Lista 1 - Parte 2a

Autor: Francisco Castro

Table of Contents

Introdução

Este documento refere-se à navegação inercial com dados reais de sensores solidários, sendo a continuação (parte 2) da primeira lista computacional já entregue como atividade da disciplina EES-60, ministrada pelo Prof. Dr. Jacques Waldmann em 2019.

Seu objetivo é a integração numérica das equações diferenciais de atitude com quaternion relativo e de navegação inercial usando dados reais de IMUs de classe inercial e de classe comercial (COTS – *commercial off-the-shelf*).

A primeira subparte (2a) da lista refere-se aos dados dos sensores IMU fornecidos no arquivo *dados.dat*, correspondentes à montanha russa Montezum. A segunda subparte (2b), refere-se aos dados disponíveis no arquivo *SN500574Outside.m*.

Método TRIAD

Primeiramente, executa-se os procedimentos realizados na parte 1a desde exercícios computacional, referentes ao método TRIAD para determinação das condições iniciais que servirão de base para a integração das equações de atitude e de navegação a seguir.

```
metodoTRIAD;
```

Integração numérica

Utilizar-se-á, neste momento, um algoritmo de integração numérica Runge–Kutta de 4ª ordem com passo fixo para integrar as equações de atitude com quatérnions e de navegação inercial utilizando dados já carregados na Parte 1a desta lista, mas de forma a simular uma aquisição em tempo real.

Condições iniciais

Tendo o quatérnion $q_{B,comp}^{NED} = q_0$, advindo do método TRIAD, que determina a orientação inicial do corpo com relação ao NED, podemos definir o vetor de estados

$$y = [q_{B,comp}^{NED}, V_{NED}, \lambda, \Lambda, h, h_m]^T$$

característico da integração numérica, cuja dimensão é 7x1.

```
y = [
        q0_base3;
        [0,0,0]';
        lambda;
        Lambda;
        h;
        h
    ];
```

onde a base 3 é a base ortonormal com a qual foi construída o quatérnion na Parte 1a desta lista.

Condições de parada e variáveis de apoio

```
tf = 19.5*60;               % tempo final
i0 = 1;                     % index do início do movimento
i = i0;                     % index inicial
freqAquisicao = 100;        % Hz
p = 1/freqAquisicao;        % passo de integração
result = zeros(tf/p,length(y)+2);
```

Função dinâmica

Define-se a função dinâmica **f** que implementa as equações diferenciais que seguem:

$$q_{B,comp}^{N\dot{E}D} = \frac{1}{2}(\Omega_{B,medido}^{Bi} + \Omega_{NED,comp}^{NEDi})q_{B,comp}^{NED}$$

$$\dot{V_N} = Asp_{NED,medido,N} + \frac{V_N}{(R_N + h)}V_D - \left(2\Omega\sin(\lambda) + \frac{V_E}{(R_E + h)}\tan(\lambda)\right)V_E$$

$$\dot{V_E} = Asp_{NED,medido,E} + \left(2\Omega\sin(\lambda) + \frac{V_E}{(R_E + h)}\tan(\lambda)\right)V_N + \left(2\Omega\cos(\lambda) + \frac{V_E}{(R_E + h)}\right)V_D$$

$$\dot{V_D} = Asp_{NED,medido,D} - \left(2\Omega\cos(\lambda) + \frac{V_E}{(R_E + h)}\right)V_E - \frac{V_N}{(R_N + h)}V_N + g + B(h - h_{aux})$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V_N}{(R_N + h)}$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{V_E}{(R_E + h)\cos(\lambda)}$$

$$\dot{h} = -V_D - C(h - h_{aux})$$

$$\dot{h_{aux}} = \frac{h_m - h_{aux}}{T_h}$$

conforme descrito no roteiro desta atividade e no material do curso, tendo, com isso, a estrutura básica para a integração numérica pelo método escolhido, contando com a implementação da estabilização do canal vertical.

Estabilização vertical

Para correto cômputo das expressões internas à função dinâmica **f**, define-se os parâmetros associados à estabilização do canal vertical como seguem.

```
h_m = h;              % constante e igual à altitude inicial
estabVert.B = 0.01;
estabVert.C = 0.01;
estabVert.T_h = 60;
```

Modelamento da Terra e da gravidade

Os parâmetros associados ao modelamento da Terra e da gravidade, R_0, e e g_0 já foram definidos na chamada do Método TRIAD e são os que constam.

```
modTerra.R_0 = R_0; % [m]
modTerra.g_0 = g_0; % [m/s^2]
modTerra.e = e;     % achatamento
```

A saber

```
modTerra
```

```
modTerra = struct with fields:

    R_0: 6378138
    g_0: 9.7803
```

```
e: 0.0033529
```

Runge-Kutta

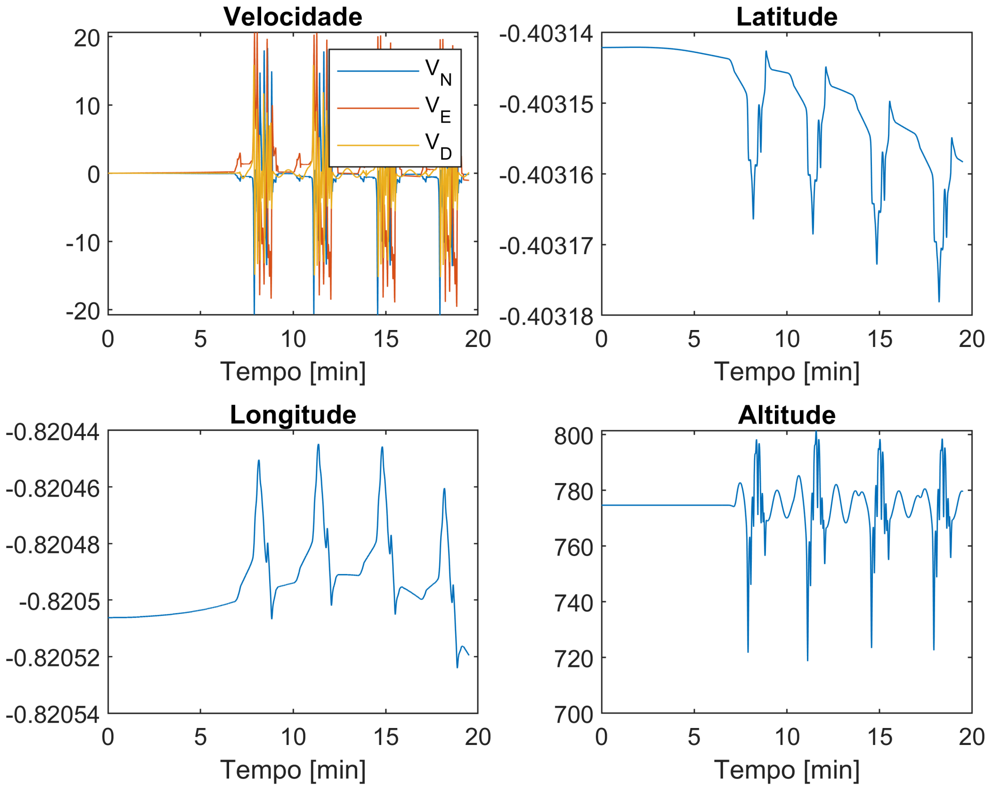
Com isso, a integração numérica propriamente dita fica

```
for t=0:p:tf
    omega_B_i = w_b(i,:)';  % retirado dos dados a cada passo
    Asp_B_i = Asp_b(i,:)';  % idem

    k1 = f(t, y, omega_B_i, Asp_B_i, modTerra, estabVert, h_m);
    k2 = f(t + p/2, y + p/2*k1, omega_B_i, Asp_B_i, modTerra, estabVert, h_m);
    k3 = f(t + p/2, y + p/2*k2, omega_B_i, Asp_B_i, modTerra, estabVert, h_m);
    k4 = f(t + p, y + p*k3, omega_B_i, Asp_B_i, modTerra, estabVert, h_m);

    y = y + p/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    result(i-i0+1,1) = t;       % tempo
    result(i-i0+1,2:12) = y;    % vetor de estados
    i = i+1;
end
```

Resultados

Com isso, tem-se o seguinte resultado imediato da integração numérica

```
preProcessResults
```



da onde tira-se os valores aproximados para os intervalos de tempo para cada volta, apresentados na Tabela 01, a partir do instante 0 [s].

Tabela 01. Marcação de tempo e duração de cada volta

Volta	Início [min]	Fim [min]	Duração [min]	Index fim
1	6,8732	9,201	2,3278	55180
2	10,212	12,449	2,237	74680
3	13,552	15,88	2,328	95210
4	16,92	19,1	2,18	114910

Análise da atitude computada pelo INS

Vetor rotação

Calculou-se o vetor rotação ao final de cada volta com relação ao vetor original $q0$, em [arcseg], de forma que

```
format shortG;
rotacaoFinalDeVolta = [
vetorRotacao(resultados.quaternion(indexFim.volta1,:), q0_base3),...
vetorRotacao(resultados.quaternion(indexFim.volta2,:), q0_base3),...
vetorRotacao(resultados.quaternion(indexFim.volta3,:), q0_base3),...
vetorRotacao(resultados.quaternion(indexFim.volta4,:), q0_base3)...
]*180/pi*3600
```

```
rotacaoFinalDeVolta = 3×4
      -13.262      -38.002      -17.112      -97.941
      -33.944      -60.376      -36.276      -2202.8
       2.3014      -148.22      -262.86      -760.87
```

Índice de desalinhamento ao final de cada volta (escala log)

Analogamente, temos que os índices de desalinhamento dos quatérnions ao final de cada volta com relação ao quatérnion inicial q_0 são dados, em [arcseg], por

```
indiceDesalFinalDeVolta = [
indiceDesalinhamento(resultados.quaternion(indexFim.volta1,:), q0_base3),...
indiceDesalinhamento(resultados.quaternion(indexFim.volta2,:), q0_base3),...
indiceDesalinhamento(resultados.quaternion(indexFim.volta3,:), q0_base3),...
indiceDesalinhamento(resultados.quaternion(indexFim.volta4,:), q0_base3)...
]*180/pi*3600
```

```
indiceDesalFinalDeVolta = 1×4
       36.516       164.49       265.91       2332.5
```

Que se fazem valores naturalmente crescentes e cada vez mais significativos ao estado atual e, consequentemente, à amplificação dos erros futuros devido ao erro nas condições iniciais a ser imposto no processo de integração numérica.

Comparação: índice de desalinhamento [arcseg] com magnitude do desalinhamento [arcseg] computado com quaternions

```
normasRotacao = [
    norm(rotacaoFinalDeVolta(:,1)),...
    norm(rotacaoFinalDeVolta(:,2)),...
    norm(rotacaoFinalDeVolta(:,3)),...
    norm(rotacaoFinalDeVolta(:,4))...
    ];
format shortE
comparacao1 = normasRotacao - indiceDesalFinalDeVolta
```

```
comparacao1 = 1×4
  -7.6925e-04  -3.4852e-04  -3.2554e-04  -5.0411e-05
```

De onde vê-se que há uma alta concordância entre as duas métricas escolhidas para avaliar o desallinhamento do quaternion atual com relação ao quaternion inicial para cada fim de volta.

Comparação: índices de normalidade e desalinhamento ao final de cada volta com e sem normalização de quaternion ao longo da integração (escala log)

```
comparacaoIndices;
```

```
comparacaoIndicesNormalidade = 1×4
   2.7938e-08   5.5739e-08   8.5028e-08   1.1352e-07
```

```
comparacaoIndicesDesalinhamento = 1×4
   4.7317e-04   2.1008e-04   1.9877e-04   2.7849e-05
```

Tais resultados nos dão um comparativo para cada final de volta (4 no total) do erro de não normalizar a cada passo de integração e a de desalinhamento devido a não normalidade. Vê-se que o preço a se pagar no desalinhamento é bem maior, em ordens de grandeza, do que o preço da não normalidade. O interessante é notar que o índice de desalinhamento diminui à medida que o índice de normalidade cresce, o que indica uma tendência do sistema a reduzir o erro de alinhamento com relação a condição inicial mesmo com o erro de normalidade aumentando.

Análise da trajetória computada pelo INS

Coordenadas geodésicas x cartesianas

```
[xt,yt,zt] = geodToCart(...
    resultados.latitude,...
    resultados.longitude,...
    resultados.altitude,...
    modTerra);
```

Resultado da altura contra tempo

Se tomada em relação ao ponto inicial, temos que a altura em função do tempo, em metros, pode ser dada por:

```
plot(resultados.tempo, zt)
xlabel("Tempo [min]");
ylabel("Altura [m]");
```

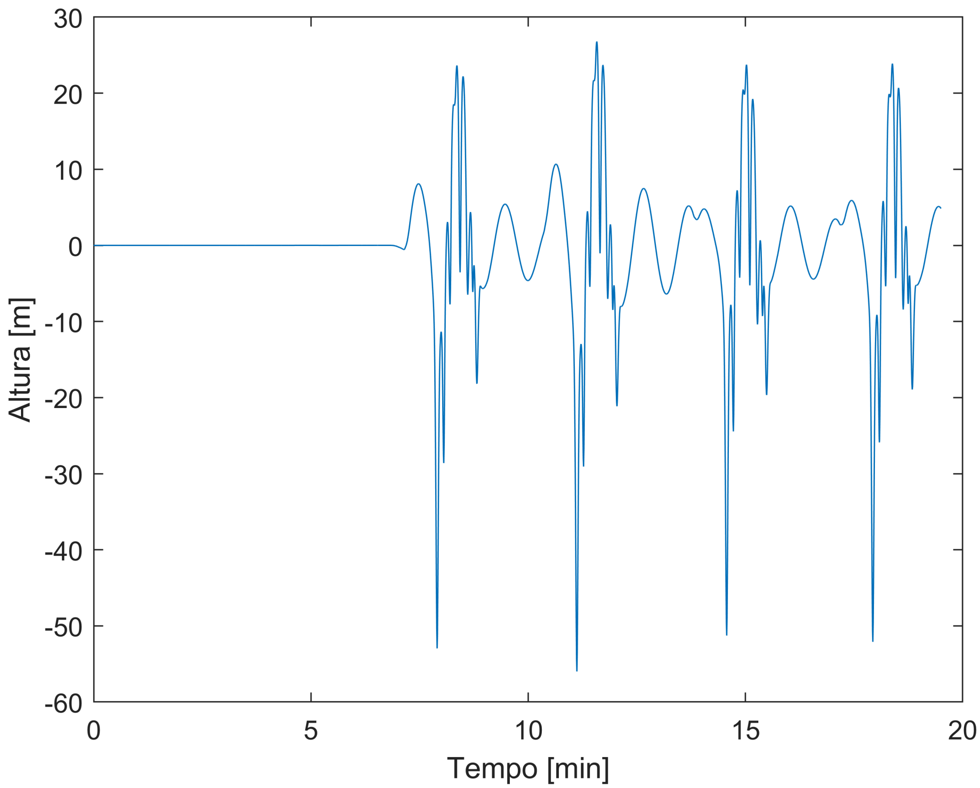
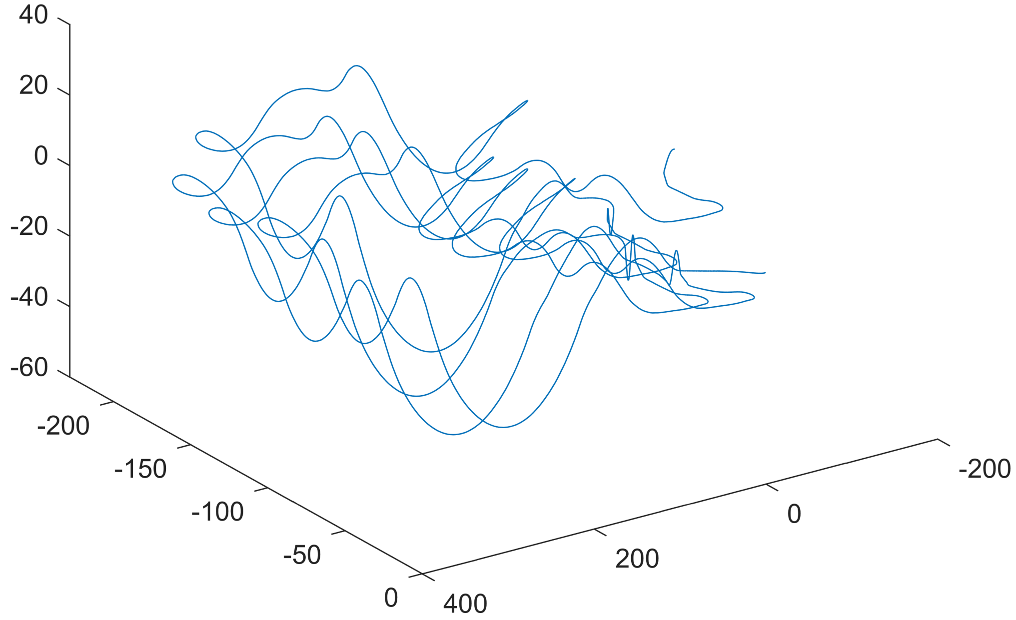


Gráfico tri-dimensional da trajetória computada pelo INS

A trajetória estimada pelo INS em relação ao ponto inicial, em metros, nas direções Norte, Leste e altitude a partir do instante inicial 0[s], em relação ao ponto inicial, é tal que

```
plot3(xt,yt,zt)
view([145.6 34.1]);
```



Perguntas

Quantas voltas há no primeiro experimento? Plote Norte contra Leste na primeira volta e superponha sobre a imagem (do Google Maps) de satélite da montanha russa Montezum do parque de diversões HopiHari em Vinhedo, SP, nas duas primeiras voltas e até o final do experimento. O que ocorre?

Há, no primeiro experimento, um total de 4 voltas. Que podem ser conferidas abaixo, onde se vê a superposição à foto real da montanha russa Montezum, retirada do Google Maps.

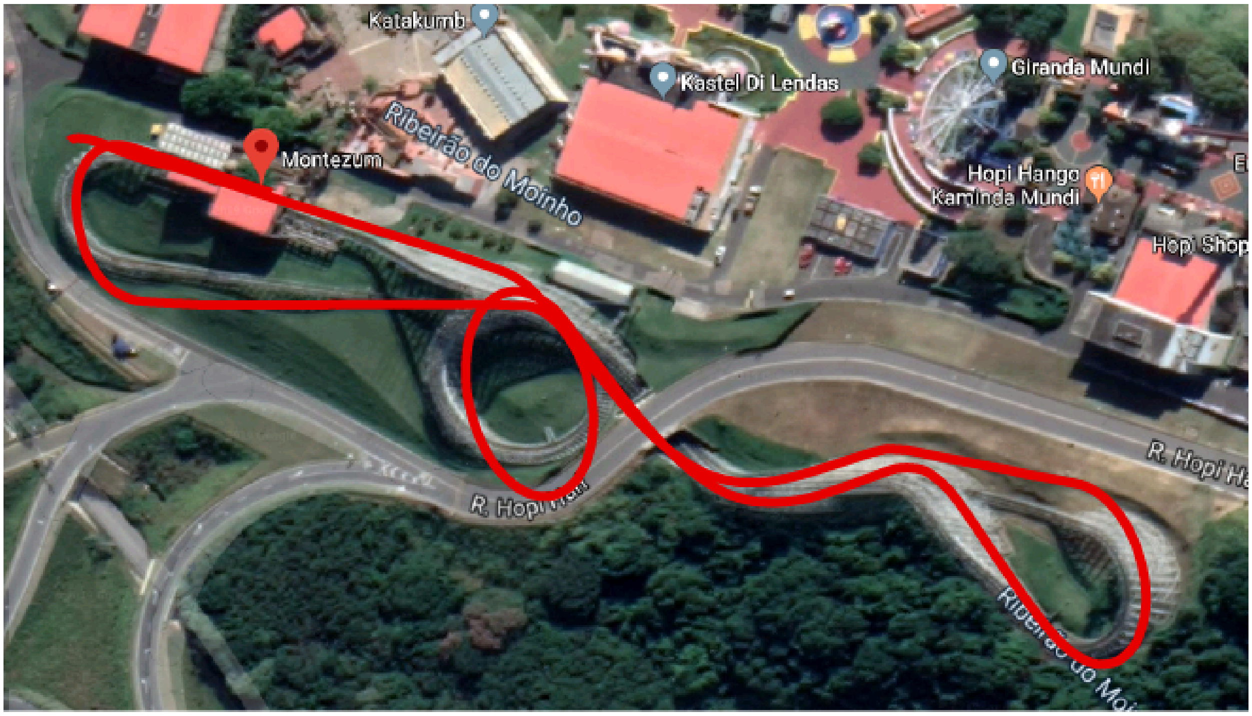


Figura 05. Superposição do resultado da integração numérica com a imagem real para a primeira volta.

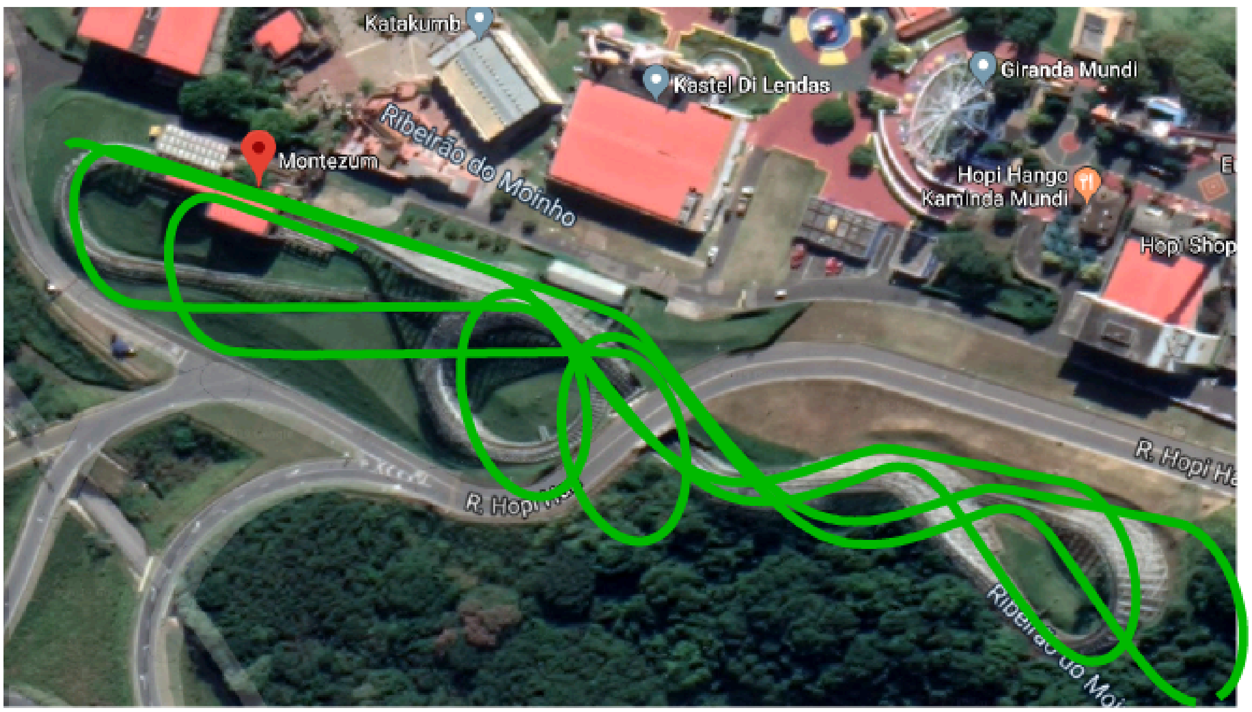


Figura 06. Superposição do resultado da integração numérica com a imagem real para as duas primeiras voltas.

Figura 07. Superposição do resultado da integração numérica com a imagem real para as quatro voltas.

Observa-se, com isso, uma divergência crescente entre os resultados obtidos e o resultado esperado.

Qual o erro de posição relativa ao ponto inicial no plano horizontal e em altura ao final da primeira volta no primeiro experimento?

```
erroHorizontal = sqrt(xt(indexFim.volta1)^2 + yt(indexFim.volta1)^2)
```

```
erroHorizontal =
       66.764
```

```
erroAltura = zt(1)
```

```
erroAltura =
     0
```

Note que a estabilização vertical vai ocasionar um erro de altura pequeno a depender do ganho a se colocar no controlador.

Ainda com respeito ao primeiro experimento, o que ocorre entre o final da primeira volta e o início da segunda volta? E nas demais voltas, isto é, entre o fim de uma volta anterior e o início da seguinte?

Entre o final da primeira volta e o início da segunda, bem como entre uma volta qualquer e a sua imediatamente anterior, há uma divergência de alinhamento (portanto, um desalinhamento) do corpo com relação ao quaternion inicial, o que provoca, à grosso modo, uma condição inicial ao movimento (pois o vagão para e depois volta a se mexer) diferente da inicial e sabidamente errada (desalinhada). Tal erro, somado ao já erro de posicionamento advindo da integração da volta anterior, causa uma divergência cada vez maior do desallinhamento e da posição com relação a mesma no "mesmo instante" da volta anterior.

O que ocorre com a navegação inercial usando a IMU baseada em sensores MEMS do Xsens?

Há notavelmente baixa precisão e erros sistemáticos que, por si sós, já ocasionam grandes erros de posicionamento e desalinhamento principalmente em operações com uma grande duração, mesmo que a estimativa das condições iniciais sejam muito boas.