Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle

4.1 Définitions.

Définition 4.1.1 - *Une fonction réelle d'une variable réelle est une application f d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $F \subset \mathbb{R}$, notée*

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

On appelle x la variable réelle et $f(x)$ l'image de x par f.

On appelle graphe de f toute partie Γ_f du produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; telle que $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \ / \ x \in E\}$.

Le domaine de définition de f est l'ensemble des valeurs de $x \in E$ pour lesquelles la fonction $f(x) \in F$, on le note par D_f.

On note par $\mathcal{F}(E, F) = \{Ensemble \ des \ fonctions \ de \ E \ dans \ F\}$.

Définition 4.1.2 *(Parité d'une fonction)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f est dite paire si $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$: le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe $(y'y)$.

f est dite impaire si $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$: le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine o.

Définition 4.1.3 *(Périodicité d'une fonction)*

On dit que f est une fonction périodique s'il existe un nombre réel strictement positif T tel que :

$$\forall x \in D_f : f(x + T) = f(x).$$

Exemples 4.1.4 - *Pour $f(x) = \sin x$ ou $f(x) = \cos x$, on a $T = 2\pi$.*

- *Pour $f(x) = \tan x$, on a $T = \pi$.*
- *Pour $f(x) = x - [x]$, on a $T = 1$.*
- *Pour $f(x) = \cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$, on a $T = \dfrac{4\pi}{3}$.*

Remarques :

1. Si f est paire ou impaire, alors il suffit de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition.
2. Il existe des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires.
3. Si f est périodique de période T, alors il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T.

4.1.1 Fonctions monotones

Définition 4.1.5 *Soit $f : E \to F$ une fonction, telle que $E, F \subset \mathbb{R}$.*
f est dite croissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
f est dite décroissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
f est dite monotone si f est croissante ou décroissante.
f est dite strictement croissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
f est dite strictement décroissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
f est dite strictement monotone si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque : Si la fonction f est strictement monotone alors f est injective, voir Lemme 4.5.24.

4.1.2 Fonctions bornées

Définition 4.1.6 *Soit $f : E \to F$ une fonction, telle que $E, F \subset \mathbb{R}$.*
f est dite majorée sur E si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E : f(x) \leq M$.
f est dite minorée sur E si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E : m \leq f(x)$.
f est dite bornée sur E si f est minorée et majorée, ou s'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M, \forall x \in E$.

4.2 Limite d'une fonction

Définition 4.2.1 *Soit f une fonction définie d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.*

On dit que f admet une limite lorsque x tend vers x_0 et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ s'il existe un nombre réel l tel que

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Théorème 4.2.2 *Si f admet une limite au point x_0 alors cette limite est unique.*

Preuve :
Supposons par l'absurde que f admet deux limites différentes l_1 et l_2 $(l_1 \neq l_2)$

lorsque x tend vers x_0, d'où on a

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha_1 > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha_2 > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$,

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - f(x)) + (f(x) - l_2)|$$

alors pour $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$; on a

$$|l_1 - l_2| \leq |(f(x) - l_1)| + |(f(x) - l_2)| < \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$l_1 = l_2.$$

□

Définition 4.2.3 .

- On dit que f admet une limite l_g lorsque x tend vers x_0 à gauche ou par des valeurs inférieures et on note $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l_g$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- On dit que f admet une limite l_d lorsque x tend vers x_0 à droite ou par des valeurs supérieures et on note $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l_d$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Proposition 4.2.4 ***Remarques :***

1. *Si f admet une limite l lorsque x tend vers x_0 alors*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l.$$

2. *Si f admet une limite à gauche de x_0 notée l_g et une limite à droite de x_0 notée l_d ; telles que $l_g = l_d$ alors*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_g = l_d.$$

3. *Si les deux limites l_g et l_d existent et sont différentes alors f n'admet pas de limite lorsque x tend vers x_0.*

4.2.1 Autres limites

1. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

2. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < A)$

3. $\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x > \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

4. $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha < 0, \forall x \in I \ / \ x < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

5. $\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x > \alpha < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

6. $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \alpha < 0, \forall x \in I \ / \ x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

7. $\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x > \alpha \Rightarrow f(x) < A)$

8. $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists \alpha < 0, \forall x \in I \ / \ x < \alpha \Rightarrow f(x) < A)$

9. $\left(\lim\limits_{x\overset{<}{\to} x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A)$

10. $\left(\lim\limits_{x\overset{<}{\to} x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) < A)$

11. $\left(\lim\limits_{x\overset{>}{\to} x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

12. $\left(\lim\limits_{x\overset{>}{\to} x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) < A)$

4.2.2 Relation entre limite de fonctions et limite de suites

Théorème 4.2.5 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point de $[a,b]$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l.$
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $x_n \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $x_n \neq x_0$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$; on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.*

Preuve :
$(1) \overset{?}{\Rightarrow} (2)$

On a

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [a,b] \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n \in [a,b]$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_0$ et telle que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon' > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon'\right)$$

alors en particulier pour $\varepsilon' = \alpha$; on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

$(2) \overset{?}{\Rightarrow} (1)$

On suppose par l'absurde que la première assertion est fausse alors par la négation de la définition ; on a

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0, \exists x \in [a,b] \ / \ |x - x_0| < \alpha \wedge |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

en particulier pour $\alpha = \frac{1}{n}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \exists x_n \in [a,b] \ / \ |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 mais $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l; ce qui est absurde, alors la première assertion est vraie. □

Remarques :

1. Le théorème reste vrai pour $x = \pm\infty$ ou $l = \pm\infty$.
2. S'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a,b]$; qui convergent vers x_0 avec $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.
3. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a,b]$; qui converge vers x_0 mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ n'existe pas alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 4.2.6 *Soit* $f(x) = \sin\frac{1}{x}, \forall x \in \left[\frac{-1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ *et montrons que* $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ *n'existe pas.*

On considère deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\left[\frac{-1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$, *qui convergent vers* 0 *et on pose* $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \ \text{ et } y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$$

car

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 \ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$$

par conséquent $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ *n'existe pas.*

4.2.3 Opérations sur les limites de fonctions

Théorème 4.2.7 *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$; alors on a :*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = l_1.l_2$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \alpha [f(x)] = \alpha l_1$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ *où* $l_2 \neq 0$.

Formes indéterminées

On distingue 4 cas de limite où on ne peut pas conclure, on dit qu'on se trouve en présence d'une forme indéterminée F.I, si lorsque x tend vers x_0 on a

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$
   et $f+g$ qui se présente sous la forme $+\infty - \infty$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$
   et fg qui se présente sous la forme $(0)(\infty)$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$
   et $\frac{f}{g}$ qui se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$
   et $\frac{f}{g}$ qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Dans ces cas là on enlève l'indétermination par des transformations adéquates.

Exemple 4.2.8 $l = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \frac{0}{0}$ *F.I*
On a $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ *d'où*

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} 2\cos x = 2$$

4.3 Notations de Landau o et O.

Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$.

Définition 4.3.1 *On dit que f est négligeable devant g quand x tend vers x_0, et on écrit $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou bien $f = o(g)$ si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Remarques :

1. $f = o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$
2. $f = o(g) \Leftrightarrow \left(f(x) = g(x)\, h(x) / \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0 \right)$ on peut écrire aussi : $f = g.o(1)$.
3. Si $g(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, alors $f = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0.$

Définition 4.3.2 *On dit que f est dominée par la fonction g quand x tend vers x_0, et on écrit $f \underset{x_0}{=} O(g)$ ou bien $f = O(g)$ si :*

$$\exists K > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq K\, |g(x)|$$

- Les symboles o et O sont appelés notations de Landau.

Remarques :

1. Si $f = O(g)$ alors on peut écrire $f = g.o(1)$, ie, la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de x_0.
2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$est finie alors $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de x_0 d'où $f = O(g)$.
3. Si $g(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, alors $f = O(1) \Leftrightarrow f$ est bornée dans un voisinage de x_0.

Définition 4.3.3 *Soient f, g deux fonctions définies sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$ on a*

$$f \underset{+\infty}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ x > \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|.$$
$$f \underset{+\infty}{=} O(g) \Leftrightarrow \exists K > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ x > \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq K\, |g(x)|.$$

Exemples 4.3.4 *1.* $x \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. $\tan x \underset{0}{=} O(2x)$.

3. $x^2 \sin \frac{1}{x} \underset{+\infty}{=} -x^3 + o(x^4)$.

4. $\frac{1}{1-x} \underset{+\infty}{=} \frac{-1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Théorème 4.3.5 *Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$.*

1. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$ *, la réciproque n'est pas toujours vraie.*

2. $f = O(g), h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g)$

3. $f = o(g), h = o(g) \Rightarrow f + h = o(g)$

4. $f = o(g), h = O(1) \Rightarrow f.h = o(g)$

5. $f = o(g), h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g)$

6. $f = O(g), h = O(1) \Rightarrow fh = O(g)$

7. $f = o(g), h = O(f) \Rightarrow h = o(g)$

8. $f = O(g), h = o(f) \Rightarrow h = o(g)$

4.4 Fonctions équivalentes

Définition 4.4.1 *Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$.*

On dit que f est équivalente à g quand x tend vers x_0, et on note $f \underset{x_0}{\sim} g$ si $f - g = o(f)$ au voisinage de x_0.

Remarques :

1. $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = o(f) \Leftrightarrow f - g = o(g)$.
2. S'il existe un voisinage V de x_0, tel que f et g ne s'annulent pas dans $V \setminus \{x_0\}$, alors
$$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
3. La relation "f est équivalente à g quand x tend vers x_0" est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de x_0.

Théorème 4.4.2 *Soient f, f_1, g, g_1 des fonctions définies dans un voisinage de x_0, sauf peut être en x_0 telles que $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$; si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ existe aussi et les deux limites sont égales.*

Remarques :

1. Si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors $\frac{f}{g} \underset{x_0}{\sim} \frac{f_1}{g_1}$.
2. On a le même résultat pour le produit : si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ tel que : $\lim_{x \to x_0} f(x).g(x)$ existe alors $\lim_{x \to x_0} f_1(x).g_1(x)$ existe aussi et les deux limites sont égales, d'où si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors $f.g \underset{x_0}{\sim} f_1.g_1$.
3. Dans le calcul des limites ; on peut remplacer une fonction par sa fonction équivalente dans le produit et la division seulement, ceci n'est pas vrai dans le cas de la somme et la différence.
4. Si f est une fonction dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$; alors
$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemples 4.4.3 .

1/ $\sin x \underset{0}{\sim} x$, 2/ $\tan x \underset{0}{\sim} x$, 3/ $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$,
4/ $\ln(x+1) \underset{0}{\sim} x$, 5/ $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Exercice 4.4.4 *En utilisant les fonctions équivalentes calculer les limites suivantes :*

1. $l_1 = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1)(\tan x)^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x)^2}{x} = \lim_{x \to 0} (x)^2 = 0.$

2. $l_2 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1+(\sin x)^2\right)}{\sin \frac{x}{3}} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{\frac{x}{3}} = \lim_{x \to 0} \frac{(x)^2}{\frac{x}{3}} = \lim_{x \to 0} 3x = 0.$

3. $l_3 = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)}$

   Ici on se ramène au voisinage de 0 *par le changement de variables suivant*

$$C.V : t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$$

   d'où

$$l_3 = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(t+1)}{\sin t} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1.$$

4. $l_4 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2}{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}$

   Ici on se ramène au voisinage de 0 *par le changement de variables suivant*

$$C.V : t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$$

   d'où

$$l_4 = \lim_{t \to 0} \frac{\left(e^t - 1\right)^2}{\ln(t+1)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t \to 0} t = 0.$$

4.5 Fonctions continues

Définition 4.5.1 *1. Soit f une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

ceci est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2. *f est dite continue à droite de x_0 si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$, ceci est équivalent à*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

3. *f est dite continue à gauche de x_0 si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$, ceci est équivalent à*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

4. *f est continue en x_0 si f est continue à droite et à gauche de x_0 :*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

5. *Une fonction qui n'est pas continue en x_0 est dite discontinue en x_0.*
6. *Une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite continue sur I; si elle est continue en tout point de I.*

7. *L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $C(I)$.*

Exemple 4.5.2 1. *Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.*

2. *La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 1 & , si\ x = 0 \end{cases}$ est continue en $x = 0$, en effet,*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$$

3. *La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \ln x & , si\ x \geq 1 \\ \frac{x-1}{x^3-1} & , si\ x < 1 \end{cases}$ est discontinue en $x = 1$, en effet*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$$

et

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = f(1) = 0.$$

Théorème 4.5.3 *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\lim_{n\to +\infty} x_n = x_0$ alors :*

$$\lim_{n\to +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

4.5.1 Continuité uniforme

Définition 4.5.4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. f est dite uniformément continue sur I si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x_1, x_2 \in I \ / \ |x_1 - x_2| < \alpha \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Remarques :

1. La continuité uniforme concerne tous les points de l'intervalle, tandis que la continuité simple peut ne concerner qu'un point de l'intervalle.
2. Dans la continuité uniforme, le nombre α ne dépend pas de x_1, x_2, il ne dépend que de ε, tandis que pour la continuité en x_0, le nombre α dépend de ε et de x_0.
3. Toute fonction uniformément continue sur un intervalle I, est continue sur I, la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 4.5.5 *Montrer que :*

1. *La fonction $f(x) = x^2$, est uniformément continue sur $]0, 1]$,*

2. *La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
   Solution **:**
   1. Soit $\varepsilon > 0$, et soient $x_1, x_2 \in]0,1]$ alors on a :

$$0 < x_1 \leq 1 \text{ et } 0 < x_2 \leq 1 \Rightarrow 0 < x_1 + x_2 \leq 2$$

or

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1^2 - x_2^2\right| = |x_1 - x_2|(x_1 + x_2)$$

d'où

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|$$

alors il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} > 0$.
2. Si on prend $\varepsilon = 2$; on peut trouver deux points $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tels que : $x_1 = n + \frac{1}{n}$, $x_2 = n$ et pour $\alpha > 0$; on a

$$|x_1 - x_2| < \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < n;$$

il suffit alors de prendre $n = \left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1$ alors

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{n^2} + 2$$

d'où

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq 2;$$

par suite

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ / \ |x_1 - x_2| < \alpha \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

et donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Le procédé qui suit est une méthode pratique pour montrer qu'une fonction est uniformément continue.

Définition 4.5.6 *On dit qu'une fonction f définie de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est $k-$Lipschitzienne sur I si :*

$$\exists k \geq 0, \forall x_1, x_2 \in I \ : \ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Remarque : Une fonction $k-$Lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.

en effet ; pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$, tel que

$$\forall x_1, x_2 \in I \ / \ |x_1 - x_2| < \alpha \text{ alors } |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| < \varepsilon.$$

Définition 4.5.7 *On dit qu'une fonction f est contractante sur I si f est $k-$Lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$.*

Conclusion 1 *Une fonction contractante sur I est uniformément continue sur I.*

Exemple 4.5.8 *La fonction* $f(x) = \sqrt{x}$ *est une fonction contractante sur* $[1, +\infty[$.
En effet ;

$$\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty[: |f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right|$$

d'où

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2| ; \; k = \frac{1}{2}.$$

Théorème 4.5.9 (de Heine) *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$ *est une fonction uniformément continue sur* $[a, b]$.

Preuve :
On suppose par l'absurde que f est continue mais non uniformément continue sur $[a, b]$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel n, il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a, b]$ telles que

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon > 0 \tag{4.1}$$

Comme les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $[a, b]$ alors d'après le théorème de Bolzano Weierstrass on peut en extraire deux sous-suites convergentes $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(x'_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Soit $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} x'_{n_k} = x_0$ aussi car $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$, et comme $x_{n_k} \in [a, b] ; \forall k \in \mathbb{N}$, alors $x_0 \in [a, b]$ et donc f est continue en x_0 et on a

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} f\left(x'_{n_k}\right) = f(x_0)$$

ce qui est absurde car $\left|f(x_{n_k}) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| > 0; \forall k \in \mathbb{N}$. □

4.5.2 Prolongement par continuité

Définition 4.5.10 *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I, *sauf peut être en* $x_0 \in I$, *si* f *admet une limite finie* l *en* x_0 ; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, *alors la fonction définie par*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ l & si\ x = x_0 \end{cases} ;$$

est appelée prolongement par continuité de f *sur* I.

Remarques :

1. Les deux fonctions $\widetilde{f}$ et f coincident sur $I \setminus \{x_0\}$.
2. La fonction $\widetilde{f}$ est continue en x_0.

Exemples 4.5.11 *1. La fonction définie par* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ *est prolongeable par continuité en* $x_0 = 0$*, car* $\lim_{x\to\ 0} f(x) = \lim_{x\to\ 0} \frac{\sin x}{x} = 1$*, d'où*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

2. La fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)$ *n'est pas prolongeable par continuité en* $x_0 = 0$*, car* $\lim_{x\to\ 0} f(x) = +\infty$*.*

4.5.3 Théorèmes sur les fonctions continues

Théorème 4.5.12 (Opérations sur les fonctions continues) *Soient* f *et* g *deux fonctions continues en* x_0 *et soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*; alors les fonctions* $f+g$*,* $f.g$*,* $\alpha f + \beta g$*,* $|f|$ *et* $\frac{f}{g}$ *(si* $g(x_0) \neq 0$*) sont continues en* x_0*.*

Théorème 4.5.13 *Soient* f *et* g *deux fonctions, telles que* $f : I_1 \to I_2$*,* $g : I_2 \to \mathbb{R}$*,* I_1, I_2 *étant deux intervalles de* $\mathbb{R}$*. Si* f *est une fonction continue en* $x_0 \in I_1$*, et* g *une fonction continue en* $f(x_0) \in I_2$*, alors* $g \circ f : I_1 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* x_0*.*

Preuve :
Soit $x_0 \in I_1$ alors $f(x_0) \in I_2$ et comme g est continue en $y_0 = f(x_0)$; on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha' > 0; \forall y \in I_2 : |y - y_0| < \alpha' \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

or comme f est continue en x_0 alors pour $\varepsilon' = \alpha'$; on a

$$\exists \alpha > 0; \forall x \in I_1 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall x \in I_1 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$$

□

Théorème 4.5.14 *Soit* f *une fonction définie de l'intervalle fermé borné* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Si* f *est continue sur* $[a, b]$ *alors* f *est bornée sur* $[a, b]$*.*

Preuve :
On suppose par l'absurde que f n'est pas bornée sur $[a, b]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] \ / \ |f(x_n)| > n$$

dans ce cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; et donc elle admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, et on a

$$\lim_{x\to\ 0} x_{n_k} = x_0 \text{ avec } x_0 \in [a,b]$$

et

$$\lim_{k\to\ +\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty \text{ car } \forall n \in \mathbb{N} :\ |f(x_n)| > n,$$

or f est continue sur $[a,b]$ alors $|f|$ est continue sur $[a,b]$; d'où

$$\lim_{k\to\ +\infty} |f(x_{n_k})| = |f(x_0)| < \infty,$$

ce qui est absurde. □

Théorème 4.5.15 *Toute fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$; *atteint au moins sa borne supérieure et sa borne inférieure dans* $[a,b]$.

Preuve :
Comme f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$, donc $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M$ existe

$$\forall x \in [a,b] : f(x) \leq M$$

on suppose par l'absurde que f n'atteint pas sa borne supérieure c'est à dire que

$$\forall x \in [a,b] : f(x) < M$$

et on considère la fonction $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$, g est continue sur $[a,b]$ alors bornée sur $[a,b]$, donc $\sup\limits_{x\in[a,b]} g(x) = \alpha$ existe, or

$$g(x) > 0; \forall x \in [a,b] \Rightarrow \alpha > 0$$

On a aussi

$$\forall x \in [a,b] : g(x) \leq \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{M-f(x)} \leq \alpha \Leftrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{\alpha} < M$$

ce qui est absurde car M étant la borne supérieure ; est le plus petit des majorants de $\{f(x)\,; x \in [a,b]\}$.

Comme f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$, donc $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m$ existe

$$\forall x \in [a,b] : m \leq f(x)$$

on suppose par l'absurde que f n'atteint pas sa borne inférieure c'est à dire que

$$\forall x \in [a,b] : m < f(x)$$

et on considère la fonction $g(x) = f(x) - m$, g est continue sur $[a,b]$ alors bornée sur $[a,b]$, donc $\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x) = \beta$ existe, or

$$g(x) > 0; \forall x \in [a,b] \Rightarrow \beta > 0$$

On a aussi

$$\forall x \in [a,b] : g(x) \geq \beta \Leftrightarrow f(x) - m \geq \beta \Leftrightarrow f(x) \geq m + \beta > M$$

ce qui est absurde car m étant la borne inférieure ; est le plus grand des minorants de $\{f(x) ; x \in [a,b]\}$. □

Théorème 4.5.16 *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a,b]$, si $f(a).f(b) < 0$ alors $\exists! M \in]a;b[\ / \ f(M) = 0$.*

Pour la preuve du théorème nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.5.17 *Soit E une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit M sa borne supérieure alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers M.*

Preuve du Lemme :
Comme M est la borne supérieure de E ; alors c'est le plus petit des majorants de E et on a

$$\forall \varepsilon > 0; \ \exists x \in E, \ M - \varepsilon < x \leq M$$

en particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$; pour tout $n \in \mathbb{N}$; il existe un élément x_n dans E, telle que :

$$M - \frac{1}{n} < x_n \leq M$$

alors d'après le théorème d'encadrement d'une suite on a $\lim\limits_{n\to +\infty} x_n = M$. □

Preuve du théorème :
On va supposer que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$ et on pose

$$E = \{x \in [a,b] \ \ / \ \ f(x) \leq 0\}$$

On remarque que E est un ensemble non vide car $a \in E$ et que E est majoré par b, alors E admet une borne supérieure ; soit $M = \sup E$ et on montre que $f(M) = 0$.

On a $M \in [a,b]$ et comme $M = \sup E$ alors d'après le lemme précédent ; il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers M alors $f(x_n) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, et comme f est continue donc par passage à la limite, on a $f(M) \leq 0$.

Comme $M = \sup E$ alors

$$\forall x \in]M,b[: x \notin E \Rightarrow f(x) > 0$$

d'où il existe aussi une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]M,b[$ qui converge vers M

d'où

$$f(y_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

alors par passage à la limite ; on a $f(M) \geq 0$, par conséquent $f(M) = 0$.

On suppose par l'absurde qu'il existe un autre réel $M' \neq M$ telque $f(M') = 0$, d'où $f(M') = f(M)$, avec $M' \neq M$, ce qui contredit la stricte monotonie. □

Théorème 4.5.18 (Des valeurs intermédiaires généralisé) *Soit f une fonction continue sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ alors*

$$\forall y \in \left]f(x_1), f(x_2)\right[: \exists x_0 \in \left]x_1, x_2\right[\ / \ y = f(x_0).$$

(en supposant que $f(x_1) < f(x_2)$).

Preuve :
Soit $y \in \left]f(x_1), f(x_2)\right[$, alors

$$f(x_1) - y < 0 \ , \ f(x_2) - y > 0$$

alors en posant $g(x) = f(x) - y$ qui est une fonction continue sur $[x_1, x_2]$; on remarque que $g(x_1) < 0$ et $g(x_2) > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires ; on a

$$\exists x_0 \in \left]x_1, x_2\right[\ / \ g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = y$$

□

Corollaire 4.5.19 *L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Théorème 4.5.20 (du point fixe) *Soit f une fonction continue d'un segment non vide $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $[a, b]$, alors il existe au moins un point fixe $x_0 \in [a, b]$, ie $f(x_0) = x_0$. Géométriquement ; le graphe rencontre la droite d'équation $y = x$ (la 1ère bissectrice) au point d'abscisse x_0.*

Preuve :
On pose la fonction $g(x) = f(x) - x$ sur $[a, b]$, g est continue sur $[a, b]$, on remarque que $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.

Si $g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = a \Rightarrow x_0 = a$.

Si $g(b) = 0 \Leftrightarrow f(b) = b \Rightarrow x_0 = b$.

Sinon $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a

$$\exists x_0 \in \left]a, b\right[\ / g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0.$$

□

Exemple 4.5.21 *La fonction* $f(x) = x^2$ *est continue sur* $[-1, 1]$ *et l'intervalle est stable par* f*, ie,* $f([-1, 1]) \subset [-1, 1]$, *d'où* f *admet au moins un point fixe dans l'intervalle* $[-1, 1]$.

En effet,

$$x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité du point fixe.

Théorème 4.5.22 (Banach) *Soit* I *un segment non vide de* $\mathbb{R}$*, et* f *une fonction contractante de* $[a, b]$ *dans* $[a, b]$ *alors :*
- f *admet un unique point fixe* l *dans* $[a, b]$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est convergente vers l*.*

Preuve :
Comme f est contractante sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$, donc continue sur $[a, b]$, d'où d'après le théorème du point fixe ; il existe au moins $x_0 \in [a, b]$, tel que $f(x_0) = x_0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux points fixes $x_1, x_2 \in [a, b]$, tels que $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, or f est contractante sur $[a, b]$ d'où

$$\exists k : 0 \leq k < 1,\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| \Leftrightarrow 1 \leq k\ , \text{(contradiction)}.$$

□

Théorème 4.5.23 *Etant donné* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction monotone de* I *dans* $\mathbb{R}$*.* f *est continue si et seulement si* $f(I)$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*.*

Lemme 4.5.24 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$*; une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*. Si* f *est strictement monotone sur* I*, alors* f *est injective sur* I*.*

Preuve :
On suppose que f est strictement croissante, et soient x_1 et x_2 deux points de I, tels que $x_1 \neq x_2$ alors on a soit

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

soit

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

et dans les deux cas $f(x_1) \neq f(x_2)$, d'où f est injective sur I. □

Théorème 4.5.25 (inversion d'une fonction) *Une fonction f continue et strictement monotone d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective de I dans $f(I)$ et sa fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ existe , elle est continue et suit la monotonie de f.*

Preuve :
f est surjective de I sur $f(I)$, et comme f est strictement monotone alors f est injective donc bijective sur $f(I)$, alors f^{-1}existe et elle suit la monotonie de f; en effet, on suppose que f est strictement croissante et soient $y_1, y_2 \in f(I)$; tel que $y_1 < y_2$, alors
$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2),$$
car f^{-1} est injective aussi ; d'où
$$\exists x_1, x_2 \in I; \text{ tels que } f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2$$
donc $x_1 \neq x_2$. On suppose par l'absurde que $x_1 > x_2$ alors comme f est strictement croissante $f(x_1) > f(x_2)$, ce qui est absurde car $y_1 < y_2$, donc
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2),$$
d'où f^{-1} est strictement croissante.

Comme f est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle, or f^{-1} existe d'où $f^{-1}(f(I)) = I$ est un intervalle donc f^{-1} est continue.

□