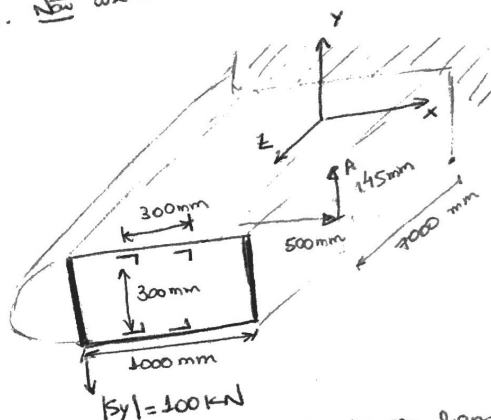


Solução Prova EST-25 2017 (T-19)

2) Seja a caixa estrutural retangular da figura abaixo. A origem do sistema de coordenadas está localizado no CG da seção transversal, junto ao engastamento. A seção transversal em destaque tem dupla simetria, feita de alumínio e está sujeita a uma força constante na longarina dianteira, em $z = 10000 \text{ mm}$. Despreze o efeito da restrição axial. Os reforçadores são pequenos, igualmente espaçados, podendo-se desprezar a inércia à flexão em torno de seus próprios CGs. Não use a idealização estrutural com booms.

Seção transversal para $6000 \leq z \leq 10000 \text{ mm}$

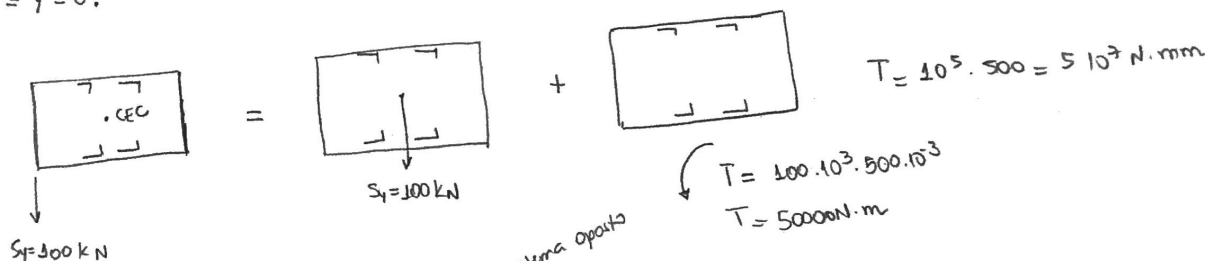
- dimensões das linhas médias: $a = 1000 \text{ mm}$; $b = 300 \text{ mm}$
- espessura do revestimento: $t_R = 2 \text{ mm}$
- área de cada um dos reforçadores: $A_r = 500 \text{ mm}^2$
- espessura das almas das longarinas: $t_L = 3 \text{ mm}$
- Alumínio: $E = 72 \text{ GPa}$; $G = 28 \text{ GPa}$



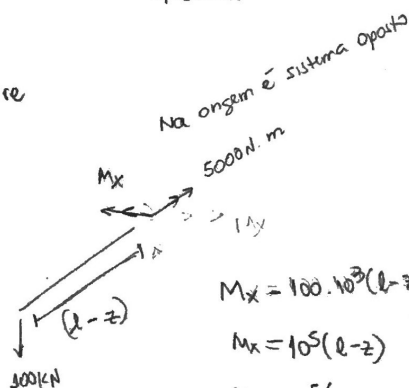
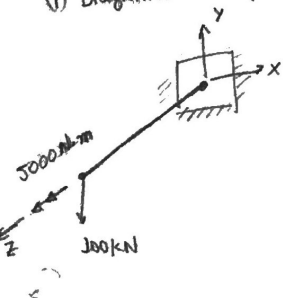
a) Calcule as tensões ativas no ponto $A = (500; 145; 7000)$ (coordenadas em mm), localizado na longarina traseira.

Como a seção transversal tem dupla simetria, o CG se encontra no centroide da seção. Ademais

$$\bar{x} = \bar{y} = 0.$$



1) Diagramas de corpo livre



$$M_x = 100 \cdot 10^3 (l - z) = 0$$

$$e \quad M_y = 0$$

$$M_x = 10^5 (l - z)$$

$M_x > 0$ pois traçona o primeiro quadrante

$$M_x = 10^5 (10000 - z) \text{ [N·mm]}$$

2) Propriedades geométricas da seção:

dupla simetria $\Rightarrow I_{xy} = 0$

Carregamento $S_x = 0$

\Rightarrow Precisaremos apenas de I_{xx} com paredes finas.

$$I_{xx} = 4 \cdot \underbrace{500 \cdot 150^2}_{\text{reforçadores}} + 2 \cdot \underbrace{2 \cdot 300^3}_{\text{longarinas}} + 2 \cdot \underbrace{1000 \cdot 2 \cdot 150^2}_{\text{revestimentos}} = 4,485 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

③ Cálculo da Tensão Normal de Flexão

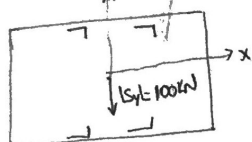
$$\sigma_z = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y \Rightarrow \sigma_z = \frac{M_x y}{I_{xx}}$$

Portanto,

$$\sigma_z = \frac{10^5 (10000 - z)}{1,485 \cdot 10^8} y \left[\frac{N}{mm^2} \right] \Rightarrow \sigma_z = \left(\frac{10000 - z}{1485} \right) y$$

④ Cálculo da Tensão de Cisalhamento devido à força cortante

Seção Fechada



Cortar a seção no eixo y de simetria do eixo y e da seção, pois $q_{x,0} = 0$ neste ponto.

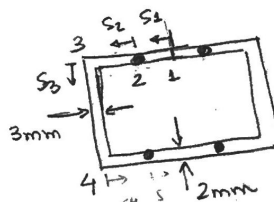
Logo:

$$q_x = q_b + q_{x,0} = q_b$$

$$q_b = - \left(\frac{S_y I_{xx} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left[\int_0^A t_b x dA + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right] + \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left[\int_0^A t_b y dA + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right]$$

$$S_x = 0 \text{ e } I_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow q_b = - \frac{S_y}{I_{xx}} \left[\int_0^A t_b y dA + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right]$$



Como S_y está no sentido negativo, então:

$$S_y = -100 \text{ kN}$$

Trecho 12:

$$q_{12} = \frac{100000}{1,485 \cdot 10^8} \left[\int_0^{A_1} 2 \cdot 150 dA \right] \Rightarrow q_{12} = \frac{1}{1485} \cdot 300 A_1 = \frac{300}{1485} A_1 \Rightarrow q_{12} = \frac{300}{1485} A_1 \left[\frac{N}{mm} \right]$$

mesmo sentido de A_1

Trecho 23:

$$q_{23} = q_{12} + \frac{100000}{1,485 \cdot 10^8} \left[\int_0^{A_2} 2 \cdot 150 dA + 500 \cdot 150 \right] = \frac{1}{1485} \left[300 A_2 + 75000 + 300 \cdot 150 \right]$$

$$q_{23} = \frac{1}{1485} \left[300 A_2 + 120000 \right] = \frac{300}{1485} \left[A_2 + 400 \right] \left[\frac{N}{mm} \right] \text{ mesmo sentido de } A_2$$

Trecho 34:

$$A_3 = y + 150 \Rightarrow y = 150 \Rightarrow A_3 = 0$$

$$y = -150 \Rightarrow A_3 = 300 \text{ mm}$$

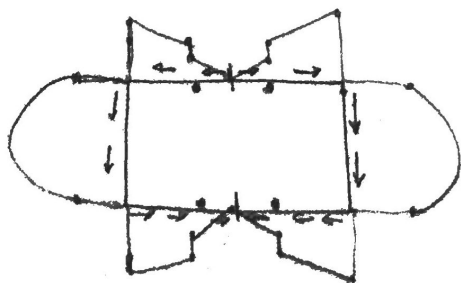
$$\Rightarrow y = 150 - A_3$$

$$\Rightarrow q_{34} = q_{23} + \frac{1}{1485} \left[\int_0^{A_3} 3 \cdot (150 - A_3) dA_3 \right]$$

$$q_{34} = \frac{300}{1485} \left[\underbrace{350 + 400}_{750} \right] + \frac{1}{1485} \left[450 A_3 - 3 A_3^2 / 2 \right] = \frac{1}{1485} \left[225000 + 450 A_3 - \frac{3}{2} A_3^2 \right] \left[\frac{N}{mm} \right]$$

ponto de máximo:

$$A_3 = \frac{450}{3} = 150 \text{ mm} \rightarrow \text{meio da largura}$$

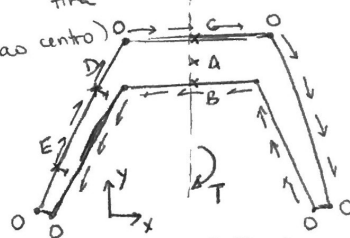


02) Com relação às nervuras existentes em uma asa.

- (V) Em geral, seus furos são feitos para alívio de peso, independentemente da necessidade de passagem de cabos, combustível, etc.
- (V) Contribuem muito para estabilidade estrutural do revestimento e da alma da longarina.
- (F) Aumentam significativamente o momento de inércia à flexão da seção transversal da asa.
- (V) São muito importantes para a manutenção do perfil aerodinâmico original da asa, especialmente sob torção.
- (F) São pontos de fixação de cargas concentradas, tais como motores.

03) A seção abaixo (em verdadeira grandeza) está submetida a uma torção T , de sentido horário.

- (V) A tensão de cisalhamento em A é muito pequena em comparação com a máxima tensão. (Região próxima ao centro)
- (V) A tensão de cisalhamento no ponto C tem a mesma direção e sentido do eixo x.
- (F) A tensão de cisalhamento no ponto B tem a mesma direção e sentido do eixo x.



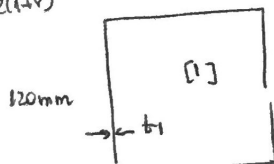
Seção aberta, sentido dos binários internos deve dar o torque externo.

- (F) A tensão de cisalhamento em D é maior do que em E.
- (V) A máxima tensão de cisalhamento ocorre em C.

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} \Rightarrow \text{maior espessura} \Rightarrow \text{maior tensão de cisalhamento máxima.}$$

04) Sejam duas barras de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$) de espessura constante: [1] - seção transversal aberta; [2] - fechada. Despreze o efeito de concentração de tensões. Todas as medidas referem-se às linhas médias. Cada seção deve suportar um torque de $230 \text{ kN} \cdot \text{mm}$, e a tensão de cisalhamento não pode ultrapassar 70 MPa .

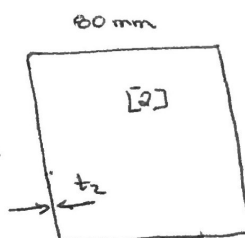
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 26,92 \text{ GPa}$$



$$J_1 = \frac{5t_1^3}{3} = \frac{400 \cdot t_1^3}{3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T t_1}{J_1}$$

$$(t_1)_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 230 \cdot 10^3}{400 \cdot 70}} = 4,96 \text{ mm}$$



$$J_2 = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4 \cdot (80 \cdot 120)^2}{\frac{1}{t_2} \cdot 400} = \frac{(80 \cdot 120)^2}{t_2}$$

$$J_2 = t_2 \cdot \frac{(80 \cdot 120)^2}{100}$$

$$\tau = \frac{T}{2A} \Rightarrow \tau \cdot t_2 = \frac{T}{2A} \Rightarrow (t_2)_{\min} = \frac{230 \cdot 10^3}{2 \cdot (80 \cdot 120) \cdot 70} = 9,17 \text{ mm}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{GJ} = \frac{230 \cdot 10^3}{26,92 \cdot 10^3 \cdot \frac{400 \cdot 4,96^3}{3}} = 5,25 \cdot 10^{-4} \text{ rad/mm}$$

$$A_{\text{seção}} = 400 \cdot t_2 = 68,45 \text{ mm}^2$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{GJ} = \frac{230 \cdot 10^3}{26,92 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{0,17} \cdot \frac{(80 \cdot 120)^2}{100}} = 5,45 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm}$$

a) Preencha a tabela abaixo

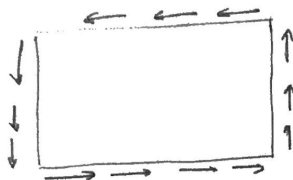
Seção	Espessura mínima [mm]	Área da Seção transversal [mm ²]	Eficiência Estrutural Torção [N·mm/mm ²]	Área Seção Transversal [mm ²]
[1]	4,96 mm	1985,66 mm ²	115,83 N·mm/mm ²	39,03 mm ²
[2]	9,17 mm	68,45 mm ²	3360,00 N·mm/mm ²	3,12 mm ²

⑤ Cálculo da Tensão de Cisalhamento devido ao torque

$$q_T = \frac{T}{2\bar{A}} \Rightarrow \bar{A} = 300 \cdot 1000 \Rightarrow \boxed{\bar{A} = 3,0 \cdot 10^5 \text{ mm}^2}$$

$$\text{Como } T = 5,0 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{mm} \Rightarrow q_T = \frac{5,0 \cdot 10^7}{6 \cdot 10^5} = \frac{500}{6} \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Tensão de cisalhamento é constante.



⑥ Tensões atuantes:

6.1. Tensão normal

$$\sigma_z = \frac{(10000 - 7000) \cdot 145}{1485} \Rightarrow \sigma_z = 292,93 \text{ MPa}$$

6.2 Tensão de cisalhamento devido à carga no CEC:

$$h_3 = 5 \text{ mm}$$

$$q_s = \frac{1}{1485} \left[225000 + 450 \cdot 5 - \frac{3}{2} \cdot 5^2 \right] \Rightarrow q_s \approx 153,01 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$\tau_s = 51,00 \text{ MPa (para baixo)}$$

6.3 Tensão de cisalhamento devido à torção:

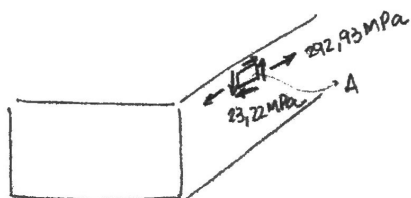
$$q_T = \frac{500 \cdot \text{N}}{6 \text{ mm}} \Rightarrow \tau_T = \frac{500}{3 \cdot 6} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \Rightarrow \tau_T = 27,78 \text{ MPa (para cima)}$$

Logo:

$$\sigma_z = 292,93 \text{ MPa}$$

$$\tau = 23,22 \text{ MPa (para baixo)}$$

b) Desenhe o estado de tensão em A, indicando direções e sentidos reais das tensões atuantes.

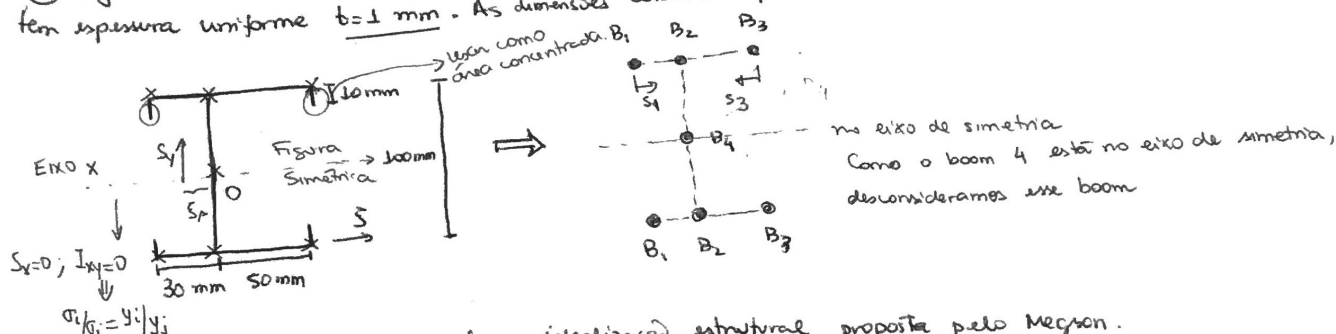


b) Comente os resultados encontrados

Podemos observar que a seção transversal de parede fina fechada é bem melhor que a seção transversal de parede fina aberta caso queiramos uma estrutura que resista à torção pura. Ademais sua melhor eficiência estrutural pode ser traduzida pela espessura de parede bem menor para a parede fechada. Além disso, face ao mesmo torque, temos uma menor rotação da parede fechada. Por esses motivos, a parede fechada é utilizada em fuselagens (cavernas fechadas com elementos estruturais primários) e longarinas de asa.

Caso desejarmos maior flexibilidade, a indicada seria a seção aberta.

15) Seja uma barra de seção transversal "I" de paredes finas abaixo, com um eixo de simetria. A seção tem espessura uniforme $t = 1 \text{ mm}$. As dimensões cotadas referem-se às linhas médias.



a) Calcule as áreas dos booms, conforme idealização estrutural proposta pelo Megson.

$$B_1 = \frac{t_0 \cdot b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)$$

$$B_2 = \frac{t_0 \cdot b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$$

metode para cada lado

$$B_1 = 10 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 30}{6} \left(2 + \frac{50}{30} \right) = 10 + \frac{90}{6} = 10 + 15 = 25 \text{ mm}^2$$

$$B_3 = 10 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 50}{6} \left(2 + \frac{30}{50} \right) = 10 + \frac{150}{6} = 10 + 25 = 35 \text{ mm}^2$$

Desconsidero B_4 .

$$B_2 = 1 \cdot \frac{30}{6} \left(2 + \frac{50}{30} \right) + 1 \cdot \frac{50}{6} \left(2 + \frac{30}{50} \right) + 1 \cdot \frac{100}{6} \left(2 - \frac{50}{30} \right) = 56,7 \text{ mm}^2$$

$$B_4 = 0.$$

b) Usando a idealização do item a, calcule as coordenadas do CEC.

Temos um eixo de simetria \Rightarrow pressaremos apenas de um esforço $S_y \Rightarrow S_x = 0$ e $I_{xy} = 0$

Seção aberta:

$$q_0 = - \frac{S_y}{I_{xx}} \left[\sum_{i=1}^n B_i y_i \right]$$

1) Cálculo de I_{xx} :

$$I_{xx} = 2 \cdot (B_1 + B_2 + B_3) y^2 = 2 \cdot (25 + 35 + 56,7) \cdot 50^2 = 5,83 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

2) Cálculo dos fluxos de cisalhamento:

pressaremos apenas de q_{012} e q_{032}

$$q_{012} = - \frac{S_y}{I_{xx}} B_1 \cdot 50$$

$$q_{032} = - \frac{S_y}{I_{xx}} B_3 \cdot 50$$

\Rightarrow sinal oposto \Rightarrow sentidos opostos adotados para 1 .



$$q_{012} = -2,144 S_y \cdot 10^{-3} \text{ [N/mm]}$$

$$q_{032} = -3,0029 S_y \cdot 10^{-3} \text{ [N/mm]}$$