EES-60 – Sensores e Sistemas para Navegação e Guiamento – Prof. Jacques

21 de novembro de 2019 – Lista Computacional 2 Parte 5 –

Alinhamento inicial de plataforma solidária e calibração de sensores inerciais com veículo estacionário em posição conhecida mediante implementação de filtro de Kalman linearizado (LKF) e estendido (EKF) com aumento do vetor de estado para estimar erro nos sensores e erro de velocidade terrestre – vetor de medidas concatena a velocidade terrestre computada pelo INS com magnetômetro.

Prazo: 02 de dezembro de 2019.

$\Lambda(0)$, $\lambda(0)$, $h(0)$ são conhecidos; $\mathbf{\Delta R = 0}$;

$S_t = S_c \Rightarrow \boldsymbol{\delta\theta} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\psi}$

Busca-se estimar $[\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{NED}} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b}} \quad \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{b}}]$, sendo:

$\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{NED}} = [\Psi_N \quad \Psi_E \quad \Psi_D]^T$; $\boldsymbol{\varepsilon_b} = [\varepsilon_{xb} \quad \varepsilon_{yb} \quad \varepsilon_{zb}]^T$; $\boldsymbol{\nabla_b} = [\nabla_{xb} \quad \nabla_{yb} \quad \nabla_{zb}]^T$

Da condição de veículo estacionário e em posição conhecida, e também relembrando que a atitude computada, por exemplo parametrizada por uma DCM designada por $\mathbf{D}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{p,INS}}$, é obtida da solução fornecida pelo INS ao problema de determinação de atitude, temos o seguinte modelo linearizado da dinâmica dos erros do INS:

$$\Delta\dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}} = -(2\Omega + \boldsymbol{\rho}) \times \Delta\mathbf{V}_{\mathbf{e}} + \mathbf{D}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{b}} + (\mathbf{D}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{p}}\mathbf{A}_{\mathbf{sp,b}}) \times \boldsymbol{\psi} \qquad \text{(sei que } \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{D}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{p}}\mathbf{A}_{\mathbf{sp,b}} = -\mathbf{g}_{\mathbf{NED}}\text{)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -(\Omega + \boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{\psi} - \mathbf{D}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b}}$$

$$\Delta\mathbf{x} = \left[\Delta\mathbf{V}_{\mathbf{e,NED}} \quad \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{NED}} \quad \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{b}} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}} \\ \hline \dot{\boldsymbol{\psi}} \\ \hline \dot{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{b}} \\ \hline \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} -(2\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{NED}})\times & -(\mathbf{g}_{\mathbf{NED}})\times & \mathbf{D}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{p,INS}} & \mathbf{0}_3 \\ \hline \mathbf{0}_3 & -(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{NED}})\times & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{D}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{p,INS}} \\ \hline \mathbf{0}_{\mathbf{6x3}} & \mathbf{0}_{\mathbf{6x3}} & \mathbf{0}_{\mathbf{6x3}} & \mathbf{0}_{\mathbf{6x3}} \end{array}\right] \left[\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{V}_{\mathbf{e}} \\ \hline \boldsymbol{\psi} \\ \hline \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{b}} \\ \hline \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b}} \end{bmatrix}\right] + \text{ruído de modelo}$$

$$-(2\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{NED}})\times = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_D & 0 \\ -2\Omega_D & 0 & 2\Omega_N \\ 0 & -2\Omega_N & 0 \end{bmatrix}; \quad -(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{NED}})\times = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_D & 0 \\ -\Omega_D & 0 & \Omega_N \\ 0 & -\Omega_N & 0 \end{bmatrix}$$

$$-(\mathbf{g}_{\mathbf{NED}})\times = \left([0 \quad 0 \quad -g]^{\mathrm{T}}\right)\times = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que:

1 - O vetor de estados foi aumentado para incluir o *erro de velocidade terrestre* e o vetor com erros de *bias* de acelerômetro e de deriva de girômetro;

2 - *Bias* e deriva foram modelados como constantes desconhecidas, possivelmente sofrendo variações a médio e longo prazo. Esta incerteza reflete-se na adição de ruído àquelas constantes;

3 - O ruído de modelo será assumido branco e seus componentes não correlacionados entre si; na literatura, a dinâmica de *bias* e deriva descrita como no modelo acima é conhecida como constante aleatória (*random constants)*, dando origem a um processo de difusão devido a integração de ruído branco no tempo.

O vetor de medidas na condição estacionária é o erro na velocidade terrestre computada pelo INS. <u>*As medidas amostradas de velocidade terrestre computadas pelo INS*</u> e respectivo erro são descritas por:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{e},\mathbf{NED},\mathbf{INS}} = \mathbf{V}_{\mathbf{e},\mathbf{NED}} + \Delta\mathbf{V}_{\mathbf{e},\mathbf{NED}} + \text{ruído} \;\; ; \;\; \mathbf{V}_{\mathbf{e},\mathbf{NED}} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{V}_{\mathbf{e},\mathbf{NED},\mathbf{INS}} = \Delta\mathbf{V}_{\mathbf{e},\mathbf{NED}} = \left[\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{0}_{3x9}\right]\Delta\mathbf{x} + \text{ruído} = \mathbf{H}_{\Delta\mathbf{V}_e}\Delta\mathbf{x} + \text{ruído}$$

(Analise a observabilidade deste sistema dinâmico. Um problema *similar* pode ser visto em: *Control Theoretic Approach to Inertial Navigation Systems, Bar-Itzhack & Berman, Journal of Guidance, vol.11 no.3, May-June 1988*)

Neste exercício, será requerido usar uma implementação alterada do INS (use a do algoritmo Salychev 4 amostras, mas remova do algoritmo a parte que se refere a computar posição, pois esta é sabida e deve ser usada onde for requerida no algoritmo) realizada em lista anterior para obter $\mathbf{V}_{\mathbf{e},\mathbf{NED},\mathbf{INS},\mathbf{k}}$ no k-ésimo passo.

Selecione uma latitude λ, altitude h e atitude verdadeira $\mathbf{D}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{t}}$ para simular as medidas dos acelerômetros e girômetros cujos parâmetros são como a seguir (atenção às unidades que usar na implementação):

Cada girômetro: escolha $\sigma_{gir}[°/\text{h}] - \text{desvio - padrão de vetor seqüência branca aditiva}$

escolha $\boldsymbol{\varepsilon}[°/\text{h}] - \text{vetor deriva}$

Cada acelerômetro: escolha $\sigma_{acel}[\text{mg}] - \text{desvio - padrão de vetor seqüência branca aditiva}$

escolha $\boldsymbol{\nabla}[\text{mg}] - \text{vetor bias}$

Cuidado ao escolher os valores de *bias* e deriva para que os erros não cresçam rapidamente e terminem rendendo o modelo linearizado da dinâmica dos erros de INS inválido em um curto prazo de tempo. Use TRIAD com as medidas simuladas durante uma janela de tempo curta – por exemplo, 10s – para inicializar a atitude do INS antes de sua operação no modo de navegação integrado ao LKF.

Parte 1. LKF – filtro de Kalman linearizado em torno da solução de atitude do INS $\mathbf{D}_{\mathbf{p},\mathbf{INS},\mathbf{k}}^{\mathbf{b}}$ usando as medidas de erro de velocidade terrestre.

Deseja-se refinar iterativamente a estimativa $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathbf{k}}^{+}$ do desalinhamento verdadeiro $\boldsymbol{\Psi}$ entre a DCM verdadeira $\mathbf{D}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{t}}$ (que é fixa no tempo e descreve a atitude inicial do veículo no solo) e a DCM computada pelo INS no k-ésimo passo $\mathbf{D}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{p,INS,k}}$ (*que será usada nos modelos de dinâmica e medidas do filtro de Kalman*). Igualmente, desejam-se estimativas $\hat{\boldsymbol{\nabla}}^{+}_{\mathbf{b,k}}$ do *bias* $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{b}}$ e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+}_{\mathbf{b,k}}$ da deriva $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b}}$. Os erros de estimação após cada passo de atualização do filtro são definidos como a seguir:

$$\hat{\Delta \mathbf{V}}^{+}_{\mathbf{e,NED,k}} = \Delta \mathbf{V}_{\mathbf{e,NED,k}} + \mathbf{e}^{+}_{\Delta \mathbf{V,k}} = \mathbf{V}_{\mathbf{e,NED,INS,k}} + \mathbf{e}^{+}_{\Delta \mathbf{V,k}} \text{ (pois o veículo está estacionário)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{+}_{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{e}^{+}_{\boldsymbol{\Psi},\mathbf{k}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+}_{\mathbf{b,k}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b}} + \mathbf{e}^{+}_{\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{k}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\nabla}}^{+}_{\mathbf{b,k}} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{b}} + \mathbf{e}^{+}_{\boldsymbol{\nabla},\mathbf{k}}$$

A estimação no filtro de Kalman será integrada ao INS, que emprega medidas inerciais consistindo de incrementos angulares e de velocidade de empuxo, respectivamente simulados adicionando valores fixos de deriva e bias no sistema do corpo e sequências de ruído branco. Os incrementos, denotados pelo subscrito *j*, são simulados a 1/T=100[Hz].

$$\mathbf{A}_{\mathbf{sp,b,m,j}} = \mathbf{D}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{b}}\left(-\mathbf{g}_{\mathbf{NED,t}}\right) + \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{b}} + \text{ruído\_acelerom; } \Delta\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{j}} = \mathbf{A}_{\mathbf{sp,b,m,j}} * \mathrm{T}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{b,m,j}} = \mathbf{D}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{b}}\left(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{NED,t}}\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b}} + \text{ruído\_girom; } \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{b,m,j}} * \mathrm{T}$$

O algoritmo de Salychev 4 amostras rodando no INS é discreto no tempo e torna disponíveis a 25Hz sua solução de atitude $\mathbf{D}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{p,INS,k}}$ e de velocidade terrestre $\mathbf{V}_{\mathbf{e,NED,INS,k}}$. Portanto, no filtro de Kalman é necessário discretizar o modelo dinâmico linear contínuo no tempo a 25Hz para fins de propagação e atualização do filtro de Kalman durante a fase de estimação para alinhamento inicial e calibração dos sensores inerciais. O subscrito *k* já visto indica variáveis do filtro de Kalman amostrado a 25Hz nesta fase. Sugestão: empregue o método de discretização do segurador de ordem zero (*zero-order hold*) na função c2d(.) do Matlab.

Sintonize o filtro, i.e., ajuste os termos na diagonal de $\mathbf{Q_d}$, a matriz de covariância do erro de modelagem discretizada, e de **P**(0). Experimente o efeito de variar **P**(0) no desempenho do filtro. Comece com uma única realização e depois utilize simulação de Monte Carlo, tendo o cuidado de usar realizações independentes entre si. Cada chamada inicial de função geradora de sequência aleatória com densidade Gaussiana deve usar uma nova semente.

a. Mostre a cada k-ésimo instante de amostragem da solução do INS os **erros médios de estimação com respeito (*across*) às realizações** e seus desvios-padrões computados pelo filtro, os quais são dados pela raiz quadrada dos respectivos elementos na diagonal da matriz **P** de covariância do erro de estimação, tanto a propagada quanto a atualizada. Verifique se os erros médios de estimação oscilam em torno de zero e se três desvios-padrões envolvem praticamente todas as amostras de erro, como seria esperado se os erros fossem Gaussianos.

b. Analise os resultados obtidos, em especial quanto às estimativas de deriva e bias.

c. Em vista do sinal de rotação da Terra ser de baixa magnitude, a estimação do desalinhamento ψ_D em torno da vertical local é problemático quando se mede apenas o erro de velocidade terrestre.

Acrescente um magnetômetro triaxial para obter informação que possivelmente permita estimação mais rápida de ψ_D.

O campo geomagnético verdadeiro em [nT] representado em S_{NED} pode ser consultado em https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/calculators/magcalc.shtml?useFullSite=true#igrfwmm e será assumido que o magnetômetro não tem erro sistemático e que suas medidas amostradas são corrompidas de forma aditiva com uma seqüência branca dotada de média nula e desvio padrão tal que, em graus, no plano horizontal local, $\sigma_{mgnt} = 0{,}1°$. Qual o efeito sobre a estimativa do desalinhamento ψ_D?

Parte 2. EKF – filtro de Kalman estendido. O EKF realiza a linearização em torno da solução do INS corrigida pelo filtro de Kalman. Após esta correção, a atitude do INS (aqui indicada em parametrização com DCM) é designada por $\mathbf{D}^{p,r}_{b,INS,k}$, a qual resulta de iterativamente corrigir a velocidade terrestre e a atitude que são computadas pelo INS no k-ésimo passo com as estimativas atualizadas de erro de velocidade e desalinhamento, e usando no INS as medidas dos acelerômetros e girômetros calibradas pelas estimativas atualizadas acumuladas de bias e deriva, respectivamente.

Denomina-se *reset* o processo de corrigir a solução computada do INS e a calibração das medidas inerciais com as estimativas do filtro de Kalman, conforme discutido em sala:

1. *reset* do erro de velocidade terrestre no passo k no vetor de estado do EKF; a velocidade terrestre do INS será zerada (chamado de ZUPT – *zero velocity update*) para uso pelo INS e EKF no passo k+1 após o *reset* do erro de velocidade terrestre no passo k:

$$\mathbf{V}^{r}_{e,INS,k+1} = \mathbf{0};$$

$$\Delta\hat{\mathbf{V}}^{+,r}_{e,NED,k} \leftarrow \mathbf{0}$$

2. *reset* do desalinhamento no passo k no vetor de estado do EKF; o quatérnion associado a DCM representando a atitude após o *reset* do desalinhamento será usada pelo INS e EKF no passo k+1:

$$\hat{\mathbf{D}}^{t}_{b,k} = \mathbf{D}^{p,r}_{b,INS,k} = \mathbf{D}^{p,r}_{b,INS,k-1}\hat{\mathbf{D}}^{t}_{p,k} = \mathbf{D}^{p,r}_{b,INS,k-1}\left(\mathbf{I} - \hat{\boldsymbol{\Psi}}^{+}_{k}\times\right);$$

$$\mathbf{D}^{p,r}_{b,INS,0} = \mathbf{D}^{p}_{b,INS,0} \text{ usado no LKF}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{+,r}_{k} \leftarrow \mathbf{0}$$

3. *reset* da deriva no passo k no vetor de estado do EKF; as 4 novas medidas do girômetro no passo k+1 (recebida após o *reset* no passo k) serão calibradas com o somatório (acumulação) das estimativas atualizadas de deriva prévias até o presente *reset*:

$$\boldsymbol{\omega}_{m,b,cal,k+1} = \boldsymbol{\omega}_{m,b,k+1} - \sum_{j=0}^{k}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+}_{b,j}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+,r}_{b,k} \leftarrow \mathbf{0}$$

4. *reset* do *bias* no passo k no vetor de estado do EKF; as 4 novas medidas do acelerômetro no passo k+1 (recebida após o *reset* no passo k) serão calibradas com o somatório (acumulação) das estimativas atualizadas de *bias* prévias até o presente *reset*:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{sp,m,b,cal,k+1}} = \mathbf{A}_{\mathbf{sp,m,b,k+1}} - \sum_{j=0}^{k} \hat{\boldsymbol{\nabla}}^{+}_{\mathbf{b,j}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\nabla}}^{+,r}_{\mathbf{b,k}} \leftarrow \mathbf{0}$$

Notar que a cada k-ésimo passo o EKF estima *bias* e deriva residuais remanescentes após a mais recente calibração dos sensores e *reset*, motivando a cada k-ésimo passo a calibração mediante o uso dos somatórios para acumulação. Será assumido que o processo de *reset* acima indicado não altera a incerteza computada na estimação, apenas deslocando para a origem o vetor de média dos erros de estimação no EKF. Assim, a matriz de covariância do erro de estimação **P** computada pelo EKF não será afetada pelo *reset*. Os erros a plotar após *reset* são:

$$\Delta\hat{\mathbf{V}}^{+,r}_{\mathbf{e,NED,k}} = \mathbf{V}_{\mathbf{e,NED,INS,k}} + \mathbf{e}^{+,r}_{\Delta\mathbf{V,k}} \Rightarrow \mathbf{e}^{+,r}_{\Delta\mathbf{V,k}} = -\mathbf{V}_{\mathbf{e,NED,INS,k}}$$

$$\boldsymbol{\Psi}^{+,r}_{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{e}^{+,r}_{\boldsymbol{\Psi},\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \hat{\mathbf{D}}^{\mathbf{t,r}}_{\mathbf{p,k}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{+,r}_{\boldsymbol{\Psi},\mathbf{k}} \times\right) = \mathbf{D}^{\mathbf{b,r}}_{\mathbf{p,INS,k}} \mathbf{D}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{b}} \quad \rightarrow \text{resulta } \mathbf{e}^{+,r}_{\boldsymbol{\Psi},\mathbf{k}}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+}_{\mathbf{b,j}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b}} + \mathbf{e}^{+,r}_{\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \mathbf{e}^{+,r}_{\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{k}} = \sum_{j=0}^{k} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+}_{\mathbf{b,j}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b}}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \hat{\boldsymbol{\nabla}}^{+}_{\mathbf{b,j}} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{b}} + \mathbf{e}^{+,r}_{\boldsymbol{\nabla},\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \mathbf{e}^{+,r}_{\boldsymbol{\nabla},\mathbf{k}} = \sum_{j=0}^{k} \hat{\boldsymbol{\nabla}}^{+}_{\mathbf{b,j}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{b}}$$