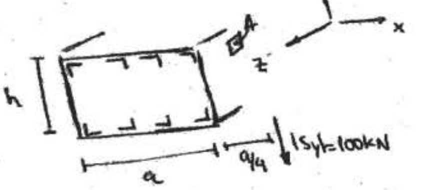
Como $q = \tau t$,

1ª Prova Parcial de EST-25

(a) Seja o caixão estrutural feito de Alumínio, retangular, sujeito a uma força cortante em $z = 10000$ mm. A origem do sistema de coordenadas está localizado no CG da seção transversal, junto ao engastamento. A seção transversal em destaque tem dupla simetria. Despreze o efeito de restrição axial. Os reforçadores são pequenos, estão igualmente espaçados, pode-se desprezar a inércia à flexão em torno de seus próprios CGs.

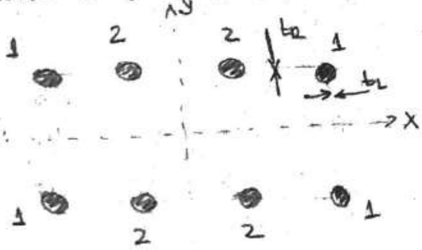



$a = 1000$ mm
$h = 300$ mm
$t_R = 2$ mm
$A_r = 500$ mm$^2$
$t_L = 3$ mm

$E = 72$ GPa
$G = 28$ GPa

a) Idealize a seção transversal, utilizando 8 booms

Dupla Simetria:




$$B_1 = A_r + \frac{t_L \cdot h}{6}\left(2 + \frac{-h/2}{h/2}\right) + \frac{t_R \cdot a/3}{6}\left(2 + \frac{h/2}{h/2}\right)$$

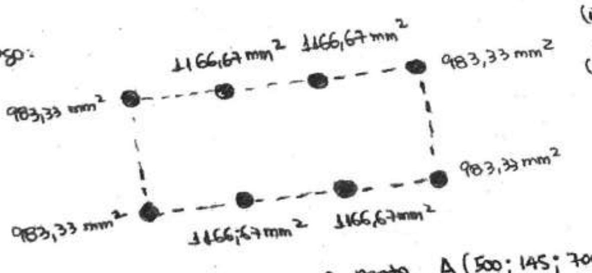
$$B_2 = A_r + \frac{t_R \cdot a/3}{6}\left(2 + \frac{h/2}{h/2}\right) + \frac{t_R \cdot a/3}{6}\left(2 + \frac{h/2}{h/2}\right)$$

Logo:

$$B_1 = 500 + \frac{3 \cdot 300}{6}(2-1) + \frac{2 \cdot 1000/3}{6}(2+1) = 983{,}33 \text{ mm}^2 \quad (1)$$

$$B_2 = 500 + \frac{2 \cdot 1000/3}{6}(2+1) + \frac{2 \cdot 1000/3}{6}(2+1) = 1166{,}67 \text{ mm}^2 \quad (2)$$

Logo:



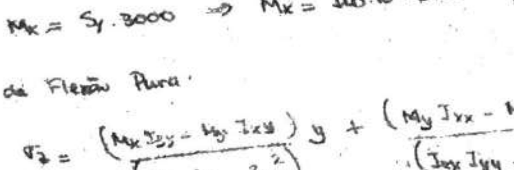

$$\xrightarrow{(1),(2)} I_{xx} = 4 \cdot [B_1 + B_2](h/2)^2$$

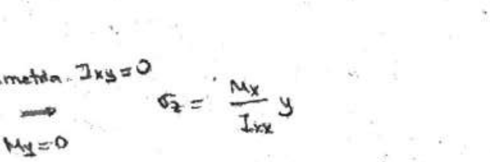
$$I_{xx} = 4[1166{,}67 + 983{,}33] \cdot 150^2$$

$$\boxed{I_{xx} = 193{,}5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \quad (3)$$

b) Calcule as tensões atuantes no ponto A (500; 145; 7000) (coordenadas em mm), localizado na longarina traseira. Vamos decompor os esforços em momento fletor, cisalhamento no CEC e torque puro.

(b.1) Análise do momento fletor por Teoria de Euler-Bernoulli:




Equilíbrio de ①:

$$M_x = S_y \cdot 3000 \Rightarrow M_x = 100 \cdot 10^3 \cdot 3000 \Rightarrow \boxed{M_x = 3 \cdot 10^8 \text{ N.mm}} \quad (4)$$

Teoria de Flexão Pura:

$$\sigma_z = \frac{(M_x I_{yy} - M_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} y + \frac{(M_y I_{xx} - M_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} x \xrightarrow[M_y = 0]{\text{Simetria } I_{xy}=0} \sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y$$

$$\frac{(3)}{(4)} \quad \sigma_z = \frac{300}{193{,}5} y \Rightarrow \boxed{\sigma_z = 1{,}550\, y} \quad (5)$$

Logo, para $y = \frac{h}{2}$ :

$\sigma_z = 232,56 \ N/mm^2$

para $y = -\frac{h}{2}$ :

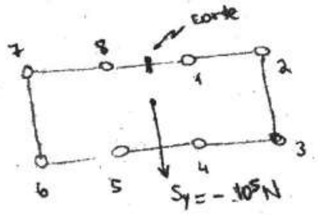
$\sigma_z = -232,56 \ N/mm^2$

para $y_A = 145 \ mm$

$\sigma_z = 224,81 \ N/mm^2$

(b.2) Cisalhamento com carga no CEC

Fluxo de




$q_s = -\frac{S_y}{I_{xx}} \sum_i B_i y_i + q_{s,0}$ (seção já idealizada)

dupla simetria geométrica + simetria de carregamento. Logo:

$q_{s,0} = 0$.

$q_{s_{12}} = -\frac{-10^5}{193,5 \cdot 10^6} \cdot 1166,67 \cdot 150 = 90,44 \ N/mm$

$q_{s_{23}} = -\frac{-10^5}{193,5 \cdot 10^6} [1166,67 + 983,33] \cdot 150 = 166,67 \ N/mm$

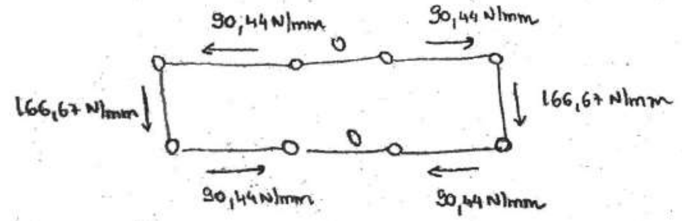
Pela simetria:

$q_{s12} = -q_{s78}$

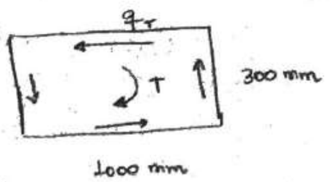
$q_{s23} = -q_{s67}$

$q_{s34} = -q_{s56} = q_{s12}$

$q_{s81} = q_{s54} = 0$




(b.3) Torção pura. Não leva em conta os booms




Seção Fechada ⇒ Fluxo de Cisalhamento

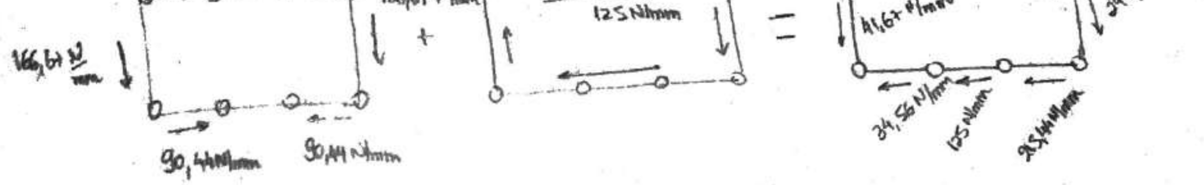
$T = 2\bar{A} q_T$ com $T = -|S_y| \cdot \frac{3a}{4}$ (sentido horário)

$\bar{A} = 3 \cdot 10^5 \ mm^2$

$T = 10^5 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1000 \Rightarrow T = 75 \cdot 10^6 \ N.mm$

Logo: $q_T = -\frac{75 \cdot 10^6}{2 \cdot 300 \cdot 1000} \Rightarrow q_T = -125 \ N/mm$ (sentido horário

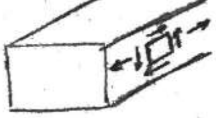
(b.4) Vamos superpor os cisalhamentos



Como $q = \tau t$,

Logo $\tau_A = 291{,}67 / 3 = 97{,}22\ N/mm^2$

c) Desenhe o estado de tensões em A, contendo direções e sentidos reais das tensões atuantes.



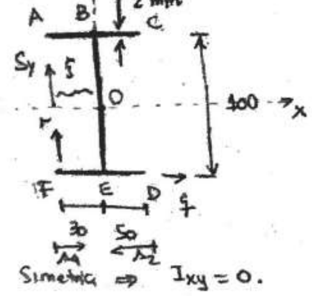
— tensão axial
— tensão de cisalhamento

$\tau = 97{,}22\ N/mm^2$ [MPa]

$\sigma = 224{,}81\ N/mm^2$ [MPa]

Fluxo de

(02) Seja a seção transversal "I" de paredes finas, com um eixo de simetria. A seção tem espessura $t = 2$ mm. As dimensões cotadas estão em mm e referem-se às linhas médias. Obtenha as coordenadas $(q, r)$ do CEC.




Simetria $\Rightarrow I_{xy} = 0$.

Passo 1: Características geométricas da seção:

Posição do CG: $r_{CG} = 50$ mm (simetria) $\Rightarrow$ CEC estará ao longo deste eixo. Portanto, arbitraremos apenas uma força $S_y$, ou seja, $S_x = 0$, o que implica na necessidade apenas de $I_{xx}$.

$$I_{xx} = 2 \cdot [30+50] \cdot 2 \cdot 50^2 + \frac{2 \cdot 100^3}{12} \Rightarrow I_{xx} = 9{,}67 \cdot 10^5\ mm^4$$

Passo 2: Com $S_y$ adotada, vamos calcular o fluxo de cisalhamento. Adotaremos o ponto O para momentos. Logo, serão necessários apenas os fluxos $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ com a ressalva que são simétricos

$$q_s = -\frac{S_y}{I_{xx}} \int_0^s t\, y\, ds \Rightarrow$$

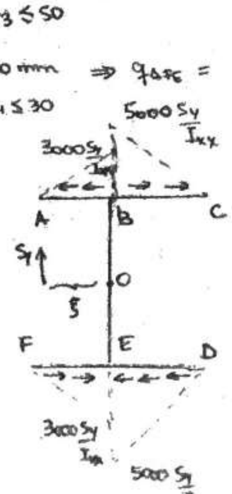
$\overline{AB}$: $y = 50$ mm, $0 \le s_1 \le 30$ $\Rightarrow q_{AB} = -\frac{S_y}{I_{xx}} \cdot 2 \cdot 50 \cdot s_1 \Rightarrow q_{s_{AC}} = -\frac{100 S_y}{I_{xx}} s_1$

$\overline{DE}$: $y = -50$ mm, $0 \le s_2 \le 50$ $\Rightarrow q_{s_{DE}} = -\frac{S_y}{I_{xx}} \cdot 2 \cdot (-50) \cdot s_2 \Rightarrow q_{s_{DF}} = \frac{100 S_y}{I_{xx}} s_2$

$\overline{CB}$: $y = 50$ mm, $0 \le s_3 \le 50$ $\Rightarrow q_{s_{CB}} = -\frac{100 S_y}{I_{xx}} s_3$

$\overline{FE}$: $y = -50$ mm, $0 \le s_4 \le 30$ $\Rightarrow q_{s_{FE}} = \frac{100 S_y}{I_{xx}} s_4$

Com isso:




Passo 3: Cálculo da Posição do CEC

$M_{ext} = -S_y \cdot \xi$

$$M_{int} = \int_{seção} p\, q\, ds = -\cancel{2} \cdot 50 \cdot \frac{5000 S_y / I_{xx} \cdot 50}{\cancel{2}} + \cancel{2} \cdot 50 \cdot \frac{\frac{3000 S_y}{I_{xx}} \cdot 30}{\cancel{2}}$$

$M_{ext} = M_{int}$

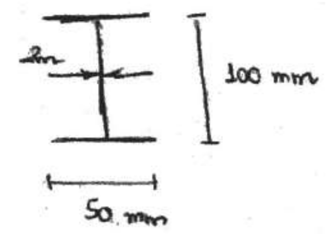
$$-S_y \xi = -50 \frac{S_y}{I_{xx}} \left[ 5000 \cdot 50 - 3000 \cdot 30 \right]$$

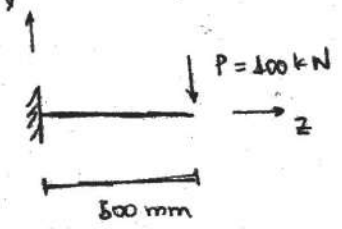
$$\xi = 50 \cdot \frac{1}{I_{xx}} [25 - 9] \cdot 10^4$$

$$\xi = 50 \cdot \frac{1}{9{,}67 \cdot 10^5} \cdot 16 \cdot 10^4 = \frac{80}{9{,}67} \Rightarrow \xi = 5{,}96$$

Logo: CEC = (24,04 ; 50)

① Uma viga cantilever feita de alumínio (E = 70 GPa, ν = 0,3) tem seção [illegible] (cotas pelas linhas médias, espessura t = 2 mm). A viga possui 500 mm de comprimento. A carga P está aplicada no CEC. Determine o deslocamento máximo da viga, levando-se em conta a influência das tensões normais e do cisalhamento. Se preferir, pode usar uma idealização estrutural (pode ser uma bem simples!), conforme apresentada por Megson.



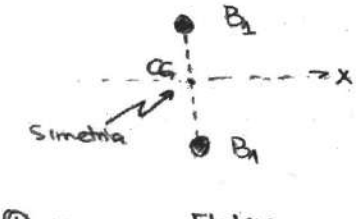

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{70}{2 \cdot 1{,}3} = 26{,}92\ GPa$$

Carga no CEC.

$$\Delta = \Delta_M + \Delta_S = \int_0^L \frac{M_{x,0} M_{x,1}}{E I_{xx}} dz + \int_0^L \left( \int_{\text{seção}} \frac{q_0 q_1 ds}{Gt} \right) dz + \underbrace{\int_0^L \frac{T_0 T_1}{GJ} dz}_{= 0}$$

Método da Carga Unitária:

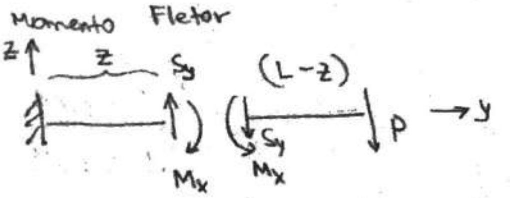
Solução 1: Adotando dois booms nos flanges




$$B_1 = 50 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 100}{6}(2-1) = 133{,}33\ mm^2$$

$$I_{xx} = 2 B_1 \cdot 50^2 \Rightarrow I_{xx} = 6{,}67 \cdot 10^5\ mm^4$$

① Momento Fletor




$$\Rightarrow M_{x0} - P(L-z) = 0 \Rightarrow M_{x0} = P(L-z)$$

$$M_{x,1} = 1(L-z)$$

$$\Delta_M = \int_0^L \frac{P(L-z)^2}{E I_{xx}} dz \underset{dw = -dz}{\overset{w = L-z}{\Rightarrow}} \Delta_M = \frac{P}{E I_{xx}} \int_L^0 -w^2 dw \Rightarrow \Delta_M = \frac{PL^3}{3 E I_{xx}} \quad (1)$$

② Cisalhamento

$$q_0 = \frac{P}{h} \Rightarrow q_0 = \frac{10^5}{100} \Rightarrow q_0 = 10^3\ N/mm \Rightarrow \Delta_S = \int_0^L \frac{P/h \cdot 1/h}{Gt} \cdot h \cdot dz \Rightarrow$$

$$q_1 = \frac{1}{100} \Rightarrow q_1 = 10^{-2}\ N/mm$$

$$\Delta_S = \frac{PL}{hGt} \quad (2)$$

De (1) e (2): $\Delta = \frac{PL^3}{3EI_{xx}} + \frac{PL}{hGt} \Rightarrow \Delta = \frac{10^5 \cdot 500^3}{3 \cdot 70 \cdot 10^3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^5} + \frac{10^5 \cdot 500}{100 \cdot 26{,}92 \cdot 10^3 \cdot 2}$

$$\Delta = 89{,}24 + 9{,}29 \Rightarrow \Delta = 98{,}53\ mm$$

Solução 2: Adotando a idealização abaixo


$$B_1 = \frac{2 \cdot 25}{6}(2+1) = 25\ mm^2$$

$$B_2 = \frac{2 \cdot 25}{6}(2+1) + \frac{2 \cdot 25}{6}(2+1) + \frac{2 \cdot 100}{6}(2-1) = 83{,}33\ mm^2$$

$I_{xx} = 4 B_1 \cdot 50^2 + 2 B_2\, 50^2 = 6{,}67 \cdot 10^5\ mm^4$ (Idêntico ao valor obtido acima)