

电动力学

2026 年 1 月 2 日

目录

符号表	3
1 矢量分析	4
1.1 定义	4
1.2 微分运算	10
1.2.1 和规则	10
1.2.2 积规则	10
1.2.3 二阶积规则	11
1.3 积分运算	11
1.3.1 高斯定理	11
1.3.2 斯托克斯定理	12
1.4 曲面坐标系	12
1.4.1 柱坐标系	12
1.4.2 球坐标系	13
1.5 狄拉克函数与阶跃函数	14
1.5.1 狄拉克函数	14
1.5.2 阶跃函数	15
1.6 阶跃函数的导数	15
1.6.1 多维狄拉克函数	15
1.7 矢量场理论	15
1.7.1 亥姆霍兹定理	15
1.7.2 势函数	17
1.8 习题	18
2 静电学	26
2.1 电场	26
2.2 电势	28
2.3 静电场的能量	30
2.4 导体	32
2.5 电容	34
2.6 拉普拉斯方程	35
2.7 镜像法	36

2.8	分离变量法	38
2.8.1	直角坐标系	38
2.8.2	球坐标系	40
2.8.3	柱坐标系	42
2.8.4	勒让德多项式性质的证明	43
2.9	多极展开	48
2.9.1	单极项 ($l = 0$)	48
2.9.2	偶极项 ($l = 1$)	48
2.9.3	四极项及更高阶	49
2.10	习题	51

符号表

符号	含义
δ_{ij}	克罗内克尔符号
\cdot	点乘
\times	叉乘
\mathbf{a}	矢量函数
f	标量函数
a_i	矢量 \mathbf{a} 的第 i 个分量
$\delta(x)$	狄拉克函数
ε_{ijk}	Levi-Civita 符号 (三维)
ε_0	真空介电常数
q	电荷量
x_i	第 i 个坐标分量
e	元电荷
\mathbf{e}_i	第 i 个单位矢量
∇	梯度算子
r	$\sqrt{x_i x_i}$
ϕ	方位角
θ	极角
\mathbf{r}	$x_i \mathbf{e}_i$
\mathbf{R}	旋转矩阵
Φ_E	电场强度通量
λ	电荷线密度
σ	电荷面密度
ρ	电荷体密度
\mathbf{E}	电场强度
U	电势
$d\tau$	体积微元
\mathbb{N}	自然数集
\mathbb{Z}	整数集
\mathbf{d}	电偶极距
\mathbf{p}	动量
$P_l(x)$	1 阶勒让德多项式

1 矢量分析

1.1 定义

1.1.1 爱因斯坦求和约定

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i \equiv a_i b_i \quad (1.1)$$

1.1.2 克罗内克符号

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1.2)$$

性质:

$$a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i \quad (1.3)$$

$$\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik} \quad (1.4)$$

1.1.3 点乘

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_i b_i \quad (1.5)$$

1.1.4 Levi-Civita 符号

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

性质:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} &= \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{2l} & \delta_{3l} \\ \delta_{1m} & \delta_{2m} & \delta_{3m} \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{2l} & \delta_{3l} \\ \delta_{1m} & \delta_{2m} & \delta_{3m} \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{2l} & \delta_{3l} \\ \delta_{1m} & \delta_{2m} & \delta_{3m} \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{li} & \delta_{lj} & \delta_{lk} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk} \end{pmatrix} \tag{1.8}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} \delta_{li} & \delta_{lj} & \delta_{lk} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{ki} & \delta_{kj} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{li} & \delta_{lj} & 0 \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi} \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = \delta_{li}\delta_{jj} - \delta_{lj}\delta_{ji} = 3\delta_{li} - \delta_{li} = 2\delta_{li} \tag{1.10}$$

1.1.5 叉乘

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv \varepsilon_{ijk}a_ib_j\mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

性质:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{c} \cdot \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \\
 &= c_k \varepsilon_{ijk} a_i b_j \\
 &= \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \\
 &= \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} a_i b_j c_k \\
 &= \begin{pmatrix} \delta_{1i} a_i & \delta_{2i} a_i & \delta_{3i} a_i \\ \delta_{1j} b_j & \delta_{2j} b_j & \delta_{3j} b_j \\ \delta_{1k} c_k & \delta_{2k} c_k & \delta_{3k} c_k \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{c} \times \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \\
 &= \varepsilon_{lkn} c_l \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_n \\
 &= -\varepsilon_{lnk} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_l \mathbf{e}_n \\
 &= -(\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) a_i b_j c_l \mathbf{e}_n \\
 &= -\delta_{il} \delta_{jn} a_i b_j c_l \mathbf{e}_n + \delta_{in} \delta_{jl} a_i b_j c_l \mathbf{e}_n \\
 &= -a_i b_j c_i \mathbf{e}_j + a_i b_j c_j \mathbf{e}_i \\
 &= -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} = -\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} \quad (1.14)$$

1.1.6 梯度算子

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (1.15)$$

1.1.7 梯度

设位置矢量 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$, 拉梅系数为

$$h_i \equiv \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right\|, \quad \mathbf{e} \equiv \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}$$

且 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ 。

对标量场 $f(u_1, u_2, u_3)$, 全微分为

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i.$$

无穷小位移 (线元) 为

$$d\mathbf{l} = h_i du_i \mathbf{e}_i.$$

设 $\nabla f = G_i \mathbf{e}_i$, 则

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{l} = G_i h_i du_i.$$

比较系数, 得 $\mathbf{G} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \mathbf{e}_i$, 从而

$$\nabla f = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \mathbf{e}_i \quad (1.16)$$

对于直角坐标

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (1.17)$$

性质:

$$\nabla r = \frac{\partial \sqrt{x_i x_i}}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{x_i}{r} \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.18)$$

$$\nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.19)$$

1.1.8 散度

对微小增量 du_1, du_2, du_3 , 线元在三方向的实际长度分别为

$$dl_1 = h_1 du_1, \quad dl_2 = h_2 du_2, \quad dl_3 = h_3 du_3$$

因此微小长方体的体元为

$$d\tau = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \quad (1.20)$$

设矢量场在该点为

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3,$$

其中 a_1, a_2, a_3 为在局部单位基矢下的分量 (均为 u_1, u_2, u_3 的函数)。

下面计算穿过微小长方体六个面的净通量。以 u_1 方向为例, 考察在 u_1 与 $u_1 + du_1$ 两个面:
面 u_1 (在坐标 u 处, 向外法向为 $-\mathbf{e}_1$): 面积元为

$$d\mathbf{a}_1^{(-)} = -\mathbf{e}_1 (h_2 du_2)(h_3 du_3) = -\mathbf{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3,$$

对应的通量 (近似取该面中心处分量):

$$\Phi_1^{(-)} = \mathbf{a}(u_1, u_2, u_3) \cdot d\mathbf{a}_1^{(-)} = -a_1(u_1, u_2, u_3) h_2 h_3 du_2 du_3.$$

面 $u + du$ (向外法向为 $+\mathbf{e}_1$): 面积元

$$d\mathbf{a}_1^{(+)} = +\mathbf{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3,$$

通量 (在 $u + du$ 处):

$$\Phi_1^{(+)} = a_1(u_1 + du_1, u_2, u_3) h_2 (u_1 + du_1, u_2, u_3) h_3 (u_1 + du_1, u_2, u_3) du_2 du_3.$$

因此穿过这对面的净通量为

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_1 &= \Phi_1^{(+)} - \Phi_1^{(-)} \\ &= [a_1(u_1 + du_1, u_2, u_3) h_2 (u_1 + du_1, u_2, u_3) h_3 (u_1 + du_1, u_2, u_3) - a_1(u_1, u_2, u_3) h_2 h_3] du_2 du_3. \end{aligned}$$

用泰勒展开到一阶并忽略高阶项, 得

$$\Delta\Phi_u = \frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 a_1) du_1 du_2 du_3 + o(du_1 du_2 du_3).$$

对 u_2 和 u_3 方向做同样的计算, 六个面的净通量近似为三项之和:

$$\Delta\Phi_{\text{total}} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{a_i}{h_i} \right) du_1 du_2 du_3$$

由于体元按照式(1.20)为 $d\tau = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$, 故单位体积的通量密度 (即散度) 为极限:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_{\text{total}}}{d\tau} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{a_i}{h_i} \right). \end{aligned}$$

于是得到正交曲线坐标系下的散度公式:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{a_i}{h_i} \right). \quad (1.21)$$

对于直角坐标

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \quad (1.22)$$

性质:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(r) = \frac{\partial f_i(r)}{\partial x_i} = f'_i \frac{\partial r}{\partial x_i} = \mathbf{f}' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.24)$$

1.1.9 旋度

选取微小矩形位于 u_1 - u_2 平面, 固定 u_3 。矩形四边的线元素:

下边: $d\mathbf{l}_1 = h_1 du_1 \mathbf{e}_1$, 从 $(u_1, u_2) \rightarrow (u_1 + du_1, u_2)$

右边: $d\mathbf{l}_2 = h_2 du_2 \mathbf{e}_2$, 从 $(u_1 + du_1, u_2) \rightarrow (u_1 + du_1, u_2 + du_2)$

上边: $d\mathbf{l}_3 = -h_1 du_1 \mathbf{e}_1$, 从 $(u_1 + du_1, u_2 + du_2) \rightarrow (u_1, u_2 + du_2)$

左边: $d\mathbf{l}_4 = -h_2 du_2 \mathbf{e}_2$, 从 $(u_1, u_2 + du_2) \rightarrow (u_1, u_2)$

沿每一边计算 $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$ 并做泰勒展开 (只保留一阶项):

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} \approx \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 a_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 a_1) \right] du_1 du_2$$

面元面积:

$$dS_3 = h_1 h_2 du_1 du_2$$

旋度在 \mathbf{e}_3 方向的分量:

$$(\nabla \times \mathbf{a})_3 = \lim_{du_1, du_2 \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}}{dS_3} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 a_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 a_1) \right]$$

同理, 对于其他两个方向:

$$(\nabla \times \mathbf{a})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 a_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 a_2) \right], \quad (\nabla \times \mathbf{a})_2 = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 a_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 a_3) \right]$$

最终正交曲线坐标系下旋度公式为:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(h_k a_k)}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \quad (1.25)$$

对于直角坐标

$$\nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \quad (1.26)$$

性质:

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad (1.27)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{a}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(fa_j)}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = f \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_j \mathbf{e}_k = f(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla f) \times \mathbf{a} \quad (1.28)$$

1.1.10 并积

$$\nabla \mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.29)$$

1.1.11 拉普拉斯算子

定义为梯度的散度, 由1.16和1.21得

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \nabla \cdot (\nabla f) \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{\partial f}{h_i^2 \partial u_i} \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

对于直角坐标

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1.31)$$

性质:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2(fg) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial fg}{\partial x_i} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\
 &= \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + g \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \\
 &= g \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \\
 &= g \nabla^2 f + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f \nabla^2 g
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

1.2 微分运算

1.2.1 和规则

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \tag{1.33}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b} \tag{1.34}$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \mathbf{b} \tag{1.35}$$

1.2.2 积规则

$$\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} \\
 &= \mathbf{a} \times \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \right) + \mathbf{b} \times \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \right) + \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \mathbf{b} + \left(b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \mathbf{a} \\
 &= \varepsilon_{lkn} a_l \varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + \varepsilon_{lkn} b_l \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \\
 &= -\varepsilon_{lnk} \varepsilon_{ijk} a_l \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n - \varepsilon_{lnk} \varepsilon_{ijk} b_l \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \\
 &= -(\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) a_l \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n - (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) b_l \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \\
 &= \left(-\delta_{il} \delta_{jn} a_l \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + \delta_{in} \delta_{jl} a_l \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n \right) + \left(-\delta_{il} \delta_{jn} b_l \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n + \delta_{in} \delta_{jl} b_l \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_n \right) + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \\
 &= \left(-a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \right) + \left(-b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \right) + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \\
 &= a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i + b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \\
 &= \frac{\partial(a_j b_j)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \\
 &= \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{a}) = \frac{\partial f a_i}{\partial x_i} = f \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = f \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla f \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k) - \mathbf{a} \cdot (\varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k) \\ &= b_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \\ &= b_j \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} + a_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial \varepsilon_{ijk} a_i b_j}{\partial x_k} \\ &= \nabla \cdot (\varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (1.39)$$

1.2.3 二阶积规则

$$\nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathbf{e}_k = 0 \quad (1.40)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \cdot \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (1.41)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (1.42)$$

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{\partial^2 (a_j \mathbf{e}_j)}{\partial x_i^2} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla \times \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \right) \\ &= \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijl} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} \mathbf{e}_n \\ &= \varepsilon_{mnl} \varepsilon_{ijl} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} \mathbf{e}_n \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} \mathbf{e}_n \\ &= \delta_{im} \delta_{jn} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} \mathbf{e}_n - \delta_{in} \delta_{jm} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} \mathbf{e}_n \\ &= \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_i} \mathbf{e}_j - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} \mathbf{e}_i \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a} \end{aligned} \quad (1.44)$$

1.3 积分运算

1.3.1 高斯定理

我们已经得到正交坐标系中的散度局部公式1.21。因此，对体积元 $\Delta\tau = h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$ 的六个面计算净通量时：

$$\Phi^{(\text{out})} - \Phi^{(\text{in})} = \left[\frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{a_i}{h_i} \right) \right] \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3 = (\nabla \cdot \mathbf{a}) \Delta\tau.$$

将整个区域 V 分割成许多此类体积元, 内部公共面的通量相互抵消, 仅留下外边界 ∂V 的通量。令分割尺寸趋于零, 通量和体积和分别趋于各自积分, 故得到

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) d\tau = \iint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.45)$$

1.3.2 斯托克斯定理

我们已经得到任意正交坐标系中的旋度局部公式1.25, 考虑由 (u_1, u_2) 增量生成的一个无穷小曲面元

$$d\mathbf{S} = (h_1 h_2 du_1 du_2) \mathbf{e}_3.$$

沿此小曲面元的边界进行线积分, 可得

$$\oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}.$$

将整个曲面分割成许多这样的小元, 内部公共边界的线积分相互抵消, 仅留下外边界 ∂S 的线积分。令分割尺寸趋于零, 总和趋于积分, 故得

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.46)$$

1.4 曲面坐标系

1.4.1 柱坐标系

将柱坐标系坐标转化为直角系坐标的方式为

$$x_1 = s \cos \phi, \quad x_2 = s \sin \phi, \quad x_3 = z \quad (1.47)$$

其中 s 是坐标点到 z 轴的距离。柱坐标系和直角系坐标无限小元转换方式为

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{s} & -x_2 & 0 \\ \frac{x_2}{s} & x_1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ d\phi \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

其拉梅系数为

$$h_1 = 1, \quad h_2 = s, \quad h_3 = 1 \quad (1.49)$$

其无限小位移为

$$d\mathbf{l} = h_i du_i \mathbf{e}_i = ds \mathbf{s} + s d\phi \boldsymbol{\phi} + dz \mathbf{z} \quad (1.50)$$

其体积元为

$$d\tau = s ds d\phi dz \quad (1.51)$$

梯度

$$\nabla f = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} \boldsymbol{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z} \quad (1.52)$$

散度

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{s} \left(\frac{\partial s a_s}{\partial s} + \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial s a_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{s} \frac{\partial s a_s}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{a_s}{s} + \frac{\partial a_s}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.53)$$

旋度

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{a} &= \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(h_k a_k)}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \\
&= \frac{h_i}{s} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(h_k a_k)}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \\
&= \frac{1}{s} \left(\varepsilon_{123} \frac{\partial a_3}{\partial u_2} \mathbf{e}_1 + \varepsilon_{132} \frac{\partial s a_2}{\partial u_3} \mathbf{e}_1 + \varepsilon_{321} \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \mathbf{e}_3 + s \varepsilon_{213} \frac{\partial a_3}{\partial u_1} \mathbf{e}_2 + \varepsilon_{312} \frac{\partial s a_2}{\partial u_1} \mathbf{e}_3 + s \varepsilon_{231} \frac{\partial a_1}{\partial u_3} \mathbf{e}_2 \right) \\
&= \frac{1}{s} \left(\frac{\partial a_3}{\partial u_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial s a_2}{\partial u_3} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \mathbf{e}_3 - s \frac{\partial a_3}{\partial u_1} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial s a_2}{\partial u_1} \mathbf{e}_3 + s \frac{\partial a_1}{\partial u_3} \mathbf{e}_2 \right) \\
&= \frac{1}{s} \left(\frac{\partial a_z}{\partial \phi} \mathbf{s} - \frac{\partial s a_\phi}{\partial z} \mathbf{s} - \frac{\partial a_s}{\partial \phi} \mathbf{z} - s \frac{\partial a_z}{\partial s} \boldsymbol{\phi} + \frac{\partial s a_\phi}{\partial s} \mathbf{z} + s \frac{\partial a_s}{\partial z} \boldsymbol{\phi} \right) \\
&= \frac{1}{s} \left(\frac{\partial a_z}{\partial \phi} - s \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{s} + \left(\frac{\partial a_s}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial s} \right) \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial s a_\phi}{\partial s} - \frac{\partial a_s}{\partial \phi} \right) \mathbf{z}
\end{aligned} \tag{1.54}$$

拉普拉斯算子

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{\partial f}{h_i^2 \partial u_i} \right) \\
&= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(s \frac{\partial f}{h_i^2 \partial u_i} \right) \\
&= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial f}{h_s^2 \partial s} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(s \frac{\partial f}{h_\phi^2 \partial \phi} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial z} \left(s \frac{\partial f}{h_z^2 \partial z} \right) \\
&= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial f}{\partial s} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(s \frac{\partial f}{s^2 \partial \phi} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial z} \left(s \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial f}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

1.4.2 球坐标系

将球坐标系坐标转化为直角系坐标的方式为

$$x_1 = r \cos \phi \sin \theta, \quad x_2 = r \sin \phi \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \theta \tag{1.56}$$

球坐标系和直角系坐标无限小元转换方式为

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} & -x_2 & \frac{x_1 x_3}{r \sin \theta} \\ \frac{x_2}{r} & x_1 & \frac{x_2 x_3}{r \sin \theta} \\ \frac{x_3}{r} & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\phi \\ d\theta \end{pmatrix} \tag{1.57}$$

其拉梅系数为

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r \sin \theta, \quad h_3 = r \tag{1.58}$$

其无限小位移为

$$d\mathbf{l} = dr \mathbf{r} + r \sin \theta d\phi \boldsymbol{\phi} + r d\theta \boldsymbol{\theta} \tag{1.59}$$

其体积元为

$$d\tau = r \sin \theta r dr d\phi d\theta \tag{1.60}$$

梯度

$$\nabla f = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} \tag{1.61}$$

散度

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial r^2 \sin \theta a_r}{\partial r} + \frac{\partial r a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial r \sin \theta a_\theta}{\partial \theta} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} + r \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + r \frac{\partial \sin \theta a_\theta}{\partial \theta} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta a_\theta}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

旋度

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{a} & \tag{1.63} \\
 &= \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (h_k a_k)}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \\
 &= \frac{h_i}{r^2 \sin \theta} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (h_k a_k)}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\varepsilon_{123} \frac{\partial r a_3}{\partial u_2} \mathbf{e}_1 + \varepsilon_{132} \frac{\partial s a_2}{\partial u_3} \mathbf{e}_1 + r \varepsilon_{321} \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \mathbf{e}_3 + s \varepsilon_{213} \frac{\partial r a_3}{\partial u_1} \mathbf{e}_2 + r \varepsilon_{312} \frac{\partial s a_2}{\partial u_1} \mathbf{e}_3 + s \varepsilon_{231} \frac{\partial a_1}{\partial u_3} \mathbf{e}_2 \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial r a_3}{\partial u_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial r \sin \theta a_2}{\partial u_3} \mathbf{e}_1 - r \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \mathbf{e}_3 - r \sin \theta \frac{\partial r a_3}{\partial u_1} \mathbf{e}_2 + r \frac{\partial r \sin \theta a_2}{\partial u_1} \mathbf{e}_3 + r \sin \theta \frac{\partial a_1}{\partial u_3} \mathbf{e}_2 \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial r a_\theta}{\partial \phi} \mathbf{r} - \frac{\partial r \sin \theta a_\phi}{\partial \theta} \mathbf{r} - r \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \boldsymbol{\theta} - r \sin \theta \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} \boldsymbol{\phi} + r \frac{\partial r \sin \theta a_\phi}{\partial r} \boldsymbol{\theta} + r \sin \theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \boldsymbol{\phi} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(r \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - r \frac{\partial \sin \theta a_\phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} \right) \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial r a_\phi}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) \boldsymbol{\theta} \\
 &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial \sin \theta a_\phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} \right) \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial r a_\phi}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) \boldsymbol{\theta}
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

拉普拉斯算子

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

1.5 狄拉克函数与阶跃函数

1.5.1 狄拉克函数

严格来说, 狄拉克 δ 函数并不是一个通常意义下的函数, 而是通过其在积分中的作用来定义的。设 $f(x)$ 是在 $x=0$ 附近连续, 并且在无穷远处足够快衰减的函数。定义狄拉克 δ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0), \tag{1.66}$$

由定义立即得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a). \tag{1.67}$$

设 $g(x)$ 在 x_i 处有孤立零点, 且 $g'(x_i) \neq 0$, 则

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}. \tag{1.68}$$

1.5.2 阶跃函数

定义阶跃函数

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (1.69)$$

1.6 阶跃函数的导数

在通常意义下, $H(x)$ 在 $x = 0$ 不可导。但在积分意义下, 我们定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH(x)}{dx} f(x) dx \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \frac{df}{dx} dx. \quad (1.70)$$

对右侧分部积分:

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \frac{df}{dx} dx &= - \int_0^{\infty} \frac{df}{dx} dx \\ &= f(0). \end{aligned} \quad (1.71)$$

于是得到

$$\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x), \quad (1.72)$$

1.6.1 多维狄拉克函数

三维 δ 函数定义为

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad (1.73)$$

并满足

$$\iiint \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d\tau = f(\mathbf{r}_0). \quad (1.74)$$

在正交曲线坐标 (u_1, u_2, u_3) 中,

$$d\tau = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3,$$

因此定义

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{\delta(u_1 - u_{1,0})\delta(u_2 - u_{2,0})\delta(u_3 - u_{3,0})}{h_1 h_2 h_3}. \quad (1.75)$$

1.7 矢量场理论

1.7.1 亥姆霍兹定理

设矢量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 定义在整个空间中, 其散度与旋度分别给定为

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}(\mathbf{r}).$$

为了使体积分有意义, 仅要求 $f(\mathbf{r})$ 与 $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ 在无穷远处趋于零是不够的, 它们的衰减速度必须足够快。

考虑定义在整个空间上的积分

$$\iiint_V X(\mathbf{r}) d\tau,$$

其中 $X(\mathbf{r})$ 表示 $f(\mathbf{r})$ 或 $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ 的某一分量。

将积分写为球坐标形式,

$$\iiint_V X(\mathbf{r}) d\tau = \int_0^\infty \left(\iint_S X(r, \Omega) r^2 d\Omega \right) dr.$$

若存在常数 $A > 0$ 及 $R > 0$, 使得当 $r > R$ 时对所有方向 Ω 成立

$$|X(r, \Omega)| \geq \frac{A}{r},$$

则有下列估计

$$\iiint_{|\mathbf{r}| > R} |X(\mathbf{r})| d\tau \geq A \int_R^\infty r dr \iint_S d\Omega,$$

该积分显然发散。

类似地, 若

$$|X(r, \Omega)| \geq \frac{A}{r^2},$$

则径向积分包含

$$\int_R^\infty \frac{dr}{r},$$

从而发散。

因此, 为保证体积分收敛, 必须要求

$$X(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.76)$$

该条件需在角向上一致成立。

因此, 为保证积分收敛, 必须要求

$$f(\mathbf{r}), \mathbf{b}(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.77)$$

这一条件同时也足以保证在无穷远处的曲面积分为零。

设矢量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 具有散度 $f(\mathbf{r})$ 与旋度 $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ 。若取另一矢量场

$$\mathbf{a}'(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \mathbf{c}(\mathbf{r}),$$

且 $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ 满足

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

则 \mathbf{a}' 与 \mathbf{a} 具有相同的散度与旋度。

因此, 仅给定散度与旋度并不能唯一确定矢量场。然而可以证明: 不存在一个非零的矢量场 (见第三章) $\mathbf{c}(\mathbf{r})$, 它在整个空间中同时满足

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

并且在无穷远处趋于零。

因此, 若进一步要求

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{当 } r \rightarrow \infty,$$

则满足给定散度与旋度的矢量场解是唯一的。

现在可以严谨地表述亥姆霍兹定理如下:

若矢量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 的散度 $f(\mathbf{r})$ 与旋度 $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ 已知, 且二者在 $r \rightarrow \infty$ 时均比 $1/r^2$ 衰减得更快, 同时 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 在无穷远处趋于零, 则 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 被其散度与旋度唯一确定。

1.7.2 势函数

1. 标量势与无旋场 设向量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 定义在某一区域。若存在标量函数 $U(\mathbf{r})$, 使得

$$\mathbf{a} = -\nabla U, \quad (1.78)$$

则称 U 为 \mathbf{a} 的**标量势函数**, \mathbf{a} 称为**保守场**。由旋度的定义可得

$$\nabla \times \mathbf{a} = -\nabla \times \nabla U = \mathbf{0}. \quad (1.79)$$

因此, 任何具有标量势的向量场必为无旋场。

2. 无旋场的势函数存在性 若

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (1.80)$$

并且区域 V 是单连通的 (任意闭合曲线可连续收缩为一点), 则由斯托克斯定理可得

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.81)$$

线积分与路径无关, 可定义

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.82)$$

从而得到 $\mathbf{a} = -\nabla \phi$ 。

3. 向量势与无散场 若存在向量函数 $\mathbf{b}(\mathbf{r})$, 使

$$\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b}, \quad (1.83)$$

则称 \mathbf{b} 为 \mathbf{F} 的**向量势**。由恒等式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = 0 \quad (1.84)$$

可知, 任何具有向量势的向量场必为无散场。

4. 势函数的不唯一性

- 若 $\mathbf{a} = -\nabla U$, 则对任意常数 C , $U' = U + C$ 给出同一向量场。
- 若 $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b}$, 则对任意标量函数 $\chi(\mathbf{r})$, $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \nabla \chi$ 产生相同的 \mathbf{a} (规范变换)。

5. 亥姆霍兹分解 在满足适当衰减条件的情况下, 任意向量场 \mathbf{a} 可分解为

$$\mathbf{a} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{b}, \quad (1.85)$$

其中

$$\nabla^2 U = -\nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (1.86)$$

$$\nabla^2 \mathbf{b} = -\nabla \times \mathbf{a}. \quad (1.87)$$

这就是亥姆霍兹定理在势函数语言下的表达。

1.8 习题

1.8.1 证明: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = 0$$

1.8.2 证明: $R\mathbf{a} \cdot R\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 其中 R 为旋转矩阵

$$R\mathbf{a} \cdot R\mathbf{b} = (R\mathbf{a})^T(R\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T R^T R\mathbf{b} = \mathbf{a}^T R^{-1} R\mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

1.8.3 在坐标逆变换 ($x' = -x, y' = -y, z' = -z$) 下, 两个矢量的叉乘是如何变换的?

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \\ a'_i & a'_j & a'_k \\ b'_i & b'_j & b'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \\ -a_i & -a_j & -a_k \\ -b_i & -b_j & -b_k \end{pmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

1.8.4 在坐标逆变换下, 标量三重积 ($\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$) 是如何变换的?

$$\mathbf{c}' \cdot (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') = \mathbf{c}' \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

1.8.5 \mathbf{n} 是固定点 (x', y', z') 到点 (x, y, z) 的间隔矢量, n 是它的长度, 证明:

$$(a) \nabla n^2 = 2\mathbf{n}.$$

$$(b) \nabla \frac{1}{n} = -\frac{\mathbf{n}}{n^2}.$$

$$(c) \nabla n^a = a\mathbf{n}n^{a-2} (a \neq 0).$$

$$(a) \nabla n^2 = \frac{\partial n^2}{\partial e_i} \mathbf{e}_i = 2n \frac{\partial n}{\partial e_i} \mathbf{e}_i = 2\mathbf{n}$$

$$(c) \nabla n^a = \frac{\partial n^a}{\partial e_i} \mathbf{e}_i = a n^{a-1} \frac{\partial n}{\partial e_i} \mathbf{e}_i = a\mathbf{n}n^{a-2}$$

1.8.6 函数 f 只依赖平面坐标 y, z 。令旋转后的坐标记为 $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, 求证

$$\nabla f' = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial z} \sin \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} = -\frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \theta$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y'} \\ \frac{\partial f}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.8.7 计算 $(\nabla T) \times (\nabla S)$

$$\begin{aligned}
(\nabla T) \times (\nabla S) &= \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \right) \times \left(\varepsilon_{lmn} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_n \right) \\
&= \varepsilon_{opq} \varepsilon_{ijo} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmp} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_q \\
&= \varepsilon_{pqo} \varepsilon_{ijo} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmp} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_q \\
&= (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmp} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_q \\
&= \delta_{ip} \delta_{jq} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmp} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_q - \delta_{iq} \delta_{jp} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmp} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_q \\
&= \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmi} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_j - \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmj} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_i \\
&= \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \varepsilon_{lmj} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_i - \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \varepsilon_{lmj} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_i \\
&= \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j} - \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \right) \varepsilon_{lmj} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

1.8.8 证明 $\iint_S f(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S [\mathbf{a} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\partial S} f \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} f \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_S [\nabla \times (f \mathbf{a})] \cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_S [f(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla f) \times \mathbf{a}] \cdot d\mathbf{S} \\
\iint_S f(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S [\mathbf{a} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\partial S} f \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}
\end{aligned}$$

1.8.9 证明 $\iiint_V \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) d\tau = \iiint_V \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) d\tau + \iint_{\partial V} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial V} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) d\tau \\
&= \iiint_V [\mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})] d\tau \\
\iiint_V \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) d\tau &= \iiint_V \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) d\tau + \iint_{\partial V} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

1.8.10 设 $f = f(r)$, 求 $\nabla^2 [f(r)]$

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 [f(r)] &= \frac{1}{sr} \frac{\partial}{\partial r} \left(sr \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{sr^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(s \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
 &= \frac{1}{sr} \frac{\partial}{\partial r} \left(sr \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\
 &= \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}
 \end{aligned} \tag{1.88}$$

1.8.11 证明: $\iiint_V \nabla \times \mathbf{a} \, d\tau = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \times \mathbf{a}$

取任意常向量 \mathbf{c} 。利用式1.39得 $\nabla \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 因此

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}).$$

应用高斯定理,

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \, d\tau = \oint_{\partial V} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) \, d\tau.$$

利用式1.12得

$$\mathbf{c} \cdot \iiint_V (\nabla \times \mathbf{a}) \, d\tau = \mathbf{c} \cdot \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \times \mathbf{a}.$$

由于上述等式对任意常向量 \mathbf{c} 成立, 必有

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{a}) \, d\tau = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \times \mathbf{a}.$$

1.8.12 证明: $\iint_S d\mathbf{S} \times \nabla f = \oint_{\partial S} f \, d\mathbf{l}$

取任意常向量 \mathbf{c} 。利用式1.28得

$$\iint_S (\nabla f \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times (f\mathbf{c})) \cdot d\mathbf{S}.$$

由斯托克斯定理

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

取 $\mathbf{A} = f\mathbf{c}$, 得

$$\iint_S (\nabla \times (f\mathbf{c})) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} (f\mathbf{c}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\partial S} f \mathbf{c} \cdot d\mathbf{l}.$$

又由混合积恒等式

$$\mathbf{c} \cdot (d\mathbf{S} \times \nabla f) = (\nabla f \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{S},$$

所以

$$\mathbf{c} \cdot \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla f = \mathbf{c} \cdot \oint_{\partial S} f \, d\mathbf{l}.$$

由于上述等式对任意常向量 \mathbf{c} 都成立, 必有

$$\iint_S d\mathbf{S} \times \nabla f = \oint_{\partial S} f \, d\mathbf{l}.$$

1.8.13 证明: $\oint_{\partial S} (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 2 \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial S} (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} &= \iint_S [\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S [\nabla \times (\varepsilon_{ijk} a_i x_j \mathbf{e}_k)] \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (\varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijm} \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_l} \mathbf{e}_n) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= - \iint_S (\varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijm} \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_l} \mathbf{e}_n) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= - \iint_S (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) (\frac{\partial a_i x_j}{\partial x_l} \mathbf{e}_n) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (\delta_{in} \delta_{jl} \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_l} \mathbf{e}_n - \delta_{il} \delta_{jn} \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_l} \mathbf{e}_n) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (\frac{\partial a_i x_j}{\partial x_j} \mathbf{e}_i - \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (\frac{\partial a_j x_i}{\partial x_i} \mathbf{e}_j - \frac{\partial a_i x_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (a_j \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial a_i}{\partial x_i}) \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S (3a_j + x_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_i \delta_{ij} - x_j \frac{\partial a_i}{\partial x_i}) \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S 2a_j \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}
 \end{aligned}$$

1.8.14 将下列电荷分布表示成电荷密度函数 ρ : 1. 电荷量 Q 均匀分布在半径为 R 的球面上; 2. 电荷均匀分布在半径为 R 的柱面上, 单位长度的电荷量为 λ ; 3. 电荷量均匀分布在半径为 R 的平面圆盘上

$$1. \rho = \delta(R\mathbf{e}_r - \mathbf{r}) \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$2. \rho = \delta(R\mathbf{e}_s - \mathbf{s}) \frac{\lambda}{2\pi R}$$

$$3. \rho = \delta(\mathbf{x}_3) H(x+R) H(-x-R) \frac{\lambda}{\pi R^2}$$

1.8.15 对函数 $\mathbf{a} = r^2 \cos \theta \mathbf{r} + r^2 \cos \phi \boldsymbol{\theta} - r^2 \cos \theta \sin \phi \boldsymbol{\phi}$ 验证散度定理, 体积为半径为 R 在第一卦限的 $1/8$ 球体

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 2r \cos \theta - r^2 \cos \theta \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \nabla \cdot \mathbf{a} dr &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R (2r \cos \theta - r^2 \cos \theta \cos \phi) dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left(r^2 \cos \theta - \frac{r^3}{3} \cos \theta \cos \phi \right) \Big|_0^R \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(R^2 \cos \theta - \frac{R^3}{3} \cos \theta \cos \phi \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \left(R^2 \sin \theta - \frac{R^3}{3} \sin \theta \cos \phi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(R^2 - \frac{R^3}{3} \cos \phi \right) d\phi \\ &= \left(R^2 \phi - \frac{R^3}{3} \sin \phi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} R^2 - \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

计算 XY 平面:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R a_\phi dr &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r^2 \cos \theta \sin \phi dr \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r^2 \cos \theta dr \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{r^3}{3} \cos \theta \Big|_0^R \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} \cos \theta d\theta \\ &= - \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

计算 XZ 平面:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R a_\theta dr &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R r^2 \cos \phi dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \frac{r^3}{3} \cos \phi \Big|_0^R \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

计算 YZ 平面:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R a_\theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R r^2 \cos \phi dr = \frac{R^3}{3}$$

1.8.16 对函数 $\mathbf{a} = bx_2\mathbf{e}_1 + cx_1\mathbf{e}_2$ 验证斯托克斯定理, 面的边界线选为处在 XY 平面, 半径为 R , 圆心在原点的圆周线。

$$\nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times (by_1\mathbf{e}_1 + cx_1\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ bx_2 & cx_1 & 0 \end{pmatrix} = (c-b)\mathbf{e}_3$$

$$\iint \nabla \times \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \iint (c-b)\mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{S} = 2\pi R(c-b)$$

$$\begin{aligned} \oint (bR \sin \phi \mathbf{e}_1 + cR \cos \phi \mathbf{e}_2) \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} (bR \sin \phi \mathbf{e}_1 + cR \cos \phi \mathbf{e}_2) \cdot (-R \sin \phi \mathbf{e}_1 + R \cos \phi \mathbf{e}_2) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} (-bR^2 \sin^2 \phi + cR^2 \cos^2 \phi) d\phi \\ &= 2\pi R(c-b) \end{aligned}$$

1.8.17 对函数 $\mathbf{a} = r \cos^2 \theta \mathbf{r} - r \sin \theta \cos \theta \boldsymbol{\theta} + 3r\phi$ 验证斯托克斯定理。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \frac{1}{sr} \left(r \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - s \frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} \right) \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial s a_\phi}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) \boldsymbol{\theta} \\ &= \frac{1}{sr} \left(r \frac{\partial r \sin \theta \cos \theta}{\partial \phi} - s \frac{\partial 3r}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \cos^2 \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial r r \sin \theta \cos \theta}{\partial r} \right) \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial s 3r}{\partial r} - \frac{\partial r \cos^2 \theta}{\partial \phi} \right) \boldsymbol{\theta} \\ &= \frac{1}{s} (6r \sin \theta) \boldsymbol{\theta} \\ &= 6\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

计算 XY 平面:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R a_\phi dr &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R 6 dr \\ &= \frac{3}{2} R \end{aligned}$$

1.8.18 对函数 $\mathbf{a} = r^2 \sin^2 \theta \mathbf{r} + 4r^2 \cos \theta \boldsymbol{\theta} + r^2 \tan \theta \boldsymbol{\phi}$ 验证散度定理。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{sr} \left(\frac{\partial s r a_r}{\partial r} + r \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + s \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{sr} \left(\frac{\partial s r r^2 \sin^2 \theta}{\partial r} + r \frac{\partial 4r^2 \cos \theta}{\partial \phi} + s \frac{\partial r^2 \tan \theta}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{sr} (4sr^2 \sin^2 \theta + sr^2 \frac{1}{\cos^2 \theta}) \\ &= 4r \sin^2 \theta + r \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4r \sin^2 \theta + r \frac{1}{\cos^2 \theta}) \sin \theta \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^R 2\pi r^3 \mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4 \sin^2 \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta}) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^R 2\pi r^3 (2\theta - \sin 2\theta + \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}r \\
&= \int_0^R 2\pi r^3 (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) \mathrm{d}r \\
&= \int_0^R 2\pi r^3 \frac{\pi}{3} \mathrm{d}r \\
&= 2\pi R^4 \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

1.8.19 证明 $\iiint_V [f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] \mathrm{d}\tau = \oint_S (f \nabla g) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
& \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathrm{d}\tau = \iint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\
& \iiint_V [\nabla \cdot (f \nabla g)] \mathrm{d}\tau = \iint_{\partial V} (f \nabla g) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\
& \iiint_V [f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] \mathrm{d}\tau = \iint_{\partial V} (f \nabla g) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}
\end{aligned}$$

1.8.20 求 $\mathbf{a} = r^n \mathbf{e}_r$ 的散度

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial x_i r^{n-1}}{\partial x_i} \\
&= 3r^{n-1} + x_i(n-1)r^{n-2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\
&= 3r^{n-1} + x_i(n-1)r^{n-2} \frac{x_i}{r} \\
&= 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1} \\
&= (n+2)r^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\iint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\partial V} r^n \mathbf{e}_r \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi r^2 r^n =$$

1.8.21 求 $\mathbf{a} = r^n \mathbf{e}_r$ 的旋度

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{a} &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial r^{n-1} x_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\
&= \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial r^{n-1}}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\
&= (n-1) \varepsilon_{ijk} x_j r^{n-2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\
&= (n-1) \varepsilon_{ijk} x_j r^{n-2} \frac{x_i}{r} \mathbf{e}_k \\
&= (n-1) r^{n-3} \varepsilon_{ijk} x_i x_j \mathbf{e}_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

1.8.22 以匀角速绕轴转动的抛物线形金属丝, 其方程为 $x^2 = 4ay$ 。一质量为 m 的小环套在此金属丝上, 可沿着金属丝无摩擦滑动。求小环在 x 方向的运动微分方程。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{mx^2\omega^2}{2} + mgy + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} \right) = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{mx^2\omega^2}{2} + mg\frac{x^2}{4a} + \frac{mx^2\dot{x}^2}{8a^2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} \right) = 0 \\
&x\dot{x}\omega^2 + gx\frac{\dot{x}}{2a} + \frac{x\dot{x}^3}{4a^2} + \frac{x^2\dot{x}\ddot{x}}{4a^2} + mx\dot{x} = 0 \\
&x\omega^2 + \frac{gx}{2a} + \frac{x\dot{x}^2}{4a^2} + \frac{x^2\ddot{x}}{4a^2} + mx = 0
\end{aligned}$$

2 静电学

2.1 电场

2.1.1 库仑定律

设一个静止点电荷 q_1 距检验电荷 q_2 的距离为 r , 那么它作用在 Q 上的力是

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.1)$$

常数 ϵ_0 称为真空介电常数, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$

2.1.2 电场

$$\mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{F}}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.2)$$

2.1.3 电场强度通量

Φ_E 为电场强度通量

$$\Phi_E \equiv \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.3)$$

2.1.4 高斯定理

ρ 为电荷密度

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.4)$$

2.1.5 两个带电为 q 的电荷, 相距 d 放置, 求垂直于连线中点且距离为 x_2 处的电场, 如果把一个换成 $-q$ 会怎样? 当 $y \gg d$ 时会怎样?

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}_2 &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} x_2 \mathbf{e}_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qx_2}{r^3} \mathbf{e}_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qx_2}{\left(x_2^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}_2 &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \frac{d}{2} \mathbf{e}_1 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{r^3} \mathbf{e}_1 \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{x_2^3} \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

2.1.6 一个长度为 $2L$ 的细杆均匀带电, 电荷线密度为 λ , 求垂直于杆且与杆中心距离为 x_2 处的电场

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^3} \mathbf{r} dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^3} x_2 \mathbf{e}_2 dx \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_2 \int_{-L}^L \frac{x_2}{r^3} dx \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_2 \int_{-L}^L \frac{x_2}{(x^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\
 &\stackrel{x=x_2 \tan \theta}{=} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_2 \int_{-\arctan \frac{L}{x_2}}^{\arctan \frac{L}{x_2}} \frac{x_2}{(x_2^2 \tan^2 \theta + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} dx_2 \tan \theta \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_2 \int_{-\arctan \frac{L}{x_2}}^{\arctan \frac{L}{x_2}} \frac{x_2^2 \cos^3 \theta}{x_2^3 \cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_2 \int_{-\arctan \frac{L}{x_2}}^{\arctan \frac{L}{x_2}} \frac{\cos \theta}{x_2^2} d\theta \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_2 \frac{\sin \theta}{x_2} \Big|_{-\arctan \frac{L}{x_2}}^{\arctan \frac{L}{x_2}} \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x_2} \mathbf{e}_2 \frac{L}{\sqrt{L^2 + x_2^2}}
 \end{aligned}$$

2.1.7 一个长度为 L 的细杆均匀带电, 电荷线密度为 λ , 求杆一端上方距杆 y 处的电场

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \frac{\lambda \mathbf{e}_y}{4\pi\epsilon_0 r^2} dx_2 &= \int_0^L \frac{\lambda \mathbf{e}_y}{4\pi\epsilon_0 (x_2 + y)^2} dx_2 \\
 &= - \frac{\lambda \mathbf{e}_y}{4\pi\epsilon_0 (x_2 + y)} \Big|_0^L \\
 &= \frac{\lambda \mathbf{e}_y}{4\pi\epsilon_0 (L + y)} - \frac{\lambda \mathbf{e}_y}{4\pi\epsilon_0 y} \\
 &= \frac{\lambda \mathbf{e}_y L}{4\pi\epsilon_0 (L + y)y}
 \end{aligned}$$

2.1.8 一个边长为 $2L$ 的正方形线框均匀带电, 电荷线密度为 λ , 求线框中心上方距 x_3 处的电场

$$4 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{L^2 + x_3^2}} \mathbf{e}_3 \frac{L}{2\sqrt{2L^2 + x_3^2}} \frac{x_3}{x_3 \sqrt{L^2 + x_3^2}} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 \sqrt{2L^2 + x_3^2}} \mathbf{e}_3 \frac{2Lx_3}{L^2 + x_3^2}$$

2.1.9 一个半径为 r 的圆线框均匀带电, 电荷线密度为 λ , 求线框中心上方距 x_3 处的电场

$$2\pi r \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{x_3 r}{\sqrt{x_3^2 + r^2}}$$

2.1.10 一个半径为 r 的圆片均匀带电, 电荷面密度为 σ , 求圆片中心上方距 x_3 处的电场

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{x_3 x_1}{\sqrt{x_3^2 + x_1^2}^3} dx_1 &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_1^2}} \Big|_0^r \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} \end{aligned}$$

2.1.11 一个半径为 r 的球面均匀带电, 电荷面密度为 σ , 求圆球上方距 d 处的电场 (分 $d > r$ 和 $d < r$ 讨论)

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^0 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{(x_3 + d)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{(x_3 + d)^2 + x_1^2 + x_2^2}^3} dr d\phi &= \int_{\pi}^0 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{(r \cos \phi + d)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{(r \cos \phi + d)^2 + x_1^2 + x_2^2}^3} dr d\phi \\ &= \int_{\pi}^0 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{(r \cos \phi + d)r \sin \phi}{\sqrt{r^2 + 2rd \cos \phi + d^2}^3} dr d\phi \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_3 \frac{(r \cos \phi + d)r^2 \sin \phi}{\sqrt{r^2 + 2rd \cos \phi + d^2}^3} d\phi \end{aligned}$$

2.1.12 在某个区域电场可以写为 $\mathbf{E} = kr^3 \mathbf{e}_r$, 求电荷密度和包含在半径为 R , 球心在原点的闭合球面内的总电荷

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{1}{sr} \frac{\partial sr E_r}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{1}{sr} \frac{\partial s r r^3}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{1}{sr} 5sr^4 = 5\epsilon_0 r^3 k$$

$$4\pi \int_0^R 5\epsilon_0 r^3 dr = 5\pi\epsilon_0 R^4 k$$

2.2 电势

2.2.1 定义

$$U(\mathbf{r}) \equiv - \int_O^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.5)$$

其中 O 为预先设置的标准参考点, 通常为无限远处

2.2.2 一个半径为 R 的均匀带电球体, 总电荷为 q , 求电势 $U(r)$

$r \geq R$:

$$\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} dx = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \Big|_r^\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$r < R$:

$$\begin{aligned} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \int_r^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \frac{x^3}{R^3} dx &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{qx^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \Big|_r^R \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{qR^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} - \frac{qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} - \frac{qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

2.2.3 一条均匀带电的无限长直线, 电荷线密度为 λ , 求电势 $U(r)$

$$U = \int_r^\infty \frac{\lambda}{2\pi r} dx = \frac{\lambda}{2\pi} \ln(x) \Big|_r^\infty = \frac{1}{2\pi} \ln(r)$$

2.2.4 一个长度为 $2L$ 的细杆均匀带电, 电荷线密度为 λ , 求垂直于杆且与杆中心距离为 h 处的电势

$$\begin{aligned} U &= \int_h^\infty \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x_2} \frac{2L}{\sqrt{L^2 + x_2^2}} dx_2 \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + L^2} + L}{x} \right) \Big|_h^\infty \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{h^2 + L^2} + L}{h} \right) \end{aligned}$$

2.2.5 一个半径为 r 的圆片均匀带电, 电荷面密度为 σ , 求圆片中心上方距 h 处的电势

$$\begin{aligned} U &= \int_h^\infty \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} \right) dx_3 \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x_3 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{x_3^2 + r^2} \Big|_h^\infty \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r^2}{x_3 + \sqrt{x_3^2 + r^2}} \Big|_h^\infty \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r^2}{h + \sqrt{h^2 + r^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{h^2 + r^2} - h) \end{aligned}$$

2.2.6 一个半径为 r 的圆线框均匀带电, 电荷线密度为 λ , 求线框中心上方距 h 处的电势

$$U = \int_h^\infty \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{x_3 r}{\sqrt{x_3^2 + r^2}^3} dx_3 = -\frac{\lambda r}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x_3^2 + r^2}} \Big|_h^\infty = \frac{\lambda r}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

2.2.7 一个尖角向下的圆锥体均匀带电, 电荷面密度为 σ , 圆锥高度等于半径为 h , 求 $z = h$ 处的电势

$$\begin{aligned} U &= \int_{-h}^0 \frac{\lambda(h+x_3)}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(h-x_3)^2 + (h+x_3)^2}} dx_3 \\ &= \int_{-h}^0 \frac{\lambda(h+x_3)}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2h^2 + 2x_3^2}} dx_3 \\ &= \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\varepsilon_0} \int_{-h}^0 \frac{h}{\sqrt{h^2 + x_3^2}} + \frac{x_3}{\sqrt{h^2 + x_3^2}} dx_3 \\ &= h \ln \left(x_3 + \sqrt{h^2 + x_3^2} \right) + \sqrt{h^2 + x_3^2} \Big|_{-h}^0 \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\varepsilon_0} \\ &= \left[h \ln \left(\sqrt{h^2} \right) + \sqrt{h^2} - h \ln \left(-h + \sqrt{2h^2} \right) - \sqrt{2h^2} \right] \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\varepsilon_0} \\ &= \left[h \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} \right) + h - \sqrt{2}h \right] \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\varepsilon_0} \\ &= \left[1 - \sqrt{2} - \ln \left(\sqrt{2}-1 \right) \right] \frac{\lambda h}{2\sqrt{2}\varepsilon_0} \end{aligned}$$

2.2.8 一个半径为 r 的圆柱均匀带电, 电荷体密度为 ρ , 求圆柱中心上方距 h 处的电势

$$\begin{aligned} U &= \int_{-h}^0 \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{r^2}{h+x_3 + \sqrt{(h+x_3)^2 + r^2}} dx_3 \\ &\stackrel{u=h+x_3}{=} \int_0^h \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{r^2}{u + \sqrt{u^2 + r^2}} du \\ &= \int_0^h \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0} \frac{\sqrt{u^2 + r^2} - u}{r^2} du \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^h \sqrt{u^2 + r^2} - u du \\ &= u\sqrt{u^2 + r^2} + r^2 \ln \left(u + \sqrt{u^2 + r^2} \right) - u^2 \Big|_0^h \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \\ &= \left[h\sqrt{h^2 + r^2} + r^2 \ln \left(h + \sqrt{h^2 + r^2} \right) - h^2 - r^2 \ln r \right] \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \end{aligned}$$

2.3 静电场的能量

2.3.1 离散电荷体系的静电能

考虑由 N 个点电荷 q_i 构成的静电体系。将电荷从无穷远逐个缓慢搬运到其最终位置, 外力所做的总功即为体系的静电能。

设在放置第 i 个电荷时, 其余电荷已就位, 则该电荷所处位置的当前电势为

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

因此, 体系的总静电能为

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

注意到相互作用能在指标交换下满足 $U_{ij} = U_{ji}$, 而对所有 $i \neq j$ 的求和中每一对指标被计数两次, 故可将上式对称化为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} q_i \phi_i.$$

2.3.2 连续电荷分布的能量表达式

对离散情形的自然推广给出

$$U = \frac{1}{2} \iiint \rho \phi \, d\tau.$$

2.3.3 场能量

静电势满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

将其代入能量表达式, 得

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \iiint \phi \nabla^2 \phi \, d\tau.$$

对右端积分作分部积分。注意到

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi,$$

于是

$$\phi \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - (\nabla \phi)^2.$$

代入得

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \left[\iiint \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) \, d\tau - \iiint (\nabla \phi)^2 \, d\tau \right].$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时,

$$\phi(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{r}, \quad \nabla \phi \sim \frac{1}{r^2}.$$

因此

$$\phi \nabla \phi \sim \frac{1}{r^3},$$

对应的无穷远处曲面积分

$$\oiint \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\nabla \phi)^2 \, d\tau.$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint E^2 \, d\tau$$

2.3.4 电场能量密度

这表明：静电能可以视为分布在空间中的电场所携带的能量。

由此自然引入电场的能量密度

$$u \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$$

2.3.5 考虑两个同心球面，半径分别为 a 和 b ，内球面带有电荷 q ，外球面带有电荷 $-q$ ，求总能量

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0 4\pi}{2} \int_a^b \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr = \int_a^b \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

2.4 导体

2.4.1 导体内部电场为零

若导体内部存在非零电场，则自由电荷将在电场作用下持续运动，与静电平衡的假设矛盾。因此，导体内部必须满足

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \mathbf{0}.$$

2.4.2 导体内部体电荷密度为零

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

结合 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$,

$$\rho = 0 \quad (\text{导体内部}).$$

2.4.3 净电荷只能分布在导体表面

既然导体内部体电荷密度为零，而导体整体可能带有净电荷，则这些电荷只能分布在导体的表面上。

2.4.4 导体是等势体

由 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 以及导体内部 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ，可知导体内部电势处处相同

2.4.5 导体表面外侧电场垂直于表面

考虑导体表面上一点的切向电场分量。若存在非零切向分量，则自由电荷将在表面沿切向运动，从而破坏静电平衡。

因此，导体表面外侧的电场只能沿法向：

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0$$

2.4.6 空腔中含点电荷的球形导体

设一不带电的球形导体, 半径为 R , 中心位于原点, 其内部挖去一任意形状的空腔。在空腔内某处放置一点电荷 q 。求球外区域的电场分布。

导体处于静电平衡时, 金属内部电场为零, 因而导体整体为等势体。取一紧贴导体内壁、位于金属内部的高斯面, 由高斯定律可得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0,$$

故内壁所感应的总电荷必为 $-q$ 。又由于导体整体不带电, 外表面所带电荷总量为 $+q$ 。

关键在于确定外表面电荷的分布形式。注意到: 在所有满足

$$\mathbf{E} = 0 \quad (\text{导体内部}), \quad \phi = \text{常数} \quad (\text{导体表面})$$

的允许电荷分布中, 实际的静电平衡态对应于体系总静电能的极小值。

球外区域不含自由电荷, 其电势完全由外表面电荷分布决定。若外表面电荷分布破坏球对称性, 则球外电场中将出现非径向分量, 从而在保持总电荷为 q 的约束下增加电场能

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 d\tau.$$

因此, 能量极小所对应的电荷分布必然保持球对称性。

由此可知, 外表面电荷在球面上均匀分布, 其产生的球外电场与位于球心的点电荷 q 完全相同。因此, 球外任意一点处的电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad r > R.$$

可见, 空腔的形状以及点电荷在腔内的具体位置, 均不影响球外区域的电场分布。

2.4.7 一个半径为 R 的金属球, 带有电荷 q , 这个金属球又被一个厚的同心金属球壳所包围 (球壳内径为 a , 外径为 b)。

(a) 分别求出 R , a , b 球面上的电荷面密度 σ 。

(b) 求出球心处的电势, 选无限远处为参考点。

(c) 现在球壳的外表面接地, 电势能为零。(a) 和 (b) 所得结果改变为什么?

(a):

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \frac{q}{4\pi R^2} \\ \sigma_a &= \frac{q}{4\pi a^2} \\ \sigma_b &= \frac{q}{4\pi b^2} \end{aligned}$$

(b):

$$U = \int_b^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} dr + \int_R^a \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{bR}{a}\right)$$

(c):

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \frac{q}{4\pi R^2} \\ \sigma_a &= \frac{q}{4\pi a^2} \\ \sigma_b &= 0 \\ U &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{a}\right)\end{aligned}$$

2.4.8 一个半径为 R 的导体球体, 其内部有两个半径分别为 a 和 b 的圆形空洞, 在 a 空洞的中心放有点电荷 q , 在 b 空洞的中心放有点电荷 q 。

(a) 求出电荷面密度 σ_a , σ_b 和 σ_R 。

(b) 导体外面的电场是什么?

(c) 每个空洞内的电场是什么?

(d) q_a 和 q_b 受到的力是什么?

(e) 如果让第三个电荷 q 靠近导体, 上面所得结果哪一个会发生变化?

(a):

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \frac{2q}{4\pi R^2} \\ \sigma_a &= \frac{q}{4\pi a^2} \\ \sigma_b &= \frac{q}{4\pi b^2}\end{aligned}$$

(b):

$$\mathbf{E} = \frac{2q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

(c):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_a &= \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \mathbf{E}_b &= \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\end{aligned}$$

(d):0

(e): σ_R, b

2.5 电容

$$C \equiv \frac{Q}{U} \tag{2.6}$$

$$W = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{Q^2}{2C} \tag{2.7}$$

2.5.1 两个同轴金属管壳, 半径分别为 a 和 b , 求出单位长度的电容。

$$\begin{aligned}
 U &= \int_a^b \frac{Q}{2\varepsilon_0 r} dr \\
 &= \frac{Q}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\
 C &= \frac{Q}{U} \\
 &= \frac{2\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}
 \end{aligned}$$

2.6 拉普拉斯方程

$$\frac{d^2 U}{dx_i^2} = 0 \quad (2.8)$$

2.6.1 一维拉普拉斯方程

$$U = ax + b \quad (2.9)$$

2.6.2 在球坐标下, 对 U 仅依赖于 r 的情况, 求出拉普拉斯方程的一般解。对柱坐标系, 假定 U 仅依赖于 s , 做同样的计算。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= 0 \\
 r^2 \frac{\partial U}{\partial r} &= C_1 \\
 \frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{C_1}{r^2} \\
 U &= -\frac{C_1}{r} + C_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial U}{\partial s} \right) &= 0 \\
 s \frac{\partial U}{\partial s} &= C_1 \\
 \frac{\partial U}{\partial s} &= \frac{C_1}{s} \\
 U &= C_1 \ln s + C_2
 \end{aligned}$$

2.6.3 $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{ra}{R}\right)^2 - 2ra \cos \theta}} \right]$ 求出球面上的诱导电荷面密度。对其积分求出总诱导电荷。计算这个构型的能量。

$$\begin{aligned} \sigma &= -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{ra}{R}\right)^2 - 2ra \cos \theta}} \right] \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left[-\frac{2r - 2a \cos \theta}{2\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}^3} + \frac{2\frac{ra}{R} - 2a \cos \theta}{2\sqrt{R^2 + \left(\frac{ra}{R}\right)^2 - 2ra \cos \theta}} \right] \\ &\stackrel{r=R}{=} -\frac{q}{4\pi} \left[-\frac{2R - 2a \cos \theta}{2\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}^3} + \frac{2\frac{Ra}{R} - 2a \cos \theta}{2\sqrt{R^2 + \left(\frac{Ra}{R}\right)^2 - 2Ra \cos \theta}} \right] \\ &\stackrel{r=R}{=} -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{a - R}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}^3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{\infty}^a q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\infty}^a \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0 r \left(r - \frac{R^2}{r}\right)^2} dr \\ &= \int_{\infty}^a \frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0 (r^2 - R^2)^2} dr^2 \\ &= -\frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0 (r^2 - R^2)} \Big|_{\infty}^a \\ &= -\frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0 (a^2 - R^2)} \end{aligned}$$

2.7 镜像法

2.7.1 一条无限长均匀带电线, 电荷线密度为 λ , 它距一个接地导体板距离为 d 。带电线平行于 x 轴并位于 x 轴上方, 导体板为 xy 平面

(a) 求出导体板上方的电势。

(b) 求出导体板上的诱导电荷的面密度。

(a):

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 |x_3 - d|} \ln |x_3 - d| - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (x_3 + d)} \ln (x_3 + d)$$

(b):

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 d} \\ \sigma &= \epsilon_0 E_3 = \frac{\lambda}{\pi d} \end{aligned}$$

2.7.2 两个半无限大接地导体板一端相接形成一个直角。在它们之间的区域有一个点电荷 q , 计算这个区域内的电势。作用在 q 上的力是什么? 把 q 从无限远处移到所示位置需做多少功? 假定两板形成的角度不是 $\frac{\pi}{2}$, 而是另外的一些角度, 你还能用镜像法求解问题吗? 如果不能, 对什么样的特殊角度仍然可以用镜像法求解?

假设在 $(a, a), (-a, -a)$ 处有电荷 q , $(a, -a), (-a, a)$ 有电荷 $-q$, 当 $x = 0, z = 0$ 时

$$U = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + (y-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y+a)^2}} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E} = -\frac{q^2\mathbf{e}_1}{4\pi\epsilon_0 a^2} - \frac{q^2\mathbf{e}_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}q^2\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}q^2\mathbf{e}_2}{4\pi\epsilon_0 2a^2} \\ |\mathbf{F}| &= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \\ W &= \int_{\infty}^a \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{\infty}^a \\ &= - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

在无源区域内, 电势满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 V(x, y) = 0.$$

在二维情况下, 可引入复势

$$W(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y),$$

其中

$$\Phi = V.$$

$W(z)$ 为解析函数的充要条件是 Φ 与 Ψ 满足 Cauchy-Riemann 条件, 而这等价于 Φ 满足拉普拉斯方程。因此, 求解二维静电问题等价于构造合适的解析函数 $W(z)$ 。

二维中, 点电荷对应的 Green 函数为对数型:

$$W_0(z) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(z - z_0),$$

其电势为

$$U(z) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln|z - z_0|.$$

该表达式在 $z = z_0$ 处具有对数奇点, 对应于二维点电荷。

定义映射

$$w = z^{\pi/\alpha}.$$

该映射具有如下性质:

- 若 $0 < \arg z < \alpha$, 则 $0 < \arg w < \pi$;
- 楔形区域被映射为上半平面;
- $\arg z = 0, \alpha$ 被映射为实轴。

因此, 楔形导体边界在 w 平面中对应于接地的实轴。

在上半平面中, 实轴接地, 位于 w_0 ($\Im w_0 > 0$) 的点电荷的复势为

$$W(w) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0}.$$

该表达式满足:

- 在上半平面内调和;
- 在实轴上 $|w - w_0| = |w - \bar{w}_0|$, 因而 $V = 0$;
- 在 $w = w_0$ 处具有正确的对数奇点。

这是由唯一性定理保证的解。

将 $w = z^{\pi/\alpha}$ 代回, 得到楔形区域内的复势:

$$W(z) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z^{\pi/\alpha} - z_0^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - \bar{z}_0^{\pi/\alpha}}.$$

电势为其实部:

$$U(z) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{z^{\pi/\alpha} - z_0^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - \bar{z}_0^{\pi/\alpha}} \right|.$$

这是任意楔角 α 下的严格解。

若

$$\alpha = \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

则

$$w = z^n$$

是单值多项式映射。

利用因式分解:

$$z^n - z_0^n = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_0 e^{2\pi i k/n}),$$

电势可写为有限和:

$$U(z) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \frac{z - z_0 e^{2\pi i k/n}}{z - \bar{z}_0 e^{2\pi i k/n}} \right|.$$

这正对应于有限多个镜像电荷的叠加。

若 $\alpha \neq \pi/n$, 则 $z^{\pi/\alpha}$ 为多值函数, 解析延拓将产生无限多个像点, 镜像法不再以有限求和形式成立。

2.8 分离变量法

2.8.1 直角坐标系

两个无限大接地金属平板平行于 xz 平面放置, 一个位于 $y = 0$, 另一个位于 $y = a$ 。在 $x = 0$ 两板的左端点, 被与两板绝缘的无限长带封闭, 带子上维持特定的电势 $U_0(y)$ 。求出这个“夹缝”中的电势。

由于几何结构和边界条件在 z 方向具有平移对称性, 且 U_0 与 z 无关, 物理解必然满足

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

因此问题严格退化为二维拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

其边界条件为

$$\begin{aligned} U &\stackrel{y=0}{=} 0 \\ U &\stackrel{y=a}{=} 0 \\ U &\stackrel{x=0}{=} U_0(y) \\ U &\stackrel{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \end{aligned}$$

设解为

$$U(x, y) = X(x)Y(y).$$

代入 Laplace 方程得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0.$$

因此两项必须分别等于常数, 记为 $-k^2$:

$$\begin{aligned} Y''(y) + k^2 Y(y) &= 0, \\ X''(x) - k^2 X(x) &= 0. \end{aligned}$$

非平凡解存在当且仅当

$$k = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

对应本征函数为

$$Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

对每个 $k_n = n\pi/a$, 横向方程为

$$X_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 X_n(x) = 0.$$

通解为

$$X_n(x) = A_n e^{-(n\pi/a)x} + B_n e^{+(n\pi/a)x}.$$

由远处边界条件, 要求 $V \rightarrow 0$,

$$B_n = 0.$$

利用线性叠加原理, 电势的一般解为

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{a} e^{-(n\pi/a)x}.$$

在 $x = 0$ 处, 要求

$$V(0, y) = U_0(y).$$

因此

$$U_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a U_0(y) \sin \frac{n\pi y}{a} dy$$

综上, 夹缝区域中的电势为

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a} \int_0^a U_0(y') \sin \frac{n\pi y'}{a} dy' \right] \sin \frac{n\pi y}{a} e^{-(n\pi/a)x}$$

若问题在 z 方向不具平移对称性, 可进一步设

$$\Phi = X(x)Y(y)Z(z),$$

并引入

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad Z(z) = e^{i\lambda z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

此时解的结构变为

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\lambda) \sin \frac{n\pi y}{a} e^{-\sqrt{(n\pi/a)^2 + \lambda^2} x} e^{i\lambda z} d\lambda.$$

2.8.2 球坐标系

在球坐标系中, 拉普拉斯算符为

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

设电势可以写成完全分离的形式, 即 $U = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R\Theta\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial R\Theta\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 R\Theta\Phi}{\partial \phi^2} &= 0 \\ \frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} &= 0 \\ - \left[\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \right] &= \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \end{aligned}$$

由于左边仅依赖 r , 右边仅依赖角变量, 两边必须等于同一个常数。

引入分离常数 $l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$

于是得到:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1)R = 0. \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + l(l+1) = 0. \quad (2.11)$$

继续分离 $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, 令

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

于是得到:

ϕ 方程

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0, \quad (2.12)$$

其解为

$$\Phi_m(\phi) = C_1 e^{im\phi}$$

θ 方程

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0. \quad (2.13)$$

这是关联勒让德方程, 其在 $\theta \in [0, \pi]$ 上正则的解为

$$\Theta_{lm}(\theta) = P_{lm}(\cos\theta), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad |m| \leq l.$$

其中,

$$P_{lm}(x) \equiv \sqrt{(1+x^2)^m} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (2.14)$$

$P_l(x)$ 可由罗德里格 (Rodrigue) 公式计算:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (2.15)$$

罗德里格公式显然仅对非负的整数 l 成立。另外, 它仅提供给我们一个解。但是式2.13应当有两个解。情况是那些另外的解在 $\theta = 0$ 和/或 $\theta = \pi$ 发散

为了方便, 将角向部分合并, 定义球谐函数

$$Y_{lm} \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (2.16)$$

径向方程为

$$r^2 R'' + 2r R' - l(l+1)R = 0,$$

通解为

$$R_l(r) = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \quad (2.17)$$

将各部分组合, 得到球坐标下拉普拉斯方程的一般解

$$U(r, \theta, \phi) = (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.18)$$

当 $m = 0$ 时, 式2.13退化为

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1)\Theta = 0 \quad (2.19)$$

式2.13的解退化为

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta) \quad (2.20)$$

球坐标下拉普拉斯方程的一般解退化为

$$U(r, \theta) = (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta) \quad (2.21)$$

2.8.3 柱坐标系

$$\nabla^2 U = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial U}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

设电势可以写成完全分离的形式, 即 $U = S(s)Z(z)\Phi(\phi)$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial S(s)Z(z)\Phi(\phi)}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 S(s)Z(z)\Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 S(s)Z(z)\Phi(\phi)}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{sS(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial S(s)}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2 \Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\text{设 } \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2$$

$$- \left[\frac{1}{sS(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial S(s)}{\partial s} \right) - \frac{m^2}{s^2} \right] = \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

由于左边仅依赖 s , 右边仅依赖 z , 两边必须等于同一个常数, 设为 $-k^2$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 Z(z) = 0$$

$$\frac{1}{sS(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial S(s)}{\partial s} \right) - \frac{m^2}{s^2} = k^2$$

$$\frac{s}{S(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial S(s)}{\partial s} \right) - k^2 s^2 = m^2$$

$$s^2 \frac{\partial^2 S(s)}{\partial s^2} + s \frac{\partial S(s)}{\partial s} - k^2 s^2 S(s) - m^2 S(s) = 0$$

$$\text{设 } S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{n+c}$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) s^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) s^{n+c} - k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{n+c+2} - m^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{n+c}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+c)^2 - m^2] s^{n+c} - k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{n+c+2}$$

$$= a_0 [c^2 - m^2] s^c + a_1 [(1+c)^2 - m^2] s^{1+c} + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n [(n+c)^2 - m^2] - k^2 a_{n-2}\} s^{n+c}$$

$$a_{n+2} = \frac{k^2}{(n+c)^2 - m^2}$$

当处于 $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ 的简化条件下时

$$s^2 \frac{\partial^2 S(s)}{\partial s^2} + s \frac{\partial S(s)}{\partial s} - m^2 S(s) = 0 \quad (2.22)$$

解得

$$S(s) = C_m s^{-m} + D_m s^m \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2$$

$$\Phi = E_m \cos m\phi + F_m \sin m\phi, (m \in \mathbb{N}) \quad (2.24)$$

将各部分组合, 得到一般解

$$U = (C_m s^{-m} + D_m s^m) (E_m \cos m\phi + F_m \sin m\phi), (m \in \mathbb{N}) \quad (2.25)$$

2.8.4 勒让德多项式性质的证明

$l \in \mathbb{N}$ 的证明

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1)\Theta \\ &\stackrel{u=\cos \theta}{=} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d}{d \arccos u} \left(\sqrt{1-u^2} \frac{d\Theta}{d \arccos u} \right) + l(l+1)\Theta \\ &= \frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{d\Theta}{du} \right] + l(l+1)\Theta \\ &= \frac{d}{du} \left(\frac{d\Theta}{du} \right) - \frac{d}{du} \left(u^2 \frac{d\Theta}{du} \right) + l(l+1)\Theta \\ &= \frac{d^2 \Theta}{du^2} - u^2 \frac{d^2 \Theta}{du^2} - 2u \frac{d\Theta}{du} + l(l+1)\Theta \end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned} \Theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \\ 0 &= \frac{d^2}{du^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n - u^2 \frac{d^2}{du^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n - 2u \frac{d}{du} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^n - u^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^n - 2u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} u^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} u^{n+1} + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(n-2)!} u^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} u^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} u^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n-2)!} u^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} u^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n \quad (n > 1) \\ &= \frac{a_{n+2}}{n!} - \frac{a_n}{(n-2)!} - 2 \frac{a_n}{(n-1)!} + l(l+1) \frac{a_n}{n!} \\ &= a_{n+2} - a_n n(n-1) - 2a_n n + l(l+1)a_n \\ a_{n+2} &= [n(n+1) - l(l+1)]a_n \end{aligned}$$

由高斯判别法可得级数在 $u = \pm 1$ 时发散, 因此 $l \in \mathbb{Z}$

勒让德多项式的求和形式 由递推关系 $a_{n+2} = -(l-n)(l+n+1)a_n$, 若级数在 $n = l$ 时截断, 则 $\Theta(u)$ 成为一个 l 阶多项式。规定最高次项 u^l 的系数为 $\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$, 通过逆向递推最终得到 l 阶勒让德多项式的求和形式:

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^M (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k} \quad (2.26)$$

其中 $M = l/2$ (l 为偶数) 或 $(l-1)/2$ (l 为奇数)。

正交性的证明 取两个不同阶数的勒让德函数 P_a 、 P_b , 满足:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] + a(a+1)P_a \\
 0 &= \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] + b(b+1)P_b \\
 0 &= \left\{ \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] + a(a+1)P_a \right\} P_b - \left\{ \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] + b(b+1)P_b \right\} P_a \\
 &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] + a(a+1)P_a \right\} P_b - \left\{ \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] + b(b+1)P_b \right\} P_a du \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] P_b + a(a+1)P_a P_b - \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] P_a - b(b+1)P_b P_a du \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] P_b - \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] P_a du + [a(a+1) - b(b+1)] \int_{-1}^1 P_a P_b du
 \end{aligned}$$

由分部积分可得

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_a] P_b - \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_b] P_a du = (1-u^2)(P_b P'_a - P_a P'_b)|_{-1}^1 = 0$$

得证

$$[a(a+1) - b(b+1)] \int_{-1}^1 P_a P_b du = 0$$

完备性的证明略过

证明 $P_l(1) = 1$

$$\begin{aligned}
 P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \\
 &\stackrel{u=x-1}{=} \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{du} \right)^l [u^l (u+2)^l]
 \end{aligned}$$

根据莱布尼茨公式, 只有当 u^l 被求导 l 次变成 $l!$ 时, 且剩下部分不含 u (即 $u \rightarrow 0$ 时不为 0), 该项才有贡献:

$$P_l(1) = \frac{1}{2^l l!} \cdot l! \cdot (u+2)^l \Big|_{u=0} = \frac{1}{2^l} \cdot 2^l = 1$$

同理可证 $P_l(-1) = (-1)^l$ 。

2.8.5 两个无限长接地金属板, 分别在 $y = 0$ 和 $y = a$ 放置, 在 $x = \pm b$ 的侧边连接有电势为 U_0 的两个金属带。求出这个矩形管中的电势。

此时边界条件为:

$$\begin{aligned}
 U &\stackrel{y=0}{=} 0 \\
 U &\stackrel{y=a}{=} 0 \\
 U &\stackrel{x=b}{=} U_0 \\
 U &\stackrel{x=-b}{=} U_0
 \end{aligned}$$

做法同前解得

$$U = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin \frac{n\pi}{a}x + D \cos \frac{n\pi}{a}x)$$

因为 $U(-x) = U(x)$, $U \stackrel{y=0}{=} 0$, 所以 $A = B$, $D = 0$, 并把系数吸进 C 得

$$U = C \cosh \frac{n\pi}{a}x \sin \frac{n\pi}{a}y$$

余下的事是构造一般的叠加解, 设定系数 C_n , 使其拟合边界条件

$$U(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a}b \sin \frac{n\pi}{a}y = U_0$$

因为 $U(b, y) = U(b, -y)$, 所以 $\sin \frac{n\pi}{a}y$ 为偶函数, n 为奇数, 即

$$U(b, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cosh \frac{2n+1}{a}\pi b \sin \frac{2n+1}{a}\pi y = U_0$$

$$\begin{aligned} C_n \cosh \frac{2n+1}{a}\pi b &= \frac{2}{a} \int_0^a U_0 \sin \frac{2n+1}{a}\pi y \, dy \\ &= \frac{4U_0}{(2n+1)\pi} \left(\cosh \frac{2n+1}{a}\pi b \right)^{-1} \\ U &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4U_0}{(2n+1)\pi} \left(\cosh \frac{2n+1}{a}\pi b \right)^{-1} \cosh \frac{n\pi}{a}x \sin \frac{n\pi}{a}y \end{aligned}$$

2.8.6 一个半径为 R 的球面上的电势为 $U_0 = k \cos 3\theta$ 。求出球面内外的电势以及球面上的电荷面密度 $\sigma(\theta)$ 。(假定球内和球外没有电荷分布。)

球内:

$$\begin{aligned} U(R, \theta) &= k \cos 3\theta \\ (A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) &= k \cos 3\theta \\ A_l R^l P_l(\cos \theta) &= k \cos 3\theta \\ \int_0^\pi A_l^2 R^{2l} P_l^2(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta A_l R^l P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ \int_0^\pi A_l R^l P_l^2(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ \int_0^\pi A_0 R^0 P_0^2(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta P_0(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ \int_0^\pi A_0 \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta \sin \theta \, d\theta \\ A_0 &= 0 \\ \int_0^\pi A_1 R P_1^2(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta P_1(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ \int_0^\pi A_1 R \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi k \cos 3\theta \cos \theta \sin \theta \, d\theta \end{aligned}$$

不想算积分了

2.8.7 假定一个球面上的电势为 $U_0(\theta)$, 并且球内球外没有电荷分布。证明球面上的电荷面密度为 $\sigma = \frac{\varepsilon_0}{2R}(2l+1)^2 P_l(\cos\theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos\theta') \sin\theta' d\theta'$

$$U(R, \theta) = U_0(\theta)$$

$$(A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta) = U_0(\theta)$$

球外:

$$B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = U_0(\theta)$$

$$\int_0^\pi B_l^2 R^{-2(l+1)} P_l^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \int_0^\pi B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) U_0(\theta) \sin\theta d\theta$$

$$\int_0^\pi B_l R^{-(l+1)} P_l^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \int_0^\pi P_l(\cos\theta) U_0(\theta) \sin\theta d\theta$$

$$B_l = \frac{\int_0^\pi P_l(\cos\theta) U_0(\theta) \sin\theta d\theta}{\int_0^\pi R^{-(l+1)} P_l^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta}$$

球内:

$$A_l R^l P_l(\cos\theta) = U_0(\theta)$$

$$\int_0^\pi A_l R^l P_l^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \int_0^\pi U_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$$A_l = \frac{\int_0^\pi U_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta}{\int_0^\pi R^l P_l^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta}$$

由连续性可得

$$A_l R^l P_l(\cos\theta) = B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

$$A_l R^l = B_l R^{-(l+1)}$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2R} (2l+1)^2 P_l(\cos\theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos\theta') \sin\theta' d\theta' = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{1}{2R} (2l+1)^2 P_l(\cos\theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos\theta') \sin\theta' d\theta' = - \left. \frac{\partial B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)}{\partial r} + \frac{\partial A_l r^l P_l(\cos\theta)}{\partial r} \right|_{r=R}$$

$$\frac{1}{2R} (2l+1)^2 P_l(\cos\theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos\theta') \sin\theta' d\theta' = (l+1) B_l R^{-(l+2)} P_l(\cos\theta) + l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2} (2l+1)^2 P_l(\cos\theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos\theta') \sin\theta' d\theta' = (l+1) B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) + l A_l R^l P_l(\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2} (2l+1)^2 P_l(\cos\theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos\theta') \sin\theta' d\theta' = (l+1) B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) + l B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2} (2l+1)^2 P_l(\cos\theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos\theta') \sin\theta' d\theta' = (2l+1) B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

逐项比较可得 (不使用爱因斯坦求和约定)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(2l+1)^2 P_l(\cos \theta) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= (2l+1) B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\ \frac{1}{2}(2l+1) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= B_l R^{-(l+1)} \\ \frac{1}{2}(2l+1) \int_0^\pi U_0(\theta') P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= \frac{\int_0^\pi P_l(\cos \theta) U_0(\theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi R^{-(l+1)} P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta} R^{-(l+1)} \\ \frac{1}{2}(2l+1) &= \frac{1}{\int_0^\pi P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta}\end{aligned}$$

2.8.8 一个带电金属球 (电荷为 Q , 半径为 R) 置于均匀外电场 E_0 中, 求球外的电势。

边界条件:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} U &\rightarrow E_0 r \cos \theta \\ U(R) &= 0 \\ (A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) &= 0 \\ (A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) &= 0\end{aligned}$$

显然 $A_1 = -E_0$, 其余诸 A_l 为零

$$\begin{aligned}-E_0 R^1 + B_1 R^{-2} &= 0 \\ B_1 &= E_0 R^3\end{aligned}$$

2.8.9 在习题2.2.5中求出了一个均匀带电盘轴线上的电势。

(a) 对带电盘不在轴线上的电势, 计算在展开式中的前三项, 假设 $r > R$ 。

(b) 求出 $r < R$ 的电势。

(a):

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{r^2 + R^2} - r) &= (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(1) \\ \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{r^2}} - 1 \right) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} \\ \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 2r} &= B_0 r^{-1} \\ 0 &= B_1 r^{-2} \\ -\frac{\sigma R^4}{2\varepsilon_0 8r^3} &= B_2 r^{-3}\end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{r^2 + R^2} - r) &= (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(1) \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{r^2 + R^2} - r) &= A_l r^l\end{aligned}$$

2.8.10 一个半径为 R 的球壳在“北半球”带有均匀的面电荷, 电荷面密度为 σ , 在“南半球”也带有均匀的面电荷, 电荷面密度为 $-\sigma$ 。求出球壳内外的电势。

由连续性可得 $A_l r^l = B_l r^{-(l+1)}$

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \\ \sigma(\theta) &= -\varepsilon_0 \frac{\partial (-A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)}{\partial r} \\ \sigma(\theta) &= -\varepsilon_0 [-l A_l r^{l-1} - (l+1) B_l r^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) \\ \sigma(\theta) &= \varepsilon_0 (2l+1) B_l r^{-(l+2)} P_l(\cos \theta)\end{aligned}$$

2.9 多极展开

设电荷分布 $\rho(\mathbf{r}')$ 局域在有限区域内, 取坐标原点在该区域附近。空间中任意点 \mathbf{r} 处的静电势为

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2.27)$$

当观测点满足

$$r \gg r'$$

时, 可展开电荷:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (2.28)$$

代入电势表达式, 得

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int r'^l P_l(\cos \gamma) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.29)$$

该展开称为**多极展开**。其中每一阶 l 对应一个多极矩项, 并按 $r^{-(l+1)}$ 的幂次递减。

2.9.1 单极项 ($l=0$)

注意 $P_0(\cos \gamma) = 1$, 于是

$$U_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (2.30)$$

其中

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

为体系的总电荷。

2.9.2 偶极项 ($l=1$)

利用

$$P_1(\cos \gamma) = \cos \gamma = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}',$$

可得

$$U_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (2.31)$$

定义电偶极矩

$$\mathbf{d} \equiv \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 r',$$

于是

$$U_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.32)$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.33)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.34)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (2.35)$$

$$\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r^2} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (2.36)$$

2.9.3 四极项及更高阶

对于 $l \geq 2$, 电势项的一般形式为

$$U_l(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^{l+1}} \int r'^l P_l(\cos \gamma) \rho(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (2.37)$$

这些项随 r 增大而迅速衰减, 在远场区

$$r \gg r'$$

时, 其贡献相对低阶项可以忽略。

因此, 在远离电荷分布的区域, 电势可近似表示为

$$U(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \cdots \right). \quad (2.38)$$

若体系总电荷 $Q = 0$, 则单极项消失; 若同时电偶极矩 $\mathbf{d} = 0$, 则远场由更高极项主导。

2.9.4 四个粒子 (一个带电为 q , 一个为 $3q$, 另两个为 $-2q$), 每一个距原点距离为 a 。求出远离原点处电势的简单近似表达式。

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{3a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) + \frac{(-a)^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) - \frac{2a^l}{r^{l+1}} P_l(\sin \theta) - \frac{2(-a)^l}{r^{l+1}} P_l(\sin \theta)$$

$l = 0$:

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3}{r^1} + \frac{1}{r^1} - \frac{2}{r^1} - \frac{2}{r^1} \right] = 0$$

$l = 1$:

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3a}{r^2} P_1(\cos \theta) + \frac{(-a)}{r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{2a}{r^2} P_1(\sin \theta) - \frac{2(-a)}{r^2} P_1(\sin \theta) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{r^2} \cos \theta \end{aligned}$$

2.9.5 确定电偶极子电势中的四极矩项

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) - \frac{(-a)^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$l = 3$:

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a^3}{r^4} P_3(\cos\theta) - \frac{(-a)^3}{r^4} P_3(\cos\theta) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a^3}{r^4} \frac{3}{2} \sqrt{1 - \cos^2\theta} (5 \cos^2\theta - 1) - \frac{(-a)^3}{r^4} \frac{3}{2} \sqrt{1 - \cos^2\theta} (5 \cos^2\theta - 1) \right] \\ &= \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^3}{r^4} \sqrt{1 - \cos^2\theta} (5 \cos^2\theta - 1) \end{aligned}$$

2.9.6 一个“纯粹”的偶极子 d 位于原点, 指向 z 方向。

- (a) 作用在位于 $(a, 0, 0)$ (直角坐标系) 的点电荷 q 上的力是什么?
 (b) 作用在位于 $(0, 0, a)$ (直角坐标系) 的点电荷 q 上的力是什么?
 (c) 把点电荷 q 从 $(a, 0, 0)$ 移动到 $(0, 0, a)$ 所需的功为多少?

(a)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r^2} (2 \cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta) = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{e}_\theta$$

(b)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r^2} (2 \cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta) = \frac{d}{2\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{e}_r$$

(c)

$$W = q\Delta U = q \frac{d}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

2.9.7 两个电量为 $-q$ 的点电荷位于 $(0, a, 0), (0, -a, 0)$, 一个电量为 q 的点电荷位于 $(0, 0, a)$ 求出远离原点处的近似电场, 计算到多极展开中的最低两项。

暂时不会

2.10 习题

2.10.1 一个均匀带电、边长为 $2a$ 的正方形面，电荷面密度为 σ 。求出距中心高度为 z 处的电场。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0 \sqrt{2L^2 + z^2}} e_3 \frac{2Lz}{L^2 + z^2} dL \\
 & \stackrel{2L^2 = z^2 \tan^2 \theta}{=} \int_0^{\arctan \frac{a}{\sqrt{2}z}} \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0 \sqrt{z^2 \tan^2 \theta + z^2}} e_3 \frac{2z \tan \theta z}{z^2 \tan^2 \theta + 2z^2} dz \tan \theta \\
 & = \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{2}a}{z}} \frac{\sigma \cos \theta}{\pi \varepsilon_0 z \cos^2 \theta} e_3 \frac{2z \tan \theta z}{z^2 \tan^2 \theta + 2z^2} dz \theta \\
 & = \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{2}a}{z}} \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0 \cos \theta} e_3 \frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 2} d\theta \\
 & = \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{2}a}{z}} \frac{2\sigma}{\pi \varepsilon_0} e_3 \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta \cos \theta + 2 \cos \theta} d\theta \\
 & = \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{2}a}{z}} \frac{2\sigma}{\pi \varepsilon_0} e_3 \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta} d\theta \\
 & = - \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{2}a}{z}} \frac{2\sigma}{\pi \varepsilon_0} e_3 \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} d \cos \theta \\
 & = - \frac{2\sigma}{\pi \varepsilon_0} e_3 \arctan \cos \theta \Big|_0^{\arctan \frac{\sqrt{2}a}{z}} \\
 & = \frac{2\sigma}{\pi \varepsilon_0} e_3 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{z}{\sqrt{2a^2 + z^2}} \right)
 \end{aligned}$$

2.10.2 已知电场 $\mathbf{E} = \frac{A\mathbf{e}_r + B \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_\phi}{r}$ ，求电荷密度

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{sr} \frac{\partial sr E_r}{\partial r} + \frac{1}{s} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \\
 &= \frac{1}{sr} \frac{\partial sA}{\partial r} + \frac{1}{sr} \frac{\partial B \sin \theta \cos \phi}{\partial \phi} \\
 &= \frac{A}{r^2} - \frac{1}{r^2} B \sin \phi
 \end{aligned}$$

2.10.3 一个均匀带电球体, 求出南半球与北半球之间的净相互作用力

$$\begin{aligned}
E_z &= E_r \cos \theta = \frac{\rho \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\rho \cos \theta r}{3\epsilon_0} \\
F &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \theta \rho E_z d\theta \\
&= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin \theta \rho \frac{\rho \cos \theta}{3\epsilon_0} d\theta \\
&= \pi \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \rho^2 \frac{2 \cos \theta}{3\epsilon_0} d\theta \\
&= \pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \rho^2 \frac{\cos \theta}{6\epsilon_0} d\theta \\
&= \pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \frac{\sin 2\theta}{24\epsilon_0} d2\theta \\
&= -\rho^2 R^4 \pi \frac{\cos 2\theta}{24\epsilon_0} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\rho^2 R^4 \pi}{12\epsilon_0}
\end{aligned}$$

2.10.4 一个半径为 R 的倒置半球面均匀带电, 电荷面密度为 σ 。求出北极与球心处的电势差

$$\begin{aligned}
 U_{\text{半球北极}} &= d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma R \sin \theta}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2(1 - \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta}} R d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \sin^2 \theta}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}} R^2 d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \sin \theta}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos \theta}} R d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2\sqrt{2}\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}} R d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} R d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \cos \frac{\theta}{2}}{2\varepsilon_0} R d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R d \sin \frac{\theta}{2} \\
 &= \frac{\sigma \sin \frac{\theta}{2}}{\varepsilon_0} R \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\varepsilon_0} R \\
 U_{\text{半球球心}} &= \frac{2\pi R^2 \sigma}{4\pi \varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \\
 \Delta U &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{\sqrt{R^2}} + \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{R + \sqrt{R^2 + R^2}} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\varepsilon_0} R \\
 &= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\varepsilon_0} R \\
 &= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\varepsilon_0} R
 \end{aligned}$$

2.10.5 一个半径为 R 的球体, 电荷密度 $\rho = kr$, 求能量

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{E}| &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x_3^2} \int_0^R 4\pi k r^3 \mathrm{d}r & (x_3 \geq R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x_3^2} \int_0^{x_3} 4\pi k r^3 \mathrm{d}r & (x_3 < R) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{4\epsilon_0 x_3^2} k R^4 & (x_3 \geq R) \\ \frac{1}{4\epsilon_0 x_3^2} k x_3^4 & (x_3 < R) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{k R^4}{4\epsilon_0 x_3^2} & (x_3 \geq R) \\ \frac{k x_3^2}{4\epsilon_0} & (x_3 < R) \end{cases} \\
 U &= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \int_0^R \left(\frac{k x_3^2}{4\epsilon_0} \right)^2 x_3^2 \mathrm{d}x_3 + \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \int_R^\infty \left(\frac{k R^4}{4\epsilon_0 x_3^2} \right)^2 x_3^2 \mathrm{d}x_3 \\
 &= 2\pi \int_0^R \frac{k^2 x_3^6}{16\epsilon_0} \mathrm{d}x_3 + 2\pi \int_R^\infty \frac{k^2 R^8}{16\epsilon_0 x_3^2} \mathrm{d}x_3 \\
 &= \pi \frac{k^2 R^7}{56\epsilon_0} + \pi \frac{k^2 R^8}{8\epsilon_0 R} \\
 &= \pi \frac{k^2 R^7}{7\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

2.10.6 电势为 $U = \frac{Ae^{-\lambda r}}{r}$, 求电场, 电荷密度, 总电荷

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= -\nabla U \\
 &= -\frac{\partial}{\partial r} \frac{Ae^{-\lambda r}}{r} \mathbf{e}_r \\
 &= \frac{\lambda r Ae^{-\lambda r} + Ae^{-\lambda r}}{r^2} \mathbf{e}_r \\
 \rho &= \epsilon_0 \nabla^2 U \\
 &= \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} \\
 &= \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda r Ae^{-\lambda r} + Ae^{-\lambda r}}{\partial r} \\
 &= \epsilon_0 \frac{\lambda Ae^{-\lambda r} - \lambda^2 r Ae^{-\lambda r} - \lambda Ae^{-\lambda r}}{r^2} \\
 &= -\frac{\epsilon_0 \lambda^2 Ae^{-\lambda r}}{r} \quad (r \neq 0) \\
 \rho &= \frac{\epsilon_0 A 4\pi \delta^{(3)}(r)}{r} - \frac{\epsilon_0 \lambda^2 Ae^{-\lambda r}}{r} \\
 Q &= 4\pi \int_0^\infty \rho r^2 \mathrm{d}r \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

2.10.7 两条平行于 z 轴的无限长均匀带电线, 电荷线密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$, 距离为 $2d$ 。

(a) 求出任意一点的电势。

(b) 证明等势面为圆柱面, 对给定的电势 U , 给出圆柱面的半径和轴的位置。

(a):

$$\begin{aligned} U_{+\lambda} &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln |\mathbf{r} - d\mathbf{e}_1| \\ U_{-\lambda} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln |\mathbf{r} + d\mathbf{e}_1| \\ U &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln |\mathbf{r} - d\mathbf{e}_1| + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln |\mathbf{r} + d\mathbf{e}_1| \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x_1 + d)^2 + x_2^2}{(x_1 - d)^2 + x_2^2} \right] \end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned} (x_1 + d)^2 + x_2^2 &= k [(x_1 - d)^2 + x_2^2] \\ x_1^2 + 2x_1d + d^2 + x_2^2 &= kx_1^2 - 2kx_1d + kd^2 + kx_2^2 \\ 0 &= (k - 1)x_1^2 - 2(k + 1)x_1d + (k - 1)d^2 + (k - 1)x_2^2 \\ 0 &\stackrel{u=\frac{k+1}{k-1}}{=} x_1^2 - 2ux_1d + d^2 + x_2^2 \\ u^2 - d^2 &= (x_1 - u)^2 + x_2^2 \\ R &= \sqrt{u^2 - d^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 - d^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{e \frac{4\pi\epsilon_0 U}{\lambda} + 1}{e \frac{4\pi\epsilon_0 U}{\lambda} - 1}\right)^2 - d^2} \end{aligned}$$

2.10.8 在一个真空二极管中, 电子从阴极面“热蒸发”后向阳极面加速运动, 阴极电势为零, 对面阳极的电势为 U_0 。在两极间隙中所形成的电子云 (称为空间电荷) 很快会达到一种分布状态, 使得阴极面上的电场为零。然后在两极板之间形成稳定的电流 I 。假定两个极板面积 A 远大于它们之间的距离 $d (A \gg d)$, 所以边界效应可以忽略。则 U, ρ, v (电子速度) 都仅是 x 的函数。

(a) 写出在两极板之间空间的泊松方程。

(b) 假定电子从阴极是从静止开始运动的, 那么在点 x , 这里电势为 $U(x)$, 电子速度为多少?

(c) 在稳定状态下, 电流 I 不依赖于 x 。那么 ρ 和 v 之间的关系是什么?

(d) 利用上面的结果, 消去 ρ 和 v , 得出 U 满足的微分方程。

(e) 作为 x, U_0, d 的函数, 求出 U 的解。并与没有空间电荷的情况比较。另外作为 x 的函数, 求出 ρ 和 v 。

(f) 证明 $1 = KU_0^{\frac{3}{2}}$ 求出常数 K 。

(a):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(b):

$$eU = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

(c):

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

$$= \rho Av$$

(d):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{I}{Av\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{I}{A\sqrt{\frac{2eU}{m}}\varepsilon_0}$$

(e):

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{I}{A \sqrt{\frac{2eU}{m}} \varepsilon_0} \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 &= 4 \frac{\partial U^{\frac{1}{2}}}{\partial x} \frac{I}{A \sqrt{\frac{2e}{m}} \varepsilon_0} \\
\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 &= 4 \frac{I U^{\frac{1}{2}}}{A \sqrt{\frac{2e}{m}} \varepsilon_0} \\
\frac{\partial U}{\partial x} &= 2 \frac{I^{\frac{1}{2}} U^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2e}{m} \right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}} \\
U^{-\frac{1}{4}} \partial U &= 2 \frac{I^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{4}} \partial x}{A^{\frac{1}{2}} (2e)^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}} \\
\frac{4}{3} U^{\frac{3}{4}} &= 2 \frac{I^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{4}} x}{A^{\frac{1}{2}} (2e)^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}} \\
U &= \frac{3^{\frac{4}{3}} I^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{4}}}{2 A^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}} \\
v &= \sqrt{\frac{2eU}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{2e \frac{3^{\frac{4}{3}} I^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{4}}}{2 A^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}}}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{3^{\frac{4}{3}} I^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} e^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}} m^{\frac{3}{4}}}} \\
&= \frac{3^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{1}{3}}}{A^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{3}} m^{\frac{3}{8}}} \\
\rho &= \varepsilon_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\
&= \frac{2 I^{\frac{2}{3}} m^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} A^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

(f):

$$\begin{aligned}
U &= \frac{3^{\frac{4}{3}} I^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{4}}}{2 A^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}} \\
I^{\frac{2}{3}} &= \frac{U 2 A^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{4}}} \\
I &= \frac{U^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3}{2}} A^{\frac{3}{4}} e^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}}{3^2 x^2 m^{\frac{3}{2}}} \\
I &= \frac{U_0^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3}{2}} A^{\frac{3}{4}} e^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}}{3^2 d^2 m^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

2.10.9 假设现在极精确的测量已经揭示出库仑定律的误差。两个点电荷之间的作用力为 $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \mathbf{e}_r$ 式中, λ 是一个新的自然常数。你的任务是按照这个新发现重新表述静电学。假定叠加原理仍然成立。

(a) 电场是什么?

(b) 求出一个点电荷的电势。

(c) 对一个位于原点的点电荷, 证明 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\lambda^2} \iiint_V U d\tau = \frac{q}{\epsilon_0}$

(a):

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \mathbf{e}_r$$

(b):

$$\begin{aligned} U &= \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \lambda} \int_R^\infty \left(\frac{\lambda^2}{r^2} + \frac{\lambda}{r}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} d\frac{r}{\lambda} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \lambda} \int_R^\infty \left(\frac{\lambda^2}{r^2} - \frac{\lambda}{r}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} d\frac{r}{\lambda} \\ &\stackrel{u=-\frac{r}{\lambda}}{=} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \lambda} \int_{-\frac{R}{\lambda}}^{-\infty} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\right) e^u du \\ &= -\frac{1}{u} e^u \Big|_{-\frac{R}{\lambda}}^{-\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \lambda} \\ &= e^{-\frac{R}{\lambda}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

(c):

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= 4\pi R^2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 + \frac{R}{\lambda}\right) e^{-\frac{R}{\lambda}} = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{R}{\lambda}\right) e^{-\frac{R}{\lambda}} \\ \frac{1}{\lambda^2} \iiint_V U d\tau &= 4\pi \frac{1}{\lambda^2} \int_0^R e^{-\frac{r}{\lambda}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} r^2 dr \\ &= \int_0^R -\frac{r}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \frac{q}{\epsilon_0} d\frac{r}{\lambda} \\ &\stackrel{u=-\frac{r}{\lambda}}{=} \int_0^{-\frac{R}{\lambda}} u e^u \frac{q}{\epsilon_0} du \\ &= (u-1) e^u \frac{q}{\epsilon_0} \Big|_0^{-\frac{R}{\lambda}} \\ &= \left(-\frac{R}{\lambda} - 1\right) e^{-\frac{R}{\lambda}} \frac{q}{\epsilon_0} + \frac{q}{\epsilon_0} \\ \frac{q}{\epsilon_0} &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\lambda^2} \iiint_V U d\tau \end{aligned}$$

2.10.10 假设一个电场 $E_1 = ax$, $E_2 = E_3 = 0$, 电荷密度为什么?

$$\epsilon_0 \frac{\partial ax}{\partial x} = a$$

2.10.11 所有的静电学特性都是从库仑定律的 $\frac{1}{r^2}$ 以及叠加原理导出的。因此也可以对牛顿万有引力构建类似的理论。什么是一个半径为 R , 质量为 M 的球体的引力能? 假设质量密度是均匀的。利用所得结果估计太阳的引力能

根据库仑定律与万有引力定律的数学相似性, 我们可以通过替换常数直接得到均匀球体的引力自能。

在静电学中, 均匀带电球体的静电能为:

$$W_e = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \quad (2.39)$$

利用类比关系得到质量为 M 的均匀球体的引力能:

$$W_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (2.40)$$

假设球体密度为 $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ 。考虑已形成半径为 r 的球核, 其质量为 $m(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ 。现从无穷远处移近一层厚度为 dr 的薄壳, 其质量为 $dm = 4\pi\rho r^2 dr$ 。此过程引力所做的功为:

$$dW = -\frac{Gm(r)dm}{r} \quad (2.41)$$

$$= -\frac{G}{r} \left(\frac{4}{3}\pi\rho r^3 \right) (4\pi\rho r^2 dr) \quad (2.42)$$

$$= -\frac{16}{3}\pi^2 G\rho^2 r^4 dr \quad (2.43)$$

对整个球体从 0 到 R 积分:

$$W_g = \int_0^R -\frac{16}{3}\pi^2 G\rho^2 r^4 dr \quad (2.44)$$

$$= -\frac{16}{3}\pi^2 G\rho^2 \left[\frac{1}{5}r^5 \right]_0^R \quad (2.45)$$

$$= -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 \quad (2.46)$$

将 $\rho^2 = \frac{M^2}{\frac{16}{9}\pi^2 R^6}$ 代入上式, 化简得:

$$W_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (2.47)$$

取太阳参数: $M \approx 2.0 \times 10^{30} \text{kg}$, $R \approx 7.0 \times 10^8 \text{m}$, 引力常数 $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ 。代入公式得:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{3}{5} \frac{6.67 \times 10^{-11} \times (2.0 \times 10^{30})^2}{7.0 \times 10^8} \\ &\approx -2.28 \times 10^{41} \text{J} \end{aligned}$$

2.10.12 我们知道导体上的电荷是分布于其表面的,但是在表面上是如何分布的不是很容易确定的。电荷面密度可以直接计算的著名例子是椭圆面: $\frac{x_1^2}{r_1^2} + \frac{x_2^2}{r_2^2} + \frac{x_3^2}{r_3^2} = 1$ 对这种情况 $\sigma =$

$$\frac{Q}{4\pi r_1 r_2 r_3} \left(\frac{x_1^2}{r_1^4} + \frac{x_2^2}{r_2^4} + \frac{x_3^2}{r_3^4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

(a) 一个半径为 R 的圆盘的净电荷面密度 σ ;

(b) 位于 x, y 平面一条无限长的导体“丝带”的电荷面密度 σ , 丝带沿 y 轴放置, 宽度 $2a$;

(c) 求出一个从 $x_3 = -a$ 到 $x_3 = a$ 的导体“针”每单位长度的电荷。

(a): 令 $r_1 = r_2$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Q}{4\pi r_1^2 r_3} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{r_1^4} + \frac{x_3^2}{r_3^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi r_1^2 r_3} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{r_1^4} + \frac{r_1^2 - x_1^2 - x_2^2}{r_3^2 r_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi r_1^2} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{r_1^4} r_3^2 + \frac{r_1^2 - x_1^2 - x_2^2}{r_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\xrightarrow{r_3 \rightarrow 0} \frac{Q}{4\pi r_1^2} \left(\frac{r_1^2 - x_1^2 - x_2^2}{r_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(b): 令 $r_2 = \infty$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\lambda}{4\pi r_1 r_3} \left(\frac{x_1^2}{r_1^4} + \frac{x_3^2}{r_3^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{r_1^2 - x_1^2}} \end{aligned}$$

(c):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Q}{4\pi r_1^2} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{r_1^4} r_3^2 + \frac{r_1^2 - x_1^2 - x_2^2}{r_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi r_1^2} \left(\frac{r_1^2 r_3^2 + r_1^2 x_3^2}{r_1^4} + \frac{x_3^2}{r_1^2 r_3^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\xrightarrow{r_1 \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi \sqrt{a^2 - x_3^2}} \end{aligned}$$

2.10.13 一个质量为 m , 带电为 q 的粒子, 从与一个无限大接地导体平板距离为 d 处由静止开始释放. 求这个粒子碰击到板的时间为多少?

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2m} \\
 v \frac{dv}{dx} &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2 m} \\
 \frac{v^2}{2} &= -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x m} + C_1 \\
 v &= \sqrt{-\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 x m} + C_1} \\
 v &= \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d m} - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 x m}} \\
 t &= \int_0^d \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d m} - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 x m}} dx \\
 &= \frac{\pi\sqrt{2\pi\epsilon_0 m d^3}}{q}
 \end{aligned}$$

2.10.14 两个无限大接地导体平板平行放置. 一个点电荷 q 位于原点, 其中一个位于 $z = -a$, 另一个位于 $z = b$. 求出作用在 q 上的力.

由电像法可得下方电像位于 $-2n(a+b)$, $-2a-2n(a+b)$ 上方电像位于 $-2n(a+b)$, $-2b-2n(a+b)$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[2n(a+b)]^2} + \frac{1}{[2a+2n(a+b)]^2} - \frac{1}{[2n(a+b)]^2} - \frac{1}{[2b+2n(a+b)]^2} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[2a+2n(a+b)]^2} - \frac{1}{[2b+2n(a+b)]^2}
 \end{aligned}$$

2.10.15 两条长直线, 载有均匀分布异号电荷, 电荷线密度为 $\pm\lambda$. 两直线分别放置在一个长导体柱的两边. 导体柱半径为 R , 带电线距导体柱轴线的距离为 a . 求出 r 点处的电势

$$U(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \sin n\phi$$

导体柱为等势体, 取其表面电势为零:

$$U(R, \phi) = 0$$

同时, 在 $r = a$ 处存在两条线电荷, 其电势在无导体情况下可展开为傅里叶级数:

$$U_0(r, \phi) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi}{r^2 + a^2 + 2ar \cos \phi}$$

在 $r > R$ 区域展开为

$$U_0(r, \phi) = -\frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sin n\phi$$

为满足导体边界条件, 修正解应为

$$U(r, \phi) = -\frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^n - \left(\frac{R^2}{ar}\right)^n \right] \sin n\phi$$

柱外区域 $r > R$ 的电势为

$$U(r, \phi) = -\frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^n - \left(\frac{R^2}{ar}\right)^n \right] \sin n\phi$$

2.10.16 一个半径为 a 的导体球, 电势为 U_0 。一个半径为 $b(b > a)$ 的薄球壳包围着导体球, 在球壳上分布有电荷面密度 $\sigma(\theta) = k \cos \theta$ 。

(a) 求出 $r > b$, $a < r < b$ 区域内的电势。

(b) 求出导体球表面上的诱导电荷面密度 σ 。

(c) 这个体系的总电荷为多少?

(a):

$a < r < b$:

$$U(r, \theta) = (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

$r > b$:

$$U(r, \theta) = (A'_l r^l + B'_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

$$U(r, \theta) = B'_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$$

由边界条件可得:

$$U_0 = (A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

$$(A_l b^l + B_l b^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) = B'_l b^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$$

$$A_l b^l + B_l b^{-(l+1)} = B'_l b^{-(l+1)}$$

$$A_l b^{2l+1} + B_l = B'_l$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)}{\partial r} + \epsilon_0 \frac{\partial B'_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)}{\partial r}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 [A_l l b^{l-1} - (l+1) B_l b^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) - (l+1) \epsilon_0 B'_l b^{-(l+2)} P_l(\cos \theta)$$

$$\sigma = -\epsilon_0 [A_l l b^{l-1} - (l+1) B_l b^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) - (l+1) \epsilon_0 (A_l b^l + B_l b^{-(l+1)}) b^{-1} P_l(\cos \theta)$$

$$\sigma = -\epsilon_0 [A_l l b^{l-1} - (l+1) A_l b^{l-1}] P_l(\cos \theta)$$

$$\sigma = \epsilon_0 A_l b^{l-1} P_l(\cos \theta)$$

$$\frac{k}{\epsilon_0} = A_1$$

$$\begin{aligned}
U_0 &= (A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \\
U_0 &= B_0 a^{-(0+1)} \\
aU_0 &= B_0 \\
B_1 &= -\frac{ka^3}{\varepsilon_0} \\
B'_0 &= A_0 b^1 + B_0 \\
B'_0 &= aU_0 \\
B'_1 &= A_1 b^3 + B_1 \\
B'_1 &= \frac{k}{\varepsilon_0} b^3 - \frac{k}{\varepsilon_0} a^3
\end{aligned}$$

$a < r < b$:

$$\begin{aligned}
U &= B_0 r^{-1} P_0(\cos \theta) + (A_1 r^1 + B_1 r^{-2}) P_1(\cos \theta) \\
U &= \frac{aU_0}{r} + \left(\frac{kr}{\varepsilon_0} - \frac{ka^3}{\varepsilon_0 r^2} \right) \cos \theta
\end{aligned}$$

$r > b$:

$$U = aU_0 r^{-1} + \left(\frac{k}{\varepsilon_0} b^3 - \frac{k}{\varepsilon_0} a^3 \right) r^{-2} \cos \theta$$

2.10.17 一个半径为 R 的无限长柱壳上半壳载有均匀分布的电荷, 电荷面密度为 σ_0 , 下半壳载有均匀分布的电荷面密度为 $-\sigma_0$ 的电荷求出柱壳内外的电势。

柱壳内:

$$\begin{aligned}
U(r, \phi) &= (C_m s^{-m} + D_m s^m) (E_m \cos m\phi + F_m \sin m\phi) \\
U(r, \phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m s^m \cos m\phi
\end{aligned}$$

柱壳外:

$$U(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} D'_m s^{-m} \cos m\phi$$

由连续性可得:

$$\begin{aligned}
D_m R^m \cos m\phi &= D'_m R^{-m} \cos m\phi \\
D_m R^{2m} &= D'_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial s} \\
\sigma(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} -\varepsilon_0 \frac{\partial D'_m s^{-m} \cos m\phi - D_n s^m \cos m\phi}{\partial s} \\
\sigma(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} -\varepsilon_0 (-m D'_m s^{-m-1} \cos m\phi - m D_m s^{m-1} \cos m\phi) \\
\sigma(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} -\varepsilon_0 (-m D_m R^{2m} R^{-m-1} \cos m\phi - m D_m R^{m-1} \cos m\phi) \\
\sigma(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} 2\varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \cos m\phi \\
\int_0^\pi \sigma(\phi) 2\varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \cos m\phi \, d\phi &= \int_0^\pi 2^2 \varepsilon_0^2 m^2 D_m^2 R^{2m-2} \cos^2 m\phi \, d\phi \\
2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma(\phi) \cos m\phi \, d\phi &= \int_0^\pi 2\varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \cos^2 m\phi \, d\phi \\
2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_0}{m} \, d \sin m\phi &= \int_0^\pi 2\varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \cos^2 m\phi \, d\phi
\end{aligned}$$

m 为奇数时:

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_0}{m} \, d \sin m\phi &= \int_0^\pi 2\varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \cos^2 m\phi \, d\phi \\
2 \frac{\sigma_0}{m} &= \pi \varepsilon_0 m D_m R^{m-1} \\
D_m &= \frac{2\sigma_0}{\pi \varepsilon_0 R^{m-1} m^2}
\end{aligned}$$