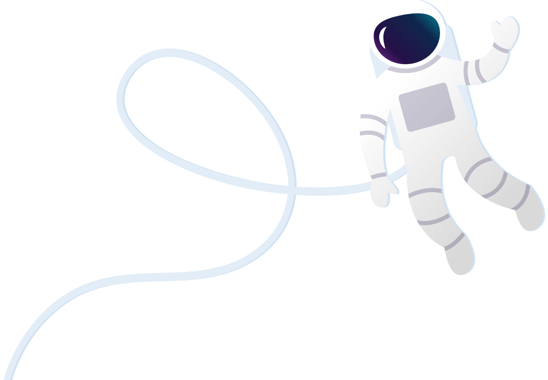
Algoritmo para solução do problema de Lambert no contexto de N corpos

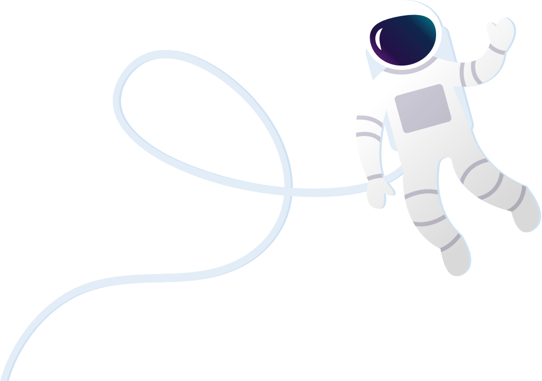
Apresentação final da disciplina FM-235



São José dos Campos-SP, 2020

Aluno: Francisco Matheus Moreira de Castro

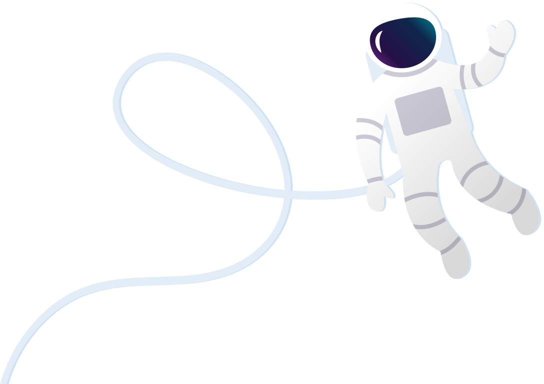
Professora: Profa. Dra. Maisa de Oliveira Terra



Objetivo

Missão

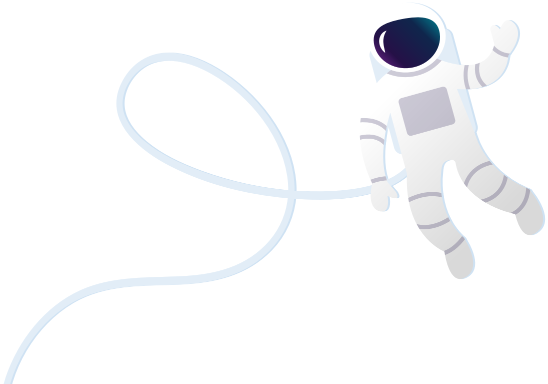
Desenvolver um algoritmo capaz de prover soluções para o PVC inspirado no Problema de Lambert clássico aplicado a um contexto de N corpos.



Definição do problema

Problema de Lambert

Na mecânica celeste, o problema de Lambert está relacionado à determinação de uma órbita a partir de **dois vetores de posição** e o **tempo de vôo**, proposto no século 18 por **Johann Heinrich Lambert** e formalmente resolvido com prova matemática por **Joseph-Louis Lagrange**.



Problema de Lambert

Suponha que um corpo sob a influência de uma força gravitacional central é observado viajando do **ponto P1** em sua **trajetória cônica** até um **ponto P2** em um **tempo T**. O tempo de vôo está relacionado a outras variáveis pelo **teorema de Lambert**, que afirma:

"O tempo de transferência de um corpo movendo-se entre dois pontos em uma trajetória cônica é função apenas da soma das distâncias dos dois pontos desde a origem da força, a distância linear entre os pontos e o semi-eixo maior da cônica."

Problema de Lambert generalizado

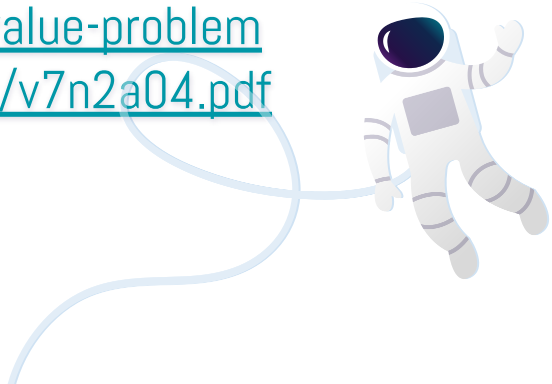
Um método comum para resolver um **problema geral de valor limite de dois pontos** é empregar uma técnica de iteração numérica chamada de ***shooting method***.

Dados os estados inicial e final x(t1) e x(t2), bem como um tempo de transferência desejado \Delta t, a técnica do método shooting começa com uma **estimativa da velocidade inicial** v(t1). Depois de integrar a trajetória para obter o estado x~(t2), o erro final de direcionamento é usado para **corrigir a estimativa** da velocidade inicial até que o erro seja **tolerável**.

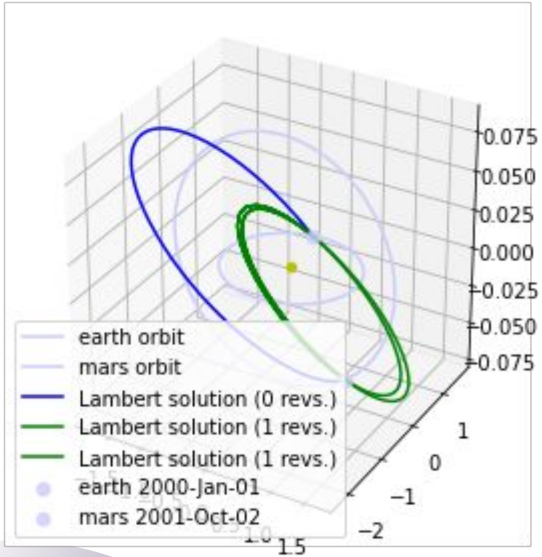
Abordagens

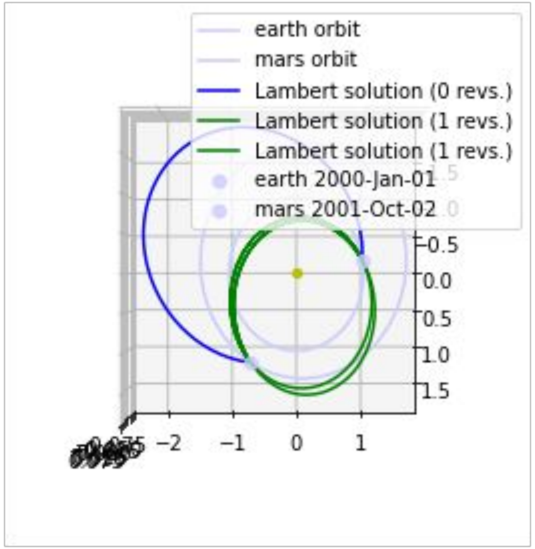
Como podemos fazer?

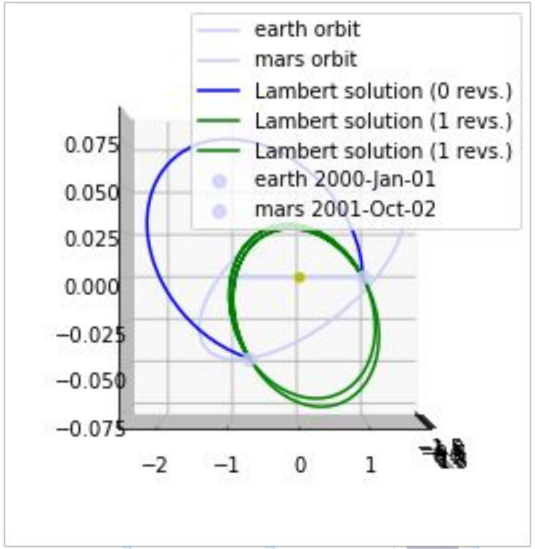
- O problema 2B é bem diferente sob o ponto de vista implementacional, porém nos dá boas análises de chutes iniciais.
- Existem diversas soluções para o problema 2B (Problema de Lambert clássico):
    - https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert%27s_problem
    - https://esa.github.io/pykep/examples/ex2.html
    - https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/26348-robust-solver-for-lambert-s-orbital-boundary-value-problem
    - https://www.sba.org.br/revista/volumes/v7n2/v7n2a04.pdf



Como podemos fazer?





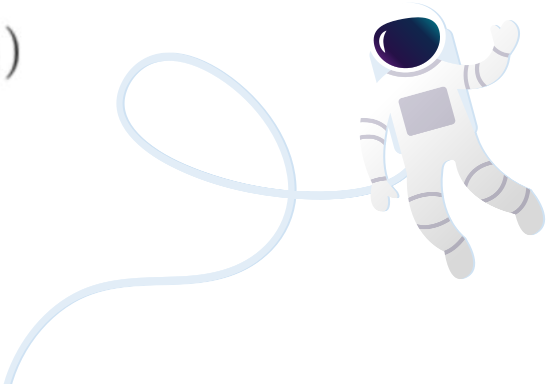


Como podemos fazer?

O ponto chave é o entendimento do **método de Newton**, que se baseia em correções finitas com base numa métrica de erro para o problema ponderada pela matriz de variação da grandeza de correção

$$\delta x(t_2) = \hat{x}(t_2) - x(t_2)$$

$$\underbrace{\dot{x}(t_1)}_{new} = \underbrace{\dot{x}(t_1)}_{old} - \left(\frac{\partial x(t_2)}{\partial \dot{x}(t_1)}\right)^{-1} \delta x(t_2)$$

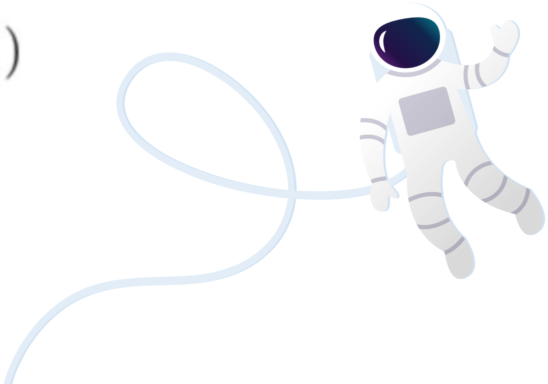


Como podemos fazer?

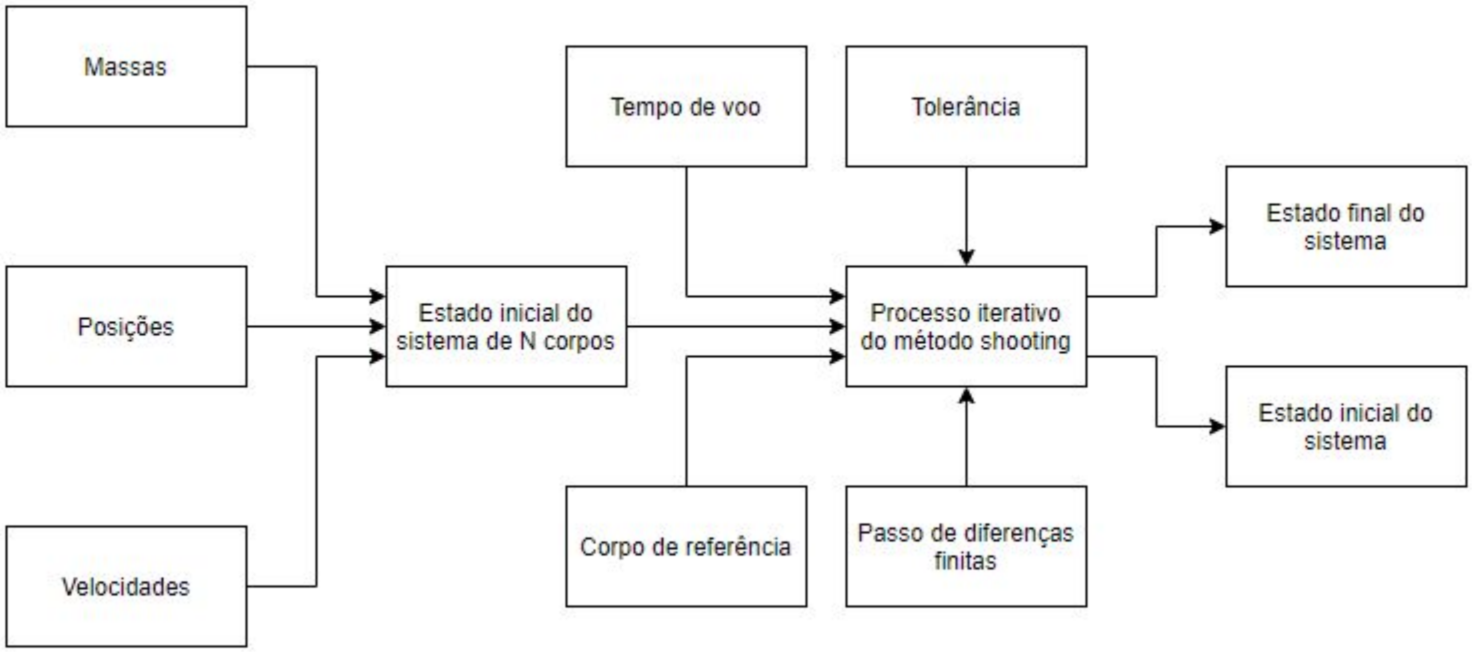
O método de Newton, por sua vez, recai fortemente sobre o entendimento da referida matriz de variação da grandeza de correção

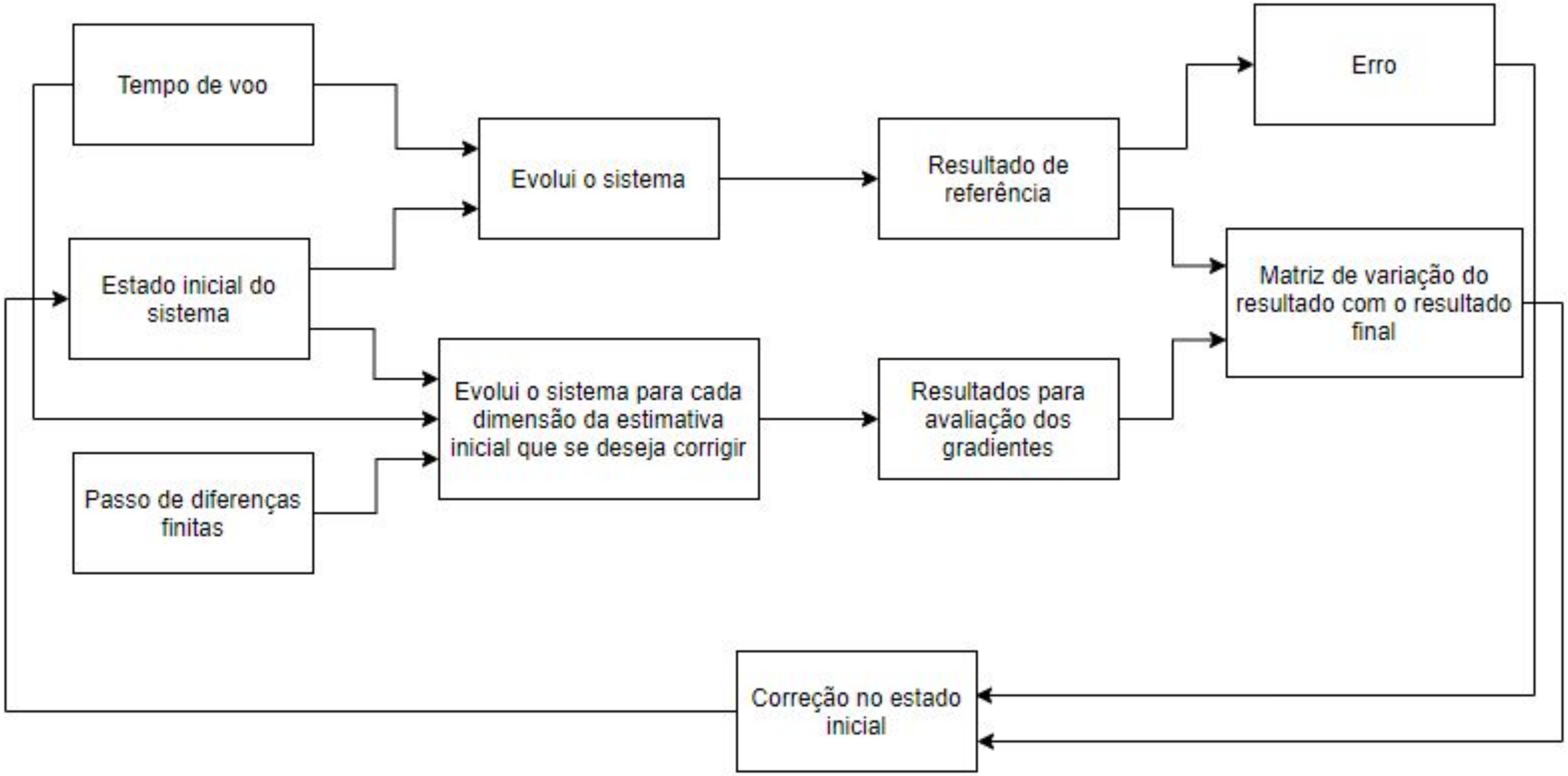
$$\delta x(t_2) = \hat{x}(t_2) - x(t_2)$$

$$\underbrace{\dot{x}(t_1)}_{new} = \underbrace{\dot{x}(t_1)}_{old} - \boxed{\left(\frac{\partial x(t_2)}{\partial \dot{x}(t_1)}\right)}^{-1} \delta x(t_2)$$



Desenvolvimento


Massas
Posições
Velocidades
Estado inicial do sistema de N corpos
Tempo de voo
Tolerância
Corpo de referência
Passo de diferenças finitas
Processo iterativo do método shooting
Estado final do sistema
Estado inicial do sistema

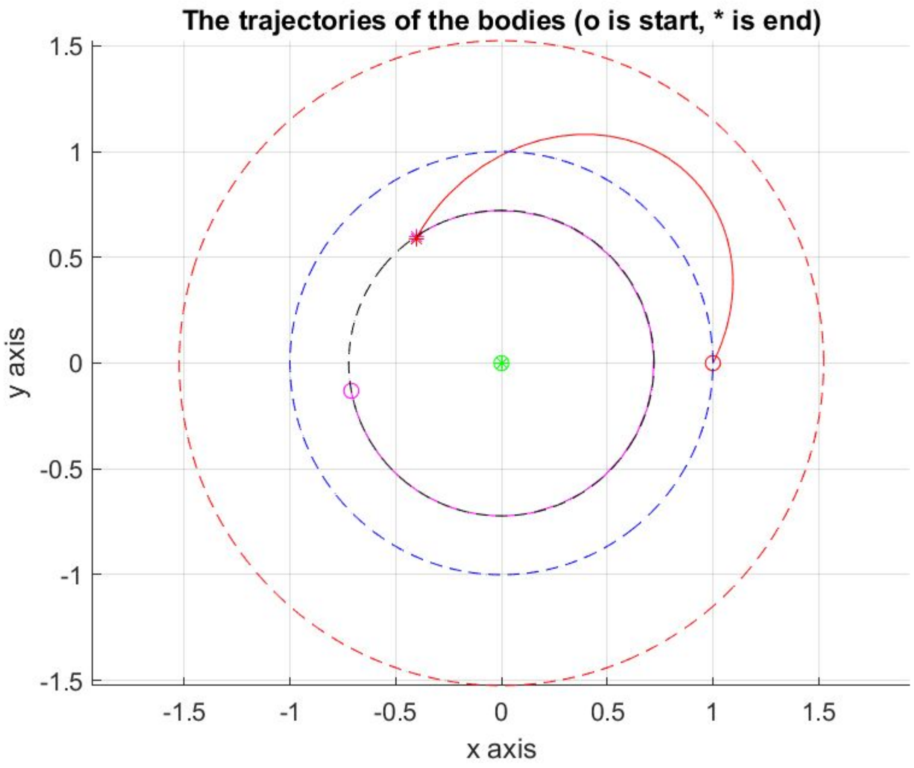

Tempo de voo
Evolui o sistema
Resultado de referência
Erro
Estado inicial do sistema
Matriz de variação do resultado com o resultado final
Evolui o sistema para cada dimensão da estimativa inicial que se deseja corrigir
Resultados para avaliação dos gradientes
Passo de diferenças finitas
Correção no estado inicial

Resultados

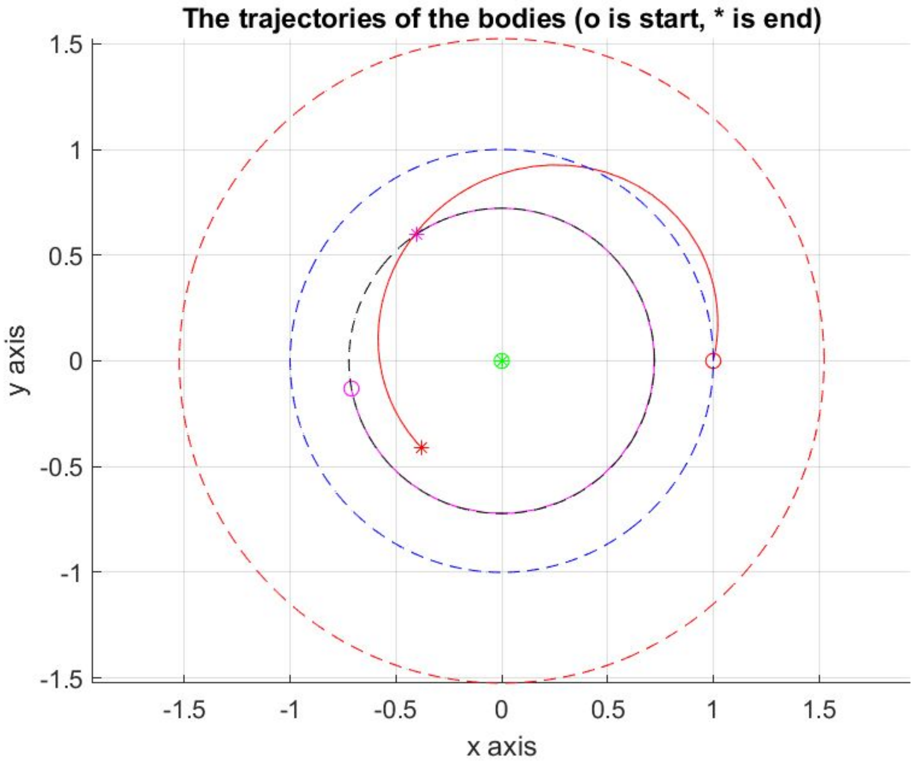
Sistema considerado

- 3 corpos: Sol, Vênus, espaçonave
- Velocidade inicial da espaçonave = velocidade de transferência Terra-Vênus por Hohmann
- Posição inicial:
    - Vênus: [-0.7099   -0.1310   0]
    - Espaçonave: [1 0 0]
    - Sol: [0 0 0]
- Referencial heliocêntrico não girante com sistema métrico normalizado pelas convenções do CRTPB.

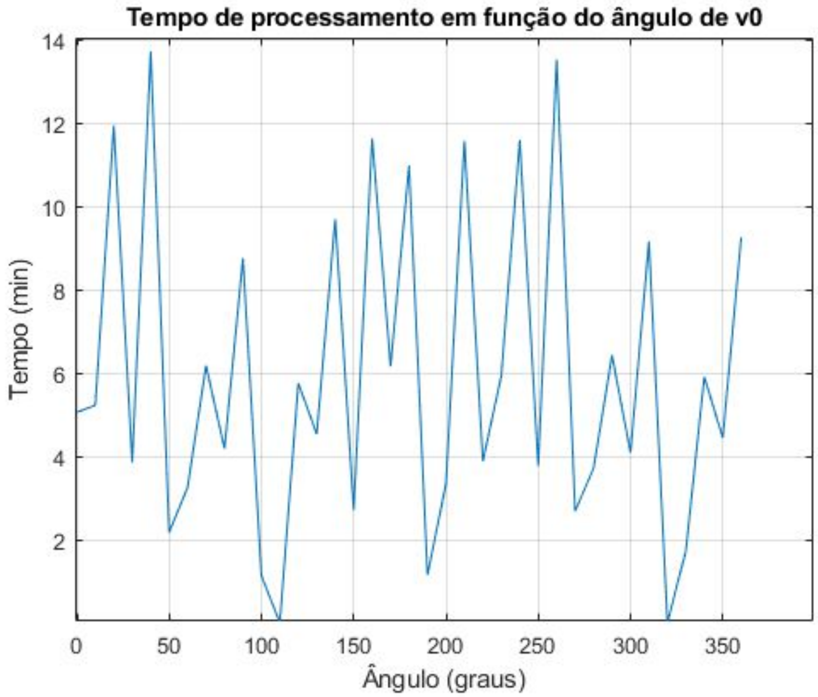
Trajetória solução p/ condições propostas

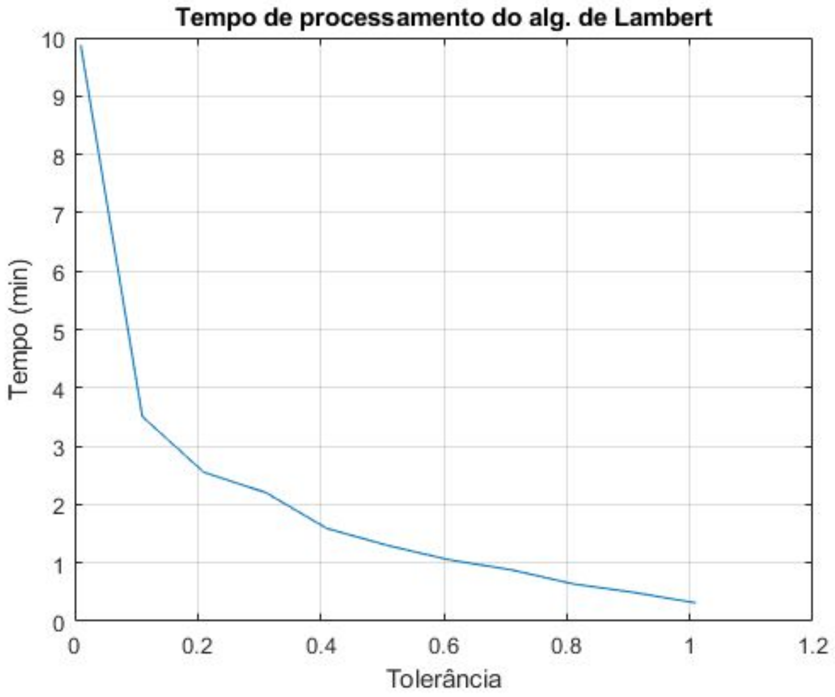


Evolução da procura da solução

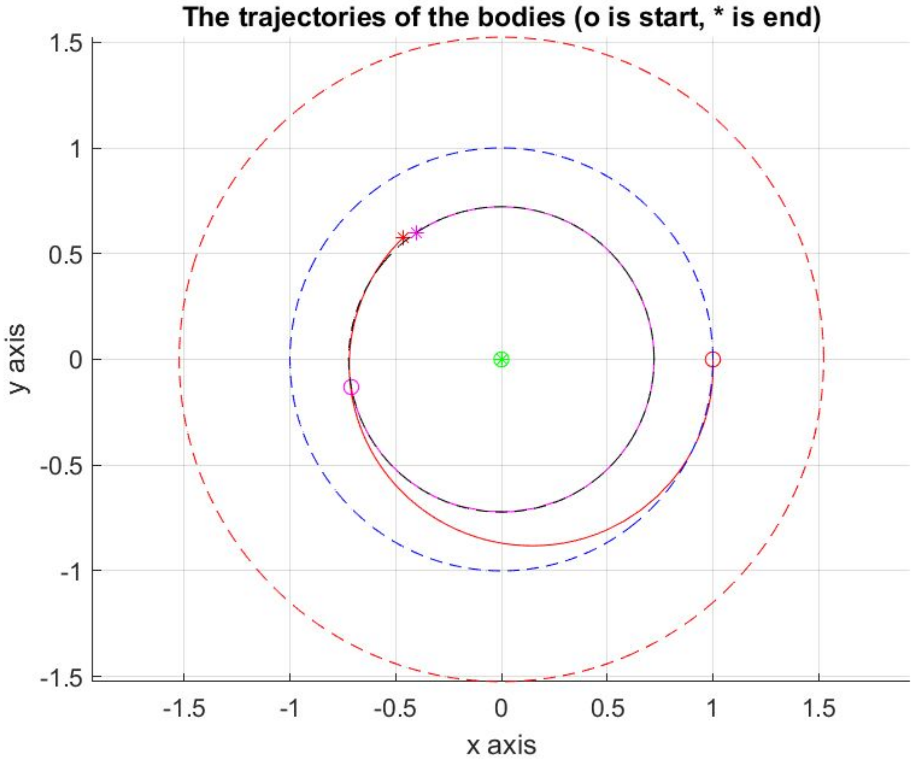


Tempo de processamento



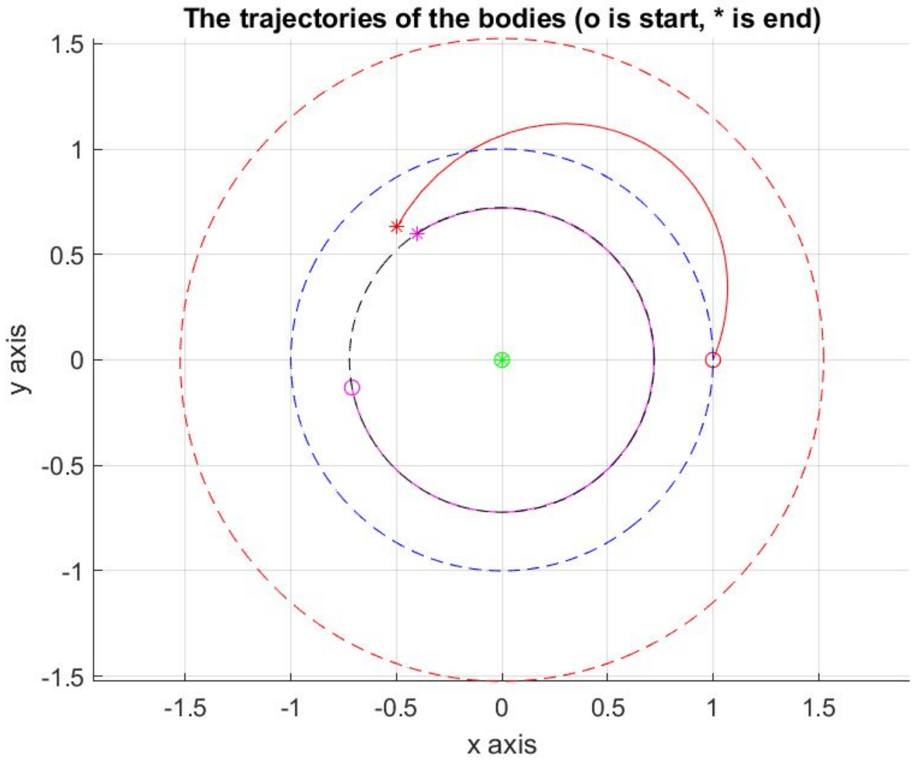


Variando angulação da velocidade inicial



(0° a 360°, passo 10°)

Variando módulo da velocidade inicial

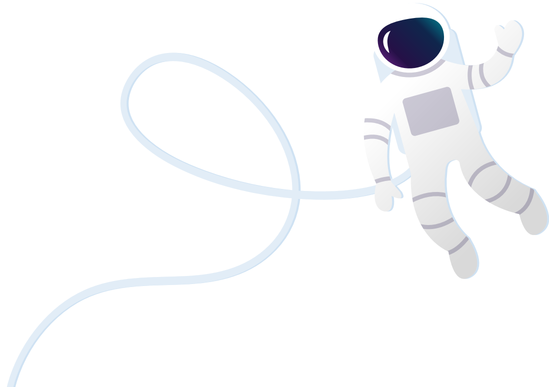


(0.75 a 1.25, passo 0.05)

Propostas para trabalhos futuros

O que podemos melhorar?

- Implementar cálculo analítico da matriz de variação para correção da estimativa de velocidade inicial
- Remodelar método shooting para corrigir outros erros, como, por exemplo, custo total
- Incrementar mais corpos (vale a pena?)



Obrigado!

Perguntas?