Chapitre 1

Le corps des nombres réels

1.1 Définition axiomatique

- L'ensemble des nombres réels est l'ensemble noté par $\mathbb{R}$; sur lequel sont définies deux lois de composition internes :
  l'addition
  $$\begin{array}{rcl} "+" : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$
  et la multiplication
  $$\begin{array}{rcl} "\cdot" : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\cdot y \end{array}$$
  tel que $(\mathbb{R},+,\cdot)$ est un corps commutatif archimédien.
- La relation " $\leq$ "est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$:
  $$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x\leq y)\vee(y\leq x)\,.$$
- Les deux lois de composition internes ; définies sur $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre total " $\leq$ ".
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$; possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

1.2 La valeur absolue

Définition 1.2.1 *La valeur absolue est une application de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des nombres réels positifs $\mathbb{R}^+$, notée par $|.|$ et définie par :*

$$\begin{array}{rcl} |.| : \ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x| = \left\{\begin{array}{l} x \ si \ x\geq 0 \\ -x \ si \ x<0 \end{array}\right. \end{array}$$

Propriétés 1 *1.* $|x|\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$.

3. $-|x|\leq x\leq |x|\,;\forall x\in\mathbb{R}$.

4. $\forall a \geq 0;\ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$

5. $|x.y| = |x| \,.\, |y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$

6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ \forall\,(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$

7. $|x + y| \leq |x| + |y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R},$ *(L'inégalité triangulaire).*

8. $||x| - |y|| \leq |x - y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R},$ *(La seconde inégalité triangulaire).*

Preuve :

7\. On a $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{cases}$$

d'où en faisant la somme

$$-\left(|x| + |y|\right) \leq x + y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x + y| \leq |x| + |y|\,.$$

8\. On a $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|x| = |x - y + y| \Rightarrow |x| \leq |x - y| + |y| \Leftrightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$

et

$$|y| = |y - x + x| \Rightarrow |y| \leq |y - x| + |x| \Leftrightarrow -|x - y| \leq |x| - |y|$$

donc

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Leftrightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|\,.$$

□

1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.3.1 *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si dès qu'elle contient deux réels a et b alors elle contient tous les réels compris entre eux.*

$\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I.$

Exemples 1.3.2 *1. $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des intervalles.*

2. $\mathbb{R}^+$ est un intervalle.

3. $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas des intervalles.

Remarques :

1. Pour les notations, soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a les intervalles de $\mathbb{R}$:
   - bornés : ouverts $]a, b[$, fermés $[a, b]$ ou semi-ouverts $[a, b[\ ,\ ]a, b]\,.$
   - non bornés : ouverts $]-\infty, b[\ ,\ ]a, +\infty[$ ou fermés $[a, +\infty[\ ,\ ]-\infty, b]\,.$
   - Si $a = b$ alors $[a, a] = \{a\}\,,\ ]a, b[= [a, b[=]a, b] = \emptyset.$
2. Le complémentaire d'un intervalle ouvert est fermé.

Remarque : $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont les seules parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$.

En effet, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ est un intervalle ouvert donc son complémentaire, l'ensemble vide $\emptyset$ est fermé, or l'ensemble vide $\emptyset$ peut s'écrire comme un intervalle ouvert $]\alpha, \alpha[\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$, donc son complémentaire $\mathbb{R}$ est fermé.

Remarques :

1. L'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle.
2. La réunion de deux intervalles ayant une intersection non vide est un intervalle.

Définition 1.3.3 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle segment l'ensemble noté $[a, b]$ défini par $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$. Si $a > b$ alors $[a, b] = \emptyset$.*

Définition 1.3.4 *Soit V une partie de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, On dit que V est un voisinage de x_0 s'il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et inclu dans V, on note V_{x_0} ou $V(x_0)$.*

Exemples 1.3.5

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$; l'intervalle $V =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ est un voisinange de x_0; car il existe un intervalle ouvert $\left]x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et inclu dans V.*
2. *L'intervalle $]a, b[$ est voisinage de tous les points $x \in]a, b[$.*
3. *Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont des voisinages d'aucun de leurs points.*

1.4 Minorants, majorants, borne inférieure, borne supérieure, maximum et minimum.

Définition 1.4.1 *Etant donné un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ totalement ordonné par la relation d'ordre notée " $\leq$ " et soit $A \subset E$ une partie non vide de E.*

- On dit que $M \in E$ est un majorant de A si : $\forall x \in A;\ x \leq M$.

- On dit que $m \in E$ est un minorant de A si : $\forall x \in A;\ m \leq x$.

- A est dite majorée (resp. minorée) si elle possède au moins un majorant (resp. un minorant).

Remarque : Si A possède un majorant (resp. minorant), alors il n'est pas unique.

Définition 1.4.2 - *Etant donnée une partie A de E non vide et majorée, et soit $Maj(A) \subset E$ l'ensemble des majorants de A, on dit que $M \in E$ est la borne supérieure de A si M est le plus petit des majorants de A, on le note* $\sup A$.

- Etant donnée une partie A de E non vide et minorée, et soit $Min(A) \subset E$ l'ensemble des minorants de A, on dit que $m \in E$ est la borne inférieure de A si m est le plus grand des minorants de A, on le note $\inf A$.

Théorème 1.4.3 *Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$, possède une borne supérieure (resp. inférieure).*

Remarques :

1. Quand la borne supérieure (resp. la borne inférieure) existe alors elle est unique.
2. La borne supérieure $\sup A$ (resp. la borne inférieure $\inf A$) n'appartient pas nécessairement à l'ensemble A.

Définition 1.4.4 - *On dit que M est le plus grand élément de A ou maximum de A si M est un majorant de A qui appartient à A, on le note par* $\max A$.

- *On dit que m est le plus petit élément de A ou minimum de A si m est un minorant de A qui appartient à A, on le note par* $\min A$.

Remarques :

1. Si le maximum $\max A$ (resp. le minimum $\min A$) existe alors $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$).
2. Si la borne supérieure $\sup A$ (resp. la borne inférieure $\inf A$) appartient à A alors $\max A = \sup A$ (resp. $\min A = \inf A$).
3. Si la borne supérieure $\sup A$ (resp. la borne inférieure $\inf A$) n'appartient pas à A alors le maximum $\max A$ (resp. le minimum $\min A$) n'existe pas.

Remarque : La borne supérieure d'un ensemble majoré A (resp. la borne inférieure d'un ensemble minoré A) existe toujours mais peut ne pas appartenir à A, par contre le maximum d'un ensemble majoré (resp. le minimum d'un ensemble minoré) peut ne pas exister.

Exemple 1.4.5 *Soit $A =]-5, 1]$; A est une partie bornée de $\mathbb{R}$.*
L'ensemble des majorants de A est $Maj\,(A) = [1, +\infty[$,
$\sup A = \max A = 1$.
L'ensemble des minorants de A est $Min\,(A) =]-\infty, -5]$,
$\inf A = -5$, $\min A$ *n'existe pas car* $-5 \notin A$.

Proposition 1.4.6 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\exists \alpha > 0, \forall x \in A : |x| \leq \alpha$
(ii) $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x \leq M$.

Preuve :
$(i) \Rightarrow (ii)$
Il suffit de prendre $m = -\alpha$ et $M = \alpha$.
$(ii) \Rightarrow (i)$
Il suffit de prendre $\alpha = \max\,(M, -m)$, en effet,

$$-\alpha \leq m \leq x \leq M \leq \alpha \Rightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha \Leftrightarrow |x| \leq \alpha.$$

□

1.5 La partie entière

Définition 1.5.1 *La partie entière d'un nombre réel x ; est le plus grand entier n inférieur ou égal à x. En d'autres termes, la partie entière de x est le seul entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. Elle est notée par $[x]$ ou $E(x)$.*

Ainsi tout nombre réel x s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = [x] + \alpha; \text{ où } \alpha \in [0, 1[.$$

Exemple 1.5.2 $[5, 70911] = 5$, $[-5, 70911] = -6$.

Propriétés 2
1. $[x] \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $[x] \leq x \leq [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $[x + m] = [x] + m, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$.
4. $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
5. $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y], \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Preuve :

3. On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$[x] \leq x \leq [x] + 1,$$

d'où

$$[x] + m \overset{(1)}{\leq} x + m \overset{(2)}{\leq} [x] + m + 1, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

D'une autre part, on a

$$[x + m] \overset{(3)}{\leq} x + m \overset{(4)}{\leq} [x + m] + 1,$$

or $[x + m]$ est le plus grand entier inférieur à $x + m$ alors de (1) et (3) on a

$$[x] + m \leq [x + m], \tag{1.1}$$

et $[x + m] + 1$ est le plus petit entier supérieur à $x + m$ alors de (2) et (4) on a

$$[x + m] + 1 \leq [x] + m + 1,$$

d'où

$$[x + m] \leq [x] + m. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2) on obtient l'égalité $[x + m] = [x] + m$. □

Remarque : La partie entière est une fonction croissante mais pas strictement croissante.

1.6 Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure

Etant donnée une partie A non vide et bornée de $\mathbb{R}$, soient $m, M \in \mathbb{R}$, on a les caractérisations suivantes

1. $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} 1/\ \forall x \in A;\ x \leq M \\ 2/\ \forall \varepsilon > 0;\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \end{cases}$
2. $m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} 1/\ \forall x \in A;\ m \leq x \\ 2/\ \forall \varepsilon > 0;\ \exists x \in A,\ x < m + \varepsilon \end{cases}$

Preuve :

1.
   - Montrons tout d'abord que si $M = \sup A$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x$.
     On supposera par l'absurde que $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A;\ x \leq M - \varepsilon$, par conséquent $M - \varepsilon$ devient un majorant de A, or M étant la borne supérieure de A ; c'est le plus petit des majorants de A donc :
     $M \leq M - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \leq 0$, qui est une contradiction.
   - A présent montrons que si M est un majorant de A qui vérifie
     $$\forall \varepsilon > 0;\ \exists x_0 \in A,\ M - \varepsilon < x_0$$
     alors M est le plus petit des majorants de A.
     Soit M' un autre majorant de A, d'où $x_0 \leq M'$, par conséquent ;
     $$\forall \varepsilon > 0;\ M - \varepsilon < x_0 \leq M' \Rightarrow \forall \varepsilon > 0;\ M - M' < \varepsilon$$
     d'où $M - M' \leq 0 \Leftrightarrow M \leq M'$.
2. On peut montrer la caractérisation de la borne inférieure de la même façon, (à faire en exercice).

$\square$

Exercice 1.6.1 *Etant donné l'ensemble* $A = \left\{ \frac{n+2}{n-2} \ /\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \right\}$.

1. *Montrer que A est borné.*
2. *Montrer que* $\sup A = 5, \inf A = 1$.
3. *Déterminer* $\max A$ *et* $\min A$ *s'ils existent.*

Solution.

1. On a : $\forall n \geq 3$:
   $$1 \leq n - 2 \leq n + 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{n+2}{n-2},$$
   d'où la partie A est minorée par 1. D'une autre part on a $\forall n \geq 3$:
   $$\begin{aligned} 4n \geq 12 &\Leftrightarrow 5n - 10 \geq n + 2 \\ &\Leftrightarrow 5\left(n-2\right) \geq n + 2 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{n+2}{n-2} \leq 5 \end{aligned}$$

d'où la partie A est majorée par 5, donc A est bornée.

2. Montrons que $\sup A = 5$

   5 est un majorant de A et $5 \in A$, pour $n = 3$ donc $\max A = 5 = \sup A$.

3. Montrons que $\inf A = 1$

   Soit $\varepsilon > 0$; cherchons $x \in A$, tel que $x < 1 + \varepsilon$, ceci revient à chercher $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ tel que

   $$\frac{n+2}{n-2} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{\varepsilon} + 2 < n,$$

   alors il suffit de prendre $n = \left[\frac{4}{\varepsilon} + 2\right] + 1$.

   On remarque que $1 \notin A$; sinon

   $$\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \text{ tel que } \frac{n+2}{n-2} = 1 \Leftrightarrow 2 = -2\,; \text{ absurde.}$$

   d'où $\min A$ n'existe pas.

$\triangle$

Propriétés 3 *1. Etant donnés A et B deux ensembles non vides, bornés de $\mathbb{R}$, tels que $A \subset B$, alors :*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

En effet ; on a

$$\inf A \leq x \leq \sup A; \forall x \in A \Rightarrow \inf A \leq \sup A,$$

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow \inf B \leq x;\ \forall x \in A$$

d'où $\inf B$ est un minorant de A, or $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, donc $\inf B \leq \inf A$ et on a

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \leq \sup B;\ \forall x \in A$$

d'où $\sup B$ est un majorant de A, or $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, donc $\sup A \leq \sup B$.

2. Etant donnés C et D deux ensembles non vides, bornés de $\mathbb{R}$, alors :

   (a) $\sup (C \cup D) = \max (\sup C, \sup D)$
   $\inf (C \cup D) = \min (\inf C, \inf D)$

   (b) $\sup (C \cap D) \leq \min (\sup C, \sup D)$
   $\inf (C \cap D) \geq \max (\inf C, \inf D)$

   (c) $\sup (C + D) = \sup C + \sup D$
   $\inf (C + D) = \inf C + \inf D$
   où $C + D = \{x + y \ /\ x \in C,\ y \in D\}$

(d) $\sup(-C) = -\inf C$
$\inf(-C) = -\sup C$
où $-C = \{-x \ / \ x \in C\}$

Exemple 1.6.2 *Soit* $A = \left\{\frac{n}{n+1}, (-1)^n \ , \ n \in \mathbb{N}\right\}$,
Montrer que $\sup A = 1$ *et* $\inf A = -1$.
On remarque que $A = C \cup D$, *où*

$$C = \left\{\frac{n}{n+1} \ , \ n \in \mathbb{N}\right\} \text{ et } D = \{(-1)^n \ , \ n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n \le n+1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \le 1,$$

d'où 1 *est un majorant de* C.
Soit $\varepsilon > 0$; *cherchons* $x \in C$, *tel que* $1 - \varepsilon < x$, *ceci revient à chercher* $n \in \mathbb{N}$, *tel que*

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n,$$

alors il suffit de prendre $n = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$. *ou* $\max\left(0, \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1\right)$ *donc* $\sup C = 1$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \le \frac{n}{n+1},$$

d'où 0 *est un minorant de* C, *or* $0 \in C$, *pour* $n = 0$ *donc* $\min C = 0 = \inf C$.
Pour l'ensemble D, *on a* $\sup D = 1$, $\inf D = -1$.
Par conséquent on a :
$\sup A = \max\{1, 1\} = 1$ *et* $\inf A = \min\{-1, 0\} = -1$.

1.7 Principe d'Archimède

Le corps des réels $\mathbb{R}$ vérifie le principe d'Archimède ; qui s'énonce comme suit

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N} : x < n.$$

c'est à dire que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Preuve :
Supposons par l'absurde que $\mathbb{N}$ est majoré dans $\mathbb{R}$, alors il existe $S \in \mathbb{R}$; tel que $S = \sup \mathbb{N}$, d'où

$$n \le S, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose aussi $n_0 = [S] + 1$, où $[S]$ désigne la partie entière de S, or $S < [S] + 1$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, S < n_0$; contradiction. □

Remarque : Il existe une autre version du principe d'Archimède.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x > 0, \ y \ge 0; \ \exists n \in \mathbb{N}^* : nx > y.$$

Preuve :
on va supposer par l'absurde que :

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^* : nx \leq y,$$

alors l'ensemble $A = \{nx \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie non vide, majorée par y dans $\mathbb{R}$ donc $\sup A = M$ existe, d'où

$$\begin{aligned} nx \leq M; \forall n \in \mathbb{N}^* \quad &\Rightarrow (n+1)\, x \leq M;\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\Leftrightarrow nx \leq M - x;\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

donc $M - x$ est un majorant de A et $M - x < M$, car $x > 0$, ce qui est absurde car M est le plus petit des majorants de A. □

1.8 La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.8.1 *Etant donnés deux nombres réels a et b distincts tels que $a < b$, alors l'intervalle $]a, b[$ contient au moins un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et on note $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

Preuve :
$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$, alors d'après le principe d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\frac{1}{b-a} < n,$$

d'où $\frac{1}{n} < b - a$, posons $p = [an]$, alors

$$\begin{aligned} p \leq an < p + 1 \quad &\Leftrightarrow \tfrac{p}{n} \leq a < \tfrac{p}{n} + \tfrac{1}{n} < a + (b - a) \\ &\Rightarrow a < \tfrac{p+1}{n} < b, \end{aligned}$$

et $\frac{p+1}{n} \in \mathbb{Q}$, donc $\frac{p+1}{n} \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$. □

1.9 La droite réelle achevée

Définition 1.9.1 *On appelle droite réelle achevée qu'on note par $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Propriétés 4
1. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}};\ -\infty \leq x \leq +\infty.$
2. $\forall x \in \mathbb{R};\ x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$; $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
   $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$, $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$
3. $\forall x > 0;\ x.(+\infty) = (+\infty)$; $x.(-\infty) = (-\infty)$
4. $\forall x < 0;\ x.(+\infty) = (-\infty)$; $x.(-\infty) = (+\infty)$
5. $(+\infty).(+\infty) = (+\infty)$, $(-\infty).(-\infty) = (+\infty)$
   $(+\infty).(-\infty) = (-\infty).(+\infty) = (-\infty)$

6. $\forall x \in \mathbb{R};\ \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0.$

Corollaire 1.9.2 *Toute partie non vide de* $\overline{\mathbb{R}}$, *admet une borne supérieure et une borne inférieure dans* $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 1.9.3 *Etant données* A *et* B *deux parties de* $\overline{\mathbb{R}}$, *telles que* $A = [5, +\infty]$ *et* $B = [-\infty, -1]$, *alors* $\sup A = +\infty$, $\inf B = -\infty$.