q}d_{44})$$

A determinação dos coeficientes  $S_f$  e  $S_g$  que representam a intensidade dos erros de modelagem do relógio será abordada mais adiante. Quanto à intensidade do erro de modelagem da velocidade  $S_p$ , sua determinação é empírica e considera a manobrabilidade do veículo se este estiver a acelerações sustentadas. Por exemplo, para aviões ou carros desenvolvendo velocidade (*velocity*, não *speed*) aproximadamente constante, pode-se usar no modelo PV um valor de  $S_p$  no canal vertical menor do que nos canais horizontais para lidar com manobras que venham a ocorrer no plano horizontal.

## 2 - Modelo PVA para receptor submetido a acelerações.

A aceleração em cada canal é acrescentada como estado adicional com dinâmica de primeira ordem e ao qual é adicionado ruído branco. O resultado é a modelagem da aceleração como processo ruidoso correlacionado no tempo com uma certa constante de

tempo relacionada com a manobrabilidade do veículo. Para cada canal, no domínio contínuo do tempo, tem-se que:

$$\dot{a}(t) = -\alpha a(t) + w_a(.,t)$$

$$R_a(\tau) = E[a(t)a(t+\tau)] = \sigma_a^2 e^{-\alpha|\tau|} \text{ e } \sigma_{w_a}^2 = 2\alpha\sigma_a^2 \text{ (* observação adiante)}$$

O modelo dinâmico para o Filtro de Kalman é então:

$$\begin{bmatrix} d(\Delta R_N)/dt \\ d(\Delta V_N)/dt \\ d(a_N)/dt \\ d(\Delta R_E)/dt \\ d(\Delta V_E)/dt \\ d(a_E)/dt \\ d(\Delta R_D)/dt \\ d(\Delta V_D)/dt \\ d(a_D)/dt \\ d(c\Delta t)/dt \\ d^2(c\Delta t)/dt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_N \\ \Delta V_N \\ a_N \\ \Delta R_E \\ \Delta V_E \\ a_E \\ \Delta R_D \\ \Delta V_D \\ a_D \\ c\Delta t \\ d(c\Delta t)/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{a_N} \\ 0 \\ 0 \\ w_{a_E} \\ 0 \\ 0 \\ w_{a_D} \\ w10 \\ w11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O coeficiente  $\alpha[s^{-1}]$  indica o inverso da constante de tempo associada à manobrabilidade do veículo. Por exemplo,  $\alpha \approx 1/60$  para manobra suave,  $\alpha \approx 1/20$  para manobra evasiva e  $\alpha \approx 1$  para movimento causado por turbulência atmosférica. O modelo dinâmico é discretizado segundo o período de amostragem T, analogamente ao já visto.

Vide: Singer, R.A. "Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets", IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, v. AES-6, n.4, pp. 473-483, July 1970.

A consideração de acelerações determinísticas de significativa magnitude requer o auxílio de sensores externos, como radar Doppler e INS.

(\*) **Observação** - A solução nos instantes de amostragem múltiplos de T é dada por:

$$a(kT) = e^{-\alpha T} a((k-1)T) + w_{da}(.,(k-1)T) \quad (\#)$$

onde  $w_{da}(.,kT)$  é uma seqüência de ruído branco com as mesmas média nula e variância que o processo estocástico contínuo  $w_a(.,t)$ . Para determinar a variância da seqüência discreta  $w_{da}$ , procede-se como abaixo:

$$E[a^2(kT)] = E[e^{-2\alpha T} a^2((k-1)T) + w_{da}^2(.,(k-1)T) + 2e^{-\alpha T} a((k-1)T)w_{da}(.,(k-1)T)]$$

Uma vez que, de acordo com o modelo em (#), não há correlação entre  $a(kT)$  e  $w_{da}(.,kT)$ , a expressão acima, quando o processo entra em regime do ponto de vista estatístico, simplifica para:

$$\sigma_a^2 = e^{-2\alpha T} \sigma_a^2 + \sigma_{w_{da}}^2 \Rightarrow \sigma_{w_{da}}^2 = (1 - e^{-2\alpha T}) \sigma_a^2 \approx [1 - (1 - 2\alpha T)] \sigma_a^2 = 2\alpha T \sigma_a^2$$

Dado que a variância da seqüência discreta relaciona-se de forma aproximada, para  $T$  pequeno, com a do processo estocástico contínuo conforme abaixo, tem-se que:

$$\sigma_{w_{da}}^2 \approx T \sigma_{w_a}^2 \Rightarrow \sigma_{w_a}^2 = 2\alpha \sigma_a^2 \quad (\text{CQD})$$

## Linearização das medidas de pseudorange para uso no Filtro de Kalman

Conforme já visto:

$$\psi_i = \left[ (X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2 \right]^{1/2} + c\Delta t = \psi_i(c\Delta t)$$

onde  $i=1,2,3,4$ ,  $\mathbf{R}_{i\text{-sat},e} = [X_i \ Y_i \ Z_i]^T$  e  $\mathbf{R}_e = [x \ y \ z]^T$  são as coordenadas do  $i$ -satélite e do receptor, respectivamente, no sistema de coordenadas  $S_e$ ,  $\psi_i$  é a medida de pseudorange para o  $i$ -ésimo satélite isenta de ruído,  $\Delta t$  é o erro entre o tempo marcado pelo relógio do receptor e o pelo do sistema de satélites e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.  $c\Delta t$  é o *clock bias* do receptor em unidades de distância. As coordenadas do  $i$ -ésimo satélite em  $S_e$  são obtidas dos dados de efeméride que chegam ao receptor.

Dada uma posição estimada para o receptor  $\hat{\mathbf{R}}_e = [\hat{x} \ \hat{y} \ \hat{z}]^T$  obtida por processamento de dados de outro sistema e sensores, como o INS, é coerente falar na medida estimada do  $i$ -ésimo pseudorange, a qual depende do erro de estimação de posição, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_e &= [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^T = \hat{\mathbf{R}}_e - \mathbf{R}_e \\ \hat{\psi}_i(\hat{\mathbf{R}}_e) &= \left[ (X_i - \hat{x})^2 + (Y_i - \hat{y})^2 + (Z_i - \hat{z})^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[ (X_i - x - \Delta x)^2 + (Y_i - y - \Delta y)^2 + (Z_i - z - \Delta z)^2 \right]^{1/2} = \hat{\psi}_i(\Delta \mathbf{R}_e) \end{aligned}$$

Então, para fins de integração INS/GPS mediante emprego de filtragem de Kalman, será empregado como vetor de medida a diferença entre a leitura de pseudorange fornecida pelo receptor GPS e a esperada segundo a posição estimada pelo INS para 4 satélites distintos.

$$\mathbf{z}(\Delta \mathbf{R}_e, c\Delta t) = \begin{bmatrix} \psi_1(c\Delta t) \\ \psi_2(c\Delta t) \\ \psi_3(c\Delta t) \\ \psi_4(c\Delta t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1(\Delta \mathbf{R}_e) \\ \hat{\psi}_2(\Delta \mathbf{R}_e) \\ \hat{\psi}_3(\Delta \mathbf{R}_e) \\ \hat{\psi}_4(\Delta \mathbf{R}_e) \end{bmatrix}$$

Cada componente do vetor de medida relaciona-se com o vetor de estado do modelo dinâmico dos erros de navegação e dos sensores inerciais que foi construído no Cap. 5. Essa relação pode ser aproximada pela expansão em série de Taylor, conforme abaixo:

$$z_i(\Delta \mathbf{R}_e, c\Delta t) \approx \underbrace{z_i(0,0)}_0 + \left. \frac{\partial z_i(\Delta \mathbf{R}_e, c\Delta t)}{\partial \Delta \mathbf{R}_e} \right|_{\Delta \mathbf{R}=0; c\Delta t=0}^T \cdot \Delta \mathbf{R}_e + \left. \frac{\partial z_i(\Delta \mathbf{R}_e, c\Delta t)}{\partial (c\Delta t)} \right|_{\Delta \mathbf{R}=0; c\Delta t=0}^T \cdot c\Delta t$$

Então, a linearização da medida em relação ao vetor de estado do erro em torno do erro nulo em  $S_e$  é:



$$\left. \frac{\partial z_i(\Delta \mathbf{R}_e, c\Delta t)}{\partial \Delta \mathbf{R}_e} \right|_{\Delta \mathbf{R}=0; c\Delta t=0} = \left. \frac{-\partial \hat{\psi}_i(\Delta \mathbf{R}_e)}{\partial \Delta \mathbf{R}_e} \right|_{\Delta \mathbf{R}=0} = \left. \frac{-\partial \hat{\psi}_i(\hat{\mathbf{R}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{R}}_e} \right|_{\hat{\mathbf{R}}=\mathbf{R}} =$$

$$= - \left[ \frac{\partial \hat{\psi}_i(\hat{\mathbf{R}}_e)}{\partial \hat{x}} \quad \frac{\partial \hat{\psi}_i(\hat{\mathbf{R}}_e)}{\partial \hat{y}} \quad \frac{\partial \hat{\psi}_i(\hat{\mathbf{R}}_e)}{\partial \hat{z}} \right]^T \Bigg|_{x=\hat{x}, y=\hat{y}, z=\hat{z}}$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \hat{x}} \right|_{\substack{x=\hat{x} \\ y=\hat{y} \\ z=\hat{z}}} = \frac{-(X_i - x)}{((X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2)^{1/2}}$$

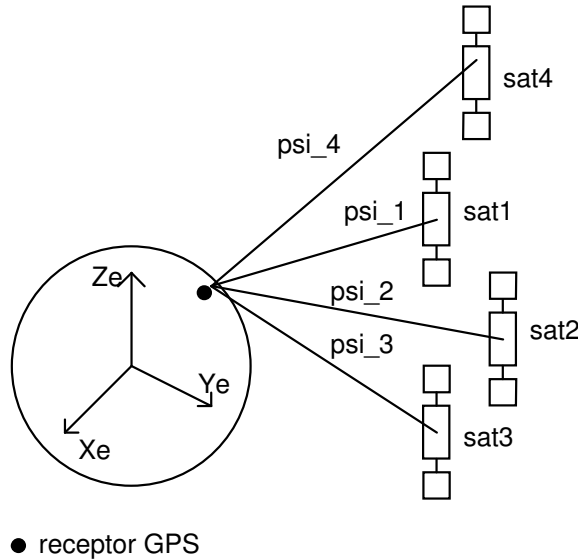
$$\left. \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \hat{y}} \right|_{\substack{x=\hat{x} \\ y=\hat{y} \\ z=\hat{z}}} = \frac{-(Y_i - y)}{((X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2)^{1/2}}$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \hat{z}} \right|_{\substack{x=\hat{x} \\ y=\hat{y} \\ z=\hat{z}}} = \frac{-(Z_i - z)}{((X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2)^{1/2}}$$

$$\left. \frac{\partial z_i(\Delta \mathbf{R}_e, c\Delta t)}{\partial (c\Delta t)} \right|_{\Delta \mathbf{R}=0; c\Delta t=0} = \left. \frac{\partial \psi_i(c\Delta t)}{\partial (c\Delta t)} \right|_{c\Delta t=0} = 1$$

Das expressões acima, nota-se que  $\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \mathbf{R}_e} = [\partial \psi_i / \partial x \quad \partial \psi_i / \partial y \quad \partial \psi_i / \partial z]^T = -\mathbf{u}_{i,e} \Big|_{\Delta \mathbf{R}=0}^T$

representa o vetor unitário da linha de visada, descrito em  $S_e$ , do  $i$ -ésimo satélite à posição do receptor. A figura abaixo busca auxiliar o entendimento físico das equações acima:



Da expansão em série que resultou na linearização e das derivadas parciais acima:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_1 \\ \hat{\Psi}_2 \\ \hat{\Psi}_3 \\ \hat{\Psi}_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial\Psi_1/\partial\hat{x} & \partial\Psi_1/\partial\hat{y} & \partial\Psi_1/\partial\hat{z} & -1 \\ \partial\Psi_2/\partial\hat{x} & \partial\Psi_2/\partial\hat{y} & \partial\Psi_2/\partial\hat{z} & -1 \\ \partial\Psi_3/\partial\hat{x} & \partial\Psi_3/\partial\hat{y} & \partial\Psi_3/\partial\hat{z} & -1 \\ \partial\Psi_4/\partial\hat{x} & \partial\Psi_4/\partial\hat{y} & \partial\Psi_4/\partial\hat{z} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c\Delta t \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\hat{x} \\ y=\hat{y} \\ z=\hat{z}}}$$

Considerando ruído de medida, a  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{z}$  é dada por:

$$z_i = \rho_i - \hat{\rho}_i = - \left[ \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial \hat{\mathbf{R}}_e} \right]_{\mathbf{R}=\hat{\mathbf{R}}} - 1 \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R}_e \\ c\Delta t \end{bmatrix} + v_{\rho_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i,e}^T & 1 \end{bmatrix}_{\Delta \mathbf{R}=0} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R}_e \\ c\Delta t \end{bmatrix} + v_{\rho_i}$$

Cabe aqui relembrar que as medidas de pseudorange do receptor e as estimadas com informação do INS são representadas em  $S_e$  e  $S_l$ , respectivamente. A equação de medida  $\mathbf{z}$  requer, portanto, a transformação das grandezas vetoriais envolvidas no pseudorange de representação em  $S_e$  para  $S_l$ , por exemplo, via emprego da DCM  $\hat{\mathbf{D}}_l^e$  computada pelo receptor com base em sua estimativa de posição. No modelo PV, cujo modelo dinâmico já foi visto, o modelo de medidas fica:

$$\mathbf{z} = \rho - \hat{\rho} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{x,1} & 0 & h_{y,1} & 0 & h_{z,1} & 0 & 1 & 0 \\ h_{x,2} & 0 & h_{y,2} & 0 & h_{z,2} & 0 & 1 & 0 \\ h_{x,3} & 0 & h_{y,3} & 0 & h_{z,3} & 0 & 1 & 0 \\ h_{x,4} & 0 & h_{y,4} & 0 & h_{z,4} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R}_N \\ \Delta V_N \\ \Delta \mathbf{R}_E \\ \Delta V_E \\ \Delta \mathbf{R}_D \\ \Delta V_D \\ c\Delta t \\ d(c\Delta t)/dt \end{bmatrix} + \mathbf{v}_\rho$$

em que  $[h_{x,i} \ h_{y,i} \ h_{z,i}]^T$  é o vetor unitário  $\mathbf{u}_{i,l}$  da linha de visada do receptor para o  $i$ -ésimo satélite representado em  $S_l$ . A matriz de observação  $\mathbf{H}$  varia com o tempo à medida que os satélites mudam de posição na abóboda celeste, o que afeta a observabilidade do estado a estimar a partir das medidas realizadas. Esta variação na observabilidade motiva a definição de uma métrica da acurácia do GPS, o GDOP (geometric dilution of precision). Quanto ao ruído de medida, sua intensidade é dada por:

$$\mathbf{R}_\rho = E[\mathbf{v}_\rho \mathbf{v}_\rho^T] = \begin{bmatrix} r_\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_\rho \end{bmatrix}$$

com  $r_\rho = (15\text{m})^2$ . Portanto, vê-se que a matriz de covariância assume que os erros de medida são mutuamente não correlacionados. Veremos a seguir modelos para os erros no relógio de cristal do receptor, empregado para a determinação dos parâmetros  $S_f$  e  $S_g$ , conforme visto na página 99.

## Modelos de relógio de cristal

Os parâmetros  $S_f$  e  $S_g$  usados na matriz  $\mathbf{Q}_d$ , que descreve a covariância dos erros no modelo discreto no tempo, são dados por:

$$S_f = 2h_0 \quad S_g = 8\pi^2 h_{-2} \quad (\text{em unidades SI}) \quad (\#)$$

onde  $h_0$  e  $h_{-2}$  são obtidos a partir do gráfico de variância assintótica de Allan, o qual caracteriza a estabilidade de relógios baseados em cristal. Conforme visto na página 20:

$$E[w_{7d}(k)^2] = S_f T + S_g T^3 / 3 \Rightarrow \frac{\sigma_{w_{7d}}}{T} = \left( \frac{S_f}{T} + \frac{S_g T}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

sendo  $T$  o intervalo de amostragem da discretização. O gráfico de variância assintótica de Allen é visto abaixo. A aproximação assintótica com forma de V baseia-se na solução exata dada pela equação acima, obtida do modelo de segunda ordem empregado para representar os erros de relógio no receptor. Entretanto, as características medidas de deriva de relógios reais baseados em cristais apresentam grande estabilidade na região denotada como aquela onde predomina o ruído de "flicker, conforme atesta a parte plana da curva experimental parametrizada por  $\{h_0 h_{-1} h_{-2}\}$  - chamada de "flicker floor". A aproximação assintótica derivada do modelo de segunda ordem não contempla este fenômeno do "flicker floor". Busca-se um bom ajuste da aproximação assintótica com relação à curva experimental parametrizada por  $\{h_0 h_{-1} h_{-2}\}$  justamente nesta região do "flicker floor" em que também se encontra o intervalo de amostragem dos sinais dos satélites do GPS, em torno de 1s. (Vide Brown, R.G. e Hwang, P.Y.C. (1992). Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, 2nd edition, John Wiley and Sons, pp.425-427). As relações entre  $S_f$ ,  $S_g$  e os parâmetros experimentais  $\{h_0 h_{-1} h_{-2}\}$ , vistas na equação (#) acima, refletem este ajuste. A Tabela abaixo indica alguns valores típicos para os parâmetros experimentais descritivos de tipos variados de base de tempo empregados em receptores GPS.

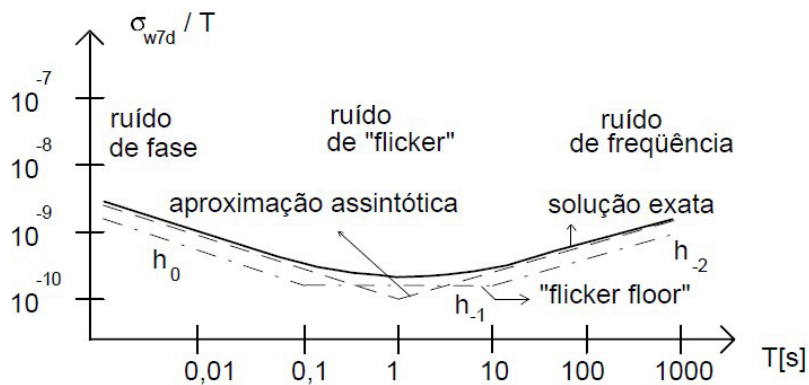


Gráfico da variância assintótica de Allan

Tabela - Valores típicos para os parâmetros de variância assintótica de Allan em função do tipo de cristal empregado - em unidades [SI]

	$h_0$	$h_{-1}$	$h_{-2}$
Cristal	$2 \times 10^{-19}$	$7 \times 10^{-21}$	$2 \times 10^{-20}$
Cristal recozido em forno	$8 \times 10^{-20}$	$2 \times 10^{-21}$	$4 \times 10^{-23}$
Rubídeo	$2 \times 10^{-20}$	$7 \times 10^{-24}$	$4 \times 10^{-29}$

### Geometria dos satélites em órbita e observabilidade

Conforme visto anteriormente, a diferença entre o pseudorange medido e o esperado se relacionam com o estado a estimar através de uma matriz de observação  $\mathbf{H}$  variante no tempo, uma vez que ela embute as linhas de visada unitárias dos satélites em órbita ao receptor de GPS. A equação de medida é repetida a seguir:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\rho} - \hat{\boldsymbol{\rho}} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{x,1} & 0 & h_{y,1} & 0 & h_{z,1} & 0 & 1 & 0 \\ h_{x,2} & 0 & h_{y,2} & 0 & h_{z,2} & 0 & 1 & 0 \\ h_{x,3} & 0 & h_{y,3} & 0 & h_{z,3} & 0 & 1 & 0 \\ h_{x,4} & 0 & h_{y,4} & 0 & h_{z,4} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} \Delta R_N \\ \Delta V_N \\ \Delta R_E \\ \Delta V_E \\ \Delta R_D \\ \Delta V_D \\ c\Delta t \\ d(c\Delta t)/dt \end{bmatrix} + \mathbf{v}_p$$

Dada a variação de  $\mathbf{H}$  com a geometria relativa entre os satélites e o receptor, a propriedade de observabilidade também varia. Define-se, então, a figura de mérito associada à observabilidade e sua variação com a geometria dos satélites em visada direta a partir do receptor - GDOP (*geometric dilution of precision*) (vide Farrell, J.A. e Barth, M. (1999). *The Global Positioning System and Inertial Navigation*, McGraw-Hill, pp.160-163.):

$$\text{GDOP} \triangleq \frac{\text{erro RMS da solução GPS}}{\text{1m de erro RMS nas medidas } (r_p^{1/2})}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \Rightarrow \text{GDOP} = \sqrt{\text{traço } (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_t^2}$$

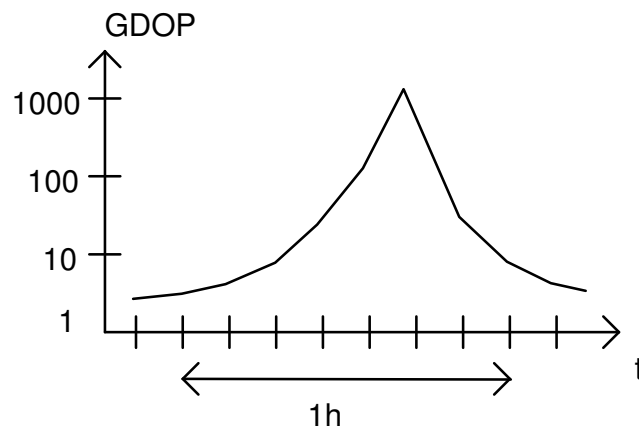
De forma análoga, são definidas as figuras de mérito VDOP (*vertical DOP*), HDOP (*horizontal DOP*) e PDOP (*position DOP*):

$$\text{VDOP} = \sigma_{zz}$$

$$\text{HDOP} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2}$$

$$\text{PDOP} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2}$$

Ilustrativamente, o gráfico a seguir mostra um exemplo típico da variação do GDOP com o tempo:



Justamente para atenuar significativamente este efeito, pretende-se padronizar que os novos receptores de GPS sejam compatíveis com os sinais emitidos pelos satélites da constelação GLONASS lançados pela extinta URSS e da Galileo, a ser lançados pela Comunidade Européia. Desta forma pretende-se eliminar a ocorrência de picos acentuados de GDOP nas áreas do globo terrestre onde os requisitos de acurácia forem mais exigentes.

#### Auxílio de *deltarange* (velocidade)

O modo principal de estimação de posição por GPS baseia-se no emprego de correlação do pseudocódigo transmitido para computar o *pseudorange* do receptor ao satélite. Apesar das medidas de *pseudorange* individualmente serem relativamente ruidosas, maior exatidão é obtida mediante computação da média temporal em uma janela de tempo. Isto reduz a variância do ruído de estimação; quanto maior a duração da janela de tempo empregada na computação da média temporal, menor a variância do ruído de estimação. Infelizmente, o uso de média temporal durante uma longa janela de tempo traz o inconveniente de tornar lenta a resposta do estimador a variações de alta frequência na dinâmica do estado sendo estimado, como ocorre em veículos altamente manobráveis. Esta limitação dinâmica da resposta introduz erros adicionais no processo de estimação. Assim, para evitar as consequências negativas associadas com o ruído na medida de *pseudorange*, medidas adicionais são usadas às vezes.

A medida suplementar mais comumente empregada em quase todos os receptores GPS padronizados é o *deltarange*, o qual consiste em uma medida aproximada de velocidade causada pelo efeito Doppler sobre a frequência do sinal transmitido pelo satélite. Conforme já visto, a medida instantânea de fase da portadora é dada por:

$$\lambda\phi_i = \psi_i + N_{\phi,i} + \beta_{\phi,i} + v_{\phi,i}; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da portadora,  $\phi_i$  é a fase medida,  $N_{\phi,i}$  é o erro devido à ambigüidade de ciclo completo na determinação da fase,  $\beta_{\phi,i}$  contém os erros passíveis de remoção ou atenuação significativa por GPS diferencial e  $v_{\phi,i}$  é ruído assumido como branco.

A medida de fase da portadora, uma vez resolvida a ambigüidade de ciclo completo, fornece uma medida de *range* muito acurada, mas demanda um rastreamento contínuo da fase (*phase lock-on*). A perda do rastreamento (*loss of lock*) requer nova solução da ambigüidade de ciclo completo. Medidas de *deltarange* como aproximações do desvio Doppler geram uma estimativa muito boa dos erros de velocidade apenas, mas não demandam um rastreamento contínuo da fase da portadora.

O  $i$ -ésimo *deltarange* é formado pela  $i$ -ésima diferença  $\delta_i$  entre duas medidas de fase da portadora,  $\lambda\phi_i(t) = \lambda\phi_i$  e  $\lambda\phi_i(t^-) = \lambda\phi_i^-$ , realizadas sequencialmente em um curto intervalo de tempo  $\tau = t - t^-$ . Desta forma, cancela-se o erro  $N_{\phi,i}$  devido à ambigüidade de ciclo completo na determinação da fase e, assumindo uso de GPS diferencial, tem-se portanto:

$$\delta_i = \lambda(\phi_i - \phi_i^-) \approx (\psi_i - \psi_i^-) + (v_{\phi,i} - v_{\phi,i}^-); \quad i = 1, 2, 3, 4$$

O *deltarange*, uma diferença de fases, é então empregado para computar uma aproximação linear do desvio Doppler visando a estimar mais acuradamente a velocidade:

$$\frac{\delta}{\tau} \approx \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \left( \frac{\Delta \mathbf{x}}{\tau} - \frac{\Delta \mathbf{x}^-}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} (v_{\phi} - v_{\phi}^-) = \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} d(\Delta \mathbf{x})/dt + v_{\delta}$$

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4]^T, \quad \boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4]^T, \quad \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta R_N & \Delta V_N & \dots & c\Delta t & \frac{d(c\Delta t)}{dt} \end{bmatrix}^T.$$

o que pode ser reescrito matricialmente como:

$$\frac{\boldsymbol{\delta}}{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & h_{x,1} & 0 & h_{y,1} & 0 & h_{z,1} & 0 & 1 \\ 0 & h_{x,2} & 0 & h_{y,2} & 0 & h_{z,2} & 0 & 1 \\ 0 & h_{x,3} & 0 & h_{y,3} & 0 & h_{z,3} & 0 & 1 \\ 0 & h_{x,4} & 0 & h_{y,4} & 0 & h_{z,4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_N \\ \Delta V_N \\ \Delta R_E \\ \Delta V_E \\ \Delta R_D \\ \Delta V_D \\ c\Delta t \\ d(c\Delta t)/dt \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{\delta}$$

tendo o ruído média zero e matriz de covariância

$$\mathbf{R}_{\delta} = \begin{bmatrix} r_{\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{\delta} \end{bmatrix}; r_{\delta} \approx (0,01\text{m/s})^2$$

Com relação ao GPS diferencial, trata-se, grosso modo, do uso de conhecimento acurado sobre a posição do receptor, por exemplo mediante geodesia. Desta forma, os erros não-aleatórios devido à propagação pela atmosfera dos sinais provindos dos satélites com linha de visada para o receptor e à degradação proposital do sinal (*selective availability*) podem ser adequadamente estimados e as correspondentes correções transmitidas para outros receptores nas vizinhanças que também tenham linha de visada para os mesmos satélites.

### Integração INS/GPS

Conforme já observado, GPS e INS possuem características marcadamente distintas e, por isso, podem ser considerados sistemas complementares para tarefas de navegação:

#### GPS:

- a) Em modo *stand-alone*, não responde rapidamente às acelerações às quais é submetido o receptor.
- b) Baixa frequência de amostragem.
- c) Estimativas de posição e velocidade com erro limitado.
- d) Sujeito a perda de sinal por bloqueio físico ou interferência casual ou proposital.

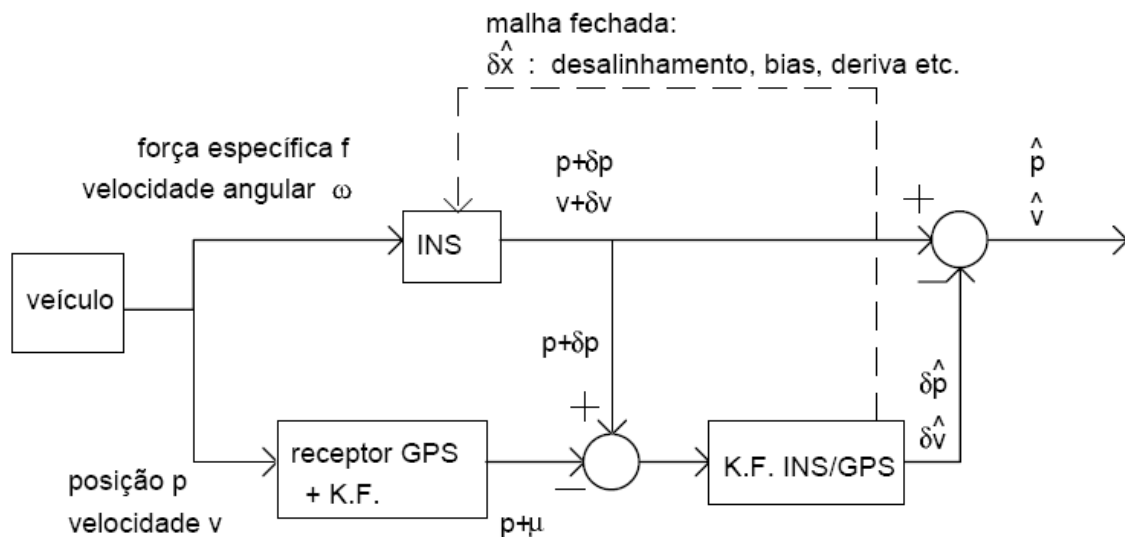
#### INS:

- a) Alta taxa de amostragem.
- b) Sistema independente de sinais externos e significativamente imune a interferências externas.
- c) Característica passa-baixas do INS, por ser este essencialmente um integrador, atenua o ruído de alta frequência nas saídas dos sensores inerciais.
- d) Erros de baixa frequência nas saídas dos sensores inerciais, como bias de acelerômetros e deriva dos giros, são amplificados e acarretam estimativas de posição e velocidade com erros que podem ser ilimitados.

Em seguida, veremos duas abordagens comumente descritas na literatura para a fusão dos dados provindos do INS e do GPS, visando ao emprego otimizado da informação provinda de cada um.

Acoplamento fraco:

Aqui, a informação proveniente do GPS para auxílio ao INS é a posição do receptor GPS. O projetista não necessita conhecer como se dá o processamento de *pseudorange* e *deltarange*.



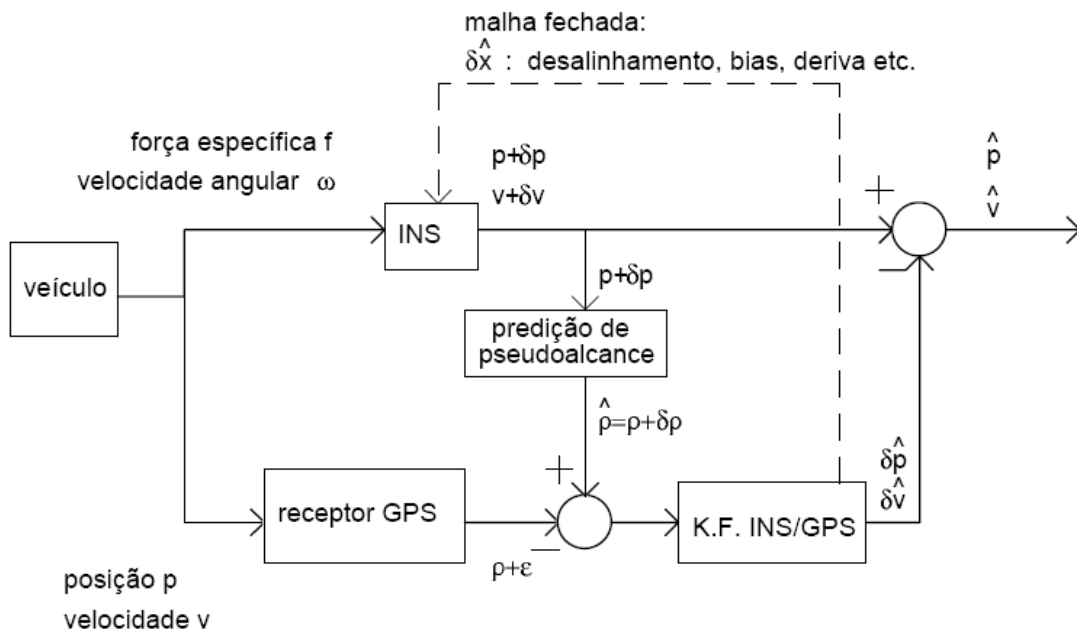
A estimativa de posição pelo filtro de Kalman embutido no receptor usa a informação de *pseudorange* dos satélites com linha de visada para o receptor. Como resultado, os erros nos componentes desta estimativa de posição são correlacionados entre si. Mais ainda, os erros também passam a ser correlacionados no tempo. Portanto, o filtro de Kalman responsável pela integração INS/GPS tem seu desempenho degradado porque assume a matriz **R** (intensidade de ruído de medida) como diagonal e o ruído, branco. É comum, nestes casos, aumentar os valores na diagonal de **R** para que o filtro de Kalman considere as medidas menos confiáveis, reduzindo-se assim o ganho do processo de inovação e pesando mais o modelo dinâmico dos erros. Grosso modo, este modelo consiste na concatenação do modelo que descreve a dinâmica dos erros de posição, de velocidade e de desalinhamento do INS, já estudados no sistema de coordenadas  $S_c$ , com um modelo estocástico que descreve a dinâmica do bias, deriva e erros de relógio, que também já foram apresentados. Em geral, o modelo de bias e de deriva considera-os como sendo constantes desconhecidas a estimar cujas incertezas são dadas por um processo de difusão - i.e., uma integral de ruído branco.

Quando a arquitetura acima opera em malha aberta, trata-se de um filtro de Kalman linearizado em torno da trajetória estimada pelo INS. A linearização presume pequenos erros no INS, o que é violado após algum tempo de operação. Por outro lado, resultados de simulação indicam ser mais fácil sintonizar o filtro quando operando em malha aberta. No caso de malha fechada, as estimativas de bias, deriva e desalinhamento são empregadas para recalibrar e realinhar continuamente o INS (*INS reset control*) enquanto o sinal do GPS estiver disponível. Neste caso, trata-se de um filtro de Kalman



estendido e a realimentação pode tornar o filtro mais suscetível a divergência. Simulações indicam ser mais difícil uma adequada sintonia do filtro, encontrando-se em curso estudos a este respeito.

Uma outra possibilidade é a integração mediante emprego das medidas de *pseudorange* e *deltarange* providas dos satélites ao receptor. Isto promove uma integração INS/GPS otimizada por estar mais próxima da hipótese de os ruídos de medida não serem correlacionados entre si. Tal modalidade de integração é visto abaixo. Note que a estimativa de posição do INS, por exemplo no sistema LLLN, é usada para computar o *pseudorange* esperado ao  $i$ -ésimo satélite  $\hat{\rho}_i = \rho_i + \delta\rho_i$  no  $S_e$ .



#### Acoplamento forte:

Aqui, a informação proveniente do INS é usada para auxiliar no rastreamento do sinal da portadora emitido pelos satélites do GPS. Esta configuração não é disponível ao usuário comum porque requer acesso ao hardware e às variáveis na malha de rastreamento da portadora, assim como conhecimento por parte do projetista de como são processados os sinais no receptor GPS.

