Chapitre 5

Fonctions dérivables

5.1 Fonctions dérivables

Définition 5.1.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite suivante existe et est finie*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda \in \mathbb{R}$$

Cette limite est appelée dérivée de f au point x_0 et on la note par $f'(x_0)$.

On peut avoir la définition analogue suivante :

$$f \text{ est dérivable en } x \Leftrightarrow \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \in \mathbb{R} \right).$$

Définition 5.1.2 - *On dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en x_0 si le rapport*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en x_0 et cette limite est appelée dérivée à gauche (resp. à droite) de f au point x_0.

- Pour que f soit dérivable en x_0; il faut et il suffit que f soit dérivable à gauche et à droite de x_0 et que les deux limites soient égales.

$$ie. \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

- Une fonction définie d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite dérivable sur I; si elle est dérivable en tout point de I.

Exemples 5.1.3 - *Toute fonction polynôme de degré n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est un polynôme de degré $n-1$.*

- Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son domaine de définition, et sa dérivée est une fonction rationnelle.

- *La fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$ est dérivable en $x_0=2$; en effet*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=f'(2).$$

- *La fonction f définie par $f(x)=|x|$; est continue mais n'est pas dérivable au point $x_0=0$ car les limites à gauche et à droite en 0 sont différentes ; en effet*

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-x}{x}=-1$$
$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x}{x}=1$$

- *La fonction* $\exp$ *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$(\exp x)'=(e^x)'=\exp x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

- *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a*

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\forall x\in\,]0,+\infty[\,.$$

- *La fonction* $\log_a$ *est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a*

$$\log_a'(x)=\frac{1}{x\ln a},\forall x\in\,]0,+\infty[\,.$$

- *La fonction puissance a^x avec $a>0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$(a^x)'=(\ln a)\,a^x\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

5.1.1 Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit (Γ) son graphe, soient M_0 un point de (Γ) tel que $M_0(x_0,f(x_0))$, et M un autre point de (Γ) tel que $M(x,f(x))$.

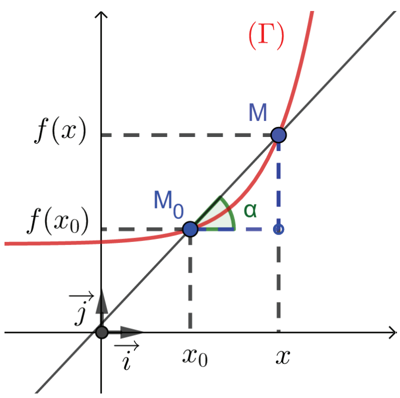

FIGURE 5.1 – Interprétation géométrique

Si f est dérivable en x_0 alors le graphe (Γ) admet en x_0 une tangente (T) d'équation $(T) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, en effet;

En calculant la pente de (M_0M), c'est à dire la tangente de l'angle que fait l'axe des abscisses avec la droite (M_0M)

$$\tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

on remarque que quand x tend vers x_0 alors la pente de (T) est égale à

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

d'où

$$(T) : y = (f'(x_0).x) + b, \text{ tel que } b \in \mathbb{R}$$

or

$$M_0(x_0, f(x_0)) \in (T) \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0).x_0,$$

d'où

$$(T) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Remarques :

1. Si la fonction f admet en x_0 une dérivée à gauche l_g et une dérivée à droite l_d telles que $l_g \neq l_d$; alors le graphe (Γ_f) de f admet en $M_0(x_0, f(x_0))$ deux demi tangentes et on dit que M_0 est un point anguleux de (Γ_f).
2. Si les deux limites sont infinies et différentes alors on dit que le graphe (Γ_f) admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$; une tangente verticale d'équation $x = x_0$ et que M_0 est un point de rebroussement de (Γ_f).

Proposition 5.1.4 *Si f est une fonction dérivable en $x = a$ alors f est continue en $x = a$.*

Preuve :
On a

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right][x - a]$$

et comme f est dérivable en $x = a$; alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \left[\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] \lim_{x \to a} [x - a] \\ &= f'(a).0 = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

$\square$

Remarque : La réciproque est fausse. En effet, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue mais n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Théorème 5.1.5 *Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f+g$, fg, $\alpha f+\beta g$ et $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) sont dérivables aussi en x_0 et l'on a :*

$$\begin{aligned}
&1)\ (f+g)'(x_0) = (f(x_0)+g(x_0))' = f'(x_0)+g'(x_0),\\
&2)\ (f.g)'(x_0) = (f(x_0).g(x_0))' = f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0),\\
&3)\ (\alpha f+\beta g)'(x_0) = (\alpha.f(x_0)+\beta.g(x_0))' = \alpha.f'(x_0)+\beta.g'(x_0),\\
&4)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.
\end{aligned}$$

Preuve :
1) et 3) sont évidentes.

2) On a

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}$$

alors par passage à la limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}$$

d'où

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

4) Pour montrer que $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$; il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

On a

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{-(g(x)-g(x_0))}{(x-x_0)}\frac{1}{(g(x_0).g(x))}$$

alors par passage à la limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

□

Proposition 5.1.6 *Soient f et g deux fonctions, telles que :*
$f : I_1 \to I_2$, $g : I_2 \to \mathbb{R}$; I_1, I_2 étant deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Si f est dérivable en $x_0 \in I_1$ et g est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in I_2$, alors :
$g \circ f : I_1 \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Preuve :
On a
$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$
alors par passage à la limite comme f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0=f(x_0)$; on a
$$\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=g'(f(x_0))f'(x_0)$$
d'où
$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$
□

Exemple 5.1.7 $(\ln(\cos(e^x)))'=\frac{-e^x\sin(e^x)}{\cos(e^x)}$.

Remarque : On peut montrer que si f une fonction dérivable en x_0 telle que $f'(x_0)\neq 0$, alors on a l'équivalence suivante :

$$g\circ f \text{ dérivable en } x_0 \textbf{ ssi } g \text{ est dérivable en } y_0=f(x_0).$$

En effet, soit f une fonction dérivable en x_0 telle que $f'(x_0)\neq 0$, on a
$$\begin{aligned}\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\\&=\lim_{y\,\to\,y_0}\frac{g\left(y\right)-g\left(y_0\right)}{y-y_0}f'(x_0).\end{aligned}$$

Il découle que la limite
$$\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}$$
existe **si et seulement si** la limite
$$\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$$
existe. D'où,
$$g\circ f \text{ est dérivable en } x_0 \textbf{ ssi } g \text{ est dérivable en } y_0=f(x_0). \tag{5.1}$$

5.1.2 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 5.1.8 *Soit f une fonction bijective et continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0\in I$, telle que $f'\left(x_0\right)\neq 0$,* *alors la fonction réciproque f^{-1}est dérivable au point $f(x_0) = y_0$, et on a :*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Preuve :
Montrons que

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

On a

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

car f^{-1} est continue, donc

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}},$$

comme f est dérivable en x_0 et d'après le théorème de l'inverse de limite ; on a

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

d'où

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Remarque : Si f est une fonction bijective, dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est une fonction dérivable en $y_0 = f(x_0)$. En effet, on a

$$f^{-1} \circ f = Id \tag{5.2}$$

où Id désigne l'application identité : $Id(x) = x, \forall x \in I$. alors d'après l'équivalence (5.1), comme Id est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, on conclut que f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et en calculant la dérivée de (5.2) au point x_0, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) . f'(x_0) = 1 \implies \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

car $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

1. $f^{-1}(x) = \arcsin x$

$$\begin{pmatrix} \arcsin x = y \\ -1 \leq x \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sin y = x \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in \left]-1,1\right[.$$

d'où

$$(\arcsin g(x))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}, \text{ pour } g(x) \in \left]-1,1\right[.$$

2. $f^{-1}(x) = \arccos x$

$$\begin{pmatrix} \arccos x = y \\ -1 \leq x \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi \end{pmatrix}$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\cos y)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in \left]-1,1\right[.$$

d'où

$$(\arccos g(x))' = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}, \text{ pour } g(x) \in \left]-1,1\right[.$$

3. $f^{-1}(x) = \arctan x$

$$\begin{pmatrix} \arctan x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tan y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = (\cos y)^2 = \frac{1}{1+(\tan y)^2} = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$(\arctan(g(x)))' = \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}.$$

4. $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{arccot} x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cot y = x \\ 0 < y < \pi \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = -(\sin y)^2 = \frac{-1}{1+(\cot gy)^2} = \frac{-1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$(\operatorname{arccot}(g(x)))' = \frac{-g'(x)}{1+(g(x))^2}.$$

Dérivées des fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

1. $f^{-1}(x) = \arg shx$

$$(\arg shx)' = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+(shy)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$(\arg shg(x))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1+(g(x))^2}}.$$

2. $f^{-1}(x) = \arg chx$

$$(\arg chx)' = \frac{1}{(chy)'} = \frac{1}{shy} = \frac{1}{\sqrt{(chy)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \forall x \geq 1.$$

d'où

$$(\arg chg(x))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{(g(x))^2 - 1}}, \text{ pour } g(x) \geq 1.$$

3. $f^{-1}(x) = \arg thx$

$$(\arg thx)' = \frac{1}{(thy)'} = ch^2 y = \frac{1}{1 - th^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}, \forall x \in \left]-1, 1\right[.$$

d'où

$$(\arg thg(x))' = \frac{g'(x)}{1 - (g(x))^2}, \text{ pour } g(x) \in \left]-1, 1\right[.$$

4. $f^{-1}(x) = \arg\coth x$

$$(\arg\coth x)' = \frac{1}{(\coth y)'} = -sh^2 y = \frac{1}{1 - \coth^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}, \forall x \in \left]-\infty, -1\right[\cup\left]1, +\infty\right[.$$

d'où

$$(\arg\coth g(x))' = \frac{g'(x)}{1 - (g(x))^2}, \text{ pour } g(x) \in \left]-\infty, -1\right[\cup\left]1, +\infty\right[.$$

5.2 Dérivée n-ième d'une fonction

5.2.1 Dérivée n-ième d'une fonction

Définition 5.2.1 *Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f est dite $n-fois$ dérivable sur I si toutes ses dérivées successives $f', f'', f''', f^{(4)}, ..., f^{(n)}$ existent sur I.*

$f^{(n)}$ est appelée dérivée $n-$ième de f et on a par récurrence

$$f^{(0)} = f, \; f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

Si de plus $f^{(n)}$ est continue sur I; alors f est dite de classe C^n sur I (toutes ses dérivées successives existent et sont continues) et on note $f \in C^n(I)$.

f est dite de classe $C^0(I)$ si elle est continue sur I.

f est dite de classe $C^\infty(I)$ si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples 5.2.2 *A vérifier par récurrence que :*

1. *Si $f(x) = e^x$, alors $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *Si $f(x) = e^{ax}$, alors $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}, \forall n \in \mathbb{N}$.*
3. *Si $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$,*
   alors $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
4. *Si $f(x) = \sin x$ alors $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.*
5. *Si $f(x) = \cos x$ alors $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.*

5.2.2 Dérivée n-ième d'un produit de fonctions (Formule de Leibnitz).

Théorème 5.2.3 *Si f et g sont deux fonctions réelles admettant des dérivées n-ième au point x_0 alors la fonction produit $f.g$ admet une dérivée $n-$ième au point x_0 et on a :*

$$(f.g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0)$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Exemple 5.2.4 *La dérivée $n-$ième de la fonction $f(x) = (x^2 - 3x + 1)\, e^{2x}$ est calculée comme suit :*

$$(f)^{(n)}(x) = (h.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x),$$

où

$h(x) = e^{2x}$ *et* $g(x) = (x^2 - 3x + 1)$ *donc :*

$$h^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}, \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$g'(x) = 2x - 3,\ g''(x) = 2 \text{ et } g^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 3.$$

d'où

$$(f)^{(n)}(x) = e^{2x}2^n \left[\left(x^2 - 3x + 1\right) + \frac{n}{2}(2x - 3) + \frac{n(n-1)}{4}\right], \forall n \in \mathbb{N}.$$

5.3 Théorèmes sur les fonctions dérivables

5.3.1 Théorème de Fermat

Définition 5.3.1 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$.*

On dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) au point x_0 si :

$$\exists \alpha > 0; \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

(resp. $\exists \alpha > 0; \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$)

On dit que f admet un extrêmum local au point x_0 si f admet en x_0 un maximum local ou bien un minimum local.

Définition 5.3.2 *On dit que f admet un maximum global (resp. un minimum global) au point x_0 si :*

$$\forall x \in I : f(x) \leq f(x_0)$$

(resp. $\forall x \in I : f(x_0) \leq f(x)$)

On dit que f admet un extrêmum global au point x_0 si f admet en x_0 un maximum global ou bien un minimum global.

Théorème 5.3.3 (de Fermat) *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $]a,b[$, telle que f admet en x_0 un extrêmum local, si $f'(x_0)$ existe (f est dérivable en x_0) alors $f'(x_0)=0$.*

Preuve :
On suppose que f admet en x_0 est un maximum local, alors on a :
$\exists\alpha>0;\forall x\in I:|x-x_0|<\alpha\Rightarrow f(x)\leq f(x_0)$.
Si $x<x_0$ alors $x-x_0<0$ or $f(x)\leq f(x_0)$ donc $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$.
Si $x>x_0$ alors $x-x_0>0$ or $f(x)\leq f(x_0)$ donc $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$.
Comme f est dérivable en x_0 alors la dérivée à gauche est égale à la dérivée à droite, par conséquent

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0.$$

□

Exemple 5.3.4 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{7}{10}x^3-\frac{21}{10}x^2+1$*
$f'(x)=\frac{21}{10}x^2-\frac{42}{10}x=\frac{21}{10}x(x-2)$.
Si f admet un extrêmum local au point x alors

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2$$

et comme $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in[0,2]$ et $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$, donc la fonction f admet un minimum local au point $\left(2,\frac{9}{5}\right)$ et un maximum global au point $(0,10)$.

5.3.2 Théorème de Rolle

Théorème 5.3.5 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$; alors il existe un point c dans $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

Preuve :
- Si f est constante sur $[a,b]$ alors c'est évident.
- Sinon ; comme f est continue sur $[a,b]$ alors elle est bornée sur $[a,b]$, d'où elle est majorée donc $\sup\limits_{x\in]a,b[}f(x)=M$ existe, on a alors $\forall x\in]a,b[:f(x)\leq M$, on peut supposer que M est différente de $f(a)=f(b)$ et donc il existe c dans $]a,b[$ tel que $M=f(c)$, par conséquent

$$\forall x\in]a,b[:f(x)\leq f(c),$$

alors c est un maximum local de f ainsi d'après le théorème de Fermat

$$f'(c)=0.$$

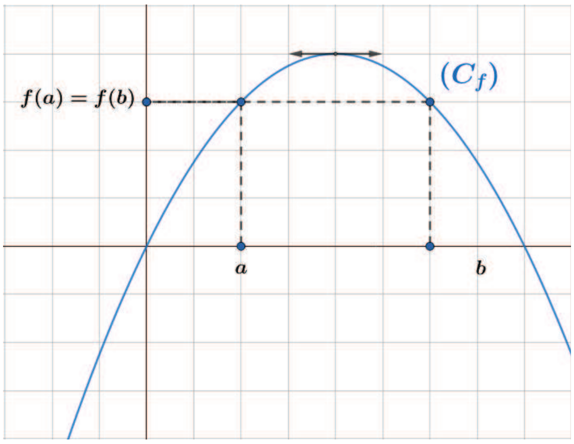

FIGURE 5.2 – Théorème de Rolle

□

Exemples 5.3.6 .

1. *Pour montrer que l'équation* $4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 0$ *admet une solution dans l'intervalle* $]1, 3[$; *il suffit d'appliquer le Théorème de Rolle à la fonction* $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ *sur l'intervalle* $]1, 3[$; *en effet* f *est continue sur* $[1, 3]$, *dérivable sur* $]1, 3[$ *et on a* $f(1) = f(3) = 0$.
2. *Etant donnée la fonction* f *définie sur* $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On ne peut pas appliquer le Théorème de Rolle à f *sur* $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.
En effet ; f *n'est pas dérivable sur* $\left]-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right[$ *car elle n'est pas dérivable en* 0.

5.3.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 5.3.7 *Soit* f *une fonction définie de l'intervalle* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$, *continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$; *alors il existe un point* c *dans* $]a, b[$ *tel que :*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Preuve :
On pose $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$

h est continue sur $[a, b]$ car f l'est et dérivable sur $]a, b[$ car f l'est et on a $h(a) = h(b)$, donc d'après le Théorème de Rolle on a :

$$\exists c \in]a, b[; h'(c) = 0,$$

or $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ainsi $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

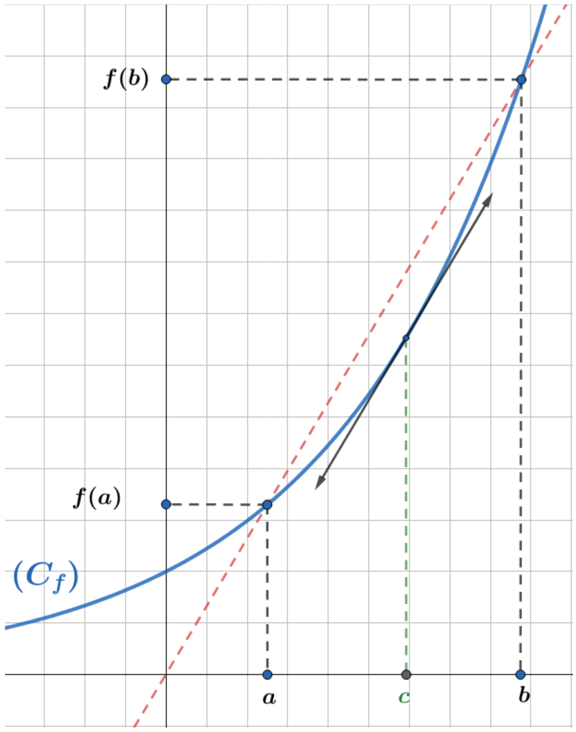

FIGURE 5.3 – Théorème des accroissements finis

Remarque : Soit $h > 0$, si on pose $a = x$, $b = x + h$, alors f est continue sur $[x, x + h]$ et dérivable sur $]x, x + h[$; et on a

$$f(x + h) - f(x) = h.f'(c)$$

où $c = x + \theta h$ tel que $0 < \theta < 1$.

En effet ;

$$x < c < x + h \Leftrightarrow 0 < \frac{c - x}{h} < 1$$

alors en posant $\frac{c-x}{h} = \theta$; on a :

$$f(b) - f(a) = (b - a)\left[f'(a + \theta(b - a))\right]$$

Application :

Si on a $|f'(x)| \leq M$; $\forall x \in]a, b[$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

Exemple 5.3.8 *Montrer que Pour tout* $x > 0$: $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

On pose $f(x) = \ln t$; *sur* $[x, x + 1]$

Pour tout $x > 0$; f *est continue sur* $[x, x + 1]$ *et dérivable sur* $]x, x + 1[$, *donc d'après le théorème des accroissements finis ;* $\exists c \in]x, x + 1[$ *tel que*

$$\ln(x + 1) - \ln x = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x + 1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}.$$

or

$$\begin{aligned} x < c < x+1 &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x+1} < \tfrac{1}{c} < \tfrac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \tfrac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x+1} < \ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right) < \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x};\ \forall x > 0.$$

Corollaire 5.3.9 *Etant donnée f une fonction dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_1, x_2 deux points quelconques de I ; alors il existe un point c strictement compris entre x_1 et x_2 tel que*

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

.

5.3.4 Variations d'une fonction

Théorème 5.3.10 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; alors :*

1. *f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in\,]a,b[\, : f'(x) \geq 0$.*
2. *f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in\,]a,b[\, : f'(x) \leq 0$.*
3. *f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in\,]a,b[\, : f'(x) = 0$.*

5.3.5 Formule de Cauchy- Accroissements finis généralisés

Théorème 5.3.11 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$; si $g'(x) \neq 0, \forall x \in\,]a,b[$ alors*

$$\exists c \in\,]a,b[\ /\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Preuve :
On pose

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x),$$

h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et on remarque que

$$h(a) = h(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$$

alors d'après le Théorème de Rolle ; on a $\exists c \in \left]a,b\right[\ / \ h'(c) = 0$, d'où

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

On a comme conséquence directe de ce théorème le corollaire suivant :

La règle de l'Hôpital.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $\left]a,b\right[$; si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l au point $x_0 \in \left]a,b\right[$, telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$; alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l.$$

En effet, il suffit de prendre dans le théorème des accroissements finis généralisés $a = x_0$ et $b = x$ d'où $c \in \left]x_0, x\right[$ et quand x tend vers x_0 alors c tend vers x_0 aussi et on a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ d'où $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l$.

Cette méthode est utilisée pour enlever les indéterminations du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemples 5.3.12 *1.* $l_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{\sin(lx)} = \frac{k}{l}$, *car* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{k\cos(kx)}{l\cos(lx)} = \frac{k}{l}$.

2. $l_2 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, *car* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$.