射影幾何と代数

@yfbk271_chigu

1　パッポスの定理

ユークリッド幾何学において，**Euclid 平面 (affine 2-space)** の次の事実はあまりに有名である．

$$\text{「与えられた直線 } l \text{ とその上にない点 } P \text{ に対して } P \text{ を通り } l \text{ と交わらない直線 } m \text{ が存在する」} \tag{1}$$

ここで，affine n-space を

$$\mathbb{A}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

と記し，射影平面を

$$\mathbb{P} = \mathbb{A}^2 \cup \{\mathbb{A}^2\text{における方向の集合 }\}$$

と定義する．すなわち，正負どちらの無限遠にも同じ点がくっついている無限遠点を含む**射影直線**と呼ばれる直線の集合全体である．このような定義のもとでは，ある直線と平行な直線はすべて同じ無限遠点を通る．よって次の事実が成り立つ．

$$\text{「異なる 2 直線はつねに 1 点で交わる」} \tag{2}$$

Affine 2-space $\mathbb{A}^2$ 内の代数曲線とは，2 変数の多項式で与えられる方程式 $f(x, y) = 0$ の解の集合である．円：$x^2 + y^2 - 4 = 0$ や放物線：$x^2 + y - 5 = 0$ などはすべて $\mathbb{A}$ における代数曲線である．

簡単なものとして，代数方程式，連立一次方程式を考える．

$$\begin{aligned} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$x = y = z = 0$ という自明な解やある解の定数倍を考えるのは実に面白くない．ここでは連比 $x : y : z$ を考える．幾分か面倒な操作により

$$x : y : z = (bc' - cb') : (ca' - ac') : (ab' - ba') \tag{4}$$

得られる．これは

$$\text{「連比 } a : b : c \text{ と } a' : b' : c' \text{が異なるなら 3はちょうど 1 個の解を持つ.」} \tag{5}$$

と言えるだろう.

勘の良い読者なら既にお気づきだと思うが (使ってみたかった), 射影辺面は (2), (5) が同値になるような座標系を保持する平面である.

ここで Fermat's 予想 の射影平面における意味を考えていく.

定理 1.1 (Fermat)**.**
代数曲線

$$x^n + y^n - 1 = 0 \tag{6}$$

は次数が 3 以上のとき, 代数曲線上の有理数点は自明な点しかもたない.

Fermat's 予想は $x^n + y^n - z^n = 0$ でないか?と思われる人もいるかもしれないが, このとき整数点が存在をあらわし先では有理数点を表しているのであって, 相違は限りなく微小ではある. このような表示は誤解を招くことがある. n が奇数であるとき, 整数点だと $(1, -1, 0), (-1, 1, 0)$ を持つ. 明らかであるか不思議に思われるだろう.

ここで, 数列 $\{a_i, b_i, c_i\}_{i=1,2,3,\cdots}$ を $\{a_i, b_i, c_i\}_{i=1,2,3,\cdots} \to \{1, -1, 0\}$ $(i \to \infty)$ という性質を保存する列を考える. (6) だと, $\{a_i, b_i\}_{i=1,2,3,\cdots}$ の解は (∞, ∞) に近づいていく. これは $(1, -1, 0)$ と (∞, ∞) が無限遠点において対応していると見れる. これが射影平面を考える本質であると思う.

Affine 2-space において座標 (x, y) で表される点は射影平面において座標 $(x : y : 1)$ と対応し, 無限遠点は座標 $(x : y : 0)$ とする. これは well-defined であり, じっさい (px, py) は射影平面で $(x : y : 1/p)$ であり, 無限遠では $1/p$ が 0 に近づいていく. このような射影平面での表示を**斉次座標表示**という. 射影平面において直線は 1 次斉次方程式 $ax + by + cz = 0$ で表せるのである.

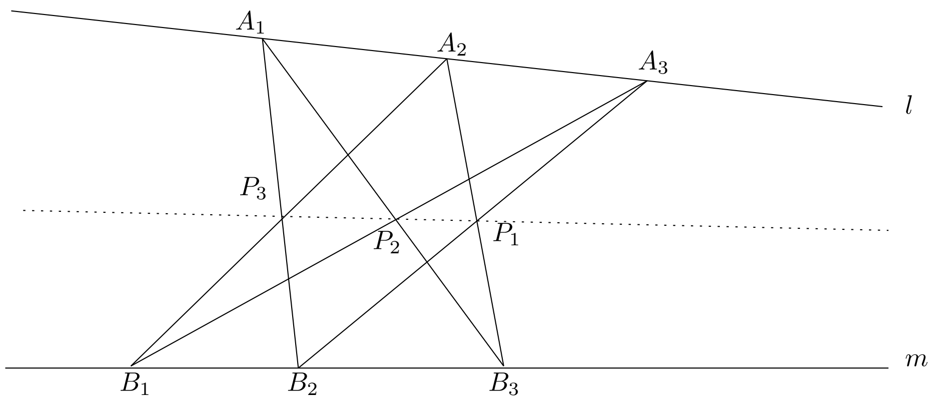

図 1

定理 1.2 (パッポスの定理)**.**
直線 l 上の 3 点 A_1, A_2, A_3 と別の直線 m 上の 3 点 B_1, B_2, B_3 に対して、直線 $A_{i-1}B_{i+1}$ と $A_{i+1}B_{i-1}$ の交点を P_i とおく。ただし、添字 $i = 1, 2, 3$ は 3 を法として考える。このとき、3 点 P_1, P_2, P_3 は同一直線上にある.

Proof. 3 直線 A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 が $x = 0, y = 0, z = 0$，直線 m が $x + y + z = 0$ で表される斉次座標 $(x : y : z)$ をとる．このとき，双対するする 3 直線 A_2B_1, A_3B_2, A_1B_3 は，

$$ax + ay + cz = 0, \quad ax + by + bz = 0, \quad cx + by + cz = 0 \tag{7}$$

と表される．二つの 3 角形すなわち順方向 A_iB_{i+1} と逆方向 $A_{i+1}B_i$ は 3 次斉次式

$$xyz = 0, \quad \left(x + y + \frac{c}{a}z\right)\left(\frac{a}{b}x + y + z\right)\left(x + \frac{b}{c}y + z\right) \tag{8}$$

で定義される．ここで，ある実数 k に対し，恒等式

$$\begin{aligned} &kxyz + \left(x + y + \frac{c}{a}z\right)\left(\frac{a}{b}x + y + z\right)\left(x + \frac{b}{c}y + z\right) \\ =&(x + y + x)(ax + by + cz)\left(\frac{x}{b} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

が成立する．(8) の二つの 3 角形が 9 点 $A_i, B_i, P_i(i = 1, 2, 3)$ を通っているので、(9) の 右辺の定める 3 角形もそうである。この 3 角形の最初の 2 辺は l, m で、残りの辺 $x/b + y/c + z/a = 0$ が P_1, P_2, P_3 を通っている。 □

系 1.3 (ブリアンション)**.** 2 次曲線の 6 点で接する 6 直線により構成された六角形の対角線は 1 点で交わる，ないし，すべて平行である．