

# 电动力学

2026 年 1 月 2 日

## 目录

符号表	3
<b>1 矢量分析</b>	4
1.1 定义 . . . . .	4
1.2 微分运算 . . . . .	10
1.2.1 和规则 . . . . .	10
1.2.2 积规则 . . . . .	10
1.2.3 二阶积规则 . . . . .	11
1.3 积分运算 . . . . .	11
1.3.1 高斯定理 . . . . .	11
1.3.2 斯托克斯定理 . . . . .	12
1.4 曲面坐标系 . . . . .	12
1.4.1 柱坐标系 . . . . .	12
1.4.2 球坐标系 . . . . .	13
1.5 狄拉克函数与阶跃函数 . . . . .	14
1.5.1 狄拉克函数 . . . . .	14
1.5.2 阶跃函数 . . . . .	15
1.6 阶跃函数的导数 . . . . .	15
1.6.1 多维狄拉克函数 . . . . .	15
1.7 矢量场理论 . . . . .	15
1.7.1 亥姆霍兹定理 . . . . .	15
1.7.2 势函数 . . . . .	17
1.8 习题 . . . . .	18
<b>2 静电学</b>	26
2.1 电场 . . . . .	26
2.2 电势 . . . . .	28
2.3 静电场的能量 . . . . .	30
2.4 导体 . . . . .	32
2.5 电容 . . . . .	34
2.6 拉普拉斯方程 . . . . .	35
2.7 镜像法 . . . . .	36

2.8 分离变量法 . . . . .	38
2.8.1 直角坐标系 . . . . .	38
2.8.2 球坐标系 . . . . .	40
2.8.3 柱坐标系 . . . . .	42
2.8.4 勒让德多项式性质的证明 . . . . .	43
2.9 多极展开 . . . . .	48
2.9.1 单极项 ( $l = 0$ ) . . . . .	48
2.9.2 偶极项 ( $l = 1$ ) . . . . .	48
2.9.3 四极项及更高阶 . . . . .	49
2.10 习题 . . . . .	51

## 符号表

符号	含义
$\delta_{ij}$	克罗内克尔符号
$\cdot$	点乘
$\times$	叉乘
$\mathbf{a}$	矢量函数
$f$	标量函数
$a_i$	矢量 $\mathbf{a}$ 的第 $i$ 个分量
$\delta(x)$	狄拉克函数
$\varepsilon_{ijk}$	Levi–Civita 符号 (三维)
$\varepsilon_0$	真空介电常数
$q$	电荷量
$x_i$	第 $i$ 个坐标分量
$e$	元电荷
$\mathbf{e}_i$	第 $i$ 个单位矢量
$\nabla$	梯度算子
$r$	$\sqrt{x_i x_i}$
$\phi$	方位角
$\theta$	极角
$\mathbf{r}$	$x_i \mathbf{e}_i$
$\mathbf{R}$	旋转矩阵
$\Phi_E$	电场强度通量
$\lambda$	电荷线密度
$\sigma$	电荷面密度
$\rho$	电荷体密度
$\mathbf{E}$	电场强度
$U$	电势
$d\tau$	体积微元
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbf{d}$	电偶极距
$\mathbf{p}$	动量
$P_l(x)$	1 阶勒让德多项式

# 1 矢量分析

## 1.1 定义

### 1.1.1 爱因斯坦求和约定

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i \equiv a_i b_i \quad (1.1)$$

### 1.1.2 克罗内克尔符号

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1.2)$$

性质:

$$a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i \quad (1.3)$$

$$\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik} \quad (1.4)$$

### 1.1.3 点乘

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_i b_i \quad (1.5)$$

### 1.1.4 Levi-Civita 符号

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

性质:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} &= \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{2l} & \delta_{3l} \\ \delta_{1m} & \delta_{2m} & \delta_{3m} \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{2l} & \delta_{3l} \\ \delta_{1m} & \delta_{2m} & \delta_{3m} \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{2l} & \delta_{3l} \\ \delta_{1m} & \delta_{2m} & \delta_{3m} \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{li} & \delta_{lj} & \delta_{lk} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk} \end{pmatrix} \tag{1.8}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} \delta_{li} & \delta_{lj} & \delta_{lk} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{ki} & \delta_{kj} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{li} & \delta_{lj} & 0 \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi} \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = \delta_{li}\delta_{jj} - \delta_{lj}\delta_{ji} = 3\delta_{li} - \delta_{li} = 2\delta_{li} \tag{1.10}$$

### 1.1.5 叉乘

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

性质:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{c} \cdot \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \\
&= c_k \varepsilon_{ijk} a_i b_j \\
&= \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} a_i b_j c_k \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{1i} a_i & \delta_{2i} a_i & \delta_{3i} a_i \\ \delta_{1j} b_j & \delta_{2j} b_j & \delta_{3j} b_j \\ \delta_{1k} c_k & \delta_{2k} c_k & \delta_{3k} c_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{1.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{c} \times \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \\
&= \varepsilon_{lkn} c_l \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_n \\
&= -\varepsilon_{lnk} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_l \mathbf{e}_n \\
&= -(\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) a_i b_j c_l \mathbf{e}_n \\
&= -\delta_{il} \delta_{jn} a_i b_j c_l \mathbf{e}_n + \delta_{in} \delta_{jl} a_i b_j c_l \mathbf{e}_n \\
&= -a_i b_j c_l \mathbf{e}_n + a_i b_j c_l \mathbf{e}_i \\
&= -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \tag{1.13}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} = -\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} \tag{1.14}$$

### 1.1.6 梯度算子

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \tag{1.15}$$

### 1.1.7 梯度

设位置矢量  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ , 拉梅系数为

$$h_i \equiv \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right\|, \quad \mathbf{e} \equiv \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}$$

且  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ 。

对标量场  $f(u_1, u_2, u_3)$ , 全微分为

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i.$$

无穷小位移 (线元) 为

$$dl = h_i du_i e_i.$$

设  $\nabla f = G_i e_i$ , 则

$$df = \nabla f \cdot dl = G_i h_i du_i.$$

比较系数, 得  $G = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} e_i$ , 从而

$$\nabla f = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} e_i \quad (1.16)$$

对于直角坐标

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i \quad (1.17)$$

性质:

$$\nabla r = \frac{\partial \sqrt{x_i x_i}}{\partial x_i} e_i = \frac{x_i}{r} e_i = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.18)$$

$$\nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} e_i = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.19)$$

### 1.1.8 散度

对微小增量  $du_1, du_2, du_3$ , 线元在三方向的实际长度分别为

$$dl_1 = h_1 du_1, \quad dl_2 = h_2 du_2, \quad dl_3 = h_3 du_3$$

因此微小长方体的体元为

$$d\tau = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \quad (1.20)$$

设矢量场在该点为

$$\mathbf{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

其中  $a_1, a_2, a_3$  为在局部单位基矢下的分量 (均为  $u_1, u_2, u_3$  的函数)。

下面计算穿过微小长方体六个面的净通量。以  $u_1$  方向为例, 考察在  $u_1$  与  $u_1 + du_1$  两个面: 面  $u_1$  (在坐标  $u$  处, 向外法向为  $-e_1$ ): 面积元为

$$da_1^{(-)} = -e_1(h_2 du_2)(h_3 du_3) = -e_1 h_2 h_3 du_2 du_3,$$

对应的通量 (近似取该面中心处分量):

$$\Phi_1^{(-)} = \mathbf{a}(u_1, u_2, u_3) \cdot da_1^{(-)} = -a_1(u_1, u_2, u_3) h_2 h_3 du_2 du_3.$$

面  $u + du$  (向外法向为  $+e_1$ ): 面积元

$$da_1^{(+)} = +e_1 h_2 h_3 du_2 du_3,$$

通量 (在  $u + du$  处):

$$\Phi_1^{(+)} = a_1(u_1 + du_1, u_2, u_3) h_2(u_1 + du_1, u_2, u_3) h_3(u_1 + du_1, u_2, u_3) du_2 du_3.$$

因此穿过这对面的净通量为

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_1 &= \Phi_1^{(+)} - \Phi_1^{(-)} \\ &= [a_1(u_1 + du_1, u_2, u_3) h_2(u_1 + du_1, u_2, u_3) h_3(u_1 + du_1, u_2, u_3) - a_1(u_1, u_2, u_3) h_2 h_3] du_2 du_3. \end{aligned}$$

用泰勒展开到一阶并忽略高阶项, 得

$$\Delta\Phi_u = \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 a_1) du_1 du_2 du_3 + o(du_1 du_2 du_3).$$

对  $u_2$  和  $u_3$  方向做同样的计算, 六个面的净通量近似为三项之和:

$$\Delta\Phi_{\text{total}} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left( h_1 h_2 h_3 \frac{a_i}{h_i} \right) du_1 du_2 du_3$$

由于体元按照式(1.20)为  $d\tau = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$ , 故单位体积的通量密度 (即散度) 为极限:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_{\text{total}}}{d\tau} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( h_1 h_2 h_3 \frac{a_i}{h_i} \right). \end{aligned}$$

于是得到正交曲线坐标系下的散度公式:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( h_1 h_2 h_3 \frac{a_i}{h_i} \right). \quad (1.21)$$

对于直角坐标

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \quad (1.22)$$

性质:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(r) = \frac{\partial f_i(r)}{\partial x_i} = f'_i \frac{\partial r}{\partial x_i} = \mathbf{f}' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.24)$$

### 1.1.9 旋度

选取微小矩形位于  $u_1-u_2$  平面, 固定  $u_3$ 。矩形四边的线元素:

下边:  $d\mathbf{l}_1 = h_1 du_1 \mathbf{e}_1$ , 从  $(u_1, u_2) \rightarrow (u_1 + du_1, u_2)$

右边:  $d\mathbf{l}_2 = h_2 du_2 \mathbf{e}_2$ , 从  $(u_1 + du_1, u_2) \rightarrow (u_1 + du_1, u_2 + du_2)$

上边:  $d\mathbf{l}_3 = -h_1 du_1 \mathbf{e}_1$ , 从  $(u_1 + du_1, u_2 + du_2) \rightarrow (u_1, u_2 + du_2)$

左边:  $d\mathbf{l}_4 = -h_2 du_2 \mathbf{e}_2$ , 从  $(u_1, u_2 + du_2) \rightarrow (u_1, u_2)$

沿每一边计算  $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$  并做泰勒展开 (只保留一阶项):

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} \approx \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 a_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 a_1) \right] du_1 du_2$$

面元面积:

$$dS_3 = h_1 h_2 du_1 du_2$$

旋度在  $\mathbf{e}_3$  方向的分量:

$$(\nabla \times \mathbf{a})_3 = \lim_{du_1, du_2 \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}}{dS_3} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 a_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 a_1) \right]$$

同理, 对于其他两个方向:

$$(\nabla \times \mathbf{a})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 a_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 a_2) \right], \quad (\nabla \times \mathbf{a})_2 = \frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 a_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 a_3) \right]$$

最终正交曲线坐标系下旋度公式为:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(h_k a_k)}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \quad (1.25)$$

对于直角坐标

$$\nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \quad (1.26)$$

性质:

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad (1.27)$$

$$\nabla \times (f \mathbf{a}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(f a_j)}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = f \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_j \mathbf{e}_k = f (\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla f) \times \mathbf{a} \quad (1.28)$$

### 1.1.10 并积

$$\nabla \mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{x_1} & \frac{\partial a_2}{x_1} & \frac{\partial a_3}{x_1} \\ \frac{\partial a_1}{x_2} & \frac{\partial a_2}{x_2} & \frac{\partial a_3}{x_2} \\ \frac{\partial a_1}{x_3} & \frac{\partial a_2}{x_3} & \frac{\partial a_3}{x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.29)$$

### 1.1.11 拉普拉斯算子

定义为梯度的散度, 由1.16和1.21得

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \nabla \cdot (\nabla f) \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( h_1 h_2 h_3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( h_1 h_2 h_3 \frac{\partial f}{h_i^2 \partial u_i} \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

对于直角坐标

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1.31)$$

性质:

$$\begin{aligned}
\nabla^2(fg) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial fg}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + g \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \\
&= g \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \\
&= g \nabla^2 f + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f \nabla^2 g
\end{aligned} \tag{1.32}$$

## 1.2 微分运算

### 1.2.1 和规则

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \tag{1.33}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b} \tag{1.34}$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \mathbf{b} \tag{1.35}$$

### 1.2.2 积规则

$$\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} \\
&= \mathbf{a} \times \left( \varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \right) + \mathbf{b} \times \left( \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \right) + \left( a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \mathbf{b} + \left( b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \mathbf{a} \\
&= \varepsilon_{lkn} a_l \varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + \varepsilon_{lkn} b_l \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \\
&= -\varepsilon_{lnk} \varepsilon_{ijk} a_l \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n - \varepsilon_{lnk} \varepsilon_{ijk} b_l \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \\
&= -(\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) a_l \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n - (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) b_l \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \\
&= \left( -\delta_{il} \delta_{jn} a_l \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + \delta_{in} \delta_{jl} a_l \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n \right) + \left( -\delta_{il} \delta_{jn} b_l \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + \delta_{in} \delta_{jl} b_l \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n \right) + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \\
&= \left( -a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \right) + \left( -b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \right) + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \\
&= a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i + b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \\
&= \frac{\partial(a_j b_j)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \\
&= \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})
\end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{a}) = \frac{\partial f a_i}{\partial x_i} = f \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = f \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla f \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k) - \mathbf{a} \cdot (\varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k) \\ &= b_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \\ &= b_j \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} + a_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial \varepsilon_{ijk} a_i b_j}{\partial x_k} \\ &= \nabla \cdot (\varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (1.39)$$

### 1.2.3 二阶积规则

$$\nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathbf{e}_k = 0 \quad (1.40)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \cdot \left( \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (1.41)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (1.42)$$

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{\partial^2 (a_j \mathbf{e}_j)}{\partial x_i^2} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla \times \left( \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \right) \\ &= \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijl} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} \mathbf{e}_n \\ &= \varepsilon_{mnl} \varepsilon_{ijl} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} \mathbf{e}_n \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} \mathbf{e}_n \\ &= \delta_{im} \delta_{jn} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} \mathbf{e}_n - \delta_{in} \delta_{jm} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} \mathbf{e}_n \\ &= \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_i} \mathbf{e}_j - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} \mathbf{e}_i \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a} \end{aligned} \quad (1.44)$$

## 1.3 积分运算

### 1.3.1 高斯定理

我们已经得到正交坐标系中的散度局部公式1.21。因此，对体积元  $\Delta\tau = h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$  的六个面计算净通量时：

$$\Phi^{(\text{out})} - \Phi^{(\text{in})} = \left[ \frac{\partial}{\partial u_i} \left( h_1 h_2 h_3 \frac{a_i}{h_i} \right) \right] \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3 = (\nabla \cdot \mathbf{a}) \Delta\tau.$$

将整个区域  $V$  分割成许多此类体积元, 内部公共面的通量相互抵消, 仅留下外边界  $\partial V$  的通量。令分割尺寸趋于零, 通量和体积和分别趋于各自积分, 故得到

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) d\tau = \iint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.45)$$

### 1.3.2 斯托克斯定理

我们已经得到任意正交坐标系中的旋度局部公式1.25, 考虑由  $(u_1, u_2)$  增量生成的一个无穷小曲面元

$$d\mathbf{S} = (h_1 h_2 du_1 du_2) \mathbf{e}_3.$$

沿此小曲面元的边界进行线积分, 可得

$$\oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}.$$

将整个曲面分割成许多这样的小元, 内部公共边界的线积分相互抵消, 仅留下外边界  $\partial S$  的线积分。令分割尺寸趋于零, 总和趋于积分, 故得

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.46)$$

## 1.4 曲面坐标系

### 1.4.1 柱坐标系

将柱坐标系坐标转化为直角系坐标的方式为

$$x_1 = s \cos \phi, \quad x_2 = s \sin \phi, \quad x_3 = z \quad (1.47)$$

其中  $s$  是坐标点到  $z$  轴的距离。柱坐标系和直角系坐标无限小元转换方式为

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{s} & -x_2 & 0 \\ \frac{x_2}{s} & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ d\phi \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

其拉梅系数为

$$h_1 = 1, \quad h_2 = s, \quad h_3 = 1 \quad (1.49)$$

其无限小位移为

$$d\mathbf{l} = h_i du_i \mathbf{e}_i = ds \mathbf{s} + s d\phi \mathbf{\phi} + dz \mathbf{z} \quad (1.50)$$

其体积元为

$$d\tau = s ds d\phi dz \quad (1.51)$$

梯度

$$\nabla f = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial s} s + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} \phi + \frac{\partial}{\partial z} z \quad (1.52)$$

散度

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{s} \left( \frac{\partial s a_s}{\partial s} + \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial s a_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{s} \frac{\partial s a_s}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{a_s}{s} + \frac{\partial a_s}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.53)$$

旋度

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{a} &= \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(h_k a_k)}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \\
&= \frac{h_i}{s} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(h_k a_k)}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \\
&= \frac{1}{s} \left( \varepsilon_{123} \frac{\partial a_3}{\partial u_2} \mathbf{e}_1 + \varepsilon_{132} \frac{\partial s a_2}{\partial u_3} \mathbf{e}_1 + \varepsilon_{321} \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \mathbf{e}_3 + s \varepsilon_{213} \frac{\partial a_3}{\partial u_1} \mathbf{e}_2 + \varepsilon_{312} \frac{\partial s a_2}{\partial u_1} \mathbf{e}_3 + s \varepsilon_{231} \frac{\partial a_1}{\partial u_3} \mathbf{e}_2 \right) \\
&= \frac{1}{s} \left( \frac{\partial a_3}{\partial u_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial s a_2}{\partial u_3} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \mathbf{e}_3 - s \frac{\partial a_3}{\partial u_1} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial s a_2}{\partial u_1} \mathbf{e}_3 + s \frac{\partial a_1}{\partial u_3} \mathbf{e}_2 \right) \\
&= \frac{1}{s} \left( \frac{\partial a_z}{\partial \phi} \mathbf{s} - \frac{\partial s a_\phi}{\partial z} \mathbf{s} - \frac{\partial a_s}{\partial \phi} \mathbf{z} - s \frac{\partial a_z}{\partial s} \boldsymbol{\phi} + \frac{\partial s a_\phi}{\partial s} \mathbf{z} + s \frac{\partial a_s}{\partial z} \boldsymbol{\phi} \right) \\
&= \frac{1}{s} \left( \frac{\partial a_z}{\partial \phi} - s \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{s} + \left( \frac{\partial a_s}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial s} \right) \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{s} \left( \frac{\partial s a_\phi}{\partial s} - \frac{\partial a_s}{\partial \phi} \right) \mathbf{z}
\end{aligned} \tag{1.54}$$

拉普拉斯算子

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( h_1 h_2 h_3 \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \\
&= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( s \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \\
&= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial f}{\partial s} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( s \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial z} \left( s \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial f}{\partial s} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( s \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial z} \left( s \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial f}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

#### 1.4.2 球坐标系

将球坐标系坐标转化为直角系坐标的方式为

$$x_1 = r \cos \phi \sin \theta, \quad x_2 = r \sin \phi \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \theta \tag{1.56}$$

球坐标系和直角系坐标无限小元转换方式为

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} & -x_2 & \frac{x_1 x_3}{r \sin \theta} \\ \frac{x_2}{r} & x_1 & \frac{x_2 x_3}{r \sin \theta} \\ \frac{x_3}{r} & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\phi \\ d\theta \end{pmatrix} \tag{1.57}$$

其拉梅系数为

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r \sin \theta, \quad h_3 = r \tag{1.58}$$

其无限小位移为

$$dl = dr \mathbf{r} + r \sin \theta d\phi \boldsymbol{\phi} + r d\theta \boldsymbol{\theta} \tag{1.59}$$

其体积元为

$$d\tau = r \sin \theta r dr d\phi d\theta \tag{1.60}$$

梯度

$$\nabla f = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} \tag{1.61}$$

散度

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial r^2 \sin \theta a_r}{\partial r} + \frac{\partial r a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial r \sin \theta a_\theta}{\partial \theta} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} + r \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + r \frac{\partial \sin \theta a_\theta}{\partial \theta} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta a_\theta}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

旋度

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{a} &= \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (h_k a_k)}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \\
 &= \frac{h_i}{r^2 \sin \theta} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (h_k a_k)}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \varepsilon_{123} \frac{\partial r a_3}{\partial u_2} \mathbf{e}_1 + \varepsilon_{132} \frac{\partial s a_2}{\partial u_3} \mathbf{e}_1 + r \varepsilon_{321} \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \mathbf{e}_3 + s \varepsilon_{213} \frac{\partial r a_3}{\partial u_1} \mathbf{e}_2 + r \varepsilon_{312} \frac{\partial s a_2}{\partial u_1} \mathbf{e}_3 + s \varepsilon_{231} \frac{\partial a_1}{\partial u_3} \mathbf{e}_2 \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial r a_3}{\partial u_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial r \sin \theta a_2}{\partial u_3} \mathbf{e}_1 - r \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \mathbf{e}_3 - r \sin \theta \frac{\partial r a_3}{\partial u_1} \mathbf{e}_2 + r \frac{\partial r \sin \theta a_2}{\partial u_1} \mathbf{e}_3 + r \sin \theta \frac{\partial a_1}{\partial u_3} \mathbf{e}_2 \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial r a_\theta}{\partial \phi} \mathbf{r} - \frac{\partial r \sin \theta a_\phi}{\partial \theta} \mathbf{r} - r \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \boldsymbol{\theta} - r \sin \theta \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} \boldsymbol{\phi} + r \frac{\partial r \sin \theta a_\phi}{\partial r} \boldsymbol{\theta} + r \sin \theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \boldsymbol{\phi} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - r \frac{\partial \sin \theta a_\phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} \right) \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial r a_\phi}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) \boldsymbol{\theta} \\
 &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial \sin \theta a_\phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} \right) \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial r a_\phi}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) \boldsymbol{\theta}
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

拉普拉斯算子

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( h_1 h_2 h_3 \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial f}{\sin \theta \partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

## 1.5 狄拉克函数与阶跃函数

### 1.5.1 狄拉克函数

严格来说, 狄拉克  $\delta$  函数并不是一个通常意义上的函数, 而是通过其在积分中的作用来定义的。设  $f(x)$  是在  $x = 0$  附近连续, 并且在无穷远处足够快衰减的函数。定义狄拉克  $\delta$  满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0), \tag{1.66}$$

由定义立即得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a). \tag{1.67}$$

设  $g(x)$  在  $x_i$  处有孤立零点, 且  $g'(x_i) \neq 0$ , 则

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}. \tag{1.68}$$

### 1.5.2 阶跃函数

定义阶跃函数

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (1.69)$$

## 1.6 阶跃函数的导数

在通常意义下,  $H(x)$  在  $x = 0$  不可导。但在积分意义下, 我们定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH(x)}{dx} f(x) dx \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \frac{df}{dx} dx. \quad (1.70)$$

对右侧分部积分:

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \frac{df}{dx} dx &= - \int_0^{\infty} \frac{df}{dx} dx \\ &= f(0). \end{aligned} \quad (1.71)$$

于是得到

$$\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x), \quad (1.72)$$

### 1.6.1 多维狄拉克函数

三维  $\delta$  函数定义为

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad (1.73)$$

并满足

$$\iiint \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\tau = f(\mathbf{r}_0). \quad (1.74)$$

在正交曲线坐标  $(u_1, u_2, u_3)$  中,

$$d\tau = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3,$$

因此定义

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{\delta(u_1 - u_{1,0})\delta(u_2 - u_{2,0})\delta(u_3 - u_{3,0})}{h_1 h_2 h_3}. \quad (1.75)$$

## 1.7 矢量场理论

### 1.7.1 亥姆霍兹定理

设矢量场  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  定义在整个空间中, 其散度与旋度分别给定为

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}(\mathbf{r}).$$

为了使体积分有意义, 仅要求  $f(\mathbf{r})$  与  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  在无穷远处趋于零是不够的, 它们的衰减速度必须足够快。

考虑定义在整个空间上的积分

$$\iiint_V X(\mathbf{r}) d\tau,$$

其中  $X(\mathbf{r})$  表示  $f(\mathbf{r})$  或  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  的某一分量。

将积分写为球坐标形式,

$$\iiint_V X(\mathbf{r}) d\tau = \int_0^\infty \left( \iint_S X(r, \Omega) r^2 d\Omega \right) dr.$$

若存在常数  $A > 0$  及  $R > 0$ , 使得当  $r > R$  时对所有方向  $\Omega$  成立

$$|X(r, \Omega)| \geq \frac{A}{r},$$

则有下界估计

$$\iiint_{|\mathbf{r}|>R} |X(\mathbf{r})| d\tau \geq A \int_R^\infty r dr \iint_S d\Omega,$$

该积分显然发散。

类似地, 若

$$|X(r, \Omega)| \geq \frac{A}{r^2},$$

则径向积分包含

$$\int_R^\infty \frac{dr}{r},$$

从而发散。

因此, 为保证体积分收敛, 必须要求

$$X(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.76)$$

该条件需在角向上一致成立。

因此, 为保证积分收敛, 必须要求

$$f(\mathbf{r}), \ b(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.77)$$

这一条件同时也足以保证在无穷远处的曲面积分为零。

设矢量场  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  具有散度  $f(\mathbf{r})$  与旋度  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ 。若取另一矢量场

$$\mathbf{a}'(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \mathbf{c}(\mathbf{r}),$$

且  $\mathbf{c}(\mathbf{r})$  满足

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

则  $\mathbf{a}'$  与  $\mathbf{a}$  具有相同的散度与旋度。

因此, 仅给定散度与旋度并不能唯一确定矢量场。然而可以证明: 不存在一个非零的矢量场 (见第三章)  $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ , 它在整个空间中同时满足

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

并且在无穷远处趋于零。

因此, 若进一步要求

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{当 } r \rightarrow \infty,$$

则满足给定散度与旋度的矢量场解是唯一的。

现在可以严谨地表述亥姆霍兹定理如下:

若矢量场  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  的散度  $f(\mathbf{r})$  与旋度  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  已知, 且二者在  $r \rightarrow \infty$  时均比  $1/r^2$  衰减得更快, 同时  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  在无穷远处趋于零, 则  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  被其散度与旋度唯一确定。

### 1.7.2 势函数

**1. 标量势与无旋场** 设向量场  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  定义在某一区域。若存在标量函数  $U(\mathbf{r})$ , 使得

$$\mathbf{a} = -\nabla U, \quad (1.78)$$

则称  $U$  为  $\mathbf{a}$  的标量势函数,  $\mathbf{a}$  称为保守场。由旋度的定义可得

$$\nabla \times \mathbf{a} = -\nabla \times \nabla U = \mathbf{0}. \quad (1.79)$$

因此, 任何具有标量势的向量场必为无旋场。

**2. 无旋场的势函数存在性** 若

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (1.80)$$

并且区域  $V$  是单连通的 (任意闭合曲线可连续收缩为一点), 则由斯托克斯定理可得

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.81)$$

线积分与路径无关, 可定义

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.82)$$

从而得到  $\mathbf{a} = -\nabla\phi$ 。

**3. 向量势与无散场** 若存在向量函数  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ , 使

$$\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b}, \quad (1.83)$$

则称  $\mathbf{b}$  为  $\mathbf{F}$  的向量势。由恒等式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = 0 \quad (1.84)$$

可知, 任何具有向量势的向量场必为无散场。

**4. 势函数的不唯一性**

- 若  $\mathbf{a} = -\nabla U$ , 则对任意常数  $C$ ,  $U' = U + C$  给出同一向量场。
- 若  $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b}$ , 则对任意标量函数  $\chi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \nabla\chi$  产生相同的  $\mathbf{a}$ (规范变换)。

**5. 亥姆霍兹分解** 在满足适当衰减条件的情况下, 任意向量场  $\mathbf{a}$  可分解为

$$\mathbf{a} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{b}, \quad (1.85)$$

其中

$$\nabla^2 U = -\nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (1.86)$$

$$\nabla^2 \mathbf{b} = -\nabla \times \mathbf{a}. \quad (1.87)$$

这就是亥姆霍兹定理在势函数语言下的表达。

## 1.8 习题

1.8.1 证明:  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = 0$$

1.8.2 证明:  $R\mathbf{a} \cdot R\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , 其中  $R$  为旋转矩阵

$$R\mathbf{a} \cdot R\mathbf{b} = (R\mathbf{a})^T(R\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T R^T R\mathbf{b} = \mathbf{a}^T R^{-1} R\mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

1.8.3 在坐标逆变换 ( $x' = -x$ ,  $y' = -y$ ,  $z' = -z$ ) 下, 两个矢量的叉乘是如何变换的?

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \\ a'_i & a'_j & a'_k \\ b'_i & b'_j & b'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \\ -a_i & -a_j & -a_k \\ -b_i & -b_j & -b_k \end{pmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

1.8.4 在坐标逆变换下, 标量三重积 ( $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ) 是如何变换的?

$$\mathbf{c}' \cdot (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') = \mathbf{c}' \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

1.8.5  $\mathbf{n}$  是固定点  $(x', y', z')$  到点  $(x, y, z)$  的间隔矢量,  $n$  是它的长度, 证明:

- (a)  $\nabla n^2 = 2\mathbf{n}$ .
- (b)  $\nabla \frac{1}{n} = -\frac{\mathbf{n}}{n^2}$ .
- (c)  $\nabla n^a = a\mathbf{n}n^{a-2} (a \neq 0)$ .

$$(a) \nabla n^2 = \frac{\partial n^2}{\partial e_i} \mathbf{e}_i = 2n \frac{\partial n}{\partial e_i} \mathbf{e}_i = 2\mathbf{n}$$

$$(c) \nabla n^a = \frac{\partial n^a}{\partial e_i} \mathbf{e}_i = an^{-1} \frac{\partial n}{\partial e_i} \mathbf{e}_i = a\mathbf{n}n^{a-2}$$

1.8.6 函数  $f$  只依赖平面坐标  $y, z$ 。令旋转后的坐标记为  $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ , 求证  
 $\nabla f' = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y'} \\ \frac{\partial f}{\partial z'} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial z} \sin \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} = -\frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \theta$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y'} \\ \frac{\partial f}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.8.7 计算  $(\nabla \mathbf{T}) \times (\nabla \mathbf{S})$ 

$$\begin{aligned}
(\nabla \mathbf{T}) \times (\nabla \mathbf{S}) &= \left( \varepsilon_{ijk} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \right) \times \left( \varepsilon_{lmn} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_n \right) \\
&= \varepsilon_{opq} \varepsilon_{ijo} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmp} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_q \\
&= \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{ijo} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmp} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_q \\
&= (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmp} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_q \\
&= \delta_{ip} \delta_{jq} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmp} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_q - \delta_{iq} \delta_{jp} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmp} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_q \\
&= \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmi} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_j - \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmj} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_i \\
&= \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \varepsilon_{lmj} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_i - \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmj} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_i \\
&= \left( \frac{\partial T_i}{\partial x_j} - \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \right) \varepsilon_{lmj} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

1.8.8 证明  $\iint_S f(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S [\mathbf{a} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\partial S} f \mathbf{a} \cdot dl$ 

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} f \mathbf{a} \cdot dl &= \iint_S [\nabla \times (f \mathbf{a})] \cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_S [f(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla f) \times \mathbf{a}] \cdot d\mathbf{S} \\
\iint_S f(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S [\mathbf{a} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\partial S} f \mathbf{a} \cdot dl
\end{aligned}$$

1.8.9 证明  $\iiint_V \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) d\tau = \iiint_V \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) d\tau + \iint (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{S}_{\partial V}$ 

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial V} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) d\tau \\
&= \iiint_V [\mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})] d\tau \\
\iiint_V \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) d\tau &= \iiint_V \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) d\tau + \iint_{\partial V} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

**1.8.10** 设  $f = f(r)$ , 求  $\nabla^2 [f(r)]$

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 [f(r)] &= \frac{1}{sr} \frac{\partial}{\partial r} \left( sr \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{sr^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( s \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
 &= \frac{1}{sr} \frac{\partial}{\partial r} \left( sr \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\
 &= \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}
 \end{aligned} \tag{1.88}$$

**1.8.11** 证明:  $\iiint_V \nabla \times \mathbf{a} d\tau = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \times \mathbf{a}$

取任意常向量  $\mathbf{c}$ 。利用式1.39得  $\nabla \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , 因此

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}).$$

应用高斯定理,

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) d\tau = \oint_{\partial V} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) d\tau.$$

利用式1.12得

$$\mathbf{c} \cdot \iiint_V (\nabla \times \mathbf{a}) d\tau = \mathbf{c} \cdot \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \times \mathbf{a}.$$

由于上述等式对任意常向量  $\mathbf{c}$  成立, 必有

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{a}) d\tau = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \times \mathbf{a}.$$

**1.8.12** 证明:  $\iint_S d\mathbf{S} \times \nabla f = \oint_{\partial S} f dl$

取任意常向量  $\mathbf{c}$ 。利用式1.28得

$$\iint_S (\nabla f \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times (f\mathbf{c})) \cdot d\mathbf{S}.$$

由斯托克斯定理

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot dl,$$

取  $\mathbf{A} = f\mathbf{c}$ , 得

$$\iint_S (\nabla \times (f\mathbf{c})) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} (f\mathbf{c}) \cdot dl = \oint_{\partial S} f \mathbf{c} \cdot dl.$$

又由混合积恒等式

$$\mathbf{c} \cdot (d\mathbf{S} \times \nabla f) = (\nabla f \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{S},$$

所以

$$\mathbf{c} \cdot \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla f = \mathbf{c} \cdot \oint_{\partial S} f dl.$$

由于上述等式对任意常向量  $\mathbf{c}$  都成立, 必有

$$\iint_S d\mathbf{S} \times \nabla f = \oint_{\partial S} f dl.$$

1.8.13 证明:  $\oint_{\partial S} (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 2 \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial S} (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} &= \iint_S [\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S [\nabla \times (\varepsilon_{ijk} a_i x_j \mathbf{e}_k)] \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (\varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijm} \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_l} \mathbf{e}_n) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= - \iint_S (\varepsilon_{lnm} \varepsilon_{ijm} \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_l} \mathbf{e}_n) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= - \iint_S (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) (\frac{\partial a_i x_j}{\partial x_l} \mathbf{e}_n) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (\delta_{in} \delta_{jl} \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_l} \mathbf{e}_n - \delta_{il} \delta_{jn} \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_l} \mathbf{e}_n) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (\frac{\partial a_i x_j}{\partial x_j} \mathbf{e}_i - \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (\frac{\partial a_j x_i}{\partial x_i} \mathbf{e}_j - \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (a_j \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial a_i}{\partial x_i}) \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (3a_j + x_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_i \delta_{ij} - x_j \frac{\partial a_i}{\partial x_i}) \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S 2a_j \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}
 \end{aligned}$$

1.8.14 将下列电荷分布表示成电荷密度函数  $\rho$ : 1. 电荷量  $Q$  均匀分布在半径为  $R$  的球面上; 2. 电荷均匀分布在半径为  $R$  的柱面上, 单位长度的电荷量为  $\lambda$ ; 3. 电荷量均匀分布在半径为  $R$  的平面圆盘上

$$\begin{aligned}
 1. \rho &= \delta(R\mathbf{e}_r - \mathbf{r}) \frac{Q}{4\pi R^2} \\
 2. \rho &= \delta(R\mathbf{e}_s - \mathbf{s}) \frac{\lambda}{2\pi R} \\
 3. \rho &= \delta(\mathbf{x}_3) H(x + R) H(-x - R) \frac{\lambda}{\pi R^2}
 \end{aligned}$$

**1.8.15 对函数  $\mathbf{a} = r^2 \cos \theta \mathbf{r} + r^2 \cos \phi \mathbf{\theta} - r^2 \cos \theta \sin \phi \mathbf{\phi}$  验证散度定理, 体积为半径为  $R$  在第一卦限的  $1/8$  球体**

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 2r \cos \theta - r^2 \cos \theta \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \nabla \cdot \mathbf{a} dr &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R (2r \cos \theta - r^2 \cos \theta \cos \phi) dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left( r^2 \cos \theta - \frac{r^3}{3} \cos \theta \cos \phi \right) \Big|_0^R \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( R^2 \cos \theta - \frac{R^3}{3} \cos \theta \cos \phi \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \left( R^2 \sin \theta - \frac{R^3}{3} \sin \theta \cos \phi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( R^2 - \frac{R^3}{3} \cos \phi \right) d\phi \\ &= \left( R^2 \phi - \frac{R^3}{3} \sin \phi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} R^2 - \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

计算  $XY$  平面:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R a_\phi dr &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r^2 \cos \theta \sin \phi dr \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r^2 \cos \theta dr \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{r^3}{3} \cos \theta \Big|_0^R \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} \cos \theta d\theta \\ &= - \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

计算  $XZ$  平面:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R a_\theta dr &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R r^2 \cos \phi dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \frac{r^3}{3} \cos \phi \Big|_0^R \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

计算  $YZ$  平面:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R a_\theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R r^2 \cos \phi dr = \frac{R^3}{3}$$

**1.8.16** 对函数  $\mathbf{a} = bx_2\mathbf{e}_1 + cx_1\mathbf{e}_2$  验证斯托克斯定理, 面的边界线选为处在  $XY$  平面, 半径为  $R$ , 圆心在原点的圆周线。

$$\nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times (by\mathbf{e}_1 + cx\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ bx_2 & cx_1 & 0 \end{pmatrix} = (c - b)\mathbf{e}_3$$

$$\iint \nabla \times \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \iint (c - b)\mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{S} = 2\pi R(c - b)$$

$$\oint (bR \sin \phi \mathbf{e}_1 + cR \cos \phi \mathbf{e}_2) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} (bR \sin \phi \mathbf{e}_1 + cR \cos \phi \mathbf{e}_2) \cdot (-R \sin \phi \mathbf{e}_1 + R \cos \phi \mathbf{e}_2) d\phi \\ = \int_0^{2\pi} (-bR^2 \sin^2 \phi + cR^2 \cos^2 \phi) d\phi \\ = 2\pi R(c - b)$$

**1.8.17** 对函数  $\mathbf{a} = r \cos^2 \theta \mathbf{r} - r \sin \theta \cos \theta \boldsymbol{\theta} + 3r\phi \boldsymbol{\phi}$  验证斯托克斯定理。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \frac{1}{sr} \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - s \frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} \right) \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{s} \left( \frac{\partial s a_\phi}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) \boldsymbol{\phi} \\ &= \frac{1}{sr} \left( r \frac{\partial r \sin \theta \cos \theta}{\partial \phi} - s \frac{\partial 3r}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r \cos^2 \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial rr \sin \theta \cos \theta}{\partial r} \right) \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{s} \left( \frac{\partial s 3r}{\partial r} - \frac{\partial r \cos^2 \theta}{\partial \phi} \right) \boldsymbol{\theta} \\ &= \frac{1}{s} (6r \sin \theta) \boldsymbol{\theta} \\ &= 6\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

计算  $XY$  平面:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R a_\phi dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R 6 dr \\ = \frac{3}{2} R$$

**1.8.18** 对函数  $\mathbf{a} = r^2 \sin^2 \theta \mathbf{r} + 4r^2 \cos \theta \boldsymbol{\theta} + r^2 \tan \theta \boldsymbol{\phi}$  验证散度定理。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{sr} \left( \frac{\partial sra_r}{\partial r} + r \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + s \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{sr} \left( \frac{\partial srr^2 \sin^2 \theta}{\partial r} + r \frac{\partial 4r^2 \cos \theta}{\partial \phi} + s \frac{\partial r^2 \tan \theta}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{sr} (4sr^2 \sin^2 \theta + sr^2 \frac{1}{\cos^2 \theta}) \\ &= 4r \sin^2 \theta + r \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4r \sin^2 \theta + r \frac{1}{\cos^2 \theta}) \sin \theta d\theta \\
&= \int_0^R 2\pi r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4 \sin^2 \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta}) d\theta \\
&= \int_0^R 2\pi r^3 (2\theta - \sin 2\theta + \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} dr \\
&= \int_0^R 2\pi r^3 (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) dr \\
&= \int_0^R 2\pi r^3 \frac{\pi}{3} dr \\
&= 2\pi R^4 \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

**1.8.19 证明**  $\iiint_V [f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] d\tau = \oint_S (f \nabla g) \cdot dS$

$$\begin{aligned}
\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) d\tau &= \iint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \\
\iiint_V [\nabla \cdot (f \nabla g)] d\tau &= \iint_{\partial V} (f \nabla g) \cdot d\mathbf{S} \\
\iiint_V [f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] d\tau &= \iint_{\partial V} (f \nabla g) \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

**1.8.20 求  $\mathbf{a} = r^n \mathbf{e}_r$  的散度**

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial x_i r^{n-1}}{\partial x_i} \\
&= 3r^{n-1} + x_i(n-1)r^{n-2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\
&= 3r^{n-1} + x_i(n-1)r^{n-2} \frac{x_i}{r} \\
&= 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1} \\
&= (n+2)r^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\iint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial V} r^n \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 r^n =$$

1.8.21 求  $\mathbf{a} = r^n \mathbf{e}_r$  的旋度

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{a} &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial r^{n-1} x_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\
&= \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial r^{n-1}}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\
&= (n-1) \varepsilon_{ijk} x_j r^{n-2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\
&= (n-1) \varepsilon_{ijk} x_j r^{n-2} \frac{x_i}{r} \mathbf{e}_k \\
&= (n-1) r^{n-3} \varepsilon_{ijk} x_i x_j \mathbf{e}_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

1.8.22 以匀角速绕轴转动的抛物线形金属丝，其方程为  $x^2 = 4ay$ 。一质量为  $m$  的小环套在此金属丝上，可沿着金属丝无摩擦滑动。求小环在  $x$  方向的运动微分方程。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \frac{mx^2\omega^2}{2} + mgx + \frac{m\dot{x}^2}{2}}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial \frac{mx^2\omega^2}{2} + mg\frac{x^2}{4a} + \frac{mx^2\dot{x}^2}{8a^2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}}{\partial t} &= 0 \\
x\dot{x}\omega^2 + gx\frac{\dot{x}}{2a} + \frac{x\dot{x}^3}{4a^2} + \frac{x^2\dot{x}\ddot{x}}{4a^2} + m x \dot{x} &= 0 \\
x\omega^2 + \frac{gx}{2a} + \frac{x\dot{x}^2}{4a^2} + \frac{x^2\ddot{x}}{4a^2} + mx &= 0
\end{aligned}$$

## 2 静电学

### 2.1 电场

#### 2.1.1 库仑定律

设一个静止点电荷  $q_1$  距检验电荷  $q_2$  的距离为  $r$ , 那么它作用在  $Q$  上的力是

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.1)$$

常数  $\epsilon_0$  称为真空介电常数,  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$

#### 2.1.2 电场

$$\mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{F}}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.2)$$

#### 2.1.3 电场强度通量

$\Phi_E$  为电场强度通量

$$\Phi_E \equiv \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.3)$$

#### 2.1.4 高斯定理

$\rho$  为电荷密度

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.4)$$

2.1.5 两个带电为  $q$  的电荷, 相距  $d$  放置, 求垂直于连线中点且距离为  $x_2$  处的电场, 如果把一个换成  $-q$  会怎样? 当  $y >> d$  时会怎样?

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}_2 &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} x_2 \mathbf{e}_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qx_2}{r^3} \mathbf{e}_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qx_2}{(x_2^2 + \frac{d^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}_2 &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \frac{d}{2} \mathbf{e}_1 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{r^3} \mathbf{e}_1 \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{x_2^3} \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

2.1.6 一个长度为  $2L$  的细杆均匀带电, 电荷线密度为  $\lambda$ , 求垂直于杆且与杆中心距离为  $x_2$  处的电场

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r^3} \mathbf{r} dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r^3} x_2 \mathbf{e}_2 dx \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{e}_2 \int_{-L}^L \frac{x_2}{r^3} dx \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{e}_2 \int_{-L}^L \frac{x_2}{(x^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\
 &\stackrel{x=x_2 \tan \theta}{=} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{e}_2 \int_{-\arctan \frac{L}{x_2}}^{\arctan \frac{L}{x_2}} \frac{x_2}{(x_2^2 \tan^2 \theta + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} dx_2 \tan \theta \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{e}_2 \int_{-\arctan \frac{L}{x_2}}^{\arctan \frac{L}{x_2}} \frac{x_2^2 \cos^3 \theta}{x_2^3 \cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{e}_2 \int_{-\arctan \frac{L}{x_2}}^{\arctan \frac{L}{x_2}} \frac{\cos \theta}{x_2^2} d\theta \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{e}_2 \left. \frac{\sin \theta}{x_2} \right|_{-\arctan \frac{L}{x_2}}^{\arctan \frac{L}{x_2}} \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x_2} \mathbf{e}_2 \frac{L}{\sqrt{L^2 + x_2^2}}
 \end{aligned}$$

2.1.7 一个长度为  $L$  的细杆均匀带电, 电荷线密度为  $\lambda$ , 求杆一端上方距杆  $y$  处的电场

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \frac{\lambda \mathbf{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dx_2 &= \int_0^L \frac{\lambda \mathbf{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 (x_2 + y)^2} dx_2 \\
 &= - \left. \frac{\lambda \mathbf{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 (x_2 + y)} \right|_0^L \\
 &= \frac{\lambda \mathbf{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 (L + y)} - \frac{\lambda \mathbf{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 y} \\
 &= \frac{\lambda \mathbf{e}_y L}{4\pi\varepsilon_0 (L + y)y}
 \end{aligned}$$

2.1.8 一个边长为  $2L$  的正方形线框均匀带电, 电荷线密度为  $\lambda$ , 求线框中心上方距  $x_3$  处的电场

$$4 \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \sqrt{L^2 + x_3^2}} \mathbf{e}_3 \frac{L}{2\sqrt{2L^2 + x_3^2}} \frac{x_3}{x_3 \sqrt{L^2 + x_3^2}} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 \sqrt{2L^2 + x_3^2}} \mathbf{e}_3 \frac{2Lx_3}{L^2 + x_3^2}$$

2.1.9 一个半径为  $r$  的圆线框均匀带电, 电荷线密度为  $\lambda$ , 求线框中心上方距  $x_3$  处的电场

$$2\pi r \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} e_3 \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} e_3 \frac{x_3 r}{\sqrt{x_3^2 + r^2}^3}$$

2.1.10 一个半径为  $r$  的圆片均匀带电, 电荷面密度为  $\sigma$ , 求圆片中心上方距  $x_3$  处的电场

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} e_3 \frac{x_3 x_1}{\sqrt{x_3^2 + x_1^2}^3} dx_1 &= - \left. \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} e_3 \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_1^2}} \right|_0^r \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} e_3 \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2}} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} e_3 \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} e_3 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} e_3 \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} \end{aligned}$$

2.1.11 一个半径为  $r$  的球面均匀带电, 电荷面密度为  $\sigma$ , 求圆球上方距  $d$  处的电场 (分  $d > r$  和  $d < r$  讨论)

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} e_3 \frac{(x_3 + d)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{(x_3 + d)^2 + x_1^2 + x_2^2}^3} dr \phi &= \int_{\pi}^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} e_3 \frac{(r \cos \phi + d)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{(r \cos \phi + d)^2 + x_1^2 + x_2^2}^3} dr \phi \\ &= \int_{\pi}^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} e_3 \frac{(r \cos \phi + d)r \sin \phi}{\sqrt{r^2 + 2rd \cos \phi + d^2}^3} dr \phi \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} e_3 \frac{(r \cos \phi + d)r^2 \sin \phi}{\sqrt{r^2 + 2rd \cos \phi + d^2}^3} d\phi \end{aligned}$$

2.1.12 在某个区域电场可以写为  $\mathbf{E} = kr^3 e_r$ , 求电荷密度和包含在半径为  $R$ , 球心在原点的闭合球面内的总电荷

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \frac{1}{sr} \frac{\partial sr E_r}{\partial r} = \varepsilon_0 \frac{1}{sr} \frac{\partial srr^3}{\partial r} = \varepsilon_0 \frac{1}{sr} 5sr^4 = 5\varepsilon_0 r^3 k$$

$$4\pi \int_0^R 5\varepsilon_0 r^3 dr = 5\pi\varepsilon_0 R^4 k$$

## 2.2 电势

### 2.2.1 定义

$$U(\mathbf{r}) \equiv - \int_O^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.5)$$

其中  $O$  为预先设置的标准参考点, 通常为无限远处

### 2.2.2 一个半径为 $R$ 的均匀带电球体, 总电荷为 $q$ , 求电势 $U(r)$

$r \geq R$ :

$$\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} dx = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x} \Big|_r^\infty = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$r < R$ :

$$\begin{aligned} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \int_r^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \frac{x^3}{R^3} dx &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{qx^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \Big|_r^R \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{qR^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} - \frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R} - \frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

### 2.2.3 一条均匀带电的无限长直线, 电荷线密度为 $\lambda$ , 求电势 $U(r)$

$$U = \int_r^\infty \frac{\lambda}{2\pi r} dx = \frac{\lambda}{2\pi} \ln(x) \Big|_r^\infty = \frac{1}{2\pi} \ln(r)$$

### 2.2.4 一个长度为 $2L$ 的细杆均匀带电, 电荷线密度为 $\lambda$ , 求垂直于杆且与杆中心距离为 $h$ 处的电势

$$\begin{aligned} U &= \int_h^\infty \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2L}{x_2 \sqrt{L^2 + x_2^2}} dx_2 \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + L^2} + L}{x} \right) \Big|_h^\infty \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left( \frac{\sqrt{h^2 + L^2} + L}{h} \right) \end{aligned}$$

### 2.2.5 一个半径为 $r$ 的圆片均匀带电, 电荷面密度为 $\sigma$ , 求圆片中心上方距 $h$ 处的电势

$$\begin{aligned} U &= \int_h^\infty \left( \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} \right) dx_3 \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x_3 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sqrt{x_3^2 + r^2} \Big|_h^\infty \\ &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{r^2}{x_3 + \sqrt{x_3^2 + r^2}} \Big|_h^\infty \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{r^2}{h + \sqrt{h^2 + r^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \sqrt{h^2 + r^2} - h \right) \end{aligned}$$

2.2.6 一个半径为  $r$  的圆线框均匀带电, 电荷线密度为  $\lambda$ , 求线框中心上方距  $h$  处的电势

$$U = \int_h^\infty \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{x_3 r}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} dx_3 = -\frac{\lambda r}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} \Big|_h^\infty = \frac{\lambda r}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

2.2.7 一个尖角向下的圆锥体均匀带电, 电荷面密度为  $\sigma$ , 圆锥高度等于半径为  $h$ , 求  $z = h$  处的电势

$$\begin{aligned} U &= \int_{-h}^0 \frac{\lambda(h+x_3)}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(h-x_3)^2 + (h+x_3)^2}} dx_3 \\ &= \int_{-h}^0 \frac{\lambda(h+x_3)}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2h^2 + 2x_3^2}} dx_3 \\ &= \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \int_{-h}^0 \frac{h}{\sqrt{h^2 + x_3^2}} + \frac{x_3}{\sqrt{h^2 + x_3^2}} dx_3 \\ &= h \ln \left( x_3 + \sqrt{h^2 + x_3^2} \right) + \sqrt{h^2 + x_3^2} \Big|_{-h}^0 \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \\ &= \left[ h \ln \left( \sqrt{h^2} \right) + \sqrt{h^2} - h \ln \left( -h + \sqrt{2h^2} \right) - \sqrt{2h^2} \right] \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \\ &= \left[ h \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right) + h - \sqrt{2}h \right] \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \\ &= \left[ 1 - \sqrt{2} - \ln \left( \sqrt{2}-1 \right) \right] \frac{\lambda h}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \end{aligned}$$

2.2.8 一个半径为  $r$  的圆柱均匀带电, 电荷体密度为  $\rho$ , 求圆柱中心上方距  $h$  处的电势

$$\begin{aligned} U &= \int_{-h}^0 \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{r^2}{h+x_3 + \sqrt{(h+x_3)^2 + r^2}} dx_3 \\ &\stackrel{u=h+x_3}{=} \int_0^h \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{r^2}{u + \sqrt{u^2 + r^2}} du \\ &= \int_0^h \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0} \frac{\sqrt{u^2 + r^2} - u}{r^2} du \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^h \sqrt{u^2 + r^2} - u du \\ &= u\sqrt{u^2 + r^2} + r^2 \ln \left( u + \sqrt{u^2 + r^2} \right) - u^2 \Big|_0^h \frac{\rho}{4\epsilon_0} \\ &= \left[ h\sqrt{h^2 + r^2} + r^2 \ln \left( h + \sqrt{h^2 + r^2} \right) - h^2 - r^2 \ln r \right] \frac{\rho}{4\epsilon_0} \end{aligned}$$

## 2.3 静电场的能量

### 2.3.1 离散电荷体系的静电能

考虑由  $N$  个点电荷  $q_i$  构成的静电体系。将电荷从无穷远逐个缓慢搬运到其最终位置, 外力所做的总功即为体系的静电能。

设在放置第  $i$  个电荷时, 其余电荷已就位, 则该电荷所处位置的当前电势为

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

因此, 体系的总静电能为

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

注意到相互作用能在指标交换下满足  $U_{ij} = U_{ji}$ , 而对所有  $i \neq j$  的求和中每一对指标被计数两次, 故可将上式对称化为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} q_i \phi_i.$$

### 2.3.2 连续电荷分布的能量表达式

对离散情形的自然推广给出

$$U = \frac{1}{2} \iiint \rho \phi \, d\tau.$$

### 2.3.3 场能量

静电势满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

将其代入能量表达式, 得

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \iiint \phi \nabla^2 \phi \, d\tau.$$

对右端积分作分部积分。注意到

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi,$$

于是

$$\phi \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - (\nabla \phi)^2.$$

代入得

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \left[ \iiint \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) \, d\tau - \iiint (\nabla \phi)^2 \, d\tau \right].$$

当  $r \rightarrow \infty$  时,

$$\phi(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{r}, \quad \nabla \phi \sim \frac{1}{r^2}.$$

因此

$$\phi \nabla \phi \sim \frac{1}{r^3},$$

对应的无穷远处曲面积分

$$\iint \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\nabla \phi)^2 \, d\tau.$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint E^2 \, d\tau$$

### 2.3.4 电场能量密度

这表明：静电能可以视为分布在空间中的电场所携带的能量。

由此自然引入电场的能量密度

$$u \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$$

### 2.3.5 考虑两个同心球面，半径分别为 $a$ 和 $b$ ，内球面带有电荷 $q$ ，外球面带有电荷 $-q$ ，求总能量

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0 4\pi}{2} \int_a^b \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr = \int_a^b \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

## 2.4 导体

### 2.4.1 导体内部电场为零

若导体内部存在非零电场，则自由电荷将在电场作用下持续运动，与静电平衡的假设矛盾。因此，导体内部必须满足

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \mathbf{0}.$$

### 2.4.2 导体内部体电荷密度为零

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

结合  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ,

$$\rho = 0 \quad (\text{导体内部}).$$

### 2.4.3 净电荷只能分布在导体表面

既然导体内部体电荷密度为零，而导体整体可能带有净电荷，则这些电荷只能分布在导体的表面上。

### 2.4.4 导体是等势体

由  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  以及导体内部  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ，可知导体内部电势处处相同

### 2.4.5 导体表面外侧电场垂直于表面

考虑导体表面上一点的切向电场分量。若存在非零切向分量，则自由电荷将在表面沿切向运动，从而破坏静电平衡。

因此，导体表面外侧的电场只能沿法向：

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0$$

### 2.4.6 空腔中含点电荷的球形导体

设一不带电的球形导体, 半径为  $R$ , 中心位于原点, 其内部挖去一任意形状的空腔。在空腔内某处放置一点电荷  $q$ 。求球外区域的电场分布。

导体处于静电平衡时, 金属内部电场为零, 因而导体整体为等势体。取一紧贴导体内壁、位于金属内部的高斯面, 由高斯定律可得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0,$$

故内壁所感应的总电荷必为  $-q$ 。又由于导体整体不带电, 外表面所带电荷总量为  $+q$ 。

关键在于确定外表面电荷的分布形式。注意到: 在所有满足

$$\mathbf{E} = 0 \quad (\text{导体内部}), \quad \phi = \text{常数} \quad (\text{导体表面})$$

的允许电荷分布中, 实际的静电平衡态对应于体系总静电能的极小值。

球外区域不含自由电荷, 其电势完全由外表面电荷分布决定。若外表面电荷分布破坏球对称性, 则球外电场中将出现非径向分量, 从而在保持总电荷为  $q$  的约束下增加电场能

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau.$$

因此, 能量极小所对应的电荷分布必然保持球对称性。

由此可知, 外表面电荷在球面上均匀分布, 其产生的球外电场与位于球心的点电荷  $q$  完全相同。因此, 球外任意一点处的电场为

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad r > R.$$

可见, 空腔的形状以及点电荷在腔内的具体位置, 均不影响球外区域的电场分布。

**2.4.7** 一个半径为  $R$  的金属球, 带有电荷  $q$ , 这个金属球又被一个厚的同心金属球壳所包围 (球壳内径为  $a$ , 外径为  $b$ )。

- (a) 分别求出  $R$ ,  $a$ ,  $b$  球面上的电荷面密度  $\sigma$ 。
- (b) 求出球心处的电势, 选无限远处为参考点。
- (c) 现在球壳的外表面接地, 电势能为零。(a) 和 (b) 所得结果改变为什么?

(a):

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \frac{q}{4\pi R^2} \\ \sigma_a &= \frac{q}{4\pi a^2} \\ \sigma_b &= \frac{q}{4\pi b^2} \end{aligned}$$

(b):

$$U = \int_b^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} dr + \int_R^a \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{bR}{a} \right)$$

(c):

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \frac{q}{4\pi R^2} \\ \sigma_a &= \frac{q}{4\pi a^2} \\ \sigma_b &= 0 \\ U &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{a}\right)\end{aligned}$$

**2.4.8** 一个半径为  $R$  的导体球体, 其内部有两个半径分别为  $a$  和  $b$  的圆形空洞, 在  $a$  空洞的中心放有点电荷  $q$ , 在  $b$  空洞的中心放有点电荷  $q$ 。

- (a) 求出电荷面密度  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  和  $\sigma_R$ 。
- (b) 导体外面的电场是什么?
- (c) 每个空洞内的电场是什么?
- (d)  $q_a$  和  $q_b$  受到的力是什么?
- (e) 如果让第三个电荷  $q$  靠近导体, 上面所得结果哪一个会发生变化?

(a):

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \frac{2q}{4\pi R^2} \\ \sigma_a &= \frac{q}{4\pi a^2} \\ \sigma_b &= \frac{q}{4\pi b^2}\end{aligned}$$

(b):

$$\mathbf{E} = \frac{2qr}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

(c):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_a &= \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \mathbf{E}_b &= \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^3}\end{aligned}$$

(d):0

(e):  $\sigma_R, b$

## 2.5 电容

$$C \equiv \frac{Q}{U} \tag{2.6}$$

$$W = \int_0^Q \left( \frac{q}{C} \right) dq = \frac{Q^2}{2C} \tag{2.7}$$

2.5.1 两个同轴金属管壳，半径分别为  $a$  和  $b$ ，求出单位长度的电容。

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b \frac{Q}{2\epsilon_0 r} dr \\ &= \frac{Q}{2\epsilon_0} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \\ C &= \frac{Q}{U} \\ &= \frac{2\epsilon_0}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)} \end{aligned}$$

## 2.6 拉普拉斯方程

$$\frac{d^2U}{dx_i^2} = 0 \quad (2.8)$$

### 2.6.1 一维拉普拉斯方程

$$U = ax + b \quad (2.9)$$

2.6.2 在球坐标下，对  $U$  仅依赖于  $r$  的情况，求出拉普拉斯方程的一般解。对柱坐标系，假定  $U$  仅依赖于  $s$ ，做同样的计算。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= 0 \\ r^2 \frac{\partial U}{\partial r} &= C_1 \\ \frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{C_1}{r^2} \\ U &= -\frac{C_1}{r} + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial u_s} \left( s \frac{\partial U}{\partial u_s} \right) &= 0 \\ s \frac{\partial U}{\partial u_s} &= C_1 \\ \frac{\partial U}{\partial u_s} &= \frac{C_1}{s} \\ U &= C_1 \ln s + C_2 \end{aligned}$$

**2.6.3**  $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + (\frac{ra}{R})^2 - 2ra \cos\theta}} \right]$  求出球面上的诱导电荷面密度。对其积分求出总诱导电荷。计算这个构型的能量。

$$\begin{aligned}\sigma &= -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + (\frac{ra}{R})^2 - 2ra \cos\theta}} \right] \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left[ -\frac{2r - 2a \cos\theta}{2\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos\theta}^3} + \frac{2\frac{ra}{R} - 2a \cos\theta}{2\sqrt{R^2 + (\frac{ra}{R})^2 - 2ra \cos\theta}} \right] \\ &\stackrel{r=R}{=} -\frac{q}{4\pi} \left[ -\frac{2R - 2a \cos\theta}{2\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos\theta}^3} + \frac{2\frac{Ra}{R} - 2a \cos\theta}{2\sqrt{R^2 + (\frac{Ra}{R})^2 - 2Ra \cos\theta}} \right] \\ &\stackrel{r=R}{=} -\frac{q}{4\pi} \left[ \frac{a - R}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos\theta}^3} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W &= \int_{\infty}^a q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\infty}^a \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0 r (r - \frac{R^2}{r})^2} dr \\ &= \int_{\infty}^a \frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0 (r^2 - R^2)^2} dr^2 \\ &= -\frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0 (r^2 - R^2)} \Big|_{\infty}^a \\ &= -\frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0 (a^2 - R^2)}\end{aligned}$$

## 2.7 镜像法

**2.7.1** 一条无限长均匀带电线，电荷线密度为  $\lambda$ ，它距一个接地导体板距离为  $d$ 。带电线平行于  $x$  轴并位于  $x$  轴上方，导体板为  $xy$  平面

- (a) 求出导体板上方的电势。
- (b) 求出导体板上的诱导电荷的面密度。

(a):

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|x_3 - d|} \ln |x_3 - d| - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(x_3 + d)} \ln (x_3 + d)$$

(b):

$$\begin{aligned}E_3 &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 d} \\ \sigma &= \epsilon_0 E_3 = \frac{\lambda}{\pi d}\end{aligned}$$

**2.7.2** 两个半无限大接地导体板一端相接形成一个直角。在它们之间的区域有一个点电荷  $q$ , 计算这个区域内的电势。作用在  $q$  上的力是什么? 把  $q$  从无限远处移到所示位置需做多少功? 假定两板形成的角度不是  $\frac{\pi}{2}$ , 而是另外的一些角度, 你还能用镜像法求解问题吗? 如果不能, 对什么样的特殊角度仍然可以用镜像法求解?

假设在  $(a, a), (-a, -a)$  处有电荷  $q$ ,  $(a, -a), (-a, a)$  有电荷  $-q$ , 当  $x = 0, z = 0$  时

$$U = \frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y+a)^2}} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E} = -\frac{q^2\mathbf{e}_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{q^2\mathbf{e}_2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}q^2\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}q^2\mathbf{e}_2}{4\pi\varepsilon_0 2a^2} \\ |\mathbf{F}| &= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \\ W &= \int_{\infty}^a \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \\ &= -\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \Big|_{\infty}^a \\ &= -\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}$$

在无源区域内, 电势满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 V(x, y) = 0.$$

在二维情况下, 可引入复势

$$W(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y),$$

其中

$$\Phi = V.$$

$W(z)$  为解析函数的充要条件是  $\Phi$  与  $\Psi$  满足 Cauchy–Riemann 条件, 而这等价于  $\Phi$  满足拉普拉斯方程。因此, 求解二维静电问题等价于构造合适的解析函数  $W(z)$ 。

二维中, 点电荷对应的 Green 函数为对数型:

$$W_0(z) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln(z - z_0),$$

其电势为

$$U(z) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln|z - z_0|.$$

该表达式在  $z = z_0$  处具有对数奇点, 对应于二维点电荷。

定义映射

$$w = z^{\pi/\alpha}.$$

该映射具有如下性质:

- 若  $0 < \arg z < \alpha$ , 则  $0 < \arg w < \pi$ ;
- 楔形区域被映射为上半平面;
- $\arg z = 0, \alpha$  被映射为实轴。

因此, 楔形导体边界在  $w$  平面上对应于接地的实轴。

在上半平面中, 实轴接地, 位于  $w_0$  ( $\Im w_0 > 0$ ) 的点电荷的复势为

$$W(w) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0}.$$

该表达式满足:

- 在上半平面内调和;
- 在实轴上  $|w - w_0| = |w - \bar{w}_0|$ , 因而  $V = 0$ ;
- 在  $w = w_0$  处具有正确的对数奇点。

这是由唯一性定理保证的解。

将  $w = z^{\pi/\alpha}$  代回, 得到楔形区域内的复势:

$$W(z) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z^{\pi/\alpha} - z_0^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - \bar{z}_0^{\pi/\alpha}}.$$

电势为其实部:

$$U(z) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{z^{\pi/\alpha} - z_0^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - \bar{z}_0^{\pi/\alpha}} \right|.$$

这是任意楔角  $\alpha$  下的严格解。

若

$$\alpha = \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

则

$$w = z^n$$

是单值多项式映射。

利用因式分解:

$$z^n - z_0^n = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_0 e^{2\pi i k/n}),$$

电势可写为有限和:

$$U(z) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \frac{z - z_0 e^{2\pi i k/n}}{z - \bar{z}_0 e^{2\pi i k/n}} \right|.$$

这正对应于有限多个镜像电荷的叠加。

若  $\alpha \neq \pi/n$ , 则  $z^{\pi/\alpha}$  为多值函数, 解析延拓将产生无限多个像点, 镜像法不再以有限求和形式成立。

## 2.8 分离变量法

### 2.8.1 直角坐标系

两个无限大接地金属平板平行于  $xz$  平面放置, 一个位于  $y = 0$ , 另一个位于  $y = a$ 。在  $x = 0$  两板的左端点, 被与两板绝缘的无限长带封闭, 带子上维持特定的电势  $U_0(y)$ 。求出这个“夹缝”中的电势。

由于几何结构和边界条件在  $z$  方向具有平移对称性, 且  $U_0$  与  $z$  无关, 物理解必然满足

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

因此问题严格退化为二维拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

其边界条件为

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{y=0} 0 \\ U &\xrightarrow{y=a} 0 \\ U &\xrightarrow{x=0} U_0(y) \\ U &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

设解为

$$U(x, y) = X(x)Y(y).$$

代入 Laplace 方程得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0.$$

因此两项必须分别等于常数, 记为  $-k^2$ :

$$\begin{aligned} Y''(y) + k^2 Y(y) &= 0, \\ X''(x) - k^2 X(x) &= 0. \end{aligned}$$

非平凡解存在当且仅当

$$k = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

对应本征函数为

$$Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

对每个  $k_n = n\pi/a$ , 横向方程为

$$X_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 X_n(x) = 0.$$

通解为

$$X_n(x) = A_n e^{-(n\pi/a)x} + B_n e^{+(n\pi/a)x}.$$

由远处边界条件, 要求  $V \rightarrow 0$ ,

$$B_n = 0.$$

利用线性叠加原理, 电势的一般解为

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{a} e^{-(n\pi/a)x}.$$

在  $x = 0$  处, 要求

$$V(0, y) = U_0(y).$$

因此

$$U_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a U_0(y) \sin \frac{n\pi y}{a} dy$$

综上, 夹缝区域中的电势为

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{a} \int_0^a U_0(y') \sin \frac{n\pi y'}{a} dy' \right] \sin \frac{n\pi y}{a} e^{-(n\pi/a)x}$$

若问题在  $z$  方向不具平移对称性, 可进一步设

$$\Phi = X(x)Y(y)Z(z),$$

并引入

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad Z(z) = e^{i\lambda z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

此时解的结构变为

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\lambda) \sin \frac{n\pi y}{a} e^{-\sqrt{(n\pi/a)^2 + \lambda^2} x} e^{i\lambda z} d\lambda.$$

### 2.8.2 球坐标系

在球坐标系中, 拉普拉斯算符为

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

设电势可以写成完全分离的形式, 即  $U = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R\Theta\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial R\Theta\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 R\Theta\Phi}{\partial \phi^2} &= 0 \\ \frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} &= 0 \\ - \left[ \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \right] &= \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) \end{aligned}$$

由于左边仅依赖  $r$ , 右边仅依赖角变量, 两边必须等于同一个常数。

引入分离常数  $l(l+1)$ ,  $l \in \mathbb{N}$

于是得到:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1)R = 0. \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + l(l+1) = 0. \quad (2.11)$$

继续分离  $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ , 令

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

于是得到:

$\phi$  方程

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0, \quad (2.12)$$

其解为

$$\Phi_m(\phi) = C_1 e^{im\phi}$$

$\theta$  方程

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0. \quad (2.13)$$

这是关联勒让德方程, 其在  $\theta \in [0, \pi]$  上正则的解为

$$\Theta_{lm}(\theta) = P_{lm}(\cos\theta), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad |m| \leq l.$$

其中,

$$P_{lm}(x) \equiv \sqrt{(1+x^2)^m} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (2.14)$$

$P_l(x)$  可由罗德里格 (Rodrigue) 公式计算:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (2.15)$$

罗德里格公式显然仅对非负的整数  $l$  成立。另外, 它仅提供给我们一个解。但是式2.13应当有两个解。情况是那些另外的解在  $\theta = 0$  和/或  $\theta = \pi$  发散

为了方便, 将角向部分合并, 定义球谐函数

$$Y_{lm} \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (2.16)$$

径向方程为

$$r^2 R'' + 2r R' - l(l+1)R = 0,$$

通解为

$$R_l(r) = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \quad (2.17)$$

将各部分组合, 得到球坐标下拉普拉斯方程的一般解

$$U(r, \theta, \phi) = (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.18)$$

当  $m = 0$  时, 式2.13退化为

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1)\Theta = 0 \quad (2.19)$$

式2.13的解退化为

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta) \quad (2.20)$$

球坐标下拉普拉斯方程的一般解退化为

$$U(r, \theta) = (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta) \quad (2.21)$$

### 2.8.3 柱坐标系

$$\nabla^2 U = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial U}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

设电势可以写成完全分离的形式, 即  $U = S(s)Z(z)\Phi(\phi)$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial S(s)Z(z)\Phi(\phi)}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 S(s)Z(z)\Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 S(s)Z(z)\Phi(\phi)}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{sS(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial S(s)}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2 \Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\text{设 } \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2$$

$$-\left[ \frac{1}{sS(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial S(s)}{\partial s} \right) - \frac{m^2}{s^2} \right] = \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

由于左边仅依赖  $s$ , 右边仅依赖  $z$ , 两边必须等于同一个常数, 设为  $-k^2$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 Z(z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{sS(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial S(s)}{\partial s} \right) - \frac{m^2}{s^2} &= k^2 \\ \frac{s}{S(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial S(s)}{\partial s} \right) - k^2 s^2 &= m^2 \\ s^2 \frac{\partial^2 S(s)}{\partial s^2} + s \frac{\partial S(s)}{\partial s} - k^2 s^2 S(s) - m^2 S(s) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{设 } S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{n+c}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) s^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) s^{n+c} - k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{n+c+2} - m^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{n+c} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+c)^2 - m^2] s^{n+c} - k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{n+c+2} \\ &= a_0 [c^2 - m^2] s^c + a_1 [(1+c)^2 - m^2] s^{1+c} + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n [(n+c)^2 - m^2] - k^2 a_{n-2}\} s^{n+c} \\ a_{n+2} &= \frac{k^2}{(n+c)^2 - m^2} \end{aligned}$$

当处于  $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$  的简化条件下时

$$s^2 \frac{\partial^2 S(s)}{\partial s^2} + s \frac{\partial S(s)}{\partial s} - m^2 S(s) = 0 \quad (2.22)$$

解得

$$S(s) = C_m s^{-m} + D_m s^m \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2$$

$$\Phi = E_m \cos m\phi + F_m \sin m\phi, (m \in \mathbb{N}) \quad (2.24)$$

将各部分组合, 得到一般解

$$U = (C_m s^{-m} + D_m s^m) (E_m \cos m\phi + F_m \sin m\phi), (m \in \mathbb{N}) \quad (2.25)$$

#### 2.8.4 勒让德多项式性质的证明

$l \in \mathbb{N}$  的证明

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1)\Theta \\ &\stackrel{u=\cos \theta}{=} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d}{d \arccos u} \left( \sqrt{1-u^2} \frac{d\Theta}{d \arccos u} \right) + l(l+1)\Theta \\ &= \frac{d}{du} \left[ (1-u^2) \frac{d\Theta}{du} \right] + l(l+1)\Theta \\ &= \frac{d}{du} \left( \frac{d\Theta}{du} \right) - \frac{d}{du} \left( u^2 \frac{d\Theta}{du} \right) + l(l+1)\Theta \\ &= \frac{d^2\Theta}{du^2} - u^2 \frac{d^2\Theta}{du^2} - 2u \frac{d\Theta}{du} + l(l+1)\Theta \end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned} \Theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \\ 0 &= \frac{d^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n}{du^2} - u^2 \frac{d^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n}{du^2} - 2u \frac{d \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n}{du} + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^n - u^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^n - 2u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} u^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} u^{n+1} + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(n-2)!} u^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} u^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n-2)!} u^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} u^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n (n > 1) \\ &= \frac{a_{n+2}}{n!} - \frac{a_n}{(n-2)!} - 2 \frac{a_n}{(n-1)!} + l(l+1) \frac{a_n}{n!} \\ &= a_{n+2} - a_n n(n-1) - 2a_n n + l(l+1)a_n \\ a_{n+2} &= [n(n+1) - l(l+1)]a_n \end{aligned}$$

由高斯判别法可得级数在  $u = \pm 1$  时发散, 因此  $l \in Z$

**勒让德多项式的求和形式** 由递推关系  $a_{n+2} = -(l-n)(l+n+1)a_n$ , 若级数在  $n = l$  时截断, 则  $\Theta(u)$  成为一个  $l$  阶多项式。规定最高次项  $u^l$  的系数为  $\frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}$ , 通过逆向递推最终得到  $l$  阶勒让德多项式的求和形式:

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^M (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^k k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k} \quad (2.26)$$

其中  $M = l/2$  ( $l$  为偶数) 或  $(l-1)/2$  ( $l$  为奇数)。

**正交性的证明** 取两个不同阶数的勒让德函数  $P_a$ 、 $P_b$ , 满足:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] + a(a+1)P_a \\ 0 &= \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] + b(b+1)P_b \\ 0 &= \left\{ \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] + a(a+1)P_a \right\} P_b - \left\{ \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] + b(b+1)P_b \right\} P_a \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] + a(a+1)P_a \right\} P_b - \left\{ \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] + b(b+1)P_b \right\} P_a du \\ &= \int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] P_b + a(a+1)P_a P_b - \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] P_a - b(b+1)P_b P_a du \\ &= \int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] P_b - \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] P_a du + [a(a+1) - b(b+1)] \int_{-1}^1 P_a P_b du \end{aligned}$$

由分部积分可得

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] P_b - \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] P_a du = (1-u^2)(P_b P'_a - P_a P'_b) \Big|_{-1}^1 = 0$$

得证

$$[a(a+1) - b(b+1)] \int_{-1}^1 P_a P_b du = 0 du$$

完备性的证明略过

**证明**  $P_l(1) = 1$

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \\ &\stackrel{u=x-1}{=} \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{du} \right)^l [u^l (u+2)^l] \end{aligned}$$

根据莱布尼茨公式, 只有当  $u^l$  被求导  $l$  次变成  $l!$  时, 且剩下部分不含  $u$  (即  $u \rightarrow 0$  时不为 0), 该项才有贡献:

$$P_l(1) = \frac{1}{2^l l!} \cdot l! \cdot (u+2)^l \Big|_{u=0} = \frac{1}{2^l} \cdot 2^l = 1$$

同理可证  $P_l(-1) = (-1)^l$ 。

**2.8.5 两个无限长接地金属板, 分别在  $y=0$  和  $y=a$  放置, 在  $x=\pm b$  的侧边连接有电势为  $U_0$  的两个金属带。求出这个矩形管中的电势。**

此时边界条件为:

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{y=0} 0 \\ U &\xrightarrow{y=a} 0 \\ U &\xrightarrow{x=b} U_0 \\ U &\xrightarrow{x=-b} U_0 \end{aligned}$$

做法同前解得

$$U = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin \frac{n\pi}{a}x + D \cos \frac{n\pi}{a}x)$$

因为  $U(-x) = U(x)$ ,  $U \xrightarrow{y=0} 0$ , 所以  $A = B, D = 0$ , 并把系数吸进  $C$  得

$$U = C \cosh \frac{n\pi}{a}x \sin \frac{n\pi}{a}y$$

余下的事是构造一般的叠加解, 设定系数  $C_n$ , 使其拟合边界条件

$$U(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a}b \sin \frac{n\pi}{a}y = U_0$$

因为  $U(b, y) = U(b, -y)$ , 所以  $\sin \frac{n\pi}{a}y$  为偶函数,  $n$  为奇数, 即

$$U(b, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cosh \frac{2n+1}{a}\pi b \sin \frac{2n+1}{a}\pi y = U_0$$

$$\begin{aligned} C_n \cosh \frac{2n+1}{a}\pi b &= \frac{2}{a} \int_0^a U_0 \sin \frac{2n+1}{a}\pi y \, dy \\ &= \frac{4U_0}{(2n+1)\pi} \left( \cosh \frac{2n+1}{a}\pi b \right)^{-1} \\ U &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4U_0}{(2n+1)\pi} \left( \cosh \frac{2n+1}{a}\pi b \right)^{-1} \cosh \frac{n\pi}{a}x \sin \frac{n\pi}{a}y \end{aligned}$$

**2.8.6** 一个半径为  $R$  的球面上的电势为  $U_0 = k \cos 3\theta$ 。求出球面内外的电势以及球面上的电荷面密度  $\sigma(\theta)$ 。(假定球内和球外没有电荷分布。)

球内:

$$\begin{aligned} U(R, \theta) &= k \cos 3\theta \\ (A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) &= k \cos 3\theta \\ A_l R^l P_l(\cos \theta) &= k \cos 3\theta \\ \int_0^\pi A_l^2 R^{2l} P_l^2(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta A_l R^l P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ \int_0^\pi A_l R^l P_l^2(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ \int_0^\pi A_0 R^0 P_0^2(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta P_0(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ \int_0^\pi A_0 \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta \sin \theta \, d\theta \\ A_0 &= 0 \\ \int_0^\pi A_1 R P_1^2(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta P_1(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ \int_0^\pi A_1 R \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta \cos \theta \sin \theta \, d\theta \end{aligned}$$

不想算积分了

**2.8.7** 假定一个球面上的电势为  $U_0(\theta)$ , 并且球内球外没有电荷分布。证明球面上的电荷面密度为  
 $\sigma = \frac{\varepsilon_0}{2R} (2l+1)^2 P_l(\cos \theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta'$

$$\begin{aligned} U(R, \theta) &= U_0(\theta) \\ (A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) &= U_0(\theta) \end{aligned}$$

球外:

$$\begin{aligned} B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) &= U_0(\theta) \\ \int_0^\pi B_l^2 R^{-2(l+1)} P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \int_0^\pi B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) U_0(\theta) \sin \theta d\theta \\ \int_0^\pi B_l R^{-(l+1)} P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \int_0^\pi P_l(\cos \theta) U_0(\theta) \sin \theta d\theta \\ B_l &= \frac{\int_0^\pi P_l(\cos \theta) U_0(\theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi R^{-(l+1)} P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta} \end{aligned}$$

球内:

$$\begin{aligned} A_l R^l P_l(\cos \theta) &= U_0(\theta) \\ \int_0^\pi A_l R^l P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \int_0^\pi U_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ A_l &= \frac{\int_0^\pi U_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi R^l P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta} \end{aligned}$$

由连续性可得

$$\begin{aligned} A_l R^l P_l(\cos \theta) &= B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\ A_l R^l &= B_l R^{-(l+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{\varepsilon_0}{2R} (2l+1)^2 P_l(\cos \theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{2R} (2l+1)^2 P_l(\cos \theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= -\left. \frac{\partial B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)}{\partial r} + \frac{\partial A_l r^l P_l(\cos \theta)}{\partial r} \right|_{r=R} \\ \frac{1}{2R} (2l+1)^2 P_l(\cos \theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= (l+1) B_l R^{-(l+2)} P_l(\cos \theta) + l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) \\ \frac{1}{2} (2l+1)^2 P_l(\cos \theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= (l+1) B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) + l A_l R^l P_l(\cos \theta) \\ \frac{1}{2} (2l+1)^2 P_l(\cos \theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= (l+1) B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) + l B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\ \frac{1}{2} (2l+1)^2 P_l(\cos \theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= (2l+1) B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

逐项比较可得 (不使用爱因斯坦求和约定)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2l+1)^2 P_l(\cos \theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= (2l+1) B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\ \frac{1}{2}(2l+1) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= B_l R^{-(l+1)} \\ \frac{1}{2}(2l+1) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= \frac{\int_0^\pi P_l(\cos \theta) U_0(\theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi R^{-(l+1)} P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta} R^{-(l+1)} \\ \frac{1}{2}(2l+1) &= \frac{1}{\int_0^\pi P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta} \end{aligned}$$

**2.8.8** 一个带电金属球 (电荷为  $Q$ , 半径为  $R$ ) 置于均匀外电场  $E_0$  中, 求球外的电势。

边界条件:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} U &\rightarrow E_0 r \cos \theta \\ U(R) &= 0 \\ (A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) &= 0 \\ (A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) &= 0 \end{aligned}$$

显然  $A_1 = -E_0$ 。, 其余诸  $A_l$  为零

$$\begin{aligned} -E_0 R^1 + B_1 R^{-2} &= 0 \\ B_1 &= E_0 R^3 \end{aligned}$$

**2.8.9** 在习题2.2.5中求出了一个均匀带电盘轴线上的电势。

- (a) 对带电盘不在轴线上的电势, 计算在展开式中的前三项, 假设  $r > R$ 。  
(b) 求出  $r < R$  的电势。

(a):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \sqrt{r^2 + R^2} - r \right) &= (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(1) \\ \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0} \left( \sqrt{1 + \frac{R^2}{r^2}} - 1 \right) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} \\ \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 2r} &= B_0 r^{-1} \\ 0 &= B_1 r^{-2} \\ -\frac{\sigma R^4}{2\varepsilon_0 8r^3} &= B_2 r^{-3} \end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \sqrt{r^2 + R^2} - r \right) &= (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(1) \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \sqrt{r^2 + R^2} - r \right) &= A_l r^l \end{aligned}$$

**2.8.10** 一个半径为  $R$  的球壳在“北半球”带有均匀的面电荷，电荷面密度为  $\sigma$ ，在“南半球”也带有均匀的面电荷，电荷面密度为  $-\sigma$ 。求出球壳内外的电势。

由连续性可得  $A_l r^l = B_l r^{-(l+1)}$

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \\ \sigma(\theta) &= -\varepsilon_0 \frac{\partial (-A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)}{\partial r} \\ \sigma(\theta) &= -\varepsilon_0 [-l A_l r^{l-1} - (l+1) B_l r^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) \\ \sigma(\theta) &= \varepsilon_0 (2l+1) B_l r^{-(l+2)} P_l(\cos \theta)\end{aligned}$$

## 2.9 多极展开

设电荷分布  $\rho(\mathbf{r}')$  局域在有限区域内，取坐标原点在该区域附近。空间中任意点  $\mathbf{r}$  处的静电势为

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2.27)$$

当观测点满足

$$r \gg r'$$

时，可展开电荷：

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (2.28)$$

代入电势表达式，得

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int r'^l P_l(\cos \gamma) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.29)$$

该展开称为**多极展开**。其中每一阶  $l$  对应一个多极矩项，并按  $r^{-(l+1)}$  的幂次递减。

### 2.9.1 单极项 ( $l = 0$ )

注意  $P_0(\cos \gamma) = 1$ ，于是

$$U_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (2.30)$$

其中

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

为体系的总电荷。

### 2.9.2 偶极项 ( $l = 1$ )

利用

$$P_1(\cos \gamma) = \cos \gamma = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}',$$

可得

$$U_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (2.31)$$

定义电偶极矩

$$\mathbf{d} \equiv \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 r',$$

于是

$$U_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.32)$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.33)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.34)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (2.35)$$

$$\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r^2} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (2.36)$$

### 2.9.3 四极项及更高阶

对于  $l \geq 2$ , 电势项的一般形式为

$$U_l(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^{l+1}} \int r'^l P_l(\cos \gamma) \rho(\mathbf{r}') dr'. \quad (2.37)$$

这些项随  $r$  增大而迅速衰减, 在远场区

$$r \gg r'$$

时, 其贡献相对低阶项可以忽略。

因此, 在远离电荷分布的区域, 电势可近似表示为

$$U(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \right). \quad (2.38)$$

若体系总电荷  $Q = 0$ , 则单极项消失; 若同时电偶极矩  $\mathbf{d} = 0$ , 则远场由更高极项主导。

### 2.9.4 四个粒子 (一个带电为 $q$ , 一个为 $3q$ , 另两个为 $-2q$ ), 每一个距原点距离为 $a$ 。求出远离原点处电势的简单近似表达式。

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{3a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) + \frac{(-a)^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) - \frac{2a^l}{r^{l+1}} P_l(\sin \theta) - \frac{2(-a)^l}{r^{l+1}} P_l(\sin \theta)$$

$l = 0$ :

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3}{r^1} + \frac{1}{r^1} - \frac{2}{r^1} - \frac{2}{r^1} \right] = 0$$

$l = 1$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3a}{r^2} P_1(\cos \theta) + \frac{(-a)}{r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{2a}{r^2} P_1(\sin \theta) - \frac{2(-a)}{r^2} P_1(\sin \theta) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{r^2} \cos \theta \end{aligned}$$

### 2.9.5 确定电偶极子电势中的四极矩项

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) - \frac{(-a)^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$l = 3$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{a^3}{r^4} P_3(\cos\theta) - \frac{(-a)^3}{r^4} P_3(\cos\theta) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{a^3}{r^4} \frac{3}{2} \sqrt{1 - \cos^2\theta} (5\cos^2\theta - 1) - \frac{(-a)^3}{r^4} \frac{3}{2} \sqrt{1 - \cos^2\theta} (5\cos^2\theta - 1) \right] \\ &= \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^3}{r^4} \sqrt{1 - \cos^2\theta} (5\cos^2\theta - 1) \end{aligned}$$

### 2.9.6 一个“纯粹”的偶极子 $d$ 位于原点，指向 $z$ 方向。

- (a) 作用在位于  $(a, 0, 0)$  (直角坐标系) 的点电荷  $q$  上的力是什么？
- (b) 作用在位于  $(0, 0, a)$  (直角坐标系) 的点电荷  $q$  上的力是什么？
- (c) 把点电荷  $q$  从  $(a, 0, 0)$  移动到  $(0, 0, a)$  所需的功为多少？

(a)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r^2} (2\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta) = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{e}_\theta$$

(b)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r^2} (2\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta) = \frac{d}{2\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{e}_r$$

(c)

$$W = q\Delta U = q \frac{d}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

### 2.9.7 两个电量为 $-q$ 的点电荷位于 $(0, a, 0), (0, -a, 0)$ , 一个电量为 $q$ 的点电荷位于 $(0, 0, a)$ 求出远离原点处的近似电场，计算到多极展开中的最低两项。

暂时不会

## 2.10 习题

2.10.1 一个均匀带电、边长为  $2a$  的正方形面，电荷面密度为  $\sigma$ 。求出距中心高度为  $z$  处的电场。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0\sqrt{2L^2+z^2}} \mathbf{e}_3 \frac{2Lz}{L^2+z^2} dL \\
 & \xrightarrow{2L^2=z^2\tan^2\theta} \int_0^{\arctan\frac{a}{\sqrt{2}z}} \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0\sqrt{z^2\tan^2\theta+z^2}} \mathbf{e}_3 \frac{2z\tan\theta z}{z^2\tan^2\theta+2z^2} dz \tan\theta \\
 & = \int_0^{\arctan\frac{\sqrt{2}a}{z}} \frac{\sigma \cos\theta}{\pi\epsilon_0 z \cos^2\theta} \mathbf{e}_3 \frac{2z\tan\theta z}{z^2\tan^2\theta+2z^2} dz \theta \\
 & = \int_0^{\arctan\frac{\sqrt{2}a}{z}} \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0 \cos\theta} \mathbf{e}_3 \frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+2} d\theta \\
 & = \int_0^{\arctan\frac{\sqrt{2}a}{z}} \frac{2\sigma}{\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{\tan\theta}{\tan^2\theta\cos\theta+2\cos\theta} d\theta \\
 & = \int_0^{\arctan\frac{\sqrt{2}a}{z}} \frac{2\sigma}{\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{\sin\theta}{\sin^2\theta+2\cos^2\theta} d\theta \\
 & = - \int_0^{\arctan\frac{\sqrt{2}a}{z}} \frac{2\sigma}{\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{1}{1+\cos^2\theta} d\cos\theta \\
 & = - \frac{2\sigma}{\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \left. \arctan\cos\theta \right|_0^{\arctan\frac{\sqrt{2}a}{z}} \\
 & = \frac{2\sigma}{\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \left( \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{z}{\sqrt{2a^2+z^2}} \right)
 \end{aligned}$$

2.10.2 已知电场  $\mathbf{E} = \frac{A\mathbf{e}_r + B \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_\phi}{r}$ , 求电荷密度

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{sr} \frac{\partial srE_r}{\partial r} + \frac{1}{s} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \\
 &= \frac{1}{sr} \frac{\partial sA}{\partial r} + \frac{1}{sr} \frac{\partial B \sin\theta \cos\phi}{\partial \phi} \\
 &= \frac{A}{r^2} - \frac{1}{r^2} B \sin\phi
 \end{aligned}$$

### 2.10.3 一个均匀带电球体, 求出南半球与北半球之间的净相互作用力

$$\begin{aligned}
 E_z &= E_r \cos \theta = \frac{\rho \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\rho \cos \theta r}{3\varepsilon_0} \\
 F &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \theta \rho E_z d\theta \\
 &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin \theta \rho \frac{\rho \cos \theta}{3\varepsilon_0} d\theta \\
 &= \pi \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \rho^2 \frac{2 \cos \theta}{3\varepsilon_0} d\theta \\
 &= \pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \rho^2 \frac{\cos \theta}{6\varepsilon_0} d\theta \\
 &= \pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \frac{\sin 2\theta}{24\varepsilon_0} d2\theta \\
 &= -\rho^2 R^4 \pi \frac{\cos 2\theta}{24\varepsilon_0} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\rho^2 R^4 \pi}{12\varepsilon_0}
 \end{aligned}$$

2.10.4 一个半径为  $R$  的倒置半球面均匀带电, 电荷面密度为  $\sigma$ 。求出北极与球心处的电势差

$$\begin{aligned}
 U_{\text{半球北极}} &= d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma R \sin \theta}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2(1-\cos\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta}} R d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \sin^2 \theta}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2 \theta}} R^2 d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \sin \theta}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos\theta}} R d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}} R d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} R d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \cos \frac{\theta}{2}}{2\epsilon_0} R d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\epsilon_0} R d \sin \frac{\theta}{2} \\
 &= \left. \frac{\sigma \sin \frac{\theta}{2}}{\epsilon_0} R \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\epsilon_0} R \\
 U_{\text{半球球心}} &= \frac{2\pi R^2 \sigma}{4\pi \epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \\
 \Delta U &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{\sqrt{R^2}} + \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{R + \sqrt{R^2 + R^2}} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\epsilon_0} R \\
 &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\epsilon_0} R \\
 &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\epsilon_0} R
 \end{aligned}$$

### 2.10.5 一个半径为 $R$ 的球体, 电荷密度 $\rho = kr$ , 求能量

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{E}| &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 x_3^2} \int_0^R 4\pi kr^3 dr \ (x_3 \geq R) \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 x_3^2} \int_0^{x_3} 4\pi kr^3 dr \ (x_3 < R) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{4\varepsilon_0 x_3^2} kR^4 \ (x_3 \geq R) \\ \frac{1}{4\varepsilon_0 x_3^2} kx_3^4 \ (x_3 < R) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 x_3^2} \ (x_3 \geq R) \\ \frac{kx_3^2}{4\varepsilon_0} \ (x_3 < R) \end{cases} \\
 U &= \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \int_0^R \left( \frac{kx_3^2}{4\varepsilon_0} \right)^2 x_3^2 dx_3 + \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \int_R^\infty \left( \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 x_3^2} \right)^2 x_3^2 dx_3 \\
 &= 2\pi \int_0^R \frac{k^2 x_3^6}{16\varepsilon_0} dx_3 + 2\pi \int_R^\infty \frac{k^2 R^8}{16\varepsilon_0 x_3^2} dx_3 \\
 &= \pi \frac{k^2 R^7}{56\varepsilon_0} + \pi \frac{k^2 R^8}{8\varepsilon_0 R} \\
 &= \pi \frac{k^2 R^7}{7\varepsilon_0}
 \end{aligned}$$

### 2.10.6 电势为 $U = \frac{Ae^{-\lambda r}}{r}$ , 求电场, 电荷密度, 总电荷

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= -\nabla U \\
 &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Ae^{-\lambda r}}{r} \right) \mathbf{e}_r \\
 &= \frac{\lambda r A e^{-\lambda r} + A e^{-\lambda r}}{r^2} \mathbf{e}_r \\
 \rho &= \varepsilon_0 \nabla^2 U \\
 &= \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} \\
 &= \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda r A e^{-\lambda r} + A e^{-\lambda r}}{\partial r} \\
 &= \varepsilon_0 \frac{\lambda A e^{-\lambda r} - \lambda^2 r A e^{-\lambda r} - \lambda A e^{-\lambda r}}{r^2} \\
 &= -\frac{\varepsilon_0 \lambda^2 A e^{-\lambda r}}{r} \ (r \neq 0) \\
 \rho &= \frac{\varepsilon_0 A 4\pi \delta^{(3)}(r)}{r} - \frac{\varepsilon_0 \lambda^2 A e^{-\lambda r}}{r} \\
 Q &= 4\pi \int_0^\infty \rho r^2 dr \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

2.10.7 两条平行于  $z$  轴的无限长均匀带电线, 电荷线密度分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ , 距离为  $2d$ 。

(a) 求出任意一点的电势。

(b) 证明等势面为圆柱面, 对给定的电势  $U$ , 给出圆柱面的半径和轴的位置。

(a):

$$\begin{aligned} U_{+\lambda} &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln |\mathbf{r} - d\mathbf{e}_1| \\ U_{-\lambda} &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln |\mathbf{r} + d\mathbf{e}_1| \\ U &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln |\mathbf{r} - d\mathbf{e}_1| + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln |\mathbf{r} + d\mathbf{e}_1| \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left[ \frac{(x_1 + d)^2 + x_2^2}{(x_1 - d)^2 + x_2^2} \right] \end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned} (x_1 + d)^2 + x_2^2 &= k [(x_1 - d)^2 + x_2^2] \\ x_1^2 + 2x_1d + d^2 + x_2^2 &= kx_1^2 - 2kx_1d + kd^2 + kx_2^2 \\ 0 &= (k - 1)x_1^2 - 2(k + 1)x_1d + (k - 1)d^2 + (k - 1)x_2^2 \\ 0 &\stackrel{u=\frac{k+1}{k-1}}{=} x_1^2 - 2ux_1d + d^2 + x_2^2 \\ u^2 - d^2 &= (x_1 - u)^2 + x_2^2 \\ R &= \sqrt{u^2 - d^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 - d^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{e^{\frac{4\pi\varepsilon_0 U}{\lambda}} + 1}{e^{\frac{4\pi\varepsilon_0 U}{\lambda}} - 1}\right)^2 - d^2} \end{aligned}$$

2.10.8 在一个真空二极管中，电子从阴极面“热蒸发”后向阳极面加速运动，阴极电势为零，对面阳极的电势为  $U_0$ 。在两极间隙中所形成的电子云（称为空间电荷）很快会达到一种分布状态，使得阴极面上的电场为零。然后在两极板之间形成稳定的电流  $I$ 。假定两个极板面积  $A$  远大于它们之间的距离  $d(A \gg d)$ ，所以边界效应可以忽略。则  $U, \rho, v$ （电子速度）都仅是  $x$  的函数。

- (a) 写出在两极板之间空间的泊松方程。
- (b) 假定电子从阴极是从静止开始运动的，那么在点  $x$ ，这里电势为  $U(x)$ ，电子速度为多少？
- (c) 在稳定状态下，电流  $I$  不依赖于  $x$ 。那么  $\rho$  和  $v$  之间的关系是什么？
- (d) 利用上面的结果，消去  $\rho$  和  $v$ ，得出  $U$  满足的微分方程。
- (e) 作为  $x, U_0, d$  的函数，求出  $U$  的解。并与没有空间电荷的情况比较。另外作为  $x$  的函数，求出  $\rho$  和  $v$ 。
- (f) 证明  $1 = KU_0^{\frac{3}{2}}$  求出常数  $K$ 。

(a):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(b):

$$\begin{aligned} eU &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v &= \sqrt{\frac{2eU}{m}} \end{aligned}$$

(c):

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Delta q}{\Delta t} \\ &= \rho Av \end{aligned}$$

(d):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{I}{Av\varepsilon_0} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{I}{A\sqrt{\frac{2eU}{m}}\varepsilon_0} \end{aligned}$$

(e):

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{I}{A \sqrt{\frac{2eU}{m}} \varepsilon_0} \\
\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 &= 4 \frac{\partial U^{\frac{1}{2}}}{\partial x} \frac{I}{A \sqrt{\frac{2e}{m}} \varepsilon_0} \\
\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 &= 4 \frac{IU^{\frac{1}{2}}}{A \sqrt{\frac{2e}{m}} \varepsilon_0} \\
\frac{\partial U}{\partial x} &= 2 \frac{I^{\frac{1}{2}} U^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2e}{m} \right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}} \\
U^{-\frac{1}{4}} \partial U &= 2 \frac{I^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{4}} \partial x}{A^{\frac{1}{2}} (2e)^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}} \\
\frac{4}{3} U^{\frac{3}{4}} &= 2 \frac{I^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{4}} x}{A^{\frac{1}{2}} (2e)^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}} \\
U &= \frac{3^{\frac{4}{3}} I^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{4}}}{2 A^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}} \\
v &= \sqrt{\frac{2eU}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{2e \frac{3^{\frac{4}{3}} I^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{4}}}{2 A^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}}}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{3^{\frac{4}{3}} I^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} e^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}} m^{\frac{3}{4}}}} \\
&= \frac{3^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{1}{3}}}{A^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{3}} m^{\frac{3}{8}}} \\
\rho &= \varepsilon_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\
&= \frac{2 I^{\frac{2}{3}} m^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} A^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

(f):

$$\begin{aligned}
U &= \frac{3^{\frac{4}{3}} I^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{4}}}{2 A^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \varepsilon_0^{\frac{3}{2}}} \\
I^{\frac{2}{3}} &= \frac{U 2 A^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{4}}} \\
I &= \frac{U^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3}{2}} A^{\frac{3}{4}} e^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}}{3^2 x^2 m^{\frac{3}{2}}} \\
I &= \frac{U_0^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3}{2}} A^{\frac{3}{4}} e^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}}{3^2 d^2 m^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

**2.10.9** 假设现在极精确的测量已经揭示出库仑定律的误差。两个点电荷之间的作用力为  $\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \mathbf{e}_r$  式中， $\lambda$  是一个新的自然常数。你的任务是按照这个新发现重新表述静电学。假定叠加原理仍然成立。

- (a) 电场是什么？
- (b) 求出一个点电荷的电势。

(c) 对一个位于原点的点电荷，证明  $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\lambda^2} \iiint_V U d\tau = \frac{q}{\epsilon_0}$

(a):

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \mathbf{e}_r$$

(b):

$$\begin{aligned} U &= \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \lambda} \int_R^\infty \left(\frac{\lambda^2}{r^2} + \frac{\lambda}{r}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} d\frac{r}{\lambda} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \lambda} \int_R^\infty \left(\frac{\lambda^2}{r^2} - \frac{\lambda}{r}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} dr - \frac{r}{\lambda} \\ &\stackrel{u=-\frac{r}{\lambda}}{=} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \lambda} \int_{-\frac{R}{\lambda}}^{-\infty} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\right) e^u du \\ &= -\frac{1}{u} e^u \Big|_{-\frac{R}{\lambda}}^{-\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \lambda} \\ &= e^{-\frac{R}{\lambda}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

(c):

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= 4\pi R^2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 + \frac{R}{\lambda}\right) e^{-\frac{R}{\lambda}} = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{R}{\lambda}\right) e^{-\frac{R}{\lambda}} \\ \frac{1}{\lambda^2} \iiint_V U d\tau &= 4\pi \frac{1}{\lambda^2} \int_0^R e^{-\frac{r}{\lambda}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} r^2 dr \\ &= \int_0^R -\frac{r}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \frac{q}{\epsilon_0} dr - \frac{r}{\lambda} \\ &\stackrel{u=-\frac{r}{\lambda}}{=} \int_0^{-\frac{R}{\lambda}} u e^u \frac{q}{\epsilon_0} du \\ &= (u-1) e^u \frac{q}{\epsilon_0} \Big|_0^{-\frac{R}{\lambda}} \\ &= \left(-\frac{R}{\lambda} - 1\right) e^{-\frac{R}{\lambda}} \frac{q}{\epsilon_0} + \frac{q}{\epsilon_0} \\ \frac{q}{\epsilon_0} &= \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\lambda^2} \iiint_V U d\tau \end{aligned}$$

**2.10.10** 假设一个电场  $E_1 = ax$ ,  $E_2 = E_3 = 0$ ，电荷密度为什么？

$$\epsilon_0 \frac{\partial ax}{\partial x} = a$$

**2.10.11** 所有的静电学特性都是从库仑定律的  $\frac{1}{r^2}$  以及叠加原理导出的。因此也可以对牛顿万有引力构建类似的理论。什么是一个半径为  $R$ , 质量为  $M$  的球体的引力能? 假设质量密度是均匀的。利用所得结果估计太阳的引力能

根据库仑定律与万有引力定律的数学相似性, 我们可以通过替换常数直接得到均匀球体的引力自能。

在静电学中, 均匀带电球体的静电能为:

$$W_e = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R} \quad (2.39)$$

利用类比关系得到质量为  $M$  的均匀球体的引力能:

$$W_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (2.40)$$

假设球体密度为  $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ 。考虑已形成半径为  $r$  的球核, 其质量为  $m(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ 。现从无穷远处移近一层厚度为  $dr$  的薄壳, 其质量为  $dm = 4\pi\rho r^2 dr$ 。此过程引力所做的功为:

$$dW = -\frac{Gm(r)dm}{r} \quad (2.41)$$

$$= -\frac{G}{r} \left( \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \right) (4\pi\rho r^2 dr) \quad (2.42)$$

$$= -\frac{16}{3}\pi^2 G\rho^2 r^4 dr \quad (2.43)$$

对整个球体从 0 到  $R$  积分:

$$W_g = \int_0^R -\frac{16}{3}\pi^2 G\rho^2 r^4 dr \quad (2.44)$$

$$= -\frac{16}{3}\pi^2 G\rho^2 \left[ \frac{1}{5}r^5 \right]_0^R \quad (2.45)$$

$$= -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 \quad (2.46)$$

将  $\rho^2 = \frac{M^2}{\frac{16}{9}\pi^2 R^6}$  代入上式, 化简得:

$$W_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (2.47)$$

取太阳参数:  $M \approx 2.0e30kg$ ,  $R \approx 7.0e8m$ , 引力常数  $G \approx 6.67e-11m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ 。代入公式得:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{3}{5} \frac{6.67 \times 10^{-11} \times (2.0 \times 10^{30})^2}{7.0 \times 10^8} \\ &\approx -2.28e41J \end{aligned}$$

**2.10.12** 我们知道导体上的电荷是分布于其表面的，但是在表面上是如何分布的不是很容易确定的。电荷面密度可以直接计算的著名例子是椭圆面： $\frac{x_1^2}{r_1^2} + \frac{x_2^2}{r_2^2} + \frac{x_3^2}{r_3^2} = 1$  对这种情况  $\sigma =$

$$\frac{Q}{4\pi r_1 r_2 r_3} \left( \frac{x_1^2}{r_1^4} + \frac{x_2^2}{r_2^4} + \frac{x_3^2}{r_3^4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

(a) 一个半径为  $R$  的圆盘的净电荷面密度  $\sigma$ ;

(b) 位于  $x, y$  平面一条无限长的导体“丝带”的电荷面密度  $\sigma$ , 丝带沿  $y$  轴放置, 宽度  $2a$ ;

(c) 求出一个从  $x_3 = -a$  到  $x_3 = a$  的导体“针”每单位长度的电荷。

(a): 令  $r_1 = r_2$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Q}{4\pi r_1^2 r_3} \left( \frac{x_1^2 + x_2^2}{r_1^4} + \frac{x_3^2}{r_3^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi r_1^2 r_3} \left( \frac{x_1^2 + x_2^2}{r_1^4} + \frac{r_1^2 - x_1^2 - x_2^2}{r_3^2 r_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi r_1^2} \left( \frac{x_1^2 + x_2^2}{r_1^4} r_3^2 + \frac{r_1^2 - x_1^2 - x_2^2}{r_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\xrightarrow{r_3 \rightarrow 0} \frac{Q}{4\pi r_1^2} \left( \frac{r_1^2 - x_1^2 - x_2^2}{r_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(b): 令  $r_2 = \infty$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\lambda}{4\pi r_1 r_3} \left( \frac{x_1^2}{r_1^4} + \frac{x_3^2}{r_3^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{r_1^2 - x_1^2}} \end{aligned}$$

(c):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Q}{4\pi r_1^2} \left( \frac{x_1^2 + x_2^2}{r_1^4} r_3^2 + \frac{r_1^2 - x_1^2 - x_2^2}{r_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi r_1^2} \left( \frac{r_1^2 r_3^2 + r_1^2 x_3^2}{r_1^4} + \frac{x_3^2}{r_1^2 r_3^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\xrightarrow{r_1 \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi \sqrt{a^2 - x_3^2}} \end{aligned}$$

**2.10.13** 一个质量为  $m$ , 带电为  $q$  的粒子, 从与一个无限大接地导体平板距离为  $d$  处由静止开始释放. 求这个粒子撞击到板的时间为多少?

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2m} \\ v \frac{dv}{dx} &= \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2 m} \\ \frac{v^2}{2} &= -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 xm} + C_1 \\ v &= \sqrt{-\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 xm} + C_1} \\ v &= \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 dm} - \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 xm}} \\ t &= \int_0^d \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 dm} - \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 xm}} dx \\ &= \frac{\pi\sqrt{2\pi\varepsilon_0 md^3}}{q}\end{aligned}$$

**2.10.14** 两个无限大接地导体平板平行放置。一个点电荷  $q$  位于原点, 其中一个位于  $z = -a$ , 另一个位于  $z = b$ 。求出作用在  $q$  上的力。

由电像法可得下方电像位于  $-2n(a+b), -2a-2n(a+b)$  上方电像位于  $-2n(a+b), -2b-2n(a+b)$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}F &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[2n(a+b)]^2} + \frac{1}{[2a+2n(a+b)]^2} - \frac{1}{[2n(a+b)]^2} - \frac{1}{[2b+2n(a+b)]^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[2a+2n(a+b)]^2} - \frac{1}{[2b+2n(a+b)]^2}\end{aligned}$$

**2.10.15** 两条长直线, 载有均匀分布异号电荷, 电荷线密度为  $\pm\lambda$ 。两直线分别放置在一个长导体柱的两边。导体柱半径为  $R$ , 带电线距导体柱轴线的距离为  $a$ 。求出  $r$  点处的电势

$$U(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \sin n\phi$$

导体柱为等势体, 取其表面电势为零:

$$U(R, \phi) = 0$$

同时, 在  $r = a$  处存在两条线电荷, 其电势在无导体情况下可展开为傅里叶级数:

$$U_0(r, \phi) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi}{r^2 + a^2 + 2ar \cos \phi}$$

在  $r > R$  区域展开为

$$U_0(r, \phi) = -\frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sin n\phi$$

为满足导体边界条件，修正解应为

$$U(r, \phi) = -\frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^n - \left(\frac{R^2}{ar}\right)^n\right] \sin n\phi$$

柱外区域  $r > R$  的电势为

$$U(r, \phi) = -\frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^n - \left(\frac{R^2}{ar}\right)^n\right] \sin n\phi$$

**2.10.16** 一个半径为  $a$  的导体球，电势为  $U_0$ 。一个半径为  $b(b > a)$  的薄球壳包围着导体球，在球壳上分布有电荷面密度  $\sigma(\theta) = k \cos \theta$ 。

- (a) 求出  $r > b$ ,  $a < r < b$  区域内的电势。
- (b) 求出导体球表面上的诱导电荷面密度  $\sigma$ 。
- (c) 这个体系的总电荷为多少？

(a):

$a < r < b$ :

$$U(r, \theta) = (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

$r > b$ :

$$\begin{aligned} U(r, \theta) &= (A'_l r^l + B'_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \\ U(r, \theta) &= B'_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

由边界条件可得：

$$\begin{aligned} U_0 &= (A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \\ (A_l b^l + B_l b^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) &= B'_l b^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\ A_l b^l + B_l b^{-(l+1)} &= B'_l b^{-(l+1)} \\ A_l b^{2l+1} + B_l &= B'_l \end{aligned}$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)}{\partial r} + \varepsilon_0 \frac{\partial B'_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)}{\partial r}$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 [A_l l b^{l-1} - (l+1) B_l b^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) - (l+1) \varepsilon_0 B'_l b^{-(l+2)} P_l(\cos \theta)$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 [A_l l b^{l-1} - (l+1) B_l b^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) - (l+1) \varepsilon_0 (A_l b^l + B_l b^{-(l+1)}) b^{-1} P_l(\cos \theta)$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 [A_l l b^{l-1} - (l+1) A_l b^{l-1}] P_l(\cos \theta)$$

$$\sigma = \varepsilon_0 A_l b^{l-1} P_l(\cos \theta)$$

$$\frac{k}{\varepsilon_0} = A_1$$

$$U_0 = (A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

$$U_0 = B_0 a^{-(0+1)}$$

$$aU_0 = B_0$$

$$B_1 = -\frac{ka^3}{\varepsilon_0}$$

$$B'_0 = A_0 b^1 + B_0$$

$$B'_0 = aU_0$$

$$B'_1 = A_1 b^3 + B_1$$

$$B'_1 = \frac{k}{\varepsilon_0} b^3 - \frac{k}{\varepsilon_0} a^3$$

$a < r < b$ :

$$U = B_0 r^{-1} P_0(\cos \theta) + (A_1 r^1 + B_1 r^{-2}) P_1(\cos \theta)$$

$$U = \frac{aU_0}{r} + \left( \frac{kr}{\varepsilon_0} - \frac{ka^3}{\varepsilon_0 r^2} \right) \cos \theta$$

$r > b$ :

$$U = aU_0 r^{-1} + \left( \frac{k}{\varepsilon_0} b^3 - \frac{k}{\varepsilon_0} a^3 \right) r^{-2} \cos \theta$$

**2.10.17** 一个半径为  $R$  的无限长柱壳上半壳载有均匀分布的电荷，电荷面密度为  $\sigma_0$ ，下半壳载有均匀分布的电荷面密度为  $-\sigma_0$  的电荷求出柱壳内外的电势。

柱壳内:

$$U(r, \phi) = (C_m s^{-m} + D_m s^m) (E_m \cos m\phi + F_m \sin m\phi)$$

$$U(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m s^m \cos m\phi$$

柱壳外:

$$U(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} D'_m s^{-m} \cos m\phi$$

由连续性可得:

$$D_m R^m \cos m\phi = D'_m R^{-m} \cos m\phi$$

$$D_m R^{2n} = D'_m$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial s} \\
\sigma(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} -\varepsilon_0 \frac{\partial D'_m s^{-m} \cos m\phi - D_m s^m \cos m\phi}{\partial s} \\
\sigma(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} -\varepsilon_0 (-m D'_m s^{-m-1} \cos m\phi - m D_m s^{m-1} \cos m\phi) \\
\sigma(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} -\varepsilon_0 (-m D_m R^{2m} R^{-m-1} \cos m\phi - m D_m R^{m-1} \cos m\phi) \\
\sigma(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} 2\varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \cos m\phi \\
\int_0^\pi \sigma(\phi) 2\varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \cos m\phi d\phi &= \int_0^\pi 2^2 \varepsilon_0^2 m^2 D_m^2 R^{2m-2} \cos^2 m\phi d\phi \\
2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma(\phi) \cos m\phi d\phi &= \int_0^\pi 2\varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \cos^2 m\phi d\phi \\
2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_0}{m} d \sin m\phi &= \int_0^\pi 2\varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \cos^2 m\phi d\phi
\end{aligned}$$

$m$  为奇数时:

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_0}{m} d \sin m\phi &= \int_0^\pi 2\varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \cos^2 m\phi d\phi \\
2 \frac{\sigma_0}{m} &= \pi \varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \\
D_m &= \frac{2\sigma_0}{\pi \varepsilon_0 R^{m-1} m^2}
\end{aligned}$$