

自然演繹法natural deduction

2019/03/29

等值性規則 Rules of Equivalence

雙重否定規則(DN規則)

張三邏輯考試及格(P)。

所以，並非張三邏輯考試不及格。

並非張三邏輯考試不及格。

所以，張三邏輯考試及格。

☐ 如果這二個語句用符號形式表述，就是：

$$\begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \hline \therefore \sim \sim \mathbf{P} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sim \sim \mathbf{P} \\ \hline \therefore \mathbf{P} \end{array}$$

P	$\sim P$	$\sim \sim P$	$P \rightarrow \sim \sim P$	$\sim \sim P \rightarrow P$
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T

$$\mathbf{P} \equiv \sim \sim \mathbf{P}$$

若非政府決策正確，國家就不會有穩固的經濟基礎。

政府決策正確 (**A**)，國家才能長治久安。

國家確實有穩固的經濟基礎 (**B**)。

所以，國家會長治久安 (**C**)。

▣ 根據論證中提示的符號，整個論證可翻譯為：

$$\sim A \rightarrow \sim B$$
$$A \rightarrow C$$
$$B$$
$$\therefore C$$

1. $\sim A \rightarrow \sim B$

P

2. $A \rightarrow C$

P

3. B

P

4. $\sim \sim B$

3 DN

5. $\sim \sim A$

1,4 MT

6. A

5 DN

7. C

2,6 MP

異質換位規則(**Contra**規則)

$$\mathbf{P \rightarrow Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P}$$

P	Q	P→Q	∼Q→∼P	(P→Q)→(∼Q→∼P)	(∼Q→∼P)→(P→Q)
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

若讀書用功，考試必然及格。

若考試不及格，則顯然是讀書不用功。

若美國攻打伊朗 (**A**)，則會引起回教國家反美情緒 (**B**)。

若以色列採睦鄰外交 (**C**)，中東和平就會燃起曙光 (**D**)。

要嘛不會引起回教國家反美情緒，要嘛以色列會採睦鄰外交。

若全球經濟蕭條 (**E**)，則「美國不攻打伊朗或中東和平會燃起曙光」就是一句假話。

所以，不會引起全球經濟蕭條。

▣ 根據論證中提示的符號，整個論證可翻譯為：

$$A \rightarrow B$$

$$C \rightarrow D$$

$$\sim B \vee C$$

$$E \rightarrow \sim(\sim A \vee D)$$

$$\therefore \sim E$$

1. $A \rightarrow B$

P

2. $C \rightarrow D$

P

3. $\sim B \vee C$

P

4. $E \rightarrow \sim (\sim A \vee D)$

P

5. $\sim B \rightarrow \sim A$

1 Contra

6. $\sim A \vee D$

2, 3, 5 CD

7. $\sim \sim (\sim A \vee D)$

6 DN

8. $\sim E$

4, 7 MT

蘊涵規則(Impl規則)

$$P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim P \vee Q)$	$(\sim P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

我只要用功讀書，就一定可以考上大學。

要嘛我沒有用功讀書，要嘛我一定可以考上大學。

要嘛我沒有用功讀書，要嘛我一定可以考上大學 (**B**)。

若我可以考上大學，就會擁有很好的學術基礎 (**C**)。

若我用心學習一技之長 (**D**)，就會擁有很好的就業基礎 (**E**)。

我若擁有好的學術基礎或好的就業基礎，未來人生的發展就會很順利。

我會用功讀書 (**A**) 或用心學習一技之長。

因此，我未來人生的發展會很順利 (**F**)。

回 我們根據論證中提示的符號，整個論證可翻譯為：

$$\sim A \vee B$$

$$B \rightarrow C$$

$$D \rightarrow E$$

$$(C \vee E) \rightarrow F$$

$$A \vee D$$

$$\therefore F$$

1. $\sim A \vee B$

2. $B \rightarrow C$

3. $D \rightarrow E$

4. $(C \vee E) \rightarrow F$

5. $A \vee D$

6. $A \rightarrow B$

7. $A \rightarrow C$

8. $C \vee E$

9. F

P

P

P

P

P

1 Impl

2,7 HS

3, 5, 7 CD

4, 8 MP

等冪規則(**Idemp**規則)

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{P} \vee \mathbf{P}$$

張三是大學生。 \equiv 「張三是大學生，而且，張三是大學生。」

張三是大學生。 \equiv 「張三是大學生，或者，張三是大學生。」

P	P·P	P ∨ P	P→P	P↔ P	P→(P·P)	(P·P)→P	P↔(P ∨ P)
T	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

要嘛張三愛阿花，要嘛阿花愛張三。

若阿花愛張三，張三就愛阿花。

所以，張三愛阿花。

▣ 若將「張三愛阿花」翻譯為**A**；把「阿花愛張三」翻譯為**B**。
則整個論證就可翻譯為：

A v B

B→A

/ ∴ A

1. $A \vee B$

2. $B \rightarrow A$

3. $\sim \sim A \vee B$

4. $\sim A \rightarrow B$

5. $\sim A \rightarrow A$

6. $\sim \sim A \vee A$

7. $A \vee A$

8. A

P

P

1.DN

3 Impl

2, 4 HS

5 Impl

6 DN

7 Idemp

常犯錯誤

1. $(A \cdot B) \rightarrow C$ **P**

2. $B \rightarrow C$ 1, **Simp** (錯誤的局部使用)

常犯錯誤

$(A \cdot B) \rightarrow C$

$\therefore B \rightarrow C$

A	B	C	$[(A \cdot B) \rightarrow C] \rightarrow (B \rightarrow C)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

分配規則(**Dist**規則)

$$\mathbf{P \vee (Q \cdot R) \equiv (P \vee Q) \cdot (P \vee R)}$$

$$\mathbf{P \cdot (Q \vee R) \equiv (P \cdot Q) \vee (P \cdot R)}$$

錢若不是張三偷的，就是李四和王五偷的。

錢是張三或李四偷的，而且，錢是張三或王五偷的。

P	Q	R	$P \vee (Q \cdot R)$	$(P \vee Q) \cdot (P \vee R)$	$[P \vee (Q \cdot R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \cdot (P \vee R)]$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

$$P \cdot (Q \vee R) \equiv (P \cdot Q) \vee (P \cdot R)$$

P	Q	R	$P \cdot (Q \vee R)$	$(P \cdot Q) \vee (P \cdot R)$	$[P \cdot (Q \vee R)] \leftrightarrow [(P \cdot Q) \vee (P \cdot R)]$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

若老師加以講解，張三和李四的期末考就會及格。

所以，若老師加以講解，李四的期末考就會及格。

▣ 若我們把「老師加以講解」翻譯為**A**；「張三期末考會及格」翻譯為**B**；把「李四的期末考會及格」翻譯為**C**。整個論證可翻譯為：

$$\begin{array}{l} A \rightarrow (B \cdot C) \\ \hline \therefore A \rightarrow C \end{array}$$

1. $A \rightarrow (B \cdot C)$

2. $\sim A \vee (B \cdot C)$

3. $(\sim A \vee B) \cdot (\sim A \vee C)$

4. $\sim A \vee C$

5. $A \rightarrow C$

P

1 Impl

2 Dist

3 Simp

4 Impl

張四妹已經考上大學(**A**)，而且，若張三順利就業(**B**)，張爸的負擔就減輕了(**C**)。

「張四妹考上大學且張三未順利就業」並非事實。

所以，要嘛張爸的負擔減輕，要嘛張媽準備退休(**D**)。

$$\begin{array}{l} \mathbf{A \cdot (B \rightarrow C)} \\ \mathbf{\sim (A \cdot \sim B)} \\ \hline \mathbf{\therefore C \vee D} \end{array}$$

1. $A \cdot (B \rightarrow C)$

2. $\sim (A \cdot \sim B)$

3. $A \cdot (\sim B \vee C)$

4. $(A \cdot \sim B) \vee (A \cdot C)$

5. $A \cdot C$

6. C

7. $C \vee D$

P

P

1 Impl

3 Dist

2, 4 DS

5 Simp

6 Add

移出移入規則(**IE**規則)

$$\mathbf{P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P \cdot Q) \rightarrow R}$$

假如大氣中水氣充沛，那麼，若溫度降到攝氏零度以下，就會下雪。

假如大氣中水氣充沛且溫度降到攝氏零度以下，那麼，就會下雪。

P	Q	R	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \cdot Q) \rightarrow R$	$[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow [(P \cdot Q) \rightarrow R]$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

當阿花和阿桃都修邏輯，則班上辯論隊的實力一定會提昇。

假如阿桃只要修邏輯，班上辯論隊的實力就會提昇，那麼，他們
就會參加校際比賽。

阿花的確修了邏輯。

所以，班上辯論隊會參加校際比賽。

$(A \cdot B) \rightarrow C$

A

$(B \rightarrow C) \rightarrow D$

$\therefore D$

1. $(A \cdot B) \rightarrow C$

2. A

3. $(B \rightarrow C) \rightarrow D$

4. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

5. $B \rightarrow C$

6. D

P

P

P

1 IE

2, 4 MP

3, 5 MP

交換規則(**Comm**規則)

$$\mathbf{P \vee Q \equiv Q \vee P}$$

$$\mathbf{P \cdot Q \equiv Q \cdot P}$$

張三或李四學過邏輯。

李四或張三學過邏輯。

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$	$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	F	T

交換規則(**Comm**規則)

張三學過邏輯，且李四也學過邏輯。

李四學過邏輯，且張三也學過邏輯。

P	Q	$P \cdot Q$	$Q \cdot P$	$(P \cdot Q) \leftrightarrow (Q \cdot P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	F	F	T

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$$

$$\therefore \mathbf{D}$$

1. $(B \cdot A) \rightarrow C$
2. A
3. $(B \rightarrow C) \rightarrow D$
4. $(A \cdot B) \rightarrow C$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
6. $B \rightarrow C$
7. D

P

P

P

1 Comm

4 IE

2, 5 MP

3, 6 MP

若老師會來監考，則要嘛張三會缺考，要嘛李四會不及格。
老師會來監考。

所以，若李四及格，則張三會缺考。

▣ 我們果把「老師會來監考」翻譯為**A**，把「張三會缺考」翻譯為**B**，把「李四會及格」翻譯為**C**，則整個論證就可以被翻譯為：

$$A \rightarrow (B \vee \sim C)$$

$$A$$

$$\therefore C \rightarrow B$$

1. $A \rightarrow (B \vee \sim C)$

P

2. A

P

3. $B \vee \sim C$

1, 2 MP

4. $\sim C \vee B$

3 Comm

5. $C \rightarrow B$

4 Impl

結合規則(Assoc規則)

$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$$

$$P \cdot (Q \cdot R) \equiv (P \cdot Q) \cdot R$$

P	Q	R	$P \vee (Q \vee R)$	$(P \vee Q) \vee R$	$[P \vee (Q \vee R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	T

P	Q	R	$P \cdot (Q \cdot R)$	$(P \cdot Q) \cdot R$	$[P \cdot (Q \cdot R)] \leftrightarrow [(P \cdot Q) \cdot R]$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

如果張三來考期中考且李四和王五都來考期中考，那麼，全班都會及格。

張三和李四考了期中考。

若全班及格或王五沒來考期中考，則要嘛校長高興，要嘛老師或家長會高興。

其實並不是校長或老師高興。

所以，那是家長會高興。

$$[A \cdot (B \cdot C)] \rightarrow D$$

$$A \cdot B$$

$$[(D \vee \sim C)] \rightarrow [E \vee (F \vee G)]$$

$$\sim (E \vee F)$$

$$\therefore G$$

1. $[A \cdot (B \cdot C)] \rightarrow D$	P
2. $A \cdot B$	P
3. $[(D \vee \sim C)] \rightarrow [E \vee (F \vee G)]$	P
4. $\sim(E \vee F)$	P
5. $[(A \cdot B) \cdot C] \rightarrow D$	1 Assoc
6. $(A \cdot B) \rightarrow (C \rightarrow D)$	5 IE
7. $C \rightarrow D$	2,6 MP
8. $\sim C \vee D$	7 Impl
9. $D \vee \sim C$	8 Comm
10. $E \vee (F \vee G)$	3, 9 MP
11. $(E \vee F) \vee G$	10 Assoc
12. G	4, 11 DS

等值規則(**Equiv**規則)

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \cdot (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \cdot Q) \vee (\sim P \cdot \sim Q)$$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \cdot (Q \rightarrow P)$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \cdot (Q \rightarrow P)]$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \cdot Q) \vee (\sim P \cdot \sim Q)$$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$(P \cdot Q) \vee (\sim P \cdot \sim Q)$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \cdot Q) \vee (\sim P \cdot \sim Q)]$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

龍兄虎弟考上大學一直都是劉媽期盼的願望。
劉媽期盼的願望也就是劉爸期盼的願望。
如今，龍兄已考上大學。
所以，虎弟考上大學就是劉爸期盼的願望。

$$(A \cdot B) \leftrightarrow C$$

$$C \leftrightarrow D$$

$$A$$

$$\therefore B \leftrightarrow D$$

1. $(A \cdot B) \leftrightarrow C$

P

2. $C \leftrightarrow D$

P

3. A

P

4. $[(A \cdot B) \rightarrow C] \cdot [C \rightarrow (A \cdot B)]$

1 Equiv

5. $(A \cdot B) \rightarrow C$

4 Simp

6. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

5 IE

7. $B \rightarrow C$

3, 6. MP

8. $(C \rightarrow D) \cdot (D \rightarrow C)$

2 Equiv

9. $C \rightarrow D$

8 Simp

10. $B \rightarrow D$

7, 9 HS

11. $C \rightarrow (A \cdot B)$

12. $\sim C \vee (A \cdot B)$

13. $(\sim C \vee A) \cdot (\sim C \vee B)$

14. $\sim C \vee B$

15. $C \rightarrow B$

16. $D \rightarrow C$

17. $D \rightarrow B$

18. $(B \rightarrow D) \cdot (D \rightarrow B)$

19. $B \leftrightarrow D$

4 Simp

11 Impl

12 Dist

13 Simp

14 Impl

8 Simp

15, 16 HS

10, 17 Conj

18 Equiv

德摩根規則(DeM規則)

$$\sim(P \cdot Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \cdot \sim Q$$

P	Q	$\sim(P \cdot Q)$	$\sim P \vee \sim Q$	$\sim(P \cdot Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

P	Q	$\sim(P \vee Q)$	$\sim P \cdot \sim Q$	$\sim(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \cdot \sim Q)$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

若是情報提供錯誤(A)，就會引發美、伊戰爭(B)。

若原油供應短缺(C)，就會導致美國經濟衰退(D)。

若美、伊發生戰爭或美國經濟衰退，都會引發全球經濟蕭條(E)。

事實上，目前並沒有發生全球經濟蕭條。

所以，並非情報提供錯誤或原油供應短缺。

$$\mathbf{A \rightarrow B}$$

$$\mathbf{C \rightarrow D}$$

$$\mathbf{(B \vee D) \rightarrow E}$$

$$\mathbf{\sim E}$$

$$\mathbf{/ \therefore \sim (A \vee C)}$$

1. $A \rightarrow B$	P
2. $C \rightarrow D$	P
3. $(B \vee D) \rightarrow E$	P
4. $\sim E$	P
5. $\sim (B \vee D)$	3, 4 MT
6. $\sim B \cdot \sim D$	5 DeM
7. $\sim B$	6 Simp
8. $\sim D$	6 Simp
9. $\sim A$	1, 7 MT
10. $\sim C$	2, 8 MT
11. $\sim A \cdot \sim C$	9, 10 Conj
12. $\sim (A \vee C)$	11 DeM

7. $\sim B$

8. $\sim D$

9. $\sim A$

10. $\sim C$

11. $\sim A \cdot \sim C$

12. $\sim (A \vee C)$

6 Simp

6 Simp

1, 7 MT

2, 8 MT

9, 10 Conj

11 DeM

間接證法(IP規則)

若總統被罷免(A)，則由副總統繼任總統(B)。

要嘛總統被罷免，要嘛副總統會繼任總統。

因此，副總統會繼任總統。

▣ 根據論證中提示的符號，整個論證可翻譯為：

$A \rightarrow B$

$A \vee B$

$\therefore B$

1. $A \rightarrow B$

2. $A \vee B$

3. $\sim B$

4. $\sim A$

5. B

6. $B \cdot \sim B$

7. $\sim \sim B$

8. B

P

P

AP

1, 3, MT

2, 4, DS

3, 5 Conj

3—6, IP

7, DN

間接證法(IP規則)

- 一、當出現因為要使用「間接證法」的推論而有的假設性前提時，就記得要用向右退縮的方式表示出來。以示其與使用「直接證法」間的區別。
- 二、當推導到任何形式的矛盾之後，表示「間接證法」已經接近完成，下一行要對假設性前提進行否定時，要記得行號的標示位置要向左移回原來正常的表示位置，以顯示我們已經完成了「間接證法」的推論程序。
- 三、如果向右退縮的整個推論行列還沒有回到原有非假設性正常的位置，就表示我們還沒有完成整個推論程序。

1. $A \rightarrow B$

2. $A \vee B$

3. $\sim \sim A \vee B$

4. $\sim A \rightarrow B$

5. $\sim B \rightarrow \sim \sim A$

6. $\sim B \rightarrow A$

7. $\sim B \rightarrow B$

8. $\sim \sim B \vee B$

9. $B \vee B$

10. B

P

P

2, DN

3, Impl

4, Contra

5, DN

1,6, HS

7, Impl

8, DN

9, Idemp

條件證法(CP規則)

- 一、當一個論證的結論出現「條件語句」的相關形式時，我們可以把該「條件語句」的「前件」當作我們推導程序中的假設性前提，加入我們推導的行列。
- 二、如果因為加入這個假設性前提，而能推導出結論之「條件語句」的「後件」時，就等於說明，假如這個「條件語句」的「前件」成立，其「後件」也必然伴隨成立。這等於就宣告該「條件語句」是成立的。
- 三、此時，我們就可以合理的宣告，該「條件語句」是可以被推導而成立的。

如果總統被罷免，則當副總統也不能繼任時，就由行政院長繼任總統。

如今，行政院長並未繼任總統。

所以，若總統被罷免，就沒有副總統不能繼任的情事。

▣ 假如我們將「總統被罷免」翻譯為A，將「副總統繼任總統」翻譯為B，將「行政院長繼任總統」翻譯為C，則上述論證就可以被翻譯為：

$$\begin{array}{c} A \rightarrow (\sim B \rightarrow C) \\ \sim C \\ \hline \therefore A \rightarrow \sim \sim B \end{array}$$

1. $A \rightarrow (\sim B \rightarrow C)$

P

2. $\sim C$

P

3. A

AP

4. $\sim B \rightarrow C$

1, 3, MP

5. $\sim \sim B$

2, 4, MT

6. $A \rightarrow \sim \sim B$

3–5, CP

條件證法(CP規則)

- 一、「條件證法」和「間接證法」一樣，都會使用到假設性的前提。但是切記，和使用「間接證法」一樣，當有假設性前提出現時，其推論行號就必須向右退縮。以便於跟使用「直接證法」的程序區隔。
- 二、當使用「條件證法」的推論程序中，可以推導出所需「條件語句」的「後件」時，就等於宣告，當加入「條件語句」的「前件」成為假設性前提後，就必然可以支持「後件」的成立。基本上，這就等於宣告「條件證法」的完成。
- 三、所以，緊接著我們就可以像上述推論的第6行一般，宣告我們是從第3行一直推論到第5行，使用「條件證法」(CP)來支持 $A \rightarrow \sim \sim B$ 這個結論的「條件語句」。當然，也別忘了，要退回原來的推論行列位置，已宣告「條件證法」的完成。