Chapitre 5

Les fonctions usuelles et élémentaires et leurs propriétés

1.1 Fonctions usuelles

Définition 1 *On appelle* ***fonctions usuelles*** *les fonctions suivantes:*
1) la fonction puissance ;
2) la fonction exponentielle de base a ($a > 0$, $a \neq 1$);
3) la fonction logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$);
4) les fonctions trigonométriques: sinus, cosinus, tangente et cotangente;
5) les fonctions trigonométriques inverses : arcsinus, arccosinus, arctangente, arccotangente .

1.1.1 La fonction puissance : $y = f(x) = x^a$. où $a \in R$.

On distingue plusieurs cas suivant l'exposant α qu'on regroupe dans un tableau:

a	fonctions	Domaines de définition
$a = 0$	$x^0 = 1$ (constante)	$\mathbb{R}$
$a = n \in \mathbb{N}^*$	x^n (monôme)	$\mathbb{R}$
$a = -n \in \mathbb{N}^*$	$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$
$a = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$	$x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q \text{ impair et } p \text{ positif,} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } q \text{ impair et } p \text{ négatif,} \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } q \text{ pair et } p \text{ positif,} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } q \text{ pair et } p \text{ négatif,} \end{cases}$
$a \in \mathbb{R}$,	x^a (voir exponentielle)	$\mathbb{R}_+^*$

1.1.2 Fonction exponentielle de base a $(a > 0,\ a \neq 1)$

Définition 2 *On appelle* ***fonction exponentielle de base*** $(a > 0,\ a \neq 1)$ *la fonction définie par*

$$y = a^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés 3 *Soit* $a > 0,\ a \neq 1$. *On a les propriétés suivantes:*
i) $a^1 = a,\ \ a^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
ii) $f(x) = a^x$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *si* $a > 1$, *et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$ *si* $0 < a < 1$;
iii) $a^{x+x'} = a^x.a^{x'}$, $\forall x, x' \in \mathbb{R}$;
iv) $(a^x)^{x'} = a^{x \cdot x'}$, $\forall x, x' \in \mathbb{R}$;
v) $(ab)^x = a^x.b^x$, $\forall b > 0,\ b \neq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Cas particulier. Si $a = \mathrm{e}$, où e est le nombre de Néper, la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$, notée aussi $f(x) = \exp x$, est appelée **fonction exponentielle** tout court.

1.1.3 Fonction logarithme de base a $(a > 0, a \neq 1)$

La fonction exponentielle $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle est inversible. Ainsi on a la définition suivante du logarithme:

Définition 4 *On appelle* ***fonction logarithme de base*** $a > 0,\ a \neq 1$ *la fonction inverse de l'exponentielle de même base, notée* $y = \log_a x$, *définie sur* $]0, +\infty[$, *c'est à dire que*

$$y = \log_a x = y,\ x > 0 \Longleftrightarrow x = a^y,\ y \in \mathbb{R}.$$

Cas particuliers.

Si $a = e$, alors on note la fonction logarithme de base e par $f(x) = \log x$ ou $f(x) = \ln x$, appelée **logarithme népérien** ou **fonction logarithme**, tout court.

Si $a = 10$, $f(x) = \log_{10} x$ est le **logarithme décimal.**

Propriétés 5 *A partir des propriétés de l'exponentielle, on obtient les propriétés suivantes de la fonction logarithme:*

i) $\log_a a = 1,\ \log_a x = 0 \Longleftrightarrow x = 1;$

ii) $f(x) = \log_a x$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *si* $a > 1$ *et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *si* $0 < a < 1;$

iii) $\log_a(x.x') = \log_a x + \log_a x'$, $\forall x, x' \in \mathbb{R}_+^*;$

iv) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*;$

v) *On a la relation:* $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

1.1.4 Les fonctions trigonométriques

Fonctions sinus et cosinus

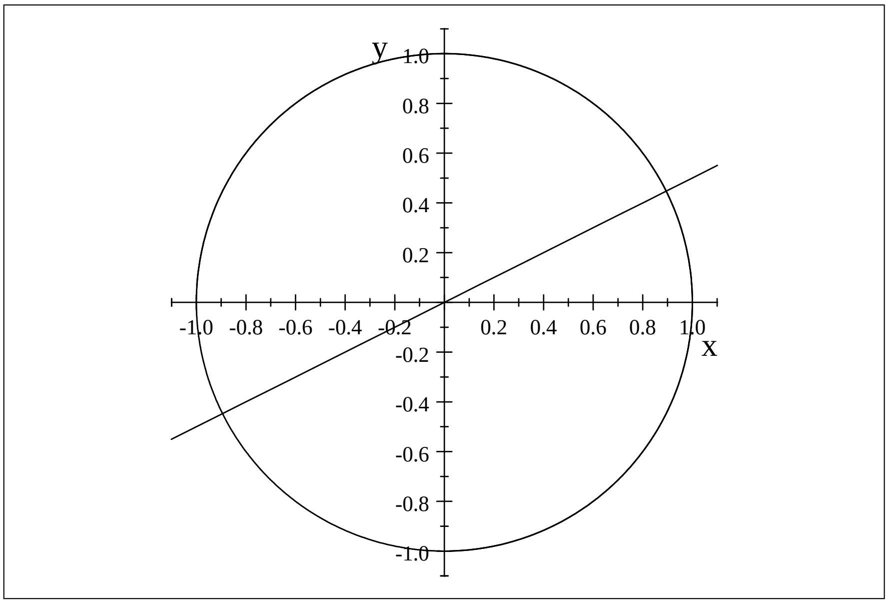
Soit $x \in \mathbb{R}$. Désignons par M le point du cercle trigonométrique tel que l'angle compris entre l'axe des abscisses Ox et $\overrightarrow{OM}$ est égal à x (en radians) et par P et Q, ses projections respectives sur les axes des sinus et des cosinus . On définit alors les fonctions suivantes:

i) la fonction sinus par

$$y = \sin x = \overline{OP}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,$$

ii) la fonction cosinus par

$$y = \cos x = \overline{OQ}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$



Propriétés 6 *Les propriétés suivantes sont vraies:*

i) $|\sin x| \leq 1$, $\qquad |\cos x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R};$

ii) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

iii) $\sin x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi,\quad \cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

iv) $\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
v) $\sin(x \pm x') = \sin x \cos x' \pm \sin x' \cos x$,
$\cos(x \pm x') = \cos x \cos x' \mp \sin x \sin x'\ ,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}$;
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$;
vi) $\sin x \pm \sin x' = 2 \sin \frac{x \pm x'}{2} \cos \frac{x \mp x'}{2}$,
$\cos x + \cos x' = 2 \cos \frac{x + x'}{2} \cos \frac{x - x'}{2}$,
$\cos x - \cos x' = -2 \sin \frac{x + x'}{2} \sin \frac{x - x'}{2}\ ,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}$;
vii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
viii) $0 \le |\sin x| \le |x|\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
ix) $y = \sin x$ est strictement croissante sur les intervalles $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$
et strictement décroissante sur les intervalles $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$;
x) $y = \cos x$ est strictement croissante sur les intervalles $[-\pi + 2k\pi,\ 2k\pi]$ $(k \in \mathbb{Z})$
et strictement décroissante sur les intervalles $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Fonctions tangente et cotangente

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Désignons par M le point du cercle trigonométrique correspondant à x (en radians), par (Δ) la droite portant $\overrightarrow{OM}$, par N l'intersection de l'axe des tangentes avec (Δ), par L l'intersection de l'axe des cotangentes avec (Δ), par A l'intersection des axes tangente et cosinus, et par B l'intersection des axes cotangente et sinus (voir le cercle trigonométrique). On définit alors les fonctions suivantes:
i) fonction tangente par :

$$y = \operatorname{tg} x = \overline{AN}\ ,\ \forall\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ;$$

ii) fonction cotangente par :

$$y = \operatorname{ctg} x = \overline{BL}\ ,\ \forall x \neq k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

Propriétés 7 *On démontre, à partir de considérations géométriques et des propriétés des fonctions sinus et cosinus, les propriétés suivantes:*

i) tg$= \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
ii) $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
iii) $-\infty < \operatorname{tg} x < +\infty,\ \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ -\infty < \operatorname{ctg} x < +\infty\ ,\ \forall x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$;
iv) $\operatorname{tg} x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$;
v) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\ \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x\ ,\ \forall x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z}$;
vi) $y = \operatorname{tg} x$ est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$;
vii) $y = \operatorname{ctg} x$ est strictement décroissante sur $]k\pi,\ (k+1)\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$;
viii) $\operatorname{tg}(x \pm x') = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} x'}{1 \mp \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} x'}\ ,\ \forall\ x, x' \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$;
ix) $\operatorname{ctg}(x \pm x') = \frac{\operatorname{ctg} x . \operatorname{ctg} x' \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} x'}\ ,\ \forall x, x' \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$;
x) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} x' = \frac{\sin(x \pm x')}{\cos x . \cos x'}\ ,\ \forall x, x' \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$;
xi) $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} x' = \frac{\sin(x \pm x')}{\sin x . \sin x'}\ ,\ \forall x, x' \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

1.1.5 Fonctions trigonométriques inverses

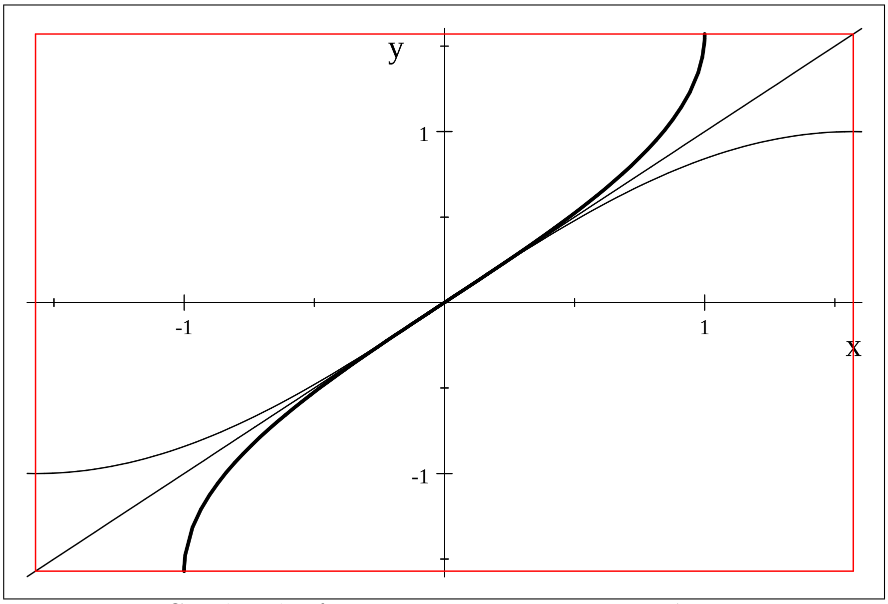
Fonction arcsinus

La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ n'est pas bijective, mais sa restriction à $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ l'est pour chaque k; en particulier pour $k=0$, $\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est inversible et son inverse est appelée fonction **arcsinus**, notée par:

$$\begin{array}{rccc} \arcsin : & [-1,1] & \to & \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & y = \arcsin x. \end{array}$$

c'est à dire que:

$$y = \arcsin x,\ x \in [-1,1] \ \Leftrightarrow\ x = \sin y,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



Graphes des fonctions $x \to \sin x$ et **x→arcsinx.**

Propriétés 8 *i)* $\arcsin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
ii) $x \mapsto \arcsin x$ *est stictement croissante sur* $[-1,1]$;
iii) $x \mapsto \arcsin x$ *est impaire car* $\forall x \in [-1,1] : \arcsin(-x) = -\arcsin x$;
iv) $\forall x \in [-1,1] : \sin(\arcsin x) = x$;
v) $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] : \arcsin(\sin x) = x$;
vi) $\forall x \in [-1,1] : \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Démonstration.
Les propriétés i) à v) découlent immédiatement de la bijection et des propriétés générales des fonctions inversibles.
Démontrons maintenant la propriété v)
Soit $x \in [-1,1]$. Posons $\arcsin x = a \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $(\cos a \geq 0)$. D'après les propriétés des fonctions sinus et cosinus, on a:

$$0 \leq \cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

■

Remarque 9 *La propriétés v) est fausse si x appartient à d'autres intervalles.*
Par exemple: $\arcsin\left(\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ *mais non pas égale à* $\dfrac{3\pi}{4}$.

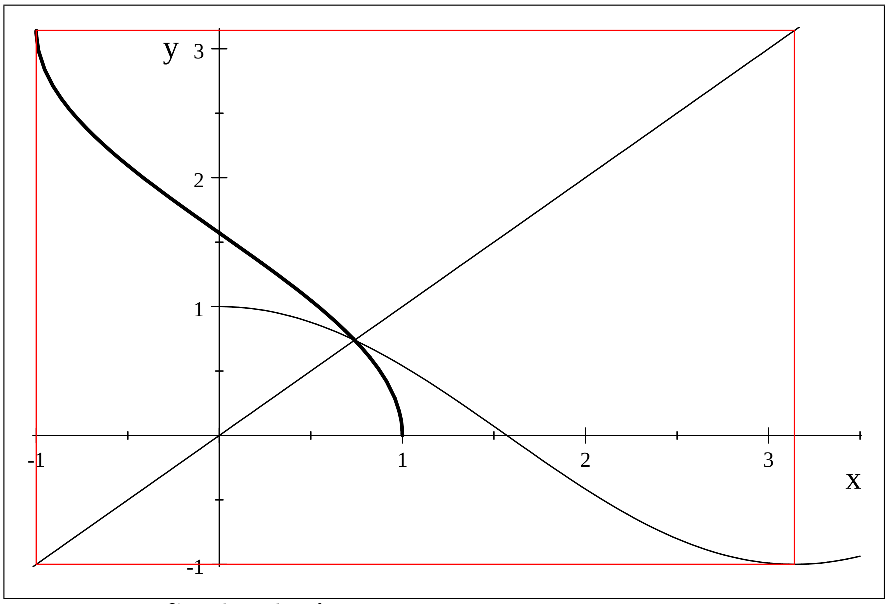
Fonction arccosinus

La fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ n'est pas bijective, mais sa restriction à $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ l'est pour chaque k; en particulier pour $k = 0$, $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ est inversible et son inverse est appelée fonction **arccosinus**, notée par:

$$\begin{array}{rccc} \arccos : & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & y = \arcsin x. \end{array}$$

c'est à dire que:

$$y = \arccos x,\ x \in [-1,1] \ \Leftrightarrow\ x = \cos y,\ y \in [0,\pi]\,.$$



Graphes des fonctions $x \to \cos x$ et **x→arccosx.**

Propriétés 10 *i)* $\arccos x = 0 \Leftrightarrow x = 1$;
ii) $x \mapsto \arccos x$ *est stictement décroissante sur* $[-1,1]$;
iii) $\forall x \in [-1,1] : \cos(\arccos x) = x$;
iv) $\forall x \in [0,\pi] : \arccos(\cos x) = x$;
v) $\forall x \in [-1,1] : \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$;
vi) $\forall x \in [-1,1] : \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration.
Les propriétés i) à v) découlent immédiatement de la bijection et des propriétés générales des fonctions inversibles.
La démonstration de la propriété vi) est analogue à celle de la propriété vi) de la fonction arcsinus précédente. Démontrons maintenant la propriété vi).
Soit $x \in [-1,1]$. Posons $\alpha = \arcsin x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\beta = \arccos x \in [0,\pi]$. On a d'après les propriétés des fonctions sinus et cosinus et les propriétés vi) de arcsinus et vi) de arccosinus:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ &= xx + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = 1. \end{aligned}$$

Comme $\alpha + \beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, alors on déduit que $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$. ■

Remarques 11 *1) La propriétés iv) est fausse si x appartient à d'autres intervalles.*
Par exemple: $\arccos\left(\cos\dfrac{-\pi}{4}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ *mais non pas égale à* $\dfrac{-\pi}{4}$.
2) La fonction $x \mapsto \arccos x$ n'est ni paire ni impaire.

Fonction arctangente

La fonction $\mathrm{tg} : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective, mais sa restriction à $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ l'est pour chaque k; en particulier pour $k = 0$, $\mathrm{tg} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est inversible et son inverse est appelée fonction **arctangente**, notée par:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{arctg} : & \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \mapsto & y = \mathrm{arctg}\, x. \end{array}$$

c'est à dire que:

$$y = \mathrm{arctg}\, x,\ x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ x = \mathrm{tg}\, y,\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

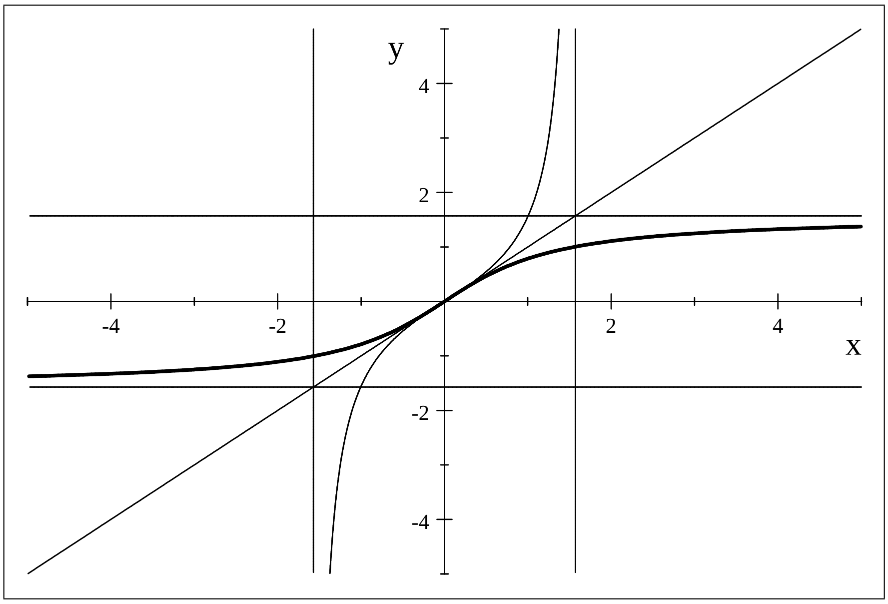


Figure 1.1: Graphes des fonctions $x \to \mathrm{tg}\, x$ et **x→arctgx.**

Propriétés 12 *i)* $\mathrm{arctg}\, x = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
ii) $x \mapsto \mathrm{arctg}\, x$ *est stictement croissante sur* $\mathbb{R}$;
iii) $x \mapsto \mathrm{arctg}\, x$ *est impaire car* $\forall x \in \mathbb{R} : \mathrm{arctg}\,(-x) = -\,\mathrm{arctg}\, x$;
iv) $\forall x \in \mathbb{R} : \mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, x) = x$;
v) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\, x) = x$;

Démonstration.
Les propriétés i) à v) découlent immédiatement de la bijection et des propriétés générales des fonctions inversibles. ∎

Remarques 13 *1) La propriétés v) est fausse si x appartient à d'autres intervalles.*
Par exemple: $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{4}\right) = \mathrm{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$ *mais non pas égale à* $\frac{3\pi}{4}$.
2) $\mathrm{arctg}\, x \neq \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$.

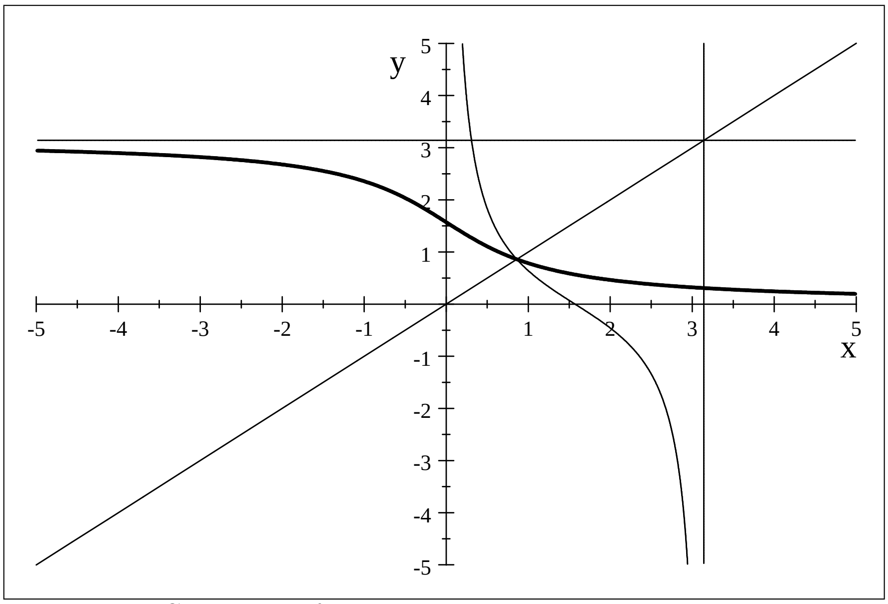
Fonction arccotangente

La fonction $\mathrm{ctg} : \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective, mais sa restriction à $]k\pi, (k+)\,\pi[$ l'est pour chaque k; en particulier pour $k = 0$, $\mathrm{ctg} :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ est inversible et son inverse est appelée fonction **arccotangente**, notée par:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{arcctg} : & \mathbb{R} & \to &]0, \pi[\\ & x & \mapsto & y = \mathrm{arcctg}\, x. \end{array}$$

c'est à dire que:

$$y = \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y,\ y \in]0, \pi[\,.$$



Graphes des fonctions $x \to \operatorname{ctg} x$ et **x→arcctgx.**

Propriétés 14 *i)* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arcctg} x \neq 0$;
ii) $x \mapsto \operatorname{arcctg} x$ *est stictement décroissante sur* $\mathbb{R}$;
iii) $\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;
iv) $\forall x \in]0, \pi[: \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$;
v) $\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;
vi) $\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration.
Les propriétés i) à v) découlent immédiatement de la bijection et des propriétés générales des fonctions inversibles.
La démonstration de la propriété vi) est analogue à celle de la propriété vi) de la fonction arccosinus précédente. Démontrons la propriété v). ■

Remarques 15 *1) La propriétés iv) est fausse si x appartient à d'autres intervalles.*
Par exemple: $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}\right) = \operatorname{arcctg}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ *mais non pas égale à* $\dfrac{5\pi}{4}$.
2) La fonction $x \mapsto \operatorname{arcctg} x$ *n'est ni paire ni impaire.*
3) $\operatorname{arcctg} x \neq \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$ *et* $\operatorname{arcctg} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

1.2 Fonctions élémentaires.

Définition 16 *On appelle fonction élémentaire toute fonction réelle obtenue à partir de fonctions usuelles à l'aide d'un nombre fini d'opérations arithmétiques et de compositions de fonctions.*

1.2.1 Fonctions polynomiales et rationnelles

Définition 17 *On appelle:*
i) *fonction rationnelle entière ou fonction polynmiale réelle sur* $\mathbb{R}$, *une fonction élémentaire* $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de la forme :*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots\ + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, *sont appelés coefficients de P. Si* $a_k \neq 0$ *et* $a_j = 0,\ \forall j > k$, *l'expression*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

est appelée polynôme réel de degré $k \in \mathbb{N}$ *et on écrit* $\deg P = k$;
ii) fonction rationnelle *la fonction élémentaire définie par* **:**

$$x \longmapsto f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m}$$

définie sur l'ensemble $D = \left\{x \in X : b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m \neq 0\right\}$ *où* $a_0,\ a_1, ..., a_n,\ b_0,\ b_1, ...,\ b_m \in \mathbb{R}$.

1.2.2 Fonctions hyperboliques

Définition 18 *On appelle fonctions hyperboliques les fonctions suivantes:*
1) la fonction sinus hyperbolique définie par:

$$x \longmapsto \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

2) la fonction cosinus hyperbolique définie par:

$$x \longmapsto \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R};$$

3) la fonction tangente hyperbolique définie par:

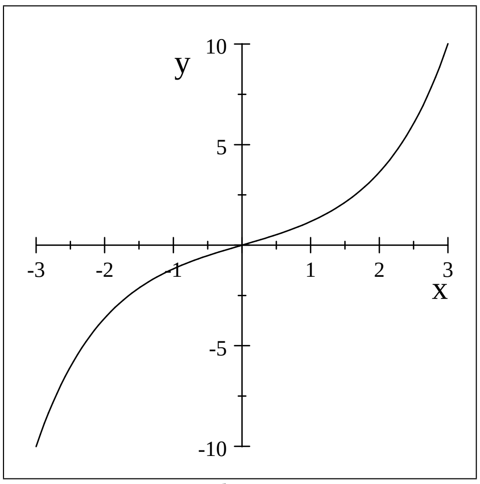
$$x \longmapsto \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\mathrm{e}^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ ,\ x \in \mathbb{R};$$

4) la fonction cotangente hyperbolique définie par :

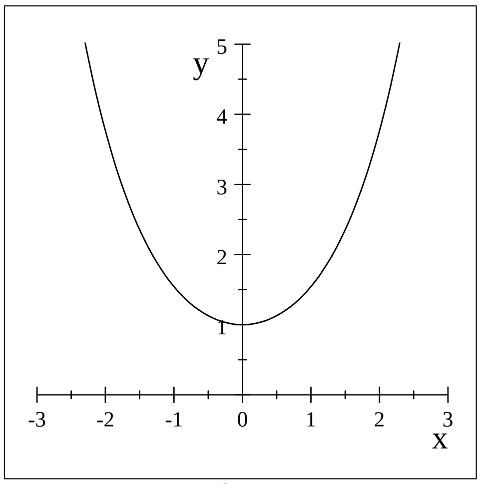
$$x \longmapsto cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\ ,\ x \in \mathbb{R}^*.$$

Propriétés 19 ***i)*** $shx = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *et* $\forall x \in \mathbb{R},\ chx \geq 1$,
ii) $thx = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ cthx \neq 0$,
iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ sh(-x) = -shx$ *et* $ch(-x) = chx$,
iv) $\forall x \in \mathbb{R},\ th(-x) = -thx$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ cth(-x) = -cthx$,
v) $\forall x \in \mathbb{R},\ |thx| < 1$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |cthx| > 1$,
vi) $x \longmapsto shx$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, $x \longmapsto chx$ *est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0]$ *et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$, $x \longmapsto thx$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. $x \longmapsto cthx$ *est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
vii) $\forall x, x' \in \mathbb{R}$: **1**) $sh(x \pm x') = shx.chx' \pm shx'.chx$, **2**) $ch(x \pm x') = chx.chx' \pm shx.shx'$.

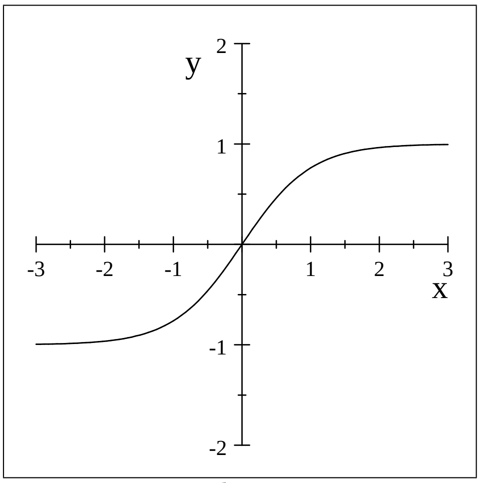
Cas particuliers: $\forall x \in \mathbb{R}$, **a)** $\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$, **b)** $\operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$, **c)** $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.



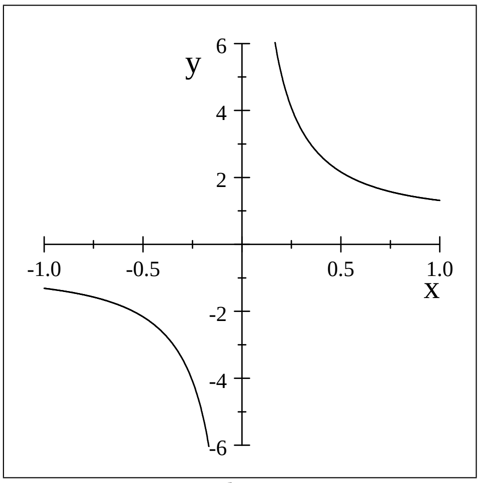
sh$x$



ch$x$



th$x$



cth$x$

1.2.3 Fonctions hyperboliques inverses

Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sh: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective, donc inversible. Son inverse est appelée fonction *argument sinus hyperbolique*, notée:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \text{argsh}x, \end{aligned}$$

c'est à dire que: $y = \text{argsh}x,\ x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x = \text{sh}y,\ y \in \mathbb{R}$.

Grâce au théorème suivant, la fonction $y = \text{argsh}x$ peut s'exprimer en fonction du logarithme comme suit.

Théorème 20 *argshx* $= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit y un élément donné de $\mathbb{R}$. Résolvons l'équation d'inconnue x réelle telle que $y = \text{sh}x$. On obtient alors, d'après la définition de sh$x$:

$$2y = e^x - e^{-x} \Longleftrightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1 \Longleftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

En posant $t = e^x$, on obtient une équation du second degré de la forme:

$$t^2 - 2yt - 1 = 0.$$

En résolvant cette équation en t, on trouve deux solutions: $t_1 = y - \sqrt{y^2+1} < 0$ et $t_2 = y + \sqrt{y^2+1} > 0$. La première solution t_1 est à rejeter car $t = e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, et donc on obtient $t = e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, d'où, en appliquant le logarithme:

$$x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

■

Propriétés 21 ***i)*** *argshx* $= 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, *argsh*$(-x) = -$*argshx*;
iii) $x \longmapsto$ *argshx est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$,
iv) $\forall x \in \mathbb{R}$, *argsh(shx)* $= x$;
v) $\forall x \in \mathbb{R}$, *sh(argshx)* $= x$.

Démonstration. Conséquences des propriétés de la fonction $x \longmapsto \text{sh}x$ et des propriétés des fonctions inverses.
■

Fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction ch: $]-\infty, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ n'est pas bijective, mais sa restriction à $[0, +\infty[$ l'est et donc inversible. Son inverse est appelée fonction *argument cosinus hyperbolique*, notée:

$$\begin{aligned} \arg\text{ch} :\ [1, +\infty[&\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto y = \arg\text{ch}x, \end{aligned}$$

c'est à dire que: $y = \text{argch}x,\ x \in [1, +\infty[\Longleftrightarrow x = \text{ch}y,\ y \in [0, +\infty[$.

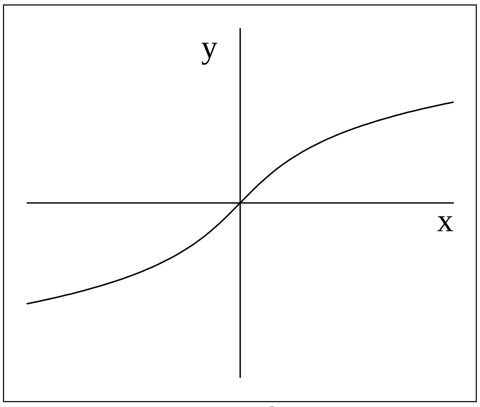
Grâce au théorème suivant, la fonction $x \longmapsto \text{argch}x$ peut s'exprimer en fonction du logarithme comme suit.

Théorème 22 $\arg chx = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x \geq 1.$

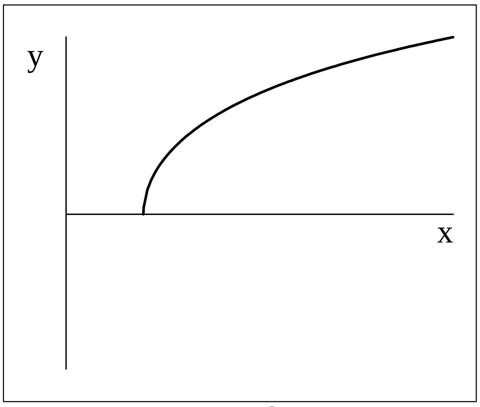
Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème sur argsh$x$. ■

Propriétés 23 ***i)*** *argchx* $= 0 \Longleftrightarrow x = 1,$
ii) $x \longmapsto$ *argchx est strictement croissante sur* $[1, +\infty[$,
iii) $\forall x \geq 0,$ *argch(chx)* $= x;$
iv) $\forall x \geq 1,$ *ch(argchx)* $= x.$

Démonstration. Conséquences immédiates des propriétés des fonctions inverses. ■



$x \mapsto \text{argsh}x$



$x \mapsto \text{argch}x$

Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction th: $]-\infty, +\infty[\longrightarrow]-1, 1[$ est bijective, donc inversible. Son inverse est appelée fonction *argument tangente hyperbolique*, notée:

$$\begin{array}{rcl} \arg\text{th}:]-1,1[& \longrightarrow &]-\infty, +\infty[\\ x & \longmapsto & y = \arg\text{th}\ x. \end{array}$$

C'est à dire que:

$$y = \text{argth}\ x,\ x \in]-1, 1[\Longleftrightarrow x = \text{th}y\ ,\ y \in \mathbb{R}.$$

Grâce au théorème suivant, la fonction $x \longmapsto \text{argth}x$ peut s'exprimer en fonction du logarithme comme suit:

Théorème 24 *argthx* $= \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+x}{1-x}, \quad x \in]-1, 1[.$

Démonstration. Soit $y \in]-1, 1[$ donné. Résolvons l'équation d'inconnue x réelle tell que $y = \text{th}x$.. On obtient alors, d'après la définition de th$x$:

$$\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Longleftrightarrow \\ & \Longleftrightarrow & e^{2x}(1 - y) = y + 1 \Longleftrightarrow e^{2x} = \dfrac{1 + y}{1 - y}. \end{array}$$

D'où, en appliquant le logarithme:

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}.$$

■

Propriétés 25 ***i)*** *argthx* $= 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
ii) $\forall x \in]-1, 1[,$ *argth*$(-x) = -$*argthx*;
iii) $x \longmapsto$ *argthx est strictement croissante sur* $]-1, 1[$,
iv) $\forall x \in \mathbb{R},$ *argth(thx)* $= x;$
v) $\forall x \in]-1, 1[,$ *th(argthx)* $= x.$

Démonstration. Conséquences immédiates de la définition et des propriétés des fonctions inverses. ■

Fonction argument cotangente hyperbolique

La fonction cth: $\mathbb{R}^* \longrightarrow]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ est bijective, donc inversible. Son inverse est appelée fonction *argument cotangente hyperbolique*, notée :

$$\begin{array}{rl}]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto y = \text{argcth } x; \end{array}$$

c'est à dire que:

$$y = \text{argcth } x,\ x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\Longleftrightarrow x = \text{cth}y,\ y \in \mathbb{R}^*.$$

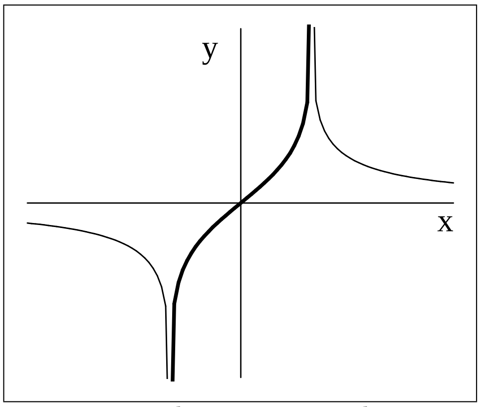
Grâce au théorème suivant, la fonction $x \longmapsto y = \text{argcth}x$ peut s'exprimer à l'aide du logarithme comme suit:

Théorème 26 $\forall x,\ |x| > 1$, *argcth* $x = \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|,$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème précédent sur argth$x$. ■

Propriétés 27 ***i)*** $\forall x,\ |x| > 1,\ \ argcthx \neq 0;$
ii) $\forall x,\ |x| > 1,\ \ argcth(-x) = -argcthx;$
iii) $x \longmapsto argcthx$ *est strictement décroissante sur* $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$;
iv) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ argcth(cthx) = x;$
v) $\forall x,\ |x| > 1,\ \ cth(argcthx) = x.$

Démonstration. Conséquences immédiates de la définition et des propriétés des fonctions inverses. ■



$x \mapsto \text{argth}x$ *et* $x \mapsto \text{argcth}x$