ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция 9

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

- Линейная и билинейная функции в линейном пространстве
- Матрица билинейной формы
- Квадратичная форма в линейном пространстве и ее матрица
- Преобразование матрицы квадратичной формы при замене базиса
- Канонический и нормальный вид квадратичной формы

19 апреля 2022 г.

1. Билинейные формы

Определение. *Билинейной формой* $B(\vec{x},\vec{y})$ на линейном пространстве L_n $(\dim L_n = n)$, называется отображение (функция) $B: L_n \times L_n \to \mathbb{R}$, сопоставляющее каждой паре векторов число, причём функция B – линейная по каждому из своих аргументов, т.е. $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in L_n$ и $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ выполняются равенства:

$$B(\alpha\vec{x} + \beta\vec{z},\vec{y}) = \alpha B(\vec{x},\vec{y}) + \beta B(\vec{z},\vec{y}),$$
$$B(\vec{x},\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha B(\vec{x},\vec{y}) + \beta B(\vec{x},\vec{z}).$$

Пример 1. Обычное скалярное произведение векторов пространства V_3 является билинейной формой: $B(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})$.

✓ Проверить самостоятельно

Пример 2. Функция $F(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ является билинейной формой на пространстве $C_{[a,b]}$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$.

✓ Проверить самостоятельно

Найдем выражение билинейной формы в координатах.

Рассмотрим базис в пространстве L_n: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ $\Rightarrow$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n, \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n \Rightarrow$$

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = B(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n) =$$

$$= B(x_1\vec{e}_1, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n) + B(x_2\vec{e}_2, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n) +$$

$$+ \cdots + B(x_n\vec{e}_n, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n) = B(x_1\vec{e}_1, y_1\vec{e}_1) +$$

$$+ B(x_1\vec{e}_1, y_2\vec{e}_2) + \cdots + B(x_1\vec{e}_1, y_n\vec{e}_n) + B(x_2\vec{e}_2, y_1\vec{e}_1) + B(x_2\vec{e}_2, y_2\vec{e}_2) +$$

$$+ \cdots + B(x_2\vec{e}_2, y_n\vec{e}_n) + \cdots + B(x_n\vec{e}_n, y_1\vec{e}_1) + B(x_n\vec{e}_n, y_2\vec{e}_2) +$$

$$+ \ldots + B(x_n\vec{e}_n, y_n\vec{e}_n) = \cdots = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j\, B\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right).$$

Обозначим $b_{ij} = B(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $i, j = 1, \ldots n$ – значения билинейной формы на всевозможных парах базисных векторов.

$b_{ij} = B\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right)$ – *коэффициенты билинейной формы* в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, B(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \Rightarrow$$

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \ \ x_2 \ldots \ x_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

где $b_{ij} = B(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$

Матрица $B = \{b_{ij}\} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей билинейной формы* в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 1. Если $B(\vec{x},\vec{y})$ – билинейная форма, то

$$B(\vec{x},\vec{y}) = (x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T BY = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x_i y_j \,,$$

где $b_{ij} = B(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\boxed{B(\vec{x},\vec{y}) = (x_1 \;\; x_2 \dots \;\; x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T BY}$$

векторно-матричная форма записи билинейной формы

$$B(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x_i y_j$$

координатная форма записи билинейной формы

Пример 3. Пусть $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{y} = -4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 \Rightarrow$ выражение билинейной формы $B(\vec{x},\vec{y})$ в координатах имеет вид:

$$B(\vec{x},\vec{y}) = B(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, -4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) =$$

$$= B(2\vec{e}_1, -4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) + B(3\vec{e}_2, -4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) =$$

$$= B(2\vec{e}_1, -4\vec{e}_1) + B(2\vec{e}_1, 5\vec{e}_2) + B(3\vec{e}_2, -4\vec{e}_1) + B(3\vec{e}_2, 5\vec{e}_2) =$$

$$= -8\underbrace{B(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}_{b_{11}} + 10\underbrace{B(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}_{b_{12}} - 12\underbrace{B(\vec{e}_2,\vec{e}_1)}_{b_{21}} + 15\underbrace{B(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}_{b_{22}} =$$

$$= -8b_{11} + 10b_{12} - 12b_{21} + 15b_{22}.$$

Аналогичный результат получим, используя векторно-матричную форму записи:

$$B(\vec{x},\vec{y}) = (2 \quad 3)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = (2b_{11}+3b_{21} \quad 2b_{12}+3b_{22})\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -4(2b_{11}+3b_{21}) + 5(2b_{12}+3b_{22}) = -8b_{11} + 10b_{12} - 12b_{21} + 15b_{22}.$$

Задача 1. Выписать матрицу билинейной формы:

$$B(\vec{x},\vec{y}) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + x_2y_2.$$

Решение. $b_{11} = 3,\ b_{12} = -2,\ b_{21} = 4,\ b_{22} = 1 \ \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B(\vec{x},\vec{y}) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица билинейной формы в трехмерном пространстве в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} B(\vec{e}_1,\vec{e}_1) & B(\vec{e}_1,\vec{e}_2) & B(\vec{e}_1,\vec{e}_3) \\ B(\vec{e}_2,\vec{e}_1) & B(\vec{e}_2,\vec{e}_2) & B(\vec{e}_2,\vec{e}_3) \\ B(\vec{e}_3,\vec{e}_1) & B(\vec{e}_3,\vec{e}_2) & B(\vec{e}_3,\vec{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B(\vec{x},\vec{y}) = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{13}x_1y_3 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2 + b_{23}x_2y_3 +$$
$$+b_{31}x_3y_1 + b_{32}x_3y_2 + b_{33}x_3y_3.$$

Теорема 2. При переходе от базиса S к базису S' матрица билинейной формы меняется по следующему правилу:

$$\boxed{B' = P^T BP}$$

где P – матрица перехода от базиса S к базису S', B – матрица билинейной формы в базисе S, B' – матрица билинейной формы в базисе S'.

► Пусть X и Y – столбцы координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в базисе S, а X'и Y' – столбцы координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в базисе S'.

Тогда $X = PX'$, $Y = PY'$, где P – матрица перехода от базиса S к базису S'.

$$B(\vec{x},\vec{y}) = X^T BY = (PX')^T B(PY') = X'^T(P^T BP)Y' = X'^T B'Y' \Rightarrow B' = P^T BP.$$

(используется формула $(AB)^T = B^T A^T$)◄

Определение. *Рангом* билинейной формы называется ранг ее матрицы в каком-либо базисе.

Следствие. Ранг билинейной формы не зависит от выбора базиса (это утверждение вытекает из формулы, приведенной в теореме 2, из обратимости матрицы перехода и того факта, что ранг матрицы не меняется при ее умножении справа и/или слева на обратимую матрицу).

Определение. Билинейная форма называется *вырожденной*, если её ранг меньше размерности пространства, и *невырожденной*, если её ранг равен размерности пространства.

Определение. Билинейная форма называется *симметричной*, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L_n$ выполняется равенство:

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x}).$$

Теорема 3. Билинейная форма симметричная тогда и только тогда, когда ее матрица симметричная.

► *Необходимость.* Если билинейная форма симметричная, то

$$B(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = B(\vec{e}_j, \vec{e}_i) \Rightarrow b_{ij} = b_{ji} \Rightarrow$$

матрица B билинейной формы симметричная.

Достаточность. Если матрица B билинейной формы симметричная ⇒

$$b_{ij} = b_{ji} \Rightarrow B^T = B \Rightarrow B(\vec{x},\vec{y}) = \underbrace{X^T BY}_{\text{число}} = (X^T BY)^T = (BY)^T X = Y^T B^T X =$$

$$= Y^T BX = B(\vec{y},\vec{x}) \Rightarrow B(\vec{x},\vec{y})$$ – симметричная билинейная форма. ◄

2. Квадратичные формы

Определение. Функция вида $\varphi(\vec{x}) = A(\vec{x},\vec{x})$, где $A(\vec{x},\vec{y})$ – симметричная билинейная форма, называется *квадратичной формой.*

Матрица квадратичной формы в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$:

$$A = \begin{pmatrix} A(\vec{e}_1,\vec{e}_1) & \dots & A(\vec{e}_1,\vec{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ A(\vec{e}_n,\vec{e}_1) & \dots & A(\vec{e}_n,\vec{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если $A(\vec{x},\vec{y})$ – симметричная билинейная форма ⇒ $A(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = A(\vec{e}_j,\vec{e}_i)$ ⇒

$a_{ij} = a_{ji}$ ⇒ A – симметричная матрица.

Если $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ⇒

$$\varphi(\vec{x}) = (x_1 \dots x_n)\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = X^T A X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\, x_j\,.$$

$$\boxed{\varphi(\vec{x}) = (x_1 \dots x_n)\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = X^T A X}$$

векторно-матричная форма записи квадратичной формы

$$\boxed{\varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\, x_j}$$

координатная форма записи квадратичной формы

В трехмерном пространстве в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ квадратичная форма имеет вид:

$$\varphi(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2\,.$$

Замечание. Выписывая матрицу квадратичной формы, необходимо учитывать, что коэффициенты при смешанных произведениях удваиваются.

Задача 2. Записать матрицу заданной квадратичной формы:

$$\varphi(\vec{x}) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 - 3x_3^2.$$

Решение.

$$\varphi(\vec{x}) = \underbrace{4}_{a_{11}} \cdot x_1^2 \underbrace{-2}_{2a_{12}} \cdot x_1x_2 + \underbrace{1}_{2a_{13}} \cdot x_1x_3 + \underbrace{1}_{a_{22}} \cdot x_2^2 \underbrace{-3}_{a_{33}} \cdot x_3^2 \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Записать матрицу квадратичной формы:

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_2x_3 + 7x_3^2.$$

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & -1{,}5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

матричная запись квадратичной формы:

$$\varphi(\vec{x}) = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & -1{,}5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Записать квадратичную форму по ее матрице в некотором базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 5x_2^2.$

Задача 5. В некотором базисе задана квадратичная форма:

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2.$$

Найти ее значение на векторе $\vec{a} = (1; 0; 1)$.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\varphi(\vec{a}) = (1\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\ \ -1\ \ -2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2.$$

3. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису

Теорема 4. Если A_1 – матрица квадратичной формы в базисе S_1, A_2 – матрица квадратичной формы в базисе S_2, P – матрица перехода от S_1 к S_2, тогда справедлива формула:

$$\boxed{\mathrm{A}_2 = P^T \mathrm{A}_1 P}$$

► Доказательство следует из теоремы 2 и определения квадратичной формы.◄

Задача 6. Пусть в базисе $S_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ квадратичная форма имеет вид:

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Найти матрицу квадратичной формы в базисе $S_2 = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, где $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода состоит из координат новых базисных векторов в старом базисе, записанных по столбцам:

$$P_{S_1 \to S_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица перехода} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A}_2 = P^T \mathrm{A}_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что в новом базисе матрица квадратичной формы имеет более простой диагональный вид.

4. Канонический и нормальный вид квадратичной формы

Определение. Две квадратичные формы называются *конгруэнтными* (*эквивалентными*), если существует невырожденное линейное преобразование, переводящее одну из них в другую.

Определение. *Рангом* (или *индексом инерции*) квадратичной формы называется ранг матрицы этой формы в каком-либо базисе.
Обозначение ранга квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$: r_φ, $r(\varphi)$ или rang $\varphi(\vec{x})$.

Определение. Квадратичная форма называется *вырожденной,* если ее ранг меньше размерности пространства L_n ($r(\varphi) < n$), и *невырожденной*, если ее ранг равен размерности пространства L_n: $r(\varphi) = n = \dim L_n$.

Задача 7. Найти ранг квадратичной формы $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 6x_1x_3$.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2.$$

Так как $\operatorname{rang} A < 3$, то данная квадратичная форма является вырожденной.

Задача 8. Показать, что квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ невырожденная, если

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 5x_2^2.$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -34 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 3.$$

Следовательно, квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ невырожденная.

Определение. Квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ называется *квадратичной формой канонического вида (канонической)*, если она в своей координатной записи не имеет попарных произведений переменных (все коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$):

$$\varphi(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 \ .$$

Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называют *канонический базисом*.

В каноническом базисе матрица квадратичной формы имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Каноническая форма называется *нормальной*, если ее коэффициенты a_{ii} принимают только значения $0, 1, -1$.

Нахождение по данной квадратичной форме конгруэнтной ей канонической квадратичной формы называется *приведением квадратичной формы к каноническому виду*.

Теорема 5. Любая квадратичная форма, заданная в конечномерном пространстве, может быть приведена к каноническому виду с помощью невырожденного линейного преобразования координат.

Теорема 6. Для любой вещественной квадратичной формы существует конгруэнтная ей нормальная квадратичная форма.

Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному виду. Метод Лагранжа

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду основан на процедуре выделении полного квадрата и состоит в последовательном выделении полных квадратов по каждой переменной.
Для освоения этого метода необходимо повторить следующие важные формулы сокращенного умножения:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$
$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$
$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что $B(\vec{x},\vec{y}) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt$ является билинейной формой, где $\vec{x} = x(t) \in C_{[a,b]}$, $\vec{y} = y(t) \in C_{[a,b]}$, $K(s,t)$ – некоторая функция двух переменных.

2. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана билинейная форма:

$$B(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Найти её матрицу в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, где $\vec{e}_1 = (1;1;1)$, $\vec{e}_2 = (1;1;-1)$, $\vec{e}_3 = (1;-1;-1)$.

3. В пространстве $\mathbb{R}^2$ задана билинейная форма:

$$B(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$$

в базисе $S = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. Найти ее матрицу в базисе $F = \{\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$, если $P_{S\to F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Спасибо за внимание!