述詞邏輯

2019/05/17

述詞邏輯(Predicate Logic)

- 語句邏輯:以一整個原子語句為翻譯單元的符號邏輯表述系統。
- 述詞邏輯:以「詞」(term)為翻譯單元的 符號邏輯表述系統。

為何必須學述詞邏輯?

- 所有人都會死。
- 亞理士多德是人。
- 所以,亞理士多德都會死。
- A
- B
- / ∴ C

述詞邏輯的翻譯

- 性質常元:以一大寫英文字母表示
- Px:x是臺大學生
- 個體常元:以一小寫英文字母表示
- a:張三 ;Pa:張三是臺大學生
- 個體變元:以一小寫斜體英文字母表示
- Px:x是臺大學生;x就個體變元

量的表述

- 全稱的量(universal)
- \blacksquare $\forall x Px$
- 特稱的量(Particular)
- $\exists x \ Px$

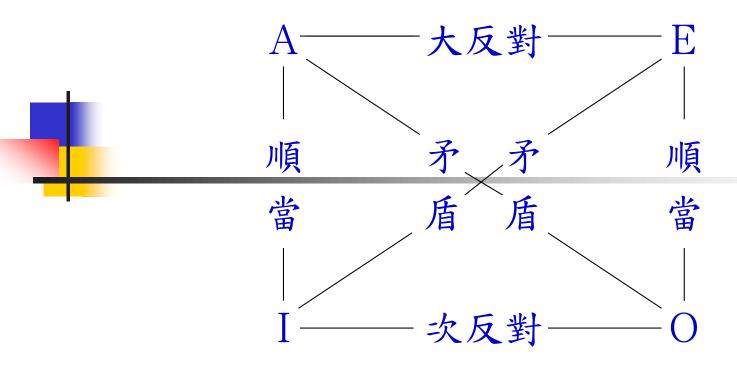
- 張三是學生。
- a: 張三
- Sx : x 是學生。
- Sa

- 有些人主張台灣獨立。
- P*x* : *x*是人
- Dx:x主張台灣獨立。
- $\exists x (Px \cdot Dx)$

- 所有的人都是愛國的。
- P*x* : *x*是人
- L*x* : *x*是愛國的。
- $\blacksquare \forall x (Px \rightarrow Lx)$

- ■有些人不是爱炫的。
- P*x* : *x*是人
- \blacksquare Bx : x是愛炫的
- $\blacksquare \exists x (Px \sim Bx)$

- ■並不是所有人都是愛炫的。
- $\sim \forall x (Px \rightarrow Bx)$

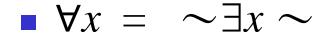




$$\sim$$
A=O; \sim O=A; \sim E=I; \sim I=E

- $\bullet \quad I : \sim A = O \quad \sim \forall x \ (Sx \rightarrow Px) = \exists x \ (Sx \sim Px)$
- II: \sim O=A $\sim \exists x (Sx \sim Px) = \forall x (Sx \rightarrow Px)$
- III: \sim E=I $\sim \forall x (Sx \rightarrow \sim Px) = \exists x (Sx \cdot Px)$
- IV: \sim I=E $\sim \exists x (Sx \cdot Px) = \forall x (Sx \rightarrow \sim Px)$

- ■「並非所有的台灣人都是勤奮的」=「有些台灣人不是勤奮的」
- $\bullet \bigcirc \bigcirc = A \qquad \sim \exists x \ (Sx \cdot \sim Px) = \forall x \ (Sx \rightarrow Px)$
- 「並非有些台灣人不是勤奮的」 = 「所有的台灣人都是勤奮的」
- ■「並非沒有台灣人是勤奮的」 =「有些台灣人是勤奮的」
- \sim I= E $\sim \exists x \ (Sx \cdot Px) = \forall x \ (Sx \rightarrow \sim Px)$
- ■「並非有些台灣人是勤奮的」 =「沒有台灣人是勤奮的」



■ 及

$$\exists x = \sim \forall x \sim$$

$$\sim \forall x = \exists x \sim$$

■ 及

$$\bullet I : \sim A = O \qquad \sim \forall x \ (Sx \rightarrow Px) = \exists x \ (Sx \sim Px)$$

■ 1. $\sim \forall x (Sx \rightarrow Px)$

P $/: \exists x (Sx \sim Px)$

 \blacksquare 2. $\exists x \sim (Sx \rightarrow Px)$

1 QN

 \blacksquare 3. $\exists x \sim (\sim Sx \vee Px)$

- 2 Impl
- 4. $\exists x (\sim \sim Sx \cdot \sim Px)$ 3 DeM
- 5. $\exists x (Sx \cdot \sim Px)$

4 DN

■ 1. $\exists x \ (Sx \sim Px)$

- $P / : \sim \forall x (Sx \rightarrow Px)$
- $2. \sim \forall x \sim (Sx \sim Px)$
- 1 QN
- 3. $\sim \forall x \ (\sim Sx \ v \sim \sim Px)$ 2 DeM.
- 4. $\sim \forall x \ (\sim Sx \ V \ Px)$

3 DN.

■ 5. $\sim \forall x \ (Sx \rightarrow Px)$

4 Impl.

- III: \sim E=I $\sim \forall x (Sx \rightarrow \sim Px) = \exists x (Sx \cdot Px)$

$$\blacksquare$$
 /:. $\sim \forall x \ (Sx \rightarrow \sim Px) \leftrightarrow \exists x \ (Sx \cdot Px)$

- $\blacksquare 1. \sim \forall x \ (Sx \rightarrow \sim Px)$
 - 2. $\exists x \sim (Sx \rightarrow \sim Px)$
- $\blacksquare 3. \exists x \sim (\sim Sx \ v \sim Px)$
- $\bullet 4. \ \exists x \sim \sim (Sx \cdot Px)$
- $\exists x \ (Sx \cdot Px)$
- $\bullet 6. \sim \forall x (Sx \rightarrow \sim Px) \rightarrow \exists x (Sx \cdot Px)$

- AP
- 1, QN
- 2, Impl
- 3, DeM.
- 4, DN
- 1-5, CP



- 7. $\exists x \ (Sx \cdot Px)$
- \bullet 8. $\sim \forall x \sim (Sx \cdot Px)$
- $\qquad 9. \quad \sim \forall x \ (\sim Sx \ V \sim Px)$
- 10. $\sim \forall x \ (Sx \rightarrow \sim Px)$
- 11. $\exists x (Sx \cdot Px) \rightarrow \sim \forall x (Sx \rightarrow \sim Px)$
- 12. $\{ \sim \forall x (Sx \rightarrow \sim Px) \rightarrow \exists x (Sx \cdot Px) \}$ · $\{ \exists x (Sx \cdot Px) \rightarrow \sim \forall x (Sx \rightarrow \sim Px) \}$
- 13. $\sim \forall x \ (Sx \rightarrow \sim Px) \leftrightarrow \exists x \ (Sx \cdot Px)$

AP

6, QN

7, DeM.

8, Impl

7-11, CP

6,11,conj

12, Equiv



n $\exists x \ Sx$ P

n+1 $\exists x Px$

n+2 $\exists x$ ($Sx \cdot Px$) n, n+1 , Conj (這是錯誤的示範)



 $\blacksquare \quad \text{n.} \quad \forall x \, \mathbf{A}x \to \forall x \, \mathbf{B}x \qquad \mathbf{F}$

 $n+1. \ \forall x \ Bx \rightarrow \forall x \ Cx$

 $n+2. \ \forall x \ Ax \rightarrow \forall x \ Cx \qquad n, n+1, HS$

(這是合法的使用)



 $A \rightarrow B$

n+1. $B \rightarrow C$

n+2. $A \rightarrow C$

n, n+1, HS



 $\exists x \ Sx$

 $\mathbf{S}\mathbf{x}$

n+1 $\exists x$ Px

P

 $n+2 \exists x (Sx \cdot Px)$

n, n+1, Conj

(這是錯誤的示範)



 \mathbf{n}

S

P

n+1

P

P

n+2

 $S \cdot P$

n, n+1, Conj



$$\exists x \ Sx$$

$$n+1$$
 $\exists x Px$

$$n+2 \exists x \ Sx \cdot \exists x \ Px$$
 $n, n+1$, Conj

(這是正確的使用)



所有存有物都是會變的。

◆如果我們將Cx界定為「x是會變的」,那麼,這個語句就可以被翻譯為:

 $\blacksquare \forall x \ \mathbf{C}x$



n

 $\forall x \ \mathbf{C}x$

P

n+1

Ca

n, UI

 \blacksquare n

 $\forall x \ \mathbf{C}x$

P

-n+1

Cb

n, UI

n

 $\forall x \ Cx$

P

-n+1

Cd

n, UI

- 所有的人都是會死的。
- ■蘇格拉底是人。
- ■所以,蘇格拉底是會死的。
- ◆如果我們將Px界定為「x是人」,將Mx界定為「x是會死的」,並以常元a來代表「蘇格拉底」。如此一來,上述論證就可以使用述詞邏輯符號的形式來表示:
 - - Pa
 - /∴ Ma



- $\blacksquare 1. \ \forall x \ (Px \to Mx) \qquad P$
- **2.** Pa
- $\bullet \quad 3. \quad Pa \rightarrow Ma \qquad \qquad 1, UI$
- 4. Ma 2, 3, MP



- n Cb
- \bullet n+1 $\forall x \ \mathbf{C}x$

- n, UG
- ◆我們就以一個實際的論證來加以說明「全稱普遍化規則」(UG規則)的使用。請看下面這個論證:
- 所有的貓都是動物。
- 所有的動物都是生物。
- 因此,所有的貓都是生物。



$$\forall x \ (\mathbf{C}x \to \mathbf{A}x)$$

$$\forall x \ (\mathbf{A}x \to \mathbf{L}x)$$

$$/$$
:. $\forall x \ (Cx \rightarrow Lx)$

- ◆這個論證可以從前提運用「假言三段論」(HS規則)來推導出結論,但是,別忘記先前曾說過的限制:
- $\blacksquare \qquad 1. \ \forall x \ (\mathbf{C}x \to \mathbf{A}x) \qquad \mathbf{P}$
- 2. $\forall x \ (\mathbf{A}x \to \mathbf{L}x)$ P
- 3. $\forall x (Cx \rightarrow Lx)$ 1, 2, HS (這是錯誤示範)



1.
$$\forall x (Cx \rightarrow Ax)$$

2. $\forall x \ (Ax \rightarrow Lx)$

 $\mathbf{3.} \quad \mathbf{Ca} \to \mathbf{Aa}$

 $\bullet \quad \mathbf{4.} \quad \mathbf{Aa} \to \mathbf{La}$

 $\bullet \qquad \mathbf{5.} \quad \mathbf{Ca} \rightarrow \mathbf{La}$

 $\bullet \quad \forall x \ (\mathbf{C}x \to \mathbf{L}x)$

P

P

1, UI

2, UI

3,4, HS

5, UG



- 一、未曾出現在論證推衍的前提之中;
- 二、不是從「存在特例化規則」(EI規則)所 推衍而來。

- 4是偶數。
- 所有的偶數都是可以被2整除的。
- 所以,所有的數都是可以被2整除的。
 - Ea
 - - \blacksquare / \therefore $\forall x \mathbf{D} x$



1. Ea

2. $\forall x \ (\mathbf{E}x \to \mathbf{D}x)$

 $\blacksquare \quad \mathbf{3.} \quad \mathbf{Ea} \to \mathbf{Da}$

• 4. Da

 \bullet 5. $\forall x Dx$

P

P

2, UI

1,3, MP

4, UG (這是錯誤使用)

- 若用功讀書,考試就會及格。
- 因此,若用功讀書且資質良好,考試就一定會 及格。

全稱普遍化規則(UG規則)



1.
$$\forall x \ (\mathbf{A}x \to \mathbf{C}x)$$

$$\mathbf{3.} \ \mathbf{Aa} \rightarrow \mathbf{Ca}$$

■ 6.
$$(Aa \cdot Ba) \rightarrow Ca$$

全稱普遍化規則(UG規則)



- $\blacksquare \quad \boxed{1. \ \forall x \ (\mathbf{A}x \to \mathbf{C}x)}$
- \blacksquare 2. Aa \rightarrow Ca
- 3. ~Aa V Ca
- 4. ~Ba V (~Aa V Ca)
- 5. (~Ba V ~Aa) V Ca
- 6. (~Aa V ~Ba) V Ca
- 7. ~(Aa·Ba) V Ca
- 8. $(Aa \cdot Ba) \rightarrow Ca$
- 9. $\forall x [(Ax \cdot Bx) \rightarrow Cx]$

P

1, UI

2, Impl

3, Add

4, Assoc

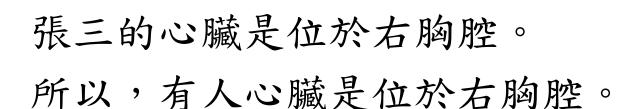
5, Comm

6, DeM

7, Impl

6, UG

存在普遍化規則(EG規則)



- Ra
- \blacksquare / \therefore $\exists x \mathbf{R} x$

存在普遍化規則(EG規則)



- **1.** Ra
- \blacksquare 2. $\exists x \ \mathbf{R}x$

- $\blacksquare 1. Ra \rightarrow La$
- \blacksquare 2. $\exists x \ \mathbf{R}x \to \mathbf{L}a$

P

1, EG

P

1, EG

(這是錯誤的局部使用)

存在普遍化規則(EG規則)



- 若鄧麗君會飛,則她就會長生不老。
- 因此,若有東西會飛,則鄧麗君會長生不老。
- 1. $Ra \rightarrow La$

P

2. $\exists x \ (\mathbf{R}x \to \mathbf{L}x)$

1, EG



- $\exists x \ \mathbf{E} x$
- 4是偶數。
 - 或
- 6是偶數。



- **Ec**
- 或
- Ed
- ◇ 因此,所謂「存在特例化規則」(EI規則),它的表述方式 就會如下所示:
 - 1. $\exists x \ \mathbf{E} x$
 - 2. Ec 1, EI

- ◆ 對存在命題使用「存在特例化規則」(EI規則)時,其特例常元的使用必須是初次使用
- 、使用EI所選用的特例常元必須未曾在前提中 出現過。
- 二、在使用EI規則那一推論行列之前的任一行列,若有因使用UI或EI規則而已經使用過的特例常元,不得在心使用的EI規則那一推論行列再度被使用。

- 有些學生要嘛不用功、要嘛資質差。 張三這個學生很用功。
 - 所以,張三這個學生資質差。
 - $\exists x \left[Sx \cdot (\sim Hx \ v \ Tx) \right]$
 - Sa·Ha
 - /∴ Ta



- 1. $\exists x [Sx \cdot (\sim Hx \ vTx)]$
- 2. Sa·Ha
- 3. Sa·(~Ha vTa)
- **4.** ∼Ha vTa
- 5. Ha
- 6. ~~Ha
- **7.** Ta

P

P

1, EI

(本行是錯誤推論)

3, Simp

2, Simp

5, DN

4, 6, DS



1.	$\forall x$	$(\mathbf{M}x)$	\longrightarrow	$\mathbf{B}x$
	• • •	(=,===		

2. $\exists x \sim Bx$

3. $Ma \rightarrow Ba$

4. ∼**Ba**

5. ∼Ma

6. $\exists x \sim Mx$

P

P

1, UI

2, EI

(此為錯誤運用EI規則)

3, 4, MT

5, EG



1. $\forall x \ (\mathbf{M}x \to \mathbf{B}x)$

$$2. \exists x \sim Bx$$

$$\bullet \quad 4. \ \mathbf{Ma} \rightarrow \mathbf{Ba}$$

$$\bullet \quad \mathbf{6.} \ \exists x \ \sim \mathbf{M}x$$

P

P

2, EI

1, UI

3, 4, MT

5, EG

- 一元述詞:指表述性質常元的符號陳述中, 只提及一個變元或常元,例如:
- a是「張三」,Sx表示「x是學生」。
- Sa 就表示 「張三是學生」
- ■∃x Sx 就表示「有些學生存在」
- $\forall x Sx$ 就表示「所有的學生」

- 描述物類間的關係狀態,諸如甲比乙高、媽媽疼愛 兒子、張三是李四的學生等的描述,就無法只以一 元述詞來表述,必須進一步學習二元、甚至三元述 詞,這就是所謂的關係述詞。例如:
- 張三比李四高。
- 界定a是「張三」,b是「李四」,Hxy為「x比y高」
- Hab

- ■又例如:劉教授教導陳玲學習哲學。
- 界定a為「劉教授」,b為「陳玲」,c為 「哲學」,Txyz為「x教y學習z」。
- Tabc

- ■翻譯練習
- 界定Fx為「x是大一學生」,Sx為「x是大二學生」,Kxy為「x認識y」
- 有些大二學生認識部分的大一學生。
- $\exists x \ [Sx \cdot \exists y (Fy \cdot Kxy)]$
- 有些大二學生認識所有的大一學生。
- $\exists x \ [Sx \cdot \forall y (Fy \rightarrow Kxy)]$

- 界定Fx為「x是大一學生」,Sx為「x是大二學生」,Kxy為「x認識y」
- 所有的大一學生都認識所有的大二學生。
- 所有的大二學生都認識一些大一學生。
- $\forall x [Sx \rightarrow \exists y (Fy \cdot Kxy)]$

- ■論證證明
- $\blacksquare \forall x \forall y \ Lxy$
- $\exists x \ \forall y \ (Lxy \rightarrow Gxy)$
- / :: $\exists x \forall y Gxy$

- \blacksquare 1. $\forall x \ \forall y \ Lxy$
- $2. \exists x \ \forall y \ (Lxy \rightarrow Gxy)$
- 3. $\forall y \text{ (Lay} \rightarrow \text{Gay)}$
- 4. Lab→Gab
- 5. ∀y Lay
- 6. Lab
- 7. Gab
- 8. ∀*y* Gay
- 9. $\exists x \ \forall y \ Gxy$

P

 $P / \therefore \exists x \forall y Gxy$

2, EI

3, UI

1, UI

5, UI

4, 6, MP

7, UG

8, EG

同一的表述

- 金庸撰述天龍八部。
- 金庸就是查良鏞。
- 因此,正是查良鏞撰述天龍八部。
- 設a為金庸,b為查良鏞,c為天龍八部, Wxy表示x撰述y。
- Wac
- a = b
- /∴ Wbc

同一規則

- 同一規則rule of identity, 簡稱ID
- 1. ...a...
- 2. a=b /∴ ...b...
- 亦可表述為:
- 1. ...a...
- 2. b=a /∴ ...b...
- ■這是同一表述的對稱特性。

同一規則

- 若陳火圓是台南人,則他是台灣人。
- 陳火圓就是陳大頭。
- 陳大頭不是台灣人。
- 所以,陳火圓不是台南人。
- 設a為陳火圓;b為陳大頭;Nx指x為台南人; Tx指x為台灣人
- Na→Ta
- a=b
- \sim Tb
- /∴ ~Na

同一規則

- 1. Na→Ta
- 2. a=b
- 3. ~Tb
- 4. ~Ta
- 5. ~Na

- P
- P
- P
- 2, 3 ID
- 1, 4 MT #

/∴ ~Na

同一反身規則

- ■介紹同一表述之後,為了系統的完備, 必須引進同一反身規則(rule of identity reflexivity),簡稱IR規則。=
- n.
- \blacksquare n+1. $\forall x \ x=x$ IR
- n+2.
- IR規則大部分情況下用不到,但少數特 例會用到。

同一反身規則

- 推論實例
- 1. $\forall x [(x=a) \rightarrow Fx]$
- \blacksquare 2. (a=a) \rightarrow Fa
- 3. ∀*x x*=*x*
- 4. a=a
- 5. Fa

P / ... Fa

1 UI

IR

3 UI

2, 4 MP #

至少

- 有了同一的表述之後,就能夠述詞邏輯符號精確表達日常語言中至少、至多、恰好等用語。
- 首先,來瞭解「至少」的表述
- 假定Sx表示x是學生
- 至少有一個學生
- $\exists x Sx$

至少

- 至少有二個學生
- $\blacksquare \exists x \exists y [(Sx \cdot Sy) \cdot (x \neq y)]$
- $\exists x \exists y [(Sx \cdot Sy) \cdot \sim (x = y)]$
- 至少有三個學生
- $\exists x \exists y \exists z \{ [(Sx \cdot Sy) \cdot Sz] \cdot \{ [(x \neq y) \cdot (x \neq z)] \cdot (y \neq z) \} \}$
- 依此類推

至多

- 至多一個學生
- 至多二個學生
- 依此類推

恰好

- 恰好只有一個學生
- $\exists x \{Sx \cdot \forall y [Sy \rightarrow (y=x)]\}$
- 恰好只有二個學生
- $\exists x \exists y \{ [(Sx \cdot Sy) \cdot (x \neq y)] \cdot \forall z \{ Sz \rightarrow [(z = x)v(z = y)] \}$
- 依此類推

只有(only);除了...每個

- 邏輯班上學生只有張三考試及格。
- 設a爲張三;Lx指x爲邏輯班上學生;Px 指x考試及格。
- (Pa · La) · $\forall x \{[Lx \cdot (x \neq a)] \rightarrow \sim Px\}$
- 邏輯班上學生除了張三以外都考試及格。
- $(\sim Pa\cdot La) \cdot \forall x \{ [Lx\cdot (x\neq a)] \rightarrow Px \}$

■ 1.
$$\exists y \forall x (Sx \rightarrow Py)$$

■ 1.
$$\exists y \forall x (Sx \rightarrow Py)$$
 P $\angle :\exists x Sx \rightarrow \exists x Px$

$$2. \sim (\exists x \ Sx \rightarrow \exists x \ Px)$$
 AP

$$3. \sim (\sim \exists x \text{ S} x \text{ v } \exists x \text{ P} x)$$
 2 Impl

$$\bullet 4. \sim \neg \exists x \, Sx \sim \exists x \, Px \qquad 3 \, DeM$$

■ 5.
$$\sim \exists x \ Px$$
 4 Simp

$$\bullet 6. \ \forall x \sim Px \qquad 5 \ QN$$

- $8. \sim \sim \exists x \ Sx$
- \blacksquare 9. $\exists x Sx$
- **10. Sa**
- 11. Sa→Pb
- 12. Pb
- 13. ~Pb
- 14. Pb·~Pb
- 15. $\exists x \ Sx \rightarrow \exists x \ Px$

- 4 Simp
- 8 DN
- 9 EI
- 7 UI
- 10, 11 MP
- 6 UI
- 12, 13 Conj
 - 2—14 IP

- 有些習題是任何老師都無法解出的。
- 任何習題,只要有學生能夠解出,必定有老師能夠 解出。
- 因此,有些習題是任何學生都無法解出。
- 設Ex:x是習題;Tx:x是老師;Px:x是學生
- Sxy: x能解出y
- $\exists x \left[Ex \cdot \forall y \left(Ty \rightarrow \sim Syx \right) \right]$
- / ∴ $\exists x [Ex \cdot \forall y (Py \rightarrow \sim Syx)]$

- 1. $\exists x [Ex \cdot \forall y (Ty \rightarrow \sim Syx)]$
- 2. $\forall x \{ [Ex : \exists y (Py : Syx)] \rightarrow \exists z (Tz : Szx) \} P$

P

■ 課堂練習