Chapitre 2

Suites de nombres réels

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la donnée d'une application* u *de l'ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

- u_n est appelé terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et u_0 est appelé premier terme de la suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite arithmétique s'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $u_{n+1} - u_n = a$, dans ce cas on a : $u_n = u_0 + na$; $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite géométrique s'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, dans ce cas on a : $u_n = u_0.a^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.2 Monotonie d'une suite réelle

Définition 3.2.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle,*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite croissante (resp. strictement croissante) si :* $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n \geq 0$ *(resp. si* $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n > 0$*).*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite décroissante (resp. strictement décroissante) si :* $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n \leq 0$ *(resp. si* $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n < 0$*).*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite monotone si elle est soit croissante soit décroissante.*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite strictement monotone si elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante.*

Exemples 3.2.2

1. *Pour* $u_n = n^2 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$; *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
   En effet ;
   $$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2(n+1) = n^2 - 1 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$
2. *Pour* $u_n = \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$; *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
   En effet ;
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{-n}{(n+1)!} \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.3 Suites réelles et relation d'ordre

Définition 3.3.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite majorée si :* $\exists M \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite minorée si :* $\exists m \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N};\ m \leq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite bornée si elle est majorée et minorée ou s'il existe* $M > 0$ *tel que* $|u_n| \leq M$.

Exemples 3.3.2 1. *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos n$, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.* *En effet ;* $|u_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. *Si* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est majorée par* 2.
En effet ; on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$k \geq k-1 \Leftrightarrow k^2 \geq k(k-1) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)},$$

d'où

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

or $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, *d'où*

$$\begin{aligned} & u_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k}\right) \\ & \Leftrightarrow u_n \leq 1 + \left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \ldots - \tfrac{1}{n-1} + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3.4 Sous-suites

Définition 3.4.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle et* φ *une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$, *la suite* $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite sous-suite ou suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.4.2 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite réelle telle que* $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, *on peut en extraire les deux sous-suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que :*

$$u_{2n} = \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } u_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.5 Convergence d'une suite

Définition 3.5.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe un réel $l \in \mathbb{R}$, tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et on dit que l est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.5.2 *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $u_n = 1 - \frac{2}{5^n}$.*
Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1.

$$(\lim_{n \to +\infty} u_n = 1) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon))$$

$$|u_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{5^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < 5^n \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\ln 5} < n$$

alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{\left|\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right|}{\ln 5}\right] + 1$.

Théorème 3.5.3 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente alors sa limite est unique.*

Preuve :
Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers deux limites différentes l_1, l_2,telles que $l_1 \neq l_2$, alors on a :

$$(\lim_{n \to +\infty} u_n = l_1) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$(\lim_{n \to +\infty} u_n = l_2) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Comme

$$|l_2 - l_1| = |(u_n - l_1) + (l_2 - u_n)|,$$

alors si on pose $n''_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N};, \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |l_2 - l_1| \leq |(u_n - l_1)| + |(u_n - l_2)| < \varepsilon).$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N};, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |l_2 - l_1| < \varepsilon$$

par conséquent $l_1 = l_2$; absurde. □

Remarque : Une suite est dite divergente si elle tend vers l'infini ou bien si elle admet plusieurs limites différentes.

3.6 Suites divergentes

Définition 3.6.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,*

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_A \Rightarrow u_n > A)$$
$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall B < 0, \exists n_B \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_B \Rightarrow u_n < B)$$

Proposition 3.6.2 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente, telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$),*
et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \leq v_n$ (resp. $u_n \geq v_n$), $\forall n \in \mathbb{N}$; alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$).

Preuve :
En effet, on a
$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_A \Rightarrow u_n > A$$
et
$$u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$$
alors
$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_A \Rightarrow v_n > A,$$
d'où
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$
□

Proposition 3.6.3 *Toute suite convergente est bornée.*

Remarques :

1. Par contraposée ; une suite non bornée est divergente.
2. La réciproque n'est pas vraie, une suite bornée n'est pas toujours convergente.

Exemple 3.6.4 *Soit $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car*
$$\forall n \in \mathbb{N};\ |(-1)^n| \leq 1.$$
et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente car elle admet deux limites différentes :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 1 & si\ n\ est\ pair \\ -1 & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Proposition 3.6.5 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente alors toutes ses sous-suites sont convergentes vers la même limite.*

Remarque : Par contraposée, il suffit de trouver deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite pour dire qu'une suite est divergente.

3.7 Opérations sur les suites convergentes

Théorème 3.7.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes repectivement vers les limites l_1, l_2 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les suites $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi et on a :*

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = l_1 + l_2.$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda u_n) = \lambda l_1.$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n.v_n) = l_1.l_2.$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l_1}{l_2}$ *si* $l_2 \neq 0.$
5. $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = |l_1|.$

Remarques :

1. La somme de deux suites divergentes peut être convergente.
2. La valeur absolue d'une suite divergente peut être convergente.

Exemples 3.7.2 *1. Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$u_n = 2n \text{ et } v_n = -2n + e^{-n},$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes or la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car $u_n + v_n = 8$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente or on a $|u_n| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, d'où la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Propriétés 11 *1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente telle que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (resp. $u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$), alors*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \geq 0 \ (\textit{resp.} \lim_{n \to +\infty} u_n \leq 0).$$

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes telles que $u_n < v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} v_n.$$

Preuve :

1. On a $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Montrons que $l \geq 0$.
   Supposons par l'absurde que $l < 0$, et soit $\varepsilon = \frac{|l|}{2} > 0$ alors on a :

   $$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \frac{|l|}{2}),$$

   d'où

$$l - \frac{|l|}{2} < u_n < l + \frac{|l|}{2} < 0,$$

ce qui est absurde car $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. On a $u_n < v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, soient $l_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $l_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$,
Supposons par l'absurde que $l_2 < l_1$, et soit $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2} > 0$ alors on a :

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2},$$

d'où

$$l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} < u_n < l_1 + \frac{l_1 - l_2}{2} \Leftrightarrow \frac{l_1 + l_2}{2} < u_n < \frac{3l_1 - l_2}{2} ... (1)$$

et on a

$$\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2},$$

d'où

$$l_2 - \frac{l_{1,} - l_2}{2} < v_n < l_2 + \frac{l_{1,} - l_2}{2} \Leftrightarrow \frac{3l_2 - l_1}{2} < v_n < \frac{l_1 + l_2}{2} ... (2)$$

posons $n''_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, alors de (1) et (2) on a

$$\exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow v_n < \frac{l_1 + l_2}{2} < u_n)$$

donc $v_n < u_n$, ce qui est absurde car $u_n < v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Ou bien on peut simplement voir cette propriété comme conséquence directe de la première, où il suffit de poser $w_n = v_n - u_n$.

$$\begin{aligned} & w_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} w_n \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{n \to +\infty} v_n \geq \lim_{n \to +\infty} u_n. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.7.3 *Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente vers sa borne supérieure (resp. inférieure).*

Preuve :
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1} \text{ et } \exists M \in \mathbb{R}; u_n \leq M$$

posons $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $u = \sup E$; on a alors d'après la caractérisation de la borne supérieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, u - \varepsilon < u_p,$$

et comme $(u_n)_n$ est croissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow u_p \leq u_n$$

or $u_n \leq u$, d'où

$$u - \varepsilon < u_p \leq u_n \leq u < u + \varepsilon,$$

par suite on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - u| < \varepsilon$$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sup E$. □

Théorème 3.7.4 *(Encadrement d'une suite) Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites réelles, telles que :* $\forall n \geq n_0$; $u_n \leq v_n \leq w_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Preuve :
Soit $\varepsilon > 0$ alors on a $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_1$:

$$|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$$

et on a $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_1$:

$$|w_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon$$

posons $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$, alors $\exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_3$:

$$l - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow |v_n - l| < \varepsilon,$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_3 \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon,$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = l.$$

□

Exemple 3.7.5 $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-\ln n}{n} \leq \frac{(-1)^n \ln n}{n} \leq \frac{\ln n}{n},\ \textit{car}\ \ln n \geq 0.$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-\ln n}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = 0.$$

Théorème 3.7.6 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles, telles que :* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée ; alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 0$.

Preuve :
Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} : |v_n| \leq M$ et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n v_n| < \varepsilon,$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 0$. □

Théorème 3.7.7 *(Bolzano-weiestrass) Toute suite réelle bornée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous suite convergente.*

Preuve :
On utilise la méthode de Dichotomie. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $A \leq u_n \leq B, \forall n \in \mathbb{N}$, on construit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$A_0 = A,\ B_0 = B,\ \varphi(0) = 0$$

L'un des deux intervalles (segments) $\left[A_0, \frac{A_0+B_0}{2}\right]$, $\left[\frac{A_0+B_0}{2}, B_0\right]$ contient les termes de la suite pour une infinité d'indices n, on note $[A_1, B_1]$ cet intervalle et $\varphi(1)$ un entier tel que $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $u_{\varphi(1)} \in [A_1, B_1]$. En répétant cette opération, on a pour tout entier naturel n un intervalle $[A_n, B_n]$ de longueur $\frac{B-A}{2^n}$ et un entier $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ tel que $u_{\varphi(n)} \in [A_n, B_n]$, d'où $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par construction la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n - A_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{B-A}{2^n} = 0$, d'où les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite l et comme pour tout $n \in \mathbb{N} : A_n \leq u_{\varphi(n)} \leq B_n$ alors d'après le théorème de l'encadrement d'une suite (3.7.4) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = l$. □

Remarque : Ce théoème est une autre propriété caractéristique de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Ce n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$.

3.8 Suites adjacentes

Définition 3.8.1 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles, telles que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont dites adjacentes si* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0.$

Théorème 3.8.2 *Deux suites réelles adjacentes sont convergentes vers la même limite.*

Exemple 3.8.3 *Les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telles que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *;*

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$*,et* $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$*; convergent vers la même limite car elles sont adjacentes.*

En effet, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est croissante,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante et on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0.$

3.9 Suites de Cauchy

Définition 3.9.1 *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N};\ (p \geq n_\varepsilon \text{ et } q \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon).$$

Théorème 3.9.2 *Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Preuve :

($\Rightarrow$) Etant donnée une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un nombre réel l alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq n_\varepsilon$ et $q \geq n_\varepsilon$ alors

$$|u_p - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

or $|u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q|$ d'où

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < \varepsilon,$$

par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

($\Leftarrow$) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N};\ \left(p \geq n_\varepsilon \text{ et } q \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{3} \ \ldots\ (1)\right)$$

d'où

$$u_q - \frac{\varepsilon}{3} < u_p < u_q + \frac{\varepsilon}{3},$$

pour $q \geq n_\varepsilon$ fixé, alors la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, car même si $p < n_\varepsilon$ alors la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ a pour valeurs $\{u_0, u_1, ..., u_{n_\varepsilon - 1}\}$.

Posons $A_n = \{u_k\ ,\ k \geq n\} = \{u_n, u_{n+1}, ..., ..\}$, on remarque que A_n est un ensemble borné car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'où $\sup A_n$ et $\inf A_n$ existent, notons $\inf A_n = a_n$ et $\sup A_n = b_n$ donc $a_n \leq u_k \leq b_n$, $\forall k \geq n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n$, d'où

$$\begin{cases} \sup A_{n+1} \leq \sup A_n \\ \inf A_n \leq \inf A_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{n+1} \leq b_n \\ a_n \leq a_{n+1} \end{cases}$$

alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

On a aussi:

$$\sup A_n = b_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}; p \geq n : 0 \leq b_n - u_p < \frac{\varepsilon}{3} ... (2)$$

$$\inf A_n = a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{N}; q \geq n : 0 \leq u_q - a_n < \frac{\varepsilon}{3} ... (3)$$

Par suite ; comme

$$|b_n - a_n| = |b_n - u_p + u_p - u_q + u_q - a_n|,$$

alors

$$|b_n - a_n| \leq |b_n - u_p| + |u_p - u_q| + |u_q - a_n|$$

d'où

$$(1) \wedge (2) \wedge (3) \Rightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon$$

or $b_n \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$; alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon,$$

par suite

$$\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

par conséquent $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergent vers la même limite l, et comme $a_n \leq u_k \leq b_n$, $\forall k \geq n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente aussi vers la même limite l. $\square$

Exemple 3.9.3 *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k(k+1)}$ *est convergente car elle* *est de Cauchy. En effet, soient $p, q \in \mathbb{N}$, tels que $p \geq q$, et soit $\varepsilon > 0$*

$$|u_p - u_q| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} \frac{\cos k}{k(k+1)}\right| \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \left|\frac{\cos k}{k(k+1)}\right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow |u_p - u_q| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} < \frac{1}{q+1},$$

alors il suffit que $\frac{1}{q+1} < \varepsilon$, ce qui équivaut à $q > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, et donc il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$, pour avoir :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N};\ (p \geq n_\varepsilon \wedge q \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon)$$

Par conséquent ; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Remarque : Pour montrer qu'une suite est divergente il suffit de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy, en utilisant la négation du critère de Cauchy.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}; p \geq n_\varepsilon \wedge q \geq n_\varepsilon \wedge |u_p - u_q| \geq \varepsilon.$$

3.10 Suites récurrentes

Définition 3.10.1 *Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, telle que $f(D) \subset D$. On appelle suite récurrente une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; définie par la donnée de $u_0 \in D$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*

- Si la fonction f est croissante alors la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ revient à l'étude du signe de la différence $f(u_0) - u_0$.
  - Si $f(u_0) - u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  - Si $f(u_0) - u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- Si la fonction f est monotone et continue sur D et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $l \in D$ alors sa limite vérifie l'équation $f(l) = l$ (point fixe).

3.11 Enoncés des exercices

Exercice 1 :
En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que :
1/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}$, 2/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$, 3/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln(1+n)}{\ln n} = 2$,
4/ $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, 5/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5n^2-2}{4n} = -\infty$, 6/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln n) = +\infty$.

Exercice 2 :
Calculer les limites des suites suivantes de terme général :
1. $U_n = \frac{\cos(2n^3-5)}{3n^3+2n^2+1}$, 2. $U_n = \frac{(2n^4-8n^2)}{3n^4+\cos n+\frac{1}{n^5}}$, 3.$U_n = \frac{3^n+(-3)^n}{3^n}$,