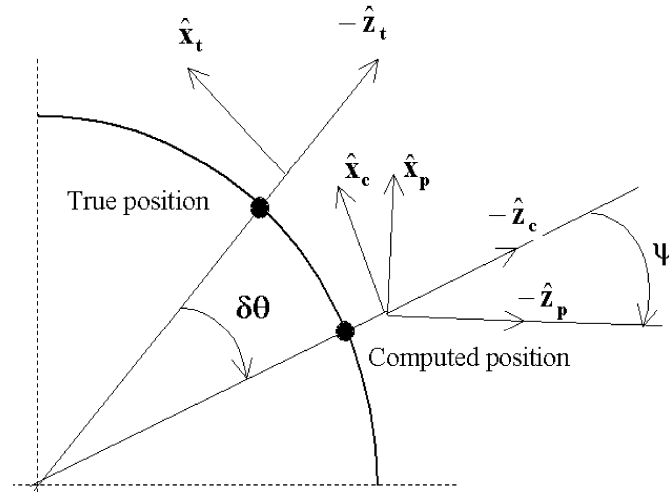


Sistema solidário: derivação do modelo no espaço de estado do erro de velocidade no sistema computado



$$S_t \xrightarrow{\delta\theta} S_c \xrightarrow{\psi} S_p \text{ e } S_t \xrightarrow{\phi} S_p$$

$$\phi = \delta\theta + \psi \text{ (Modelo de Pinson - 1963)}$$

$$\delta\theta = f(\Delta R), \psi = h(\epsilon)$$

Se não existissem erros nas condições iniciais do sistema de navegação, medidas inerciais fossem exatas, o algoritmo de determinação de atitude fosse perfeito e não houvesse erros causados pela amostragem dos sensores, a DCM estimada seria D_t^b . No entanto, os erros levam à computação de D_p^b . ΔR é o erro na determinação de posição devido ao bias de acelerômetro e ϵ , a deriva dos girômetros

Preâmbulo:

0) Sistemas de coordenadas:

	Conhecido	Desconhecido
Incorreto	S_c, S_b estimado	S_p
Correto	S_e, S_i	S_t, S_b

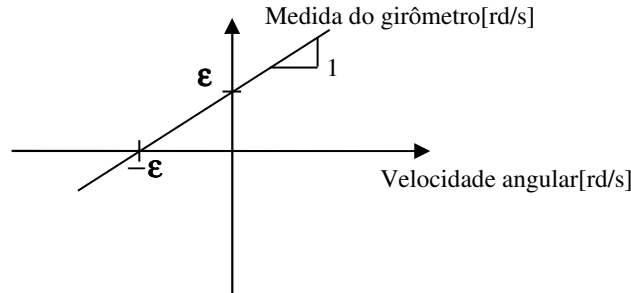
1) A análise será feita no sistema computado, i.e., a dinâmica do erro de atitude será representada pelo erro ψ que rotaciona de S_c a S_p .

2) Para erro ψ pequeno, é possível verificar que, independente da sequência de rotações:

$$D_p^c = \begin{bmatrix} 1 & \psi_D & -\psi_E \\ -\psi_D & 1 & \psi_N \\ \psi_E & -\psi_N & 1 \end{bmatrix} = (I - \psi \times)$$

3) $D_c^b \epsilon = D_c^p D_p^b \epsilon = (I + \psi \times) D_p^b \epsilon \approx D_p^b \epsilon$ a menos de erros de segunda ordem devido ao produto de ψ e ϵ . Essa é uma aproximação de interesse porque o computador de bordo tem o registro de D_p^b .

4) Diferentemente dos estabilizados mecanicamente em que a deriva ϵ indica a velocidade angular residual da plataforma quando o girômetro montado nela mede zero, em sistemas solidários a deriva ϵ indica a parte incorreta da medida do girômetros quando submetido a velocidade angular nula. Conforme o gráfico abaixo, aquela definição de deriva e esta última se relacionam com um sinal de menos.



$$5) \dot{\psi}^i = \dot{\psi}^c + \omega^{ci} \times \psi = -D_c^b \epsilon \quad (1)$$

Trata-se da equação diferencial que descreve, como já visto, o erro de atitude que será empregado na análise.

6) Fatos já conhecidos:

$$ii) \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}}^c + 2\dot{\omega}^{ci} \times \dot{\mathbf{R}}^c + \dot{\omega}^{ci} \times \mathbf{R} + \omega^{ci} \times (\omega^{ci} \times \mathbf{R}) \quad (a)$$

$$ii) \ddot{\mathbf{R}} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = \mathbf{A}_{sp} + \mathbf{g}_m - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = \mathbf{A}_{sp} + \mathbf{g} \quad (b)$$

7) O computador de bordo recebe a medida de força específica $\mathbf{A}_{sp,m}$ incorreta devido ao bias de acelerômetro ∇ e ao desalinhamento ψ . Da aproximação vista no item 3):

$$\mathbf{A}_{sp,m} = D_p^c D_c^b (\mathbf{A}_{sp,b} + \nabla) = (\mathbf{I} - \psi \times) D_c^b (\mathbf{A}_{sp,b} + \nabla) \approx (\mathbf{I} - \psi \times) D_p^b (\mathbf{A}_{sp,b} + \nabla)$$

8) $\mathbf{A}_{sp,m}$ incorreta gera erros $\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}$ e $\mathbf{g} + \Delta \mathbf{g}$; já ω^{ci} é conhecida exatamente pelo computador de navegação.

Modelo de erros no sistema S_c (vide (a) e (b)):

$$\ddot{\Delta \mathbf{R}} + 2\dot{\omega}^{ci} \times \dot{\Delta \mathbf{R}} + \dot{\omega}^{ci} \times \Delta \mathbf{R} + \omega^{ci} \times (\omega^{ci} \times \Delta \mathbf{R}) - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = D_p^b \nabla - \psi \times (D_p^b \mathbf{A}_{sp,b}) + \Delta \mathbf{g} \quad (2)$$

9) Considerando Terra elipsoidal, a gravidade é descrita por:

$$\mathbf{g} = -g_e \frac{R_e^2}{|\mathbf{R}|^3} \mathbf{R} \quad ; \quad |\mathbf{R}| = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})^{1/2} \quad ; \quad g_e = (1 + 0,0053s^2(\lambda))g_0 \quad ; \quad R_e = R_0(1 - e.s^2(\lambda))$$

Desconsiderando o efeito de $\Delta \mathbf{R}$ nos coeficientes g_e e R_e , temos que o gradiente da gravidade é dado pela sua derivada parcial com relação a \mathbf{R} :

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{R}} = -g_e R_e^2 \left[\frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{R}|^3} + \mathbf{R} \frac{\partial (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})^{-3/2}}{\partial \mathbf{R}} \right] \quad (c)$$

Aplicando a regra da cadeia ao último termo produz

$$\frac{\partial(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})^{-3/2}}{\partial \mathbf{R}} = \frac{-3}{2} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})^{-5/2} \frac{\partial(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = \frac{-3}{2|\mathbf{R}|^5} \frac{\partial(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \quad (\text{d})$$

Do cálculo vetorial diferencial:

$$\frac{\partial(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = \left[\frac{\partial}{\partial R_x} \quad \frac{\partial}{\partial R_y} \quad \frac{\partial}{\partial R_z} \right] (R_x^2 + R_y^2 + R_z^2) = 2 \begin{bmatrix} R_x & R_y & R_z \end{bmatrix} = 2\mathbf{R}^T \quad (\text{e})$$

Substituindo (e) e (d) em (c):

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{R}} = -g_e R_e^2 \left[\frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{3}{|\mathbf{R}|^5} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \right] \quad (\text{f})$$

Então, uma aproximação de ordem um para o erro de gravidade $\Delta \mathbf{g}$ causado pelo erro de posição $\Delta \mathbf{R}$ é:

$$\Delta \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{R}} \Delta \mathbf{R} = -g_e R_e^2 \left[\frac{\Delta \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{3}{|\mathbf{R}|^5} \mathbf{R} (\mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{R}) \right] \quad (3)$$

10) Fatos conhecidos:

$$\Delta \mathbf{V}_e = \dot{\Delta \mathbf{R}}^c \text{ e } \Delta \mathbf{R} = \Delta \mathbf{V}_e - \boldsymbol{\rho} \times \Delta \mathbf{R} \quad (\#)$$

Então:

$$\Delta \ddot{\mathbf{R}}^c = \Delta \dot{\mathbf{V}}_e^c - \dot{\boldsymbol{\rho}}^c \times \Delta \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}^c \times \Delta \dot{\mathbf{R}}^c \quad (\text{g})$$

Mas sabe-se que:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega}^{ci} - \boldsymbol{\omega}^{ei} = \boldsymbol{\omega}^{ci} - \boldsymbol{\Omega} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\rho}}^c = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{ci} - \dot{\boldsymbol{\Omega}}^c \quad (\text{h})$$

Ademais:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}^i = \mathbf{0} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}^c + (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}^c + \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\Omega} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\Omega}}^c = -\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (\text{i})$$

E portanto, substituindo (i) em (h):

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^c = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{ci} + \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\Omega}$$

Substituindo em (g):

$$\Delta \ddot{\mathbf{R}}^c = \Delta \dot{\mathbf{V}}_e^c - (\dot{\boldsymbol{\omega}}^{ci} + \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\Omega}) \times \Delta \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}^c \times \Delta \dot{\mathbf{R}}^c \quad (4)$$

Finalmente, substituindo (3) e (4) em (2) e usando $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ resulta o modelo de erro de velocidade no sistema computado S (vide(1) e (#)):

$$\begin{aligned}\dot{\Delta \mathbf{V}}_e^c &= -(2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\rho}) \times \Delta \mathbf{V}_e + \Delta \mathbf{g}(\Delta \mathbf{R}) + \mathbf{D}_p^b \nabla - \boldsymbol{\psi} \times (\mathbf{D}_p^b \mathbf{A}_{sp,b}) \quad ; \Delta \mathbf{V}_e(0) \text{ dado} \\ \Delta \dot{\mathbf{R}} &= \Delta \mathbf{V}_e - \boldsymbol{\rho} \times \Delta \mathbf{R} \quad ; \Delta \mathbf{R}(0) \text{ dado} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} &= \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{\omega}^{ci} - \mathbf{D}_c^b \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\psi} \times (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{D}_c^b \boldsymbol{\varepsilon} \quad ; \boldsymbol{\psi}(0) \text{ dado}\end{aligned}\quad (5)$$

Considerando vôo atmosférico, $h \ll R_e$, próximo a superfície terrestre, já foi visto anteriormente como o erro de gravidade $\Delta \mathbf{g}(\Delta \mathbf{R})$ em (3) pode ser representado em um S_c alinhado com a referência NED e que tal erro varia de forma linear em $\Delta \mathbf{R}$:

$$\Delta \mathbf{g}_c = \frac{\mathbf{g}_c}{R_e} \begin{bmatrix} -\Delta R_N \\ -\Delta R_E \\ 2\Delta R_D \end{bmatrix}$$

Representando (5) em tal S_c alinhado com a referência NED na forma de um sistema dinâmico linear variante no tempo:

$$\dot{\Delta \mathbf{x}}^c = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R} \\ \Delta \mathbf{V}_e \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \nabla \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \rho_D & -\rho_E & & & & & & \\ -\rho_D & 0 & \rho_N & & & & & & \\ \rho_E & -\rho_N & 0 & & & & & & \\ \hline -g_c/R_e & 0 & 0 & 0 & \rho_D + 2\Omega_D & -\rho_E & 0 & -A_{sp,D,c} & A_{sp,E,c} \\ 0 & -g_c/R_e & 0 & -(\rho_D + 2\Omega_D) & 0 & \rho_N + 2\Omega_N & A_{sp,D,c} & 0 & -A_{sp,N,c} \\ 0 & 0 & 2g_c/R_e & \rho_E & -(\rho_N + 2\Omega_N) & 0 & -A_{sp,E,c} & A_{sp,N,c} & 0 \\ \hline & & & & & & 0 & \rho_D + \Omega_D & -\rho_E \\ & & & & & & -(\rho_D + \Omega_D) & 0 & \rho_N + \Omega_N \\ & & & & & & \rho_E & -(\rho_N + \Omega_N) & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{D}_p^b & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{D}_p^b \end{array} \right]$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{NED} = [\Omega \cos \lambda \quad 0 \quad -\Omega \sin \lambda]^T$$

$$\boldsymbol{\rho}_{NED} = [V_E/(R_e+h) \quad -V_N/(R_e+h) \quad -V_E \cdot \tan(\lambda)/(R_e+h)]^T$$

$$\mathbf{D}_p^b \nabla = [\nabla_N \quad \nabla_E \quad \nabla_D]^T \quad \mathbf{D}_p^b \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_N \quad \varepsilon_E \quad \varepsilon_D]^T$$

Hipótese simplificadora para análise – $\lambda=0$ (veículo sobre a linha do equador)

Em repouso:

$V_N=V_E=V_D=0$ implicando em:

$$\mathbf{\Omega}_{NED}=[\Omega \ 0 \ 0]^T \quad \mathbf{\rho}_{NED}=[0 \ 0 \ 0]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_{sp,NED,c}=[0 \ 0 \ -g_{0,c}]^T$$

Caso 1 – Somente erro de bias ∇ nos acelerômetros

Considera-se alinhamento inicial exato: $\phi(0) = \mathbf{0}$

Posição inicial conhecida: $\delta\theta(0) = \mathbf{0}$

$$\delta\theta(0) = \mathbf{0}, \phi(0) = \mathbf{0} \Rightarrow \psi(0) = \mathbf{0}$$

Velocidade terrestre inicial sabida nula.

Portanto: $\Delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}_{9 \times 1}$

Dado que $\psi(0) = \mathbf{0}$ e $\varepsilon = \mathbf{0}$ então de (1): $\psi(t) = \mathbf{0} \ \forall t \geq 0$. O sistema reduzido para descrever a dinâmica é:

$$\begin{bmatrix} \frac{c}{\Delta\mathbf{R}} \\ \frac{c}{\Delta\mathbf{V}_e} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0}_3 & & & \mathbf{I}_3 & & \\ -\omega_s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_s^2 & 0 & 0 & 0 & 2\Omega \\ 0 & 0 & 2\omega_s^2 & 0 & -2\Omega & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{c}{\Delta\mathbf{R}} \\ \frac{c}{\Delta\mathbf{V}_e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{D}_p^b \end{bmatrix} \nabla \quad (6)$$

Vamos considerar na análise que $\mathbf{D}_p^b \nabla = [\nabla_N \ \nabla_E \ \nabla_D]^T$ é constante.

Sendo \mathbf{A}' a matriz de dinâmica acima, seu polinômio característico é:

$$\det(\lambda \mathbf{I}_6 - \mathbf{A}') = (\lambda^2 + \omega_s^2)(\lambda^4 + (4\Omega^2 - \omega_s^2)\lambda^2 - 2(\omega_s^2)^2)$$

Pelo critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, trata-se de sistema instável porque seu polinômio característico possui termos com coeficientes negativos multiplicando potências de λ .

Notar que $\frac{c}{\Delta\mathbf{R}} = \Delta\mathbf{V}_e \Rightarrow \frac{cc}{\Delta\mathbf{R}} = \frac{c}{\Delta\mathbf{V}_e}$ e portanto, é possível reescrever as três últimas equações diferenciais em (6) como:

$$\frac{cc}{\Delta\mathbf{R}_N} + \omega_s^2 \Delta\mathbf{R}_N = \nabla_N \Rightarrow \Delta\mathbf{R}_N(t) = \frac{\nabla_N}{\omega_s^2} (1 - c(\omega_s t))$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{cc}{\Delta\mathbf{R}_E} + \omega_s^2 \Delta\mathbf{R}_E - 2\Omega \frac{c}{\Delta\mathbf{R}_D} = \nabla_E \\ \frac{cc}{\Delta\mathbf{R}_D} - 2\omega_s^2 \Delta\mathbf{R}_D + 2\Omega \frac{c}{\Delta\mathbf{R}_E} = \nabla_D \end{array} \right\} \text{acopladas}$$

O erro na direção norte é desacoplado dos demais erros e sua amplitude é limitada pelo bias de acelerômetro na direção norte e oscila com período de Schuler:

$$T_s = 2\pi / \omega_s = 2\pi \sqrt{R_e / g_e}$$

que é de 84,5 minutos na linha do equador.

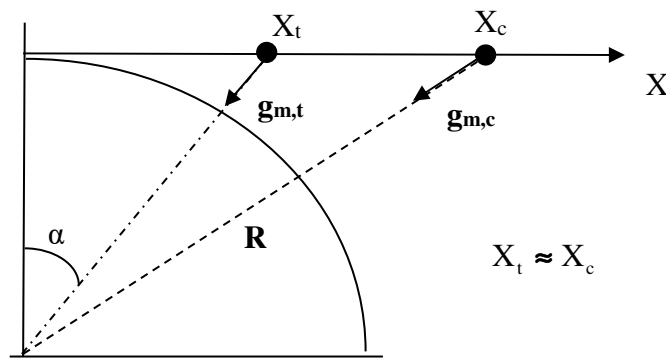
Exemplo de especificação:

Em acelerômetros comerciais $\nabla = 10^{-3}g$ (1mg) em acelerômetros comerciais. Então o erro médio na direção norte causado pela oscilação do pêndulo de Schuler será:

$$\frac{\nabla_N}{\omega_s^2} = \frac{10^{-3}g}{\omega_s^2} = \frac{10^{-3}g_0 \cdot R_0}{g_0} = 6.378m$$

Oscilações de Schuler:

Notar que a oscilação de Schuler não decorre do sistema de referência de navegação ser tangente à Terra no ponto em que se encontra o INS. Seja um sistema de referência que se mantém tangente à Terra no ponto de início de sua operação e um INS que se desloca ao longo da direção X:



$$\mathbf{A}_{sp} = \mathbf{R} - \mathbf{g}_m$$

$$A_{sp,t} = \hat{X}_t - \mathbf{g}_{m,t} \cdot \hat{\mathbf{X}} = \hat{X}_t - (-g_{m,t} s(\alpha)) = \hat{X}_t + g_{m,t} s(\alpha) = \hat{X}_t + g_{m,t} \frac{X_t}{R} \quad (a)$$

No computador de bordo, as medidas de força específica são corrompidas pelo bias de acelerômetro:

$$A_{sp,c} = \hat{X}_c - \mathbf{g}_{m,c} \cdot \hat{\mathbf{X}} = A_{sp,t} + \nabla$$

Uma vez que $X_t \approx X_c$, então $g_{m,t} \approx g_{m,c} = g_m$ e portanto:

$$A_{sp,t} + \nabla = \hat{X}_c - (-g_m \frac{X_c}{R}) \quad (b)$$

Uma vez que $X_c = X_t + \Delta X$, subtraindo (a) de (b) resulta na equação diferencial:

$$\nabla = \Delta X + \frac{g_m}{R} \Delta X$$

Portanto, a oscilação de Schuler deve-se aos dois seguintes fatos:

1 – Acelerômetros medem força específica e por isso o INS requer um modelo da gravidade para os cálculos no canal vertical.

2 – A gravidade é um campo central: o vetor \mathbf{g}_m aponta para ponto comum no espaço.

Os erros de posição causados pelo bias de acelerômetro geram um erro na computação da gravidade baseada no modelo de gravidade embarcado. Esse erro de gravidade interage com o erro de posição de acordo com a equação diferencial que representa a oscilação do pêndulo de Schuler (vide paper de 1923).

A partir de (6), analisando em separado o acoplamento existente entre os canais leste e vertical resulta a equação de erros em uma forma reduzida:

$$\begin{bmatrix} \Delta R_E^c \\ \Delta R_D^c \\ \Delta V_E^c \\ \Delta V_D^c \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0}_2 & & \mathbf{I}_2 & \\ -\omega_s^2 & 0 & 0 & 2\Omega \\ 0 & 2\omega_s^2 & -2\Omega & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta R_E^c \\ \Delta R_D^c \\ \Delta V_E^c \\ \Delta V_D^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_E \\ \nabla_D \end{bmatrix} \quad (7)$$

O polinômio característico é:

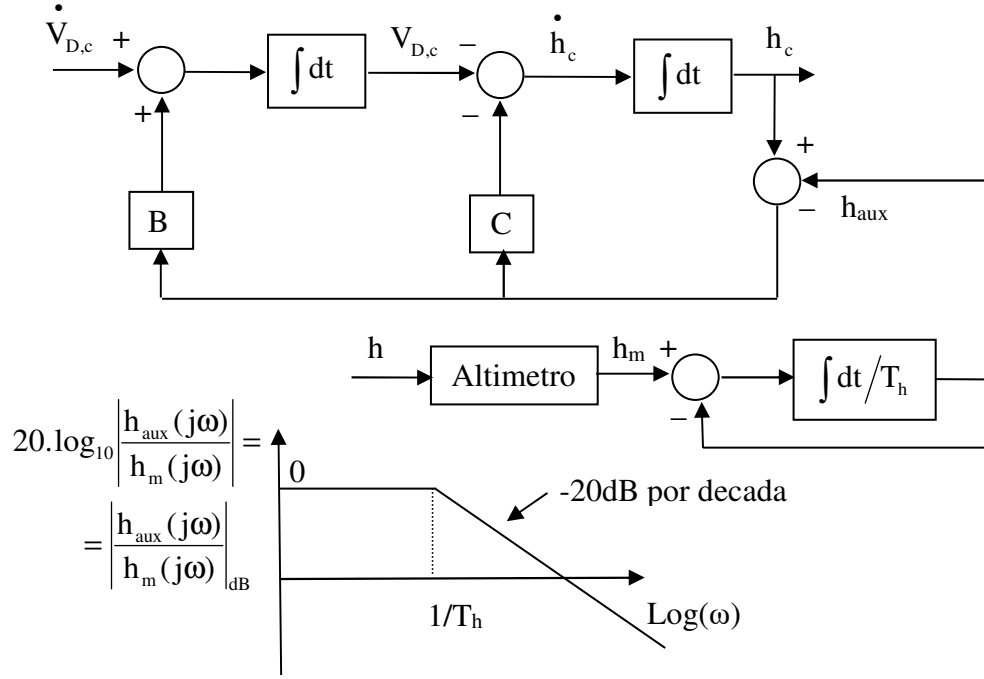
$$\det(\lambda \mathbf{I}_4 - \mathbf{A}'') = (\lambda^2 + \omega_s^2)(\lambda^2 - 2\omega_s^2) + 4\Omega^2 \lambda^2 = (\lambda^4 + (4\Omega^2 - \omega_s^2)\lambda^2 - 2\omega_s^4)$$

Os termos com coeficientes negativos indicam a instabilidade já aludida. Buscar-se-á estabilizar o canal vertical com informação de altitude provinda de sensor externo (altímetro); como resultado, os erros verticais de posição e velocidade serão negligenciáveis e o canal leste deverá se comportar como o pêndulo de Schuler no canal norte.

A malha do canal vertical é estabilizada por integração do INS com altímetro mediante as seguintes modificações nas equações de navegação:

$$\begin{aligned} \dot{h}_c &= -V_{D,c} - C(h_c - h_{aux}) \\ \dot{V}_{D,c} &= \underbrace{A_{sp,D,c}}_{D_p^b(3,:)A_{sp,b}} - \frac{V_{N,c}^2}{(R_{N,c} + h_c)} - V_{E,c} \left\{ 2\Omega c(\lambda_c) + \frac{V_{E,c}}{(R_{E,c} + h_c)} \right\} + g_c(\lambda_c, h_c) + B(h_c - h_{aux}) \\ \dot{h}_{aux} &= \frac{(h_m - h_{aux})}{T_h} \end{aligned} \quad (8)$$

O filtro visa à atenuação do ruído de medida do altímetro. T_h ajusta a frequência de corte (banda passante) $1/T_h$ do filtro, usualmente ajustado para dezenas de segundos. A atenuação de ruído é provida pela assíntota da curva de Bode de magnitude do filtro decaindo com inclinação de -20dB/década. O altímetro não responde a variações bruscas de altitude. B e C são ajustados como compromisso entre acurácia a curto prazo das estimativas do INS e a longo prazo do altímetro.



Substituindo a mudança em (8) na equação de erros reduzida vista em (7):

$$\Delta \dot{h}_c = -\Delta V_{D,c} - C(\Delta h_c - \Delta h_{aux}) \quad (9a)$$

$$\Delta \dot{V}_{D,c} = 2\omega_s^2 \Delta R_D - 2\Omega \Delta V_{E,c} + \nabla_D + B(\Delta h_c - \Delta h_{aux}) \quad (9b)$$

Mas $\Delta h_c = -\Delta R_D$ e de (7) sabe-se que $\Delta \dot{R}_E = \Delta V_E$; então, (9a-b) ficam:

$$\Delta \dot{R}_D = \Delta V_{D,c} + C(-\Delta R_D - \Delta h_{aux}) \quad (10a)$$

$$\Delta \dot{V}_{D,c} = 2\omega_s^2 \Delta R_D - 2\Omega \Delta \dot{R}_E + \nabla_D + B(-\Delta R_D - \Delta h_{aux}) \quad (10b)$$

Derivando mais uma vez (10a) e substituindo nesta última a equação (10b) resulta que:

$$\Delta \ddot{R}_D + C \Delta \dot{R}_D + (B - 2\omega_s^2) \Delta R_D + 2\Omega \Delta \dot{R}_E = +\nabla_D - B \Delta h_{aux} - C \Delta \dot{h}_{aux} \quad (11)$$

Além disso, as equações de erro em (7), aqui repetidas, são desenvolvidas e produzem:

$$\Delta \dot{R}_D = \Delta V_D$$

$$\Delta \dot{R}_E = \Delta V_E$$

$$\Delta \ddot{R}_E = \Delta \dot{V}_E = -\omega_s^2 \Delta R_E + 2\Omega \Delta V_D + \nabla_E = -\omega_s^2 \Delta R_E + 2\Omega \Delta \dot{R}_D + \nabla_E$$

que resulta em:

$$\Delta \ddot{R}_E + \omega_s^2 \Delta R_E - 2\Omega \Delta \dot{R}_D = +\nabla_E \quad (12)$$

Aplicando em (11) e (12) a transformação de Laplace $L\{.\}$ e considerando condições iniciais nulas:

$$\begin{bmatrix} s^2 + \omega_s^2 & -2\Omega s \\ 2\Omega s & s^2 + C.s + (B - 2\omega_s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L\{\Delta R_E(t)\} \\ L\{\Delta R_D(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\{\nabla_E(t)\} \\ L\{\nabla_D(t)\} - (B + C.s)L\{\Delta h_{aux}(t)\} \end{bmatrix} \quad (13)$$

A divergência no canal vertical deixa de ocorrer quando, pelo critério de Routh-Hurwitz, selecionamos por exemplo os seguintes pólos para o polinômio no elemento (2,2) da matriz acima:

$$s^2 + C.s + (B - 2\omega_s^2) = (s + 1/T)^2$$

onde T é a constante de tempo desejada para o canal vertical do sistema integrado INS e altímetro. Para obter resposta superamortecida, seja T=1s. Igualando-se os polinômios de cada lado da igualdade acima leva a C=2 e B≈1.

O sistema integrado ao altímetro tem seu modelo de erros representado no espaço de estado pelo modelo de erro de velocidade no sistema computado, próximo à superfície da Terra e estacionário sobre a linha do equador, conforme abaixo:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}' \cdot \Delta \mathbf{u}' \quad \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R} \\ \Delta \mathbf{V}_e \\ \Psi \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{u}' = \begin{bmatrix} \nabla \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \Delta h_{aux} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & -C & & & & & & \\ \hline -\omega_s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & 0 \\ 0 & -\omega_s^2 & 0 & 0 & 0 & 2\Omega & -g_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_s^2 - B & 0 & -2\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \Omega \\ & & & & & & 0 & -\Omega & 0 \end{array} \right] \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & -C & & \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ \mathbf{D}_p^b & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & 0 & & \\ \hline & & & -B & & \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{D}_p^b & \mathbf{0}_{3 \times 1} & & & \end{array} \right] \quad (@)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{NED} = [0 \ 0 \ -\Omega s \lambda]^T$$

$$\boldsymbol{\rho}_{NED} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{D}_p^b \nabla = [\nabla_N \ \nabla_E \ \nabla_D]^T \quad \mathbf{D}_p^b \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_N \ \varepsilon_E \ \varepsilon_D]^T$$

Caso 2 – Efeito de deriva $\boldsymbol{\varepsilon}$ e erro de alinhamento inicial no desalinhamento $\boldsymbol{\psi}$ de INS estacionário em qualquer latitude

Conforme já visto, o desalinhamento $\boldsymbol{\psi}$ é desacoplado do erro de posição $\Delta \mathbf{R}$ e do de velocidade $\Delta \mathbf{V}_e$. A equação diferencial é:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varepsilon} ; \boldsymbol{\psi}(0) \text{ dado}$$

No sistema NED:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_N \\ \dot{\psi}_E \\ \dot{\psi}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_D & 0 \\ -\Omega_D & 0 & \Omega_N \\ 0 & -\Omega_N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

A equação diferencial ordinária linear invariante no tempo tem solução dada por:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau$$

Do teorema de Cayley-Hamilton, para matriz \mathbf{A} com dimensões 3x3:

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \mathbf{A} + \alpha_2(t) \mathbf{A}^2$$

$$\text{Seja } \Omega^2 = \Omega_N^2 + \Omega_D^2; \Omega_N = \Omega \cos(\lambda) \quad \Omega_D = -\Omega \sin(\lambda).$$

$$\text{Autovalores de } \mathbf{A}: \lambda_1 = 0; \lambda_{2,3} = \pm \Omega j$$

Da fórmula de interpolação polinomial de Sylvester:

$$e^{\lambda_i t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda_i + \alpha_2(t) \lambda_i^2; i = 1, 2, 3$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0(t) = 1$$

$$\lambda_1 = \Omega j \Rightarrow e^{\Omega j t} = \cos(\Omega t) + j \sin(\Omega t) = \alpha_0 + \alpha_1 \Omega j - \alpha_2 \Omega^2$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \sin(\Omega t) / \Omega; \alpha_2 = (1 - \cos(\Omega t)) / \Omega^2$$

Após manipulação algébrica, a solução homogênea é:

$$\boldsymbol{\psi}_h(t) = e^{\mathbf{A}t} \boldsymbol{\psi}(0) = \{ \alpha_0(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \mathbf{A} + \alpha_2(t) \mathbf{A}^2 \} \boldsymbol{\psi}(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\Omega_N^2 + \Omega_D^2 \cos(\Omega t)}{\Omega^2} & \frac{\Omega_D}{\Omega} \sin(\Omega t) & \frac{\Omega_N \Omega_D [1 - \cos(\Omega t)]}{\Omega^2} \\ -\frac{\Omega_D}{\Omega} \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & \frac{\Omega_N}{\Omega} \sin(\Omega t) \\ \frac{\Omega_N \Omega_D [1 - \cos(\Omega t)]}{\Omega^2} & -\frac{\Omega_N}{\Omega} \sin(\Omega t) & \frac{\Omega_D^2 + \Omega_N^2 \cos(\Omega t)}{\Omega^2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}(0)$$

No caso da deriva $\boldsymbol{\varepsilon}$ ser constante no sistema de referência NED, a integral de convolução na solução da equação diferencial produz, após manipulação algébrica, a seguinte solução particular:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_p(t) &= e^{At} \left\{ \int_0^t e^{-A\tau} d\tau \right\} \boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\Omega_N^2 \Omega t + \Omega_D^2 \sin(\Omega t)}{\Omega^3} & \frac{\Omega_D}{\Omega^2} [1 - \cos(\Omega t)] & \frac{\Omega_N \Omega_D [\Omega t - \sin(\Omega t)]}{\Omega^3} \\ \frac{\Omega_D}{\Omega^2} [\cos(\Omega t) - 1] & \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t) & \frac{\Omega_N}{\Omega^2} [1 - \cos(\Omega t)] \\ \frac{\Omega_N \Omega_D [\Omega t - \sin(\Omega t)]}{\Omega^3} & -\frac{\Omega_N}{\Omega^2} [1 - \cos(\Omega t)] & \frac{\Omega_D^2 \Omega t + \Omega_N^2 \sin(\Omega t)}{\Omega^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Note que o desalinhamento total é a soma $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\delta\theta} + \boldsymbol{\Psi}$, sendo $\boldsymbol{\delta\theta}$ causado pelo erro de posição $\Delta\mathbf{R}$ e sua representação no sistema de coordenadas NED é:

$$\boldsymbol{\delta\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta R_E}{(R_E + h)} \\ -\frac{\Delta R_N}{(R_N + h)} \\ -\frac{\Delta R_E}{(R_E + h)} \tan(\lambda) \end{bmatrix}$$

O erro de posição $\Delta\mathbf{R}$, responsável pelo desalinhamento $\boldsymbol{\delta\theta}$, para o caso de deriva $\boldsymbol{\varepsilon}$ constante no sistema de coordenadas NED e alinhamento inicial ideal quando o INS se encontra sobre a linha do equador será visto a seguir.

Caso 3 – Efeito de deriva $\boldsymbol{\varepsilon}$ no erro de navegação de INS estacionário na linha do equador

Nesse caso os acelerômetros são perfeitos ($\nabla = \mathbf{0}$) e o alinhamento inicial é exato ($\boldsymbol{\Psi}(0) = \mathbf{0}$). Além disso, por causa da estabilização do canal vertical, seus erros serão desprezados ($\Delta R_D = \Delta V_D = 0$). Portanto, somente os erros nos canais horizontais serão analisados. Esta última é uma aproximação válida quando o INS está estacionário, ou sujeito a manobras verticais rápidas e de curta duração.

$$\Delta R_N^c = \Delta V_N$$

$$\Delta R_E^c = \Delta V_E$$

$$\Delta V_N^c = -\omega_s^2 \Delta R_N + g_0 \Psi_E; \quad \omega_s^2 = g_0 / R_0$$

$$\Delta V_E^c = -\omega_s^2 \Delta R_E - g_0 \Psi_N$$

$$\Psi_N^c = \varepsilon_N$$

$$\Psi_E^c = \Omega \Psi_D + \varepsilon_E; \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_N & \varepsilon_E & \varepsilon_D \end{bmatrix}^T = -\mathbf{D}_p^b \begin{bmatrix} \varepsilon_{xb} & \varepsilon_{yb} & \varepsilon_{zb} \end{bmatrix}^T$$

$$\Psi_D^c = -\Omega \Psi_E + \varepsilon_D$$

A solução é:

$$\psi_N = \varepsilon_N t$$

$$\psi_E = \frac{1}{\Omega} \{ \varepsilon_E \sin(\Omega t) + [1 - \cos(\Omega t)] \varepsilon_D \}$$

$$\psi_D = \frac{1}{\Omega} \{ \varepsilon_D \sin(\Omega t) + [\cos(\Omega t) - 1] \varepsilon_E \}$$

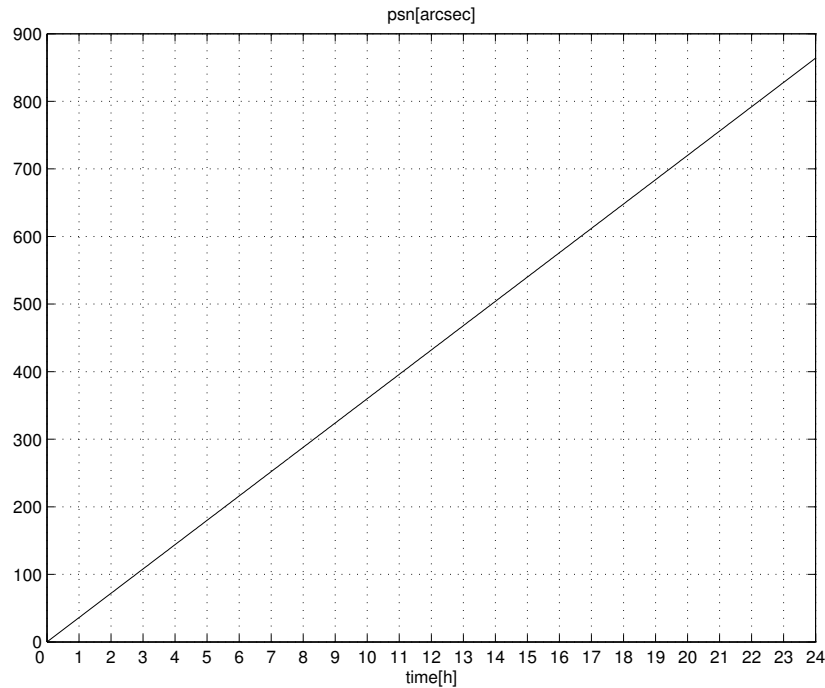
$$\Delta R_E = -\frac{R_0}{\omega_s} \varepsilon_N [\omega_s t - \sin(\omega_s t)]$$

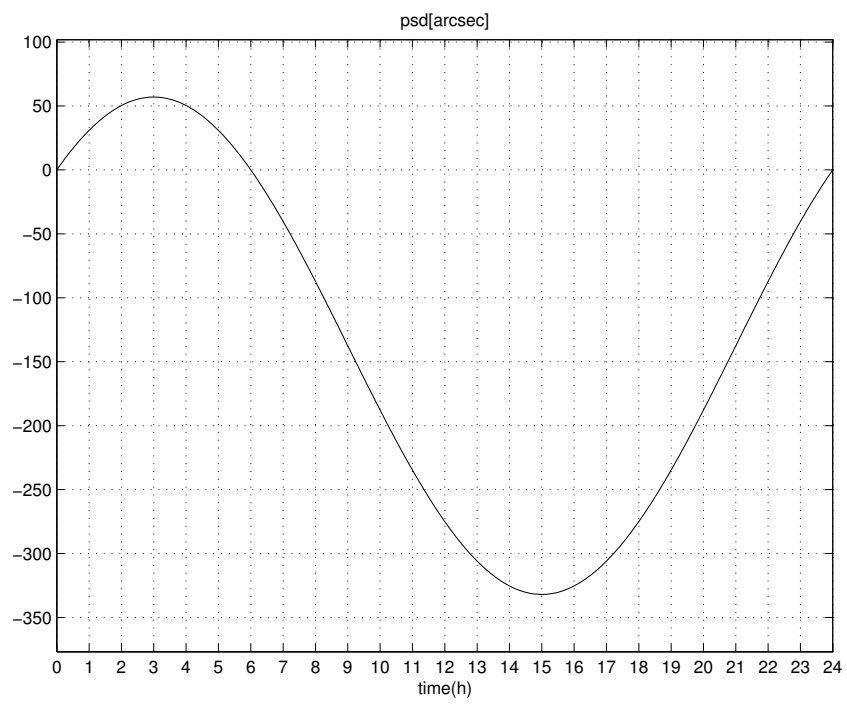
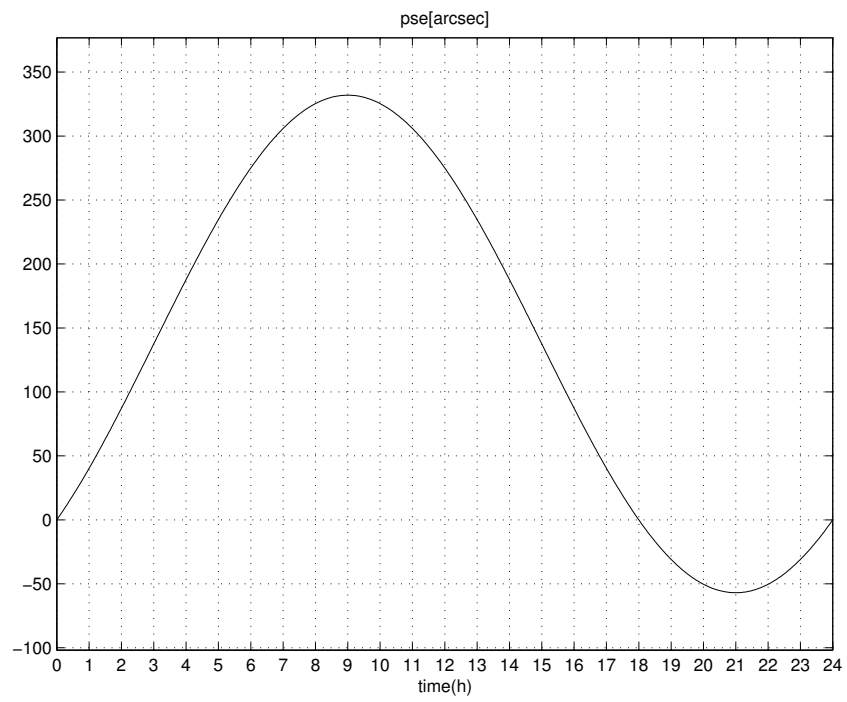
$$\Delta R_N = \frac{g_0}{[(\omega_s^2 - \Omega^2) \omega_s \Omega]} \{ \varepsilon_E [\omega_s \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_s t)] - \frac{\varepsilon_D}{\omega_s} [\Omega^2 (1 - \cos(\omega_s t)) - \omega_s^2 (1 - \cos(\Omega t))] \}$$

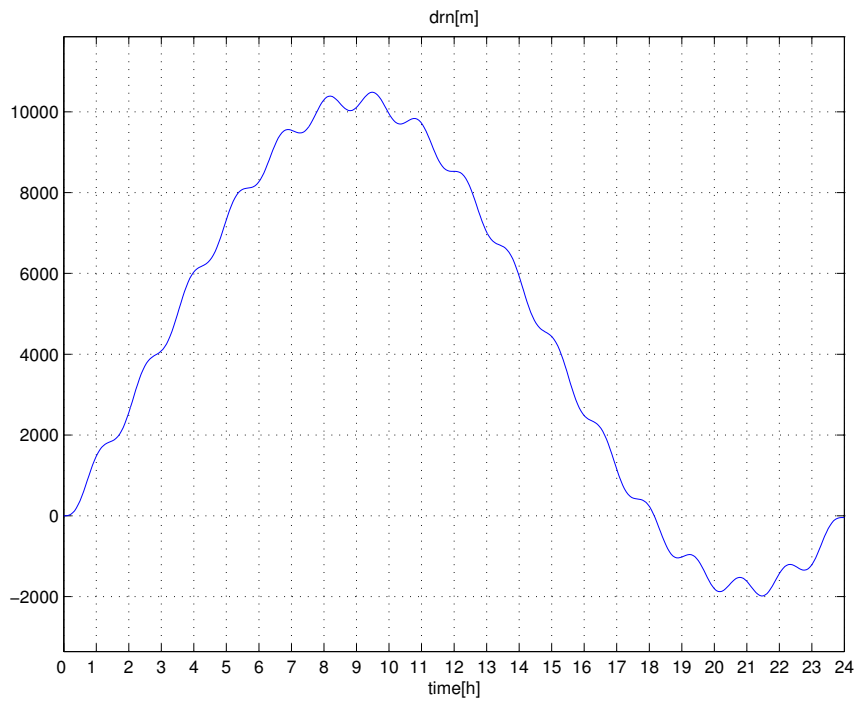
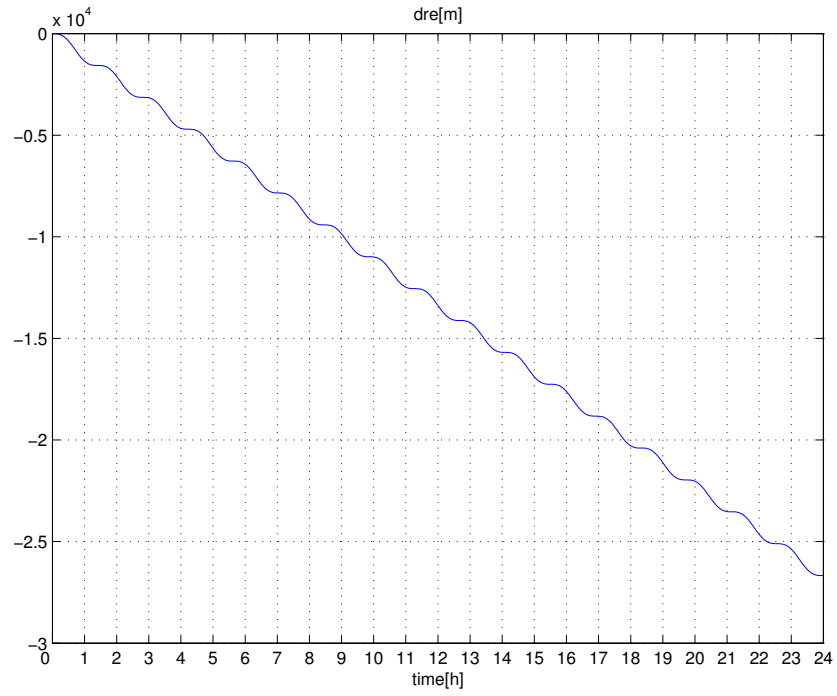
Percebe-se que:

- O desalinhamento não apresenta a oscilação de Schuler porque esta é excitada pelo erro de gravidade, o qual é causado pelo erro de posição e que inexistente neste caso;
- O erro de posição ΔR_E diverge;
- O erro de posição ΔR_N oscila com frequência de Schuler ω_s modulada pela frequência de rotação da Terra Ω em torno de uma média diferente de zero.

As figuras abaixo assumem que as derivas nas direções N,E,D são de 0,01°/h.







Um exemplo de especificação inicial da máxima deriva admissível nos girômetros se segue. A partir do erro ΔR_E visto acima, o qual diverge, desconsideram-se as oscilações de Schuler e faz-se a aproximação:

$$|\Delta R_E| \approx R_0 \epsilon T_{\text{oper}}$$

Para que após uma hora de operação o erro seja de uma milha náutica, usual em sistemas de navegação com qualidade inercial, temos que:

$$\frac{|\Delta R_E|}{T_{oper}} = \frac{1 \text{ nmi}}{1 \text{ h}} = \frac{1852 \text{ m}}{1 \text{ h}}; R_0 = 6.400.000 \text{ m} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1852 \text{ m}}{(6.400.000) \cdot 1 \text{ h}} \approx 2,9 \times 10^{-4} \text{ rd/h} = 0,017^\circ / \text{h}$$

Esta deriva, da ordem de centésimo de grau por hora, qualifica um girômetro como pertencendo à classe de qualidade inercial. Por ser muito caro e/ou de difícil aquisição face a restrições existentes para a exportação de equipamentos para navegação com qualidade inercial, uma opção atraente é o emprego de sensores inerciais com qualidade inferior mediante integração com informações úteis para a navegação providas de receptores GPS, magnetômetros, inclinômetros, câmeras, entre outros.

Caso 4 – Erro de alinhamento inicial causado pela deriva ε e bias ∇ com INS estacionário em qualquer latitude

- Veículo estacionário implica em $\Delta \mathbf{R} = \Delta \mathbf{V}_e = \mathbf{0}$.
- O sistema verdadeiro S_t e o computado S_c são coincidentes.
- Deseja-se obter $\mathbf{D}_t^b(0)$, mas o que é computado é $\mathbf{D}_p^b(0)$.

Fase 1: Computar o plano horizontal local (equivale a achar a vertical local) usando a força específica medida pelos acelerômetros – que medem a reação à gravidade, i.e., medem (idealmente, desconsiderando quaisquer erros de medida):

$$\mathbf{A}_{sp} = -g_0 \hat{\mathbf{D}}$$

Fase 2: Computar a rotação em torno da vertical local estimada na Fase 1 para que a medida de velocidade angular da Terra feita pelos girômetros seja nula na direção leste ao longo do plano horizontal estimado. Dessa forma, é possível encontrar a direção norte. Um ajuste inicial, grosseiro, pode empregar informação de um magnetômetro e do modelo de campo geomagnético para determinar a declinação magnética – a diferença entre o norte geográfico e o magnético.

No final da Fase 1, os erros de desalinhamento residual são:

$$\Delta \dot{\mathbf{V}}_N = \Delta \dot{\mathbf{V}}_E = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} g_0 \psi_E + \nabla_N = 0 \Rightarrow \psi_E(0) = \frac{-\nabla_N}{g_0} \\ -g_0 \psi_N + \nabla_E = 0 \Rightarrow \psi_N(0) = \frac{\nabla_E}{g_0} \end{cases}$$

No final da fase 2, o componente leste das medidas dos girômetros sujeitos à velocidade angular da Terra é $\Omega_{p,E,m}(0) = 0$. Sabe-se que:

$$\Omega_p = \mathbf{D}_p^b \Omega_b$$

Em $t=0$, como é sabida a posição do INS e a velocidade é nula:

$$S_c \equiv S_t \Rightarrow \mathbf{D}_p^c = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\psi} \times) = \mathbf{D}_p^t$$

$$\text{e também } \mathbf{D}_p^b = \mathbf{D}_p^t \mathbf{D}_t^b = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\psi} \times) \mathbf{D}_t^b$$

Então:

$$\Omega_p = D_p^t D_t^b \Omega_b$$

$$\Omega_{p,NED} = (\mathbf{I} - \Psi_{NED} \times) \begin{bmatrix} \Omega_N \\ 0 \\ \Omega_D \end{bmatrix} \quad \Omega_N = \Omega \cos \lambda \quad \Omega_D = -\Omega \sin \lambda$$

$$(\mathbf{I} - \Psi_{NED} \times) = \begin{bmatrix} 1 & \Psi_D & -\Psi_E \\ -\Psi_D & 1 & \Psi_N \\ \Psi_E & -\Psi_N & 1 \end{bmatrix} \text{ e também } \begin{bmatrix} \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{bmatrix} = \underbrace{-D_p^b}_{\uparrow} \varepsilon_b$$

O sinal negativo se deve ao fato de a deriva se tratar de erro de zero dos girômetros de sistema de navegação solidário. Portanto, a medida do componente leste da velocidade angular da Terra é nula em uma direção distinta do leste verdadeiro devido aos seguintes erros:

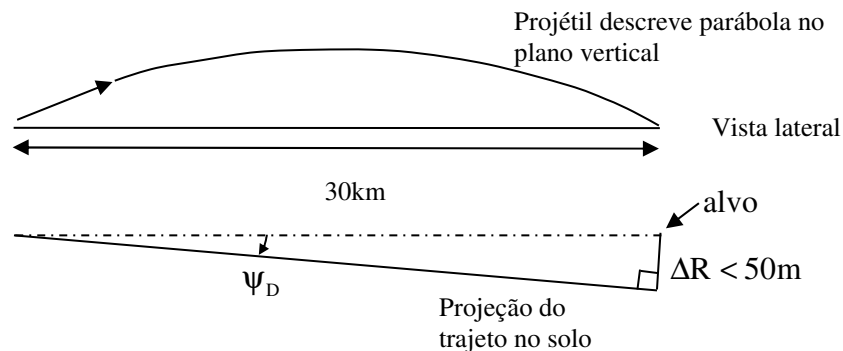
$$\Omega_{p,E,m}(0) = 0 = -\Omega_N \Psi_D(0) + \Omega_D \Psi_N(0) - \varepsilon_E$$

Portanto, o desalinhamento inicial em relação ao norte verdadeiro é:

$$\Psi_D(0) = \frac{\Omega_D \frac{\nabla_E}{g_0} - \varepsilon_E}{\Omega_N}$$

Exemplo de especificação:

Um míssil terra-terra é disparado de latitude 23°S e, desconsiderando efeitos aerodinâmicos, descreve trajetória parabólica em um plano vertical até encontrar o solo a uma distância de 30km. O processo de girocompasso é empregado para o alinhamento inicial do sistema de navegação: obter o plano horizontal e a direção do norte local. Isso permite apontar o míssil antes do lançamento na direção do alvo, que se encontra estacionário sobre o solo. O tempo de voo é muito curto – bem menor que o período de Schuler e o da rotação da Terra – e por isso o erro ao final da trajetória pode ser considerado como devido somente ao erro de alinhamento inicial. O míssil cai no solo a uma distância de 30km, mas com um erro lateral ΔR , conforme mostra a figura abaixo. Como o tempo de voo é curto, pode-se desprezar a curvatura da Terra e o triângulo-retângulo pode ser assumido como embutido em um plano. O bias de acelerômetro é de 1mg. Qual a magnitude admissível da deriva dos girômetros para que o erro lateral ΔR seja inferior a 50m?



O desalinhamento em relação ao norte após o processo de girocompasso é:

$$\psi_D < \frac{50}{30.000} [\text{rd}] \approx 0,095^\circ$$

Os componentes norte e vertical da velocidade angular da Terra são:

$$\Omega_N = \Omega \cos \lambda = \frac{2\pi}{24[\text{h}] \times 3.600[\text{s/h}]} \cos(-23^\circ)$$

$$\Omega_D = -\Omega \sin \lambda = \frac{-2\pi}{24[\text{h}] \times 3.600[\text{s/h}]} \sin(-23^\circ)$$

$$\nabla_E = 0,001 g_0$$

Substituindo os valores em $\psi_D(0) = \frac{\Omega_D \frac{\nabla_E}{g_0} - \epsilon_E}{\Omega_N}$, temos que $|\epsilon_E| < 0,017^\circ / \text{h}$, que é de classe inercial.