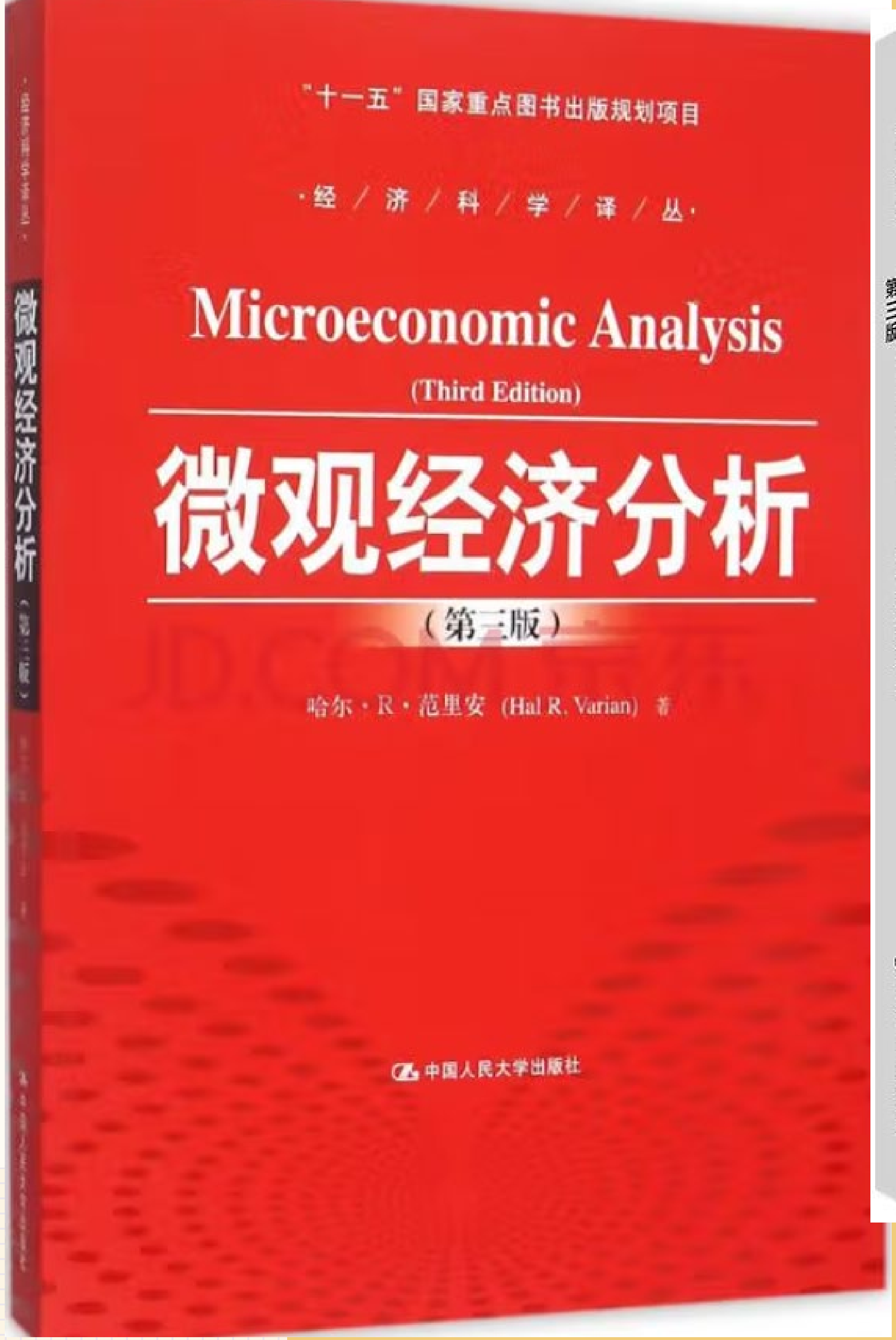
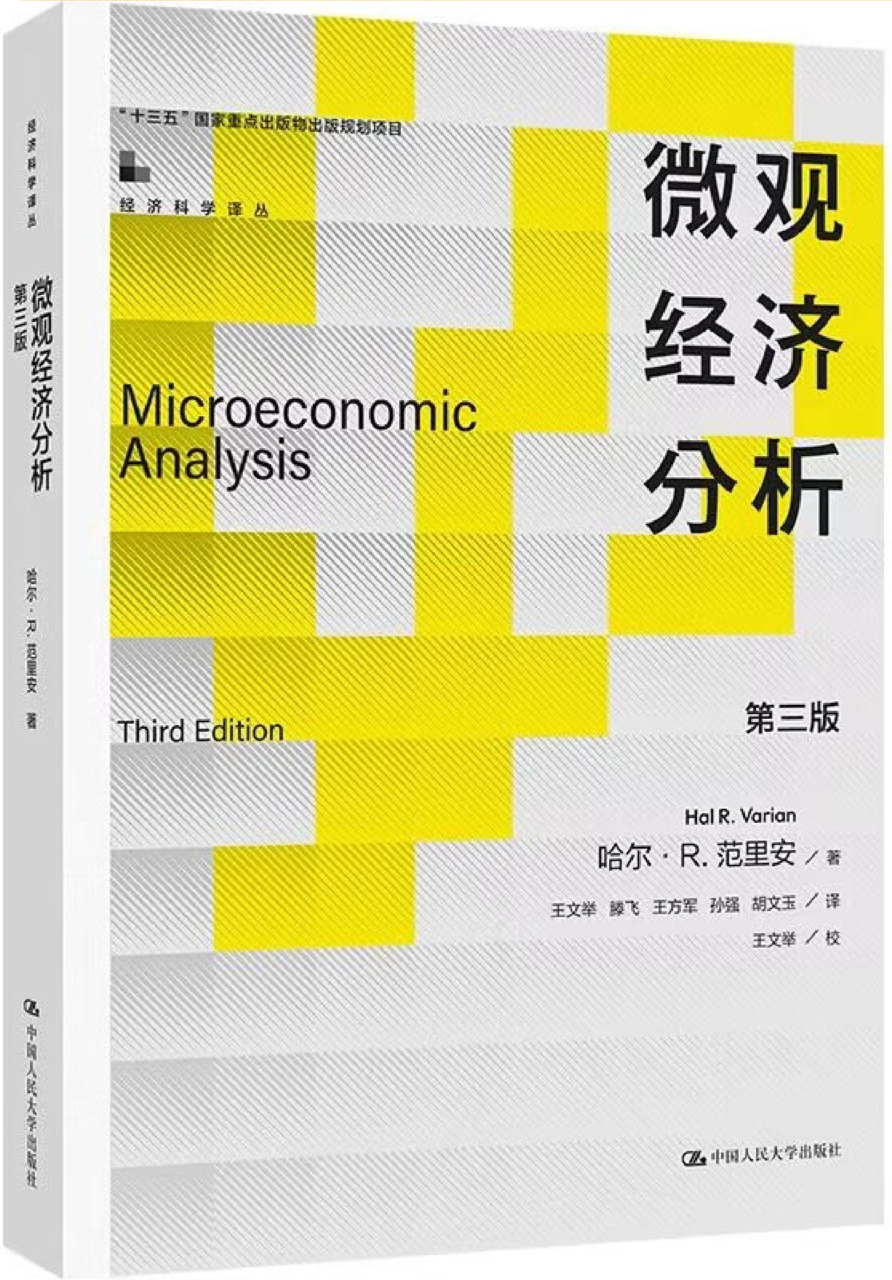
中国传媒大学
经济与管理学院
SCHOOL OF ECONOMICS AND MANAGEMENT

Advanced Microeconomics

高级微观经济学

中国传媒大学经济与管理学院.

池建宇
chijianyu@163.com


微观经济学（高级教程）
第 三 版
Microeconomic Analysis
Third Edition
〔美〕哈尔·瓦里安 著
HAL R. VARIAN
国外经济学教材库
The Treasure House of Foreign Economics Textbook
经济科学出版社
孔夫子旧書网
www.kongfz.com

"十一五"国家重点图书出版规划项目
·经/济/科/学/译/丛·
Microeconomic Analysis
(Third Edition)
微观经济分析
（第三版）
哈尔·R·范里安（Hal R. Varian）著
中国人民大学出版社

"十三五"国家重点出版物出版规划项目
经济科学译丛
微观经济分析
Microeconomic Analysis
Third Edition
第三版
Hal R. Varian
哈尔·R. 范里安／著
王文举 滕飞 王方军 孙强 胡文玉／译
王文举／校
中国人民大学出版社

1

CHAPTER

TECHNOLOGY

1.2 技术的说明

- n种物品用作投入和/或产出。厂商用y_j^i个单位的物品j作为投入，生产出y_j^o个给物品作为产出，那么物品j的**净产出**为

$$y_j = y_j^o - y_j^i$$

- **生产计划**：各种物品净产出的一览表。可以用n维实数集R^n中的一个向量$\mathbf{y}$来表示一个生产计划。若第j个物品为净投入，则$y_j<0$.若第j个物品为净产出，则$y_j>0$.

1.2 技术的说明

生产可能性集

- 所有技术上可行的生产计划的集合成为厂商的生产可能性集 (production possibilities set)，用R^n中的一个子集Y表示
- （不是点与点之间的映射，而是集合）

- 1亩地 $\longrightarrow$ 150斤小麦
- 2亩地 $\longrightarrow$ 150斤小麦
- 3亩地 $\longrightarrow$ 150斤小麦

1.2 技术的说明

- 用R^n中的向量z描述约束
- 受约束的(restricted)或短期(short-run)生产可能性集：$Y(z)$.它由所有与约束水平z相一致的可行净产出束组成。
- 若要素短期固定在 $\bar{y}_n$ ，那么 $Y\left(\bar{y}_n\right)=\{y \ in \ Y{:}y_n=\bar{y}_n\}$
- 要素能不能变是长短期划分的依据
- 例：欧洲发现新大陆前可视为短期，发现后可视为长期
- 约束：资源、技术、供应链等

案例：芯片战争

- 美国的遏制战略核心体现在2022年通过的《芯片与科学法案》，目的是改变当下半导体产业的布局，将中赶触高端的研发领域，将中国的位置固定在低端制造和服务上。
- 对美国来说，战略的关键将是压制中国的芯片研发能力，从而固化当下的产业分工，确立美国及其盟友在半导体高端领域的绝对优势。这一任务的关键就是限制相关企业向中国出口产品、设备和技术。
- 虽然美国政府在持续的推进计划，但仍然遭到美国企业的抵制，美国企业和日本韩国中国台湾的同行一起，阻挠美国战略的实施。
- 中美之间仍然存在广大的中间地带，这些中间地带处于利益需要都不愿选边站。中国庞大的市场、相对齐全的产业链以及代工行业的比较优势，仍然是重量级筹码。
- 中国还掌握着芯片制造所需的关键矿物，商务部2023年7月3日宣布从8月1日起对镓、锗及30多种相关物项实施出口管制。镓、锗对于半导体、导弹系统和太阳能电池的生产至关重要。

1.2 技术的说明

- 净产出束$(y, -\mathbf{x})$,$\mathbf{x}$是可生产y单位产出的投入向量。
- 生产150斤小麦至少需要1亩地（最低的投入）
- 投入要求集（input requirement set）：$V(y)=\{\mathrm{x}\ in\ R_+^n:(y,-\mathrm{x})\ is\ in\ Y\}$
- 是至少可以生产y单位产出的所有投入束的集合
- 等产量线（isoquant）:只能生产出y，不能生产出y'

$$Q(y)=\{\mathrm{x}\ in\ R_+^n:\ \mathrm{x}\ is\ in\ V(y)\ and\ \mathrm{x}\ is\ not\ in\ V(y')\ for\ y'>y\}$$

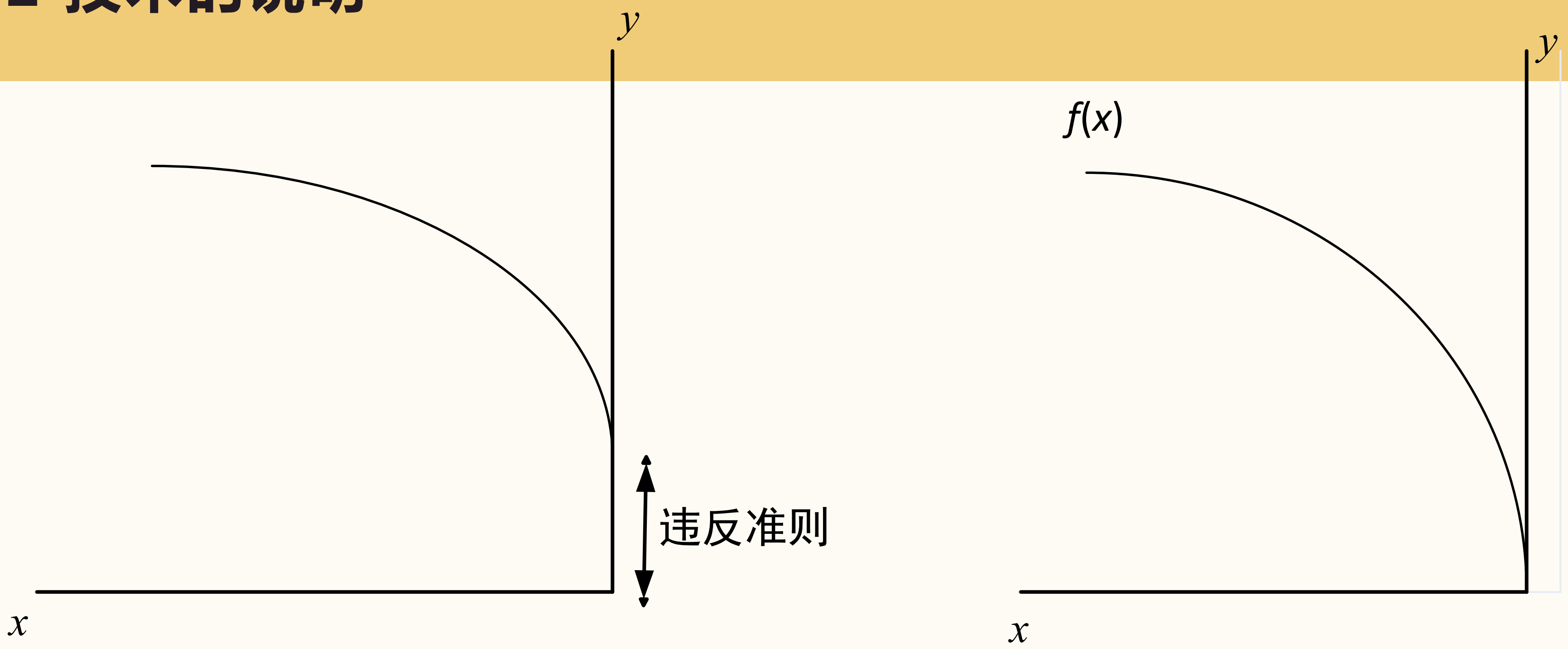
- 等产量线给出刚好生产出y单位产出的投入束

1.2 技术的说明

- 对集合边界的描述
- 生产计划：$(y,\text{-}l,\text{-}k)$
- 短期生产可能性集：$Y\left(\bar{k}\right)=\left\{(y,\,-l,\,-k)\ \ in\ Y{:}k=\bar{k}\right\}$
- 生产函数：

$$f(\mathrm{x})=\{y\ in\ R{:}y\ is\ the\ \ \mathrm{max}imum\ output\ associated\ with\ \ -\mathrm{x}\ \ in\ Y\}$$

1.2 技术的说明



- 转换函数（transformation function）T:

$$R^n \rightarrow R \ where \ T(y) = 0 \ if \ and \ only \ if \ y \ is \ efficient$$

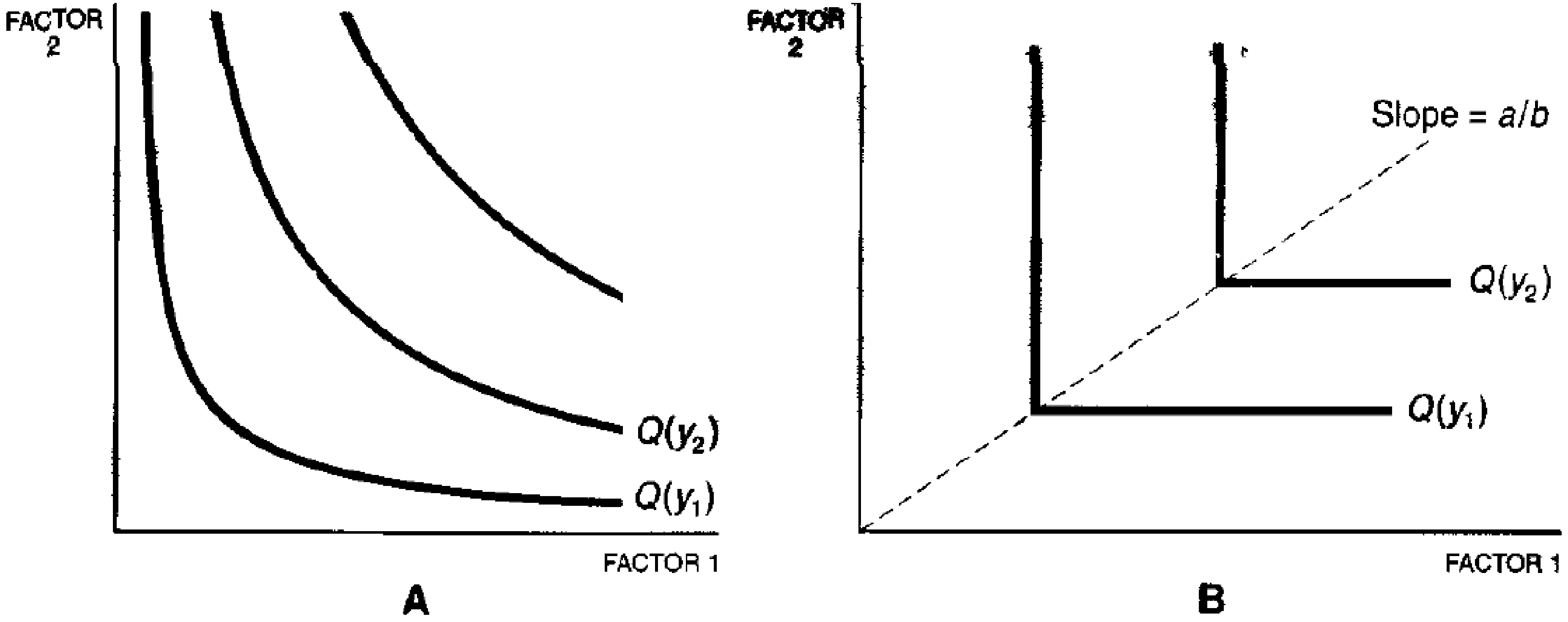
- 不能大于0（天下没有免费的午餐）

1.2 技术的说明：常用的技术

- 柯布-道格拉斯技术 $f(x_1,x_2)=Ax_1^a x_2^b$
- 生产可能性集 $Y=\{(y,-x_1,-x_2)\ in\ R^3: y\leqslant x_1^a x_2^b\}$
- 投入要求集 $V(y)=\{(x_1,x_2)\ in\ R_+^2: y\leqslant x_1^a x_2^b\}$
- 等产量线 $Q(y)=\{(x_1,x_2)\ in\ R_+^2: y=x_1^a x_2^b\}$
- 短期生产可能性集 $Y(z)=\{(y,-x_1,-x_2)\ in\ R^3: y\leqslant x_1^a x_2^b, x_2=z\}$
- 转换函数 $T(y,x_1,x_2)=y-x_1^a x_2^b$
- 最常用的技术 $f(L,K)=AL^a K^b$

1.2 技术的说明：常用的技术

- 里昂惕夫技术 $f(x_1, x_2) = \min(ax_1, bx_2)$ 短板理论



Cobb-Douglas and Leontief technologies. Panel *A* depicts the general shape of a Cobb-Douglas technology, and panel *B* depicts the general shape of a Leontief technology.

1.3 活动分析

- 活动分析：用数学的方法描述生产计划

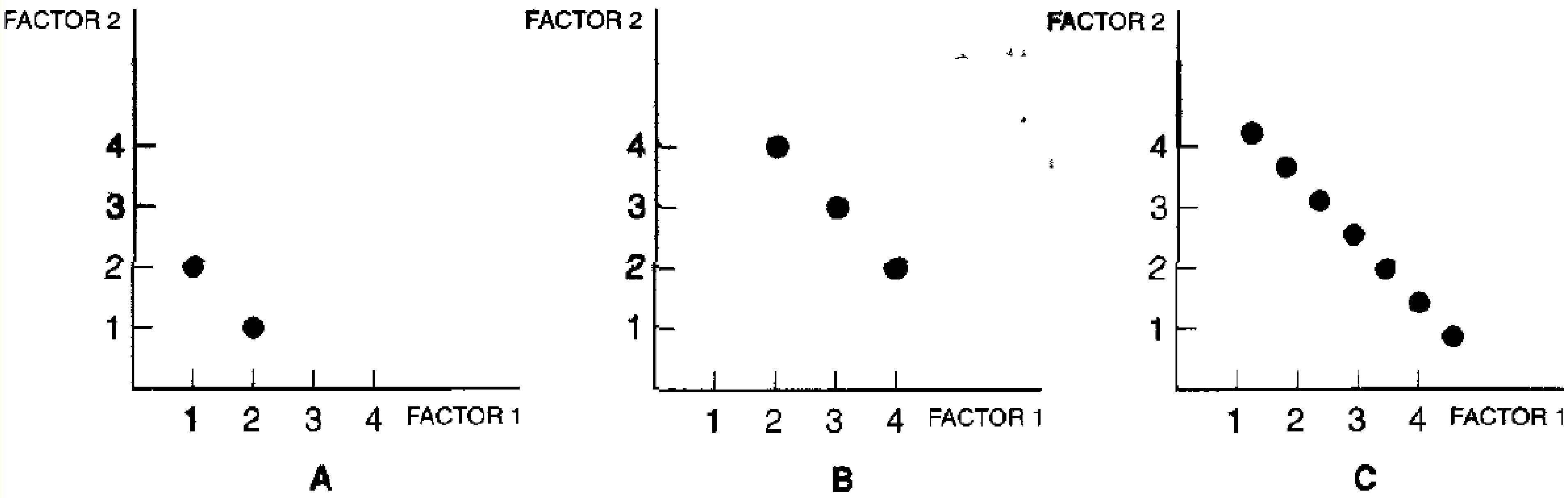
技术	要素1	要素2	产出
技术A	1劳力	2土地	1小麦
技术B	2劳力	1土地	1小麦

- $Y=\{(1,-1,-2),(1,-2,-1)\}$
- $V(1)=\{(1,2),(2,1)\}$
- 要使产出$1\rightarrow 100$，每种技术复制100次都可达到目的
- $V(y)=\{(y,2y),(2y,y)\}$

1.3 活动分析

- 也可以两种技术各复制50次，即使用两种技术的混合方式

$$V(y)=\{(y_A+2y_B, y_B+2y_A): y=y_A+y_B\} \qquad V(2)=\{(2,4)(4,2)(3,3)\}$$



Input requirement sets. Panel A depicts $V(1)$, panel B depicts $V(2)$, and panel C depicts $V(y)$ for a larger value of y.

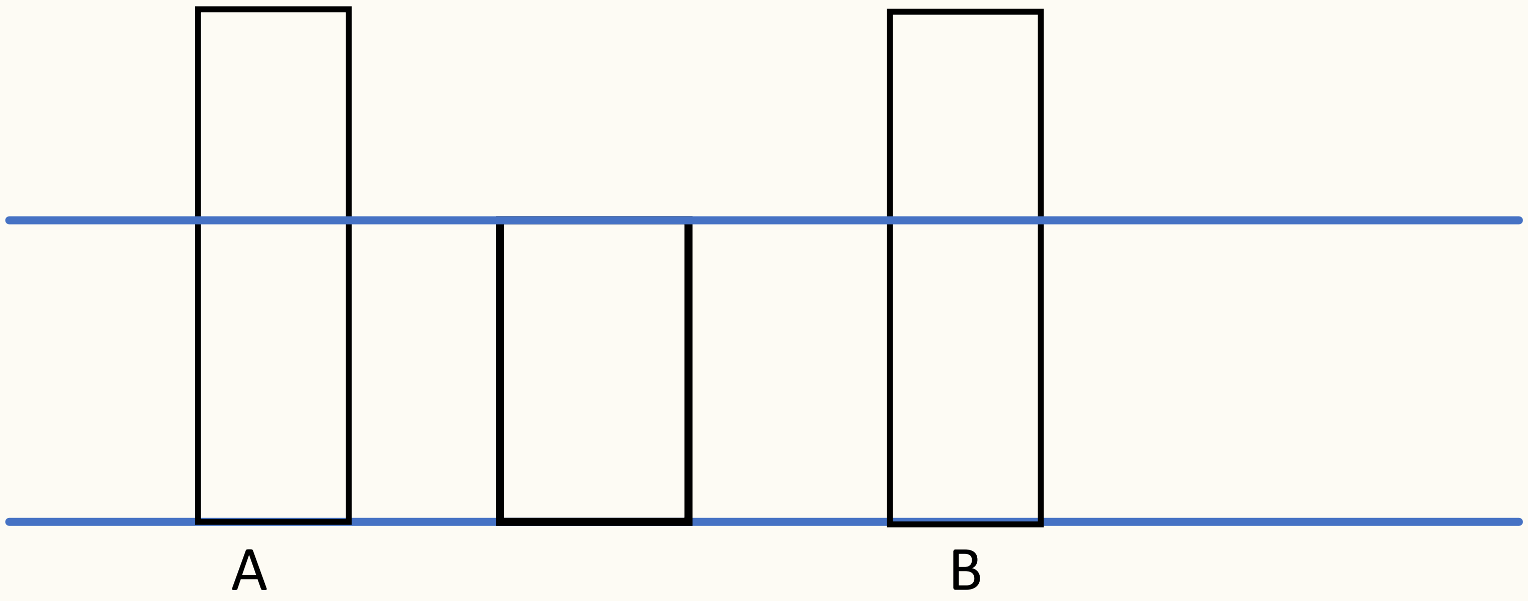
1.10 规模报酬

◆简单复制的函数形式 $f(\mathbf{x})$ $f(t\mathbf{x})=tf(\mathbf{x})$

◆Constant returns to scale (投入不受限制)

◆Decreasing returns to scale（短板） （一般为土地，技术）(短期约束)

$$f(t\mathbf{x})\leqslant tf(\mathbf{x})$$



1.10 规模报酬

- Increasing returns to scale $f(t\mathbf{x}) \geqslant tf(\mathbf{x})$
- 规模弹性 ： 所有投入都增加1%，产出会增加的百分比

$$e(\mathrm{x}) = \frac{\triangle f(t\mathrm{x})/f(t\mathrm{x})}{\triangle t/t} = \frac{\mathrm{d}f(t\mathrm{x})}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{t}{f(t\mathrm{x})}\Bigg|_{t=1} = \frac{\mathrm{d}\ln f(t\mathrm{x})}{\mathrm{d}\ln t}$$

- 柯布-道格拉斯技术: $f(\mathrm{x}) = x_1^a x_2^b$

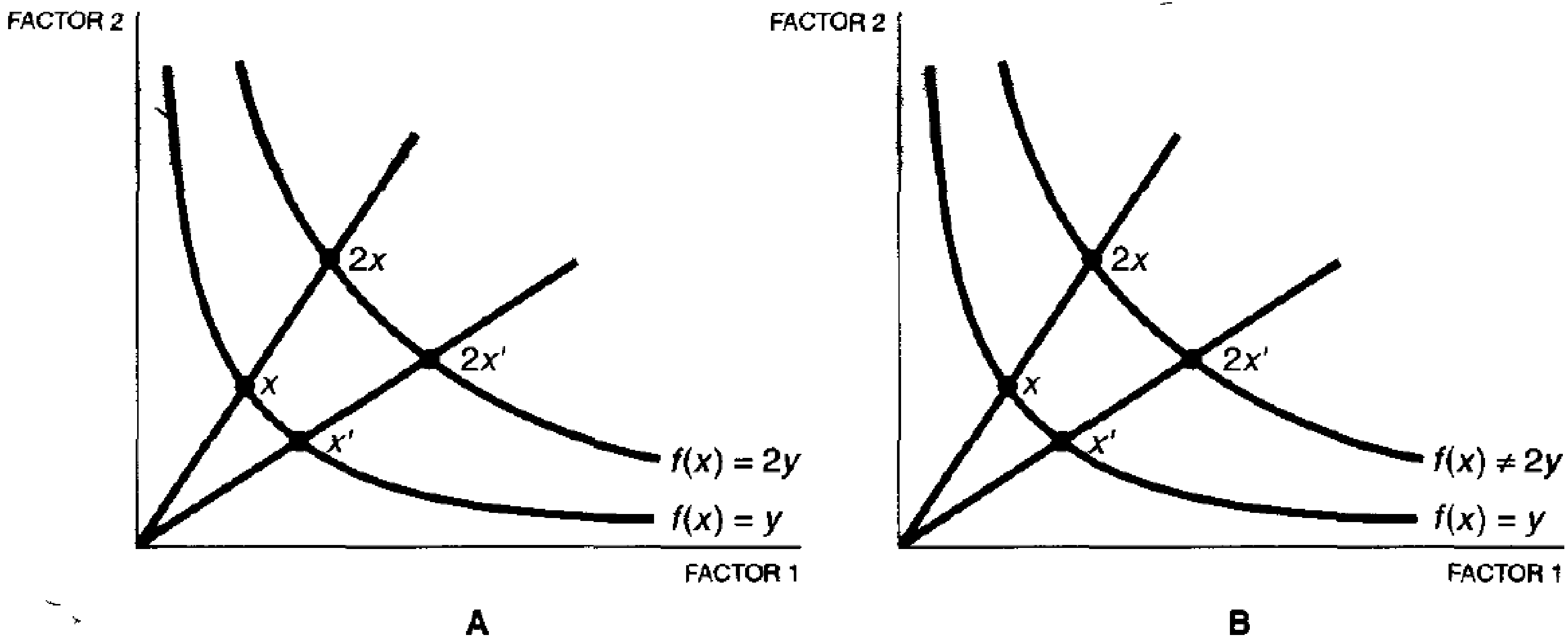
$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^a (tx_2)^b = t^{a+b} x_1^a x_2^b = t^{a+b} f(x_1, x_2)$$

$$e(\mathrm{x}) = a + b$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(tx_1)^a (tx_2)^b}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t^{a+b} x_1^a x_2^b}{\mathrm{d}t} = (a+b) t^{a+b-1} x_1^a x_2^b}$$

1.11齐次技术和位似技术

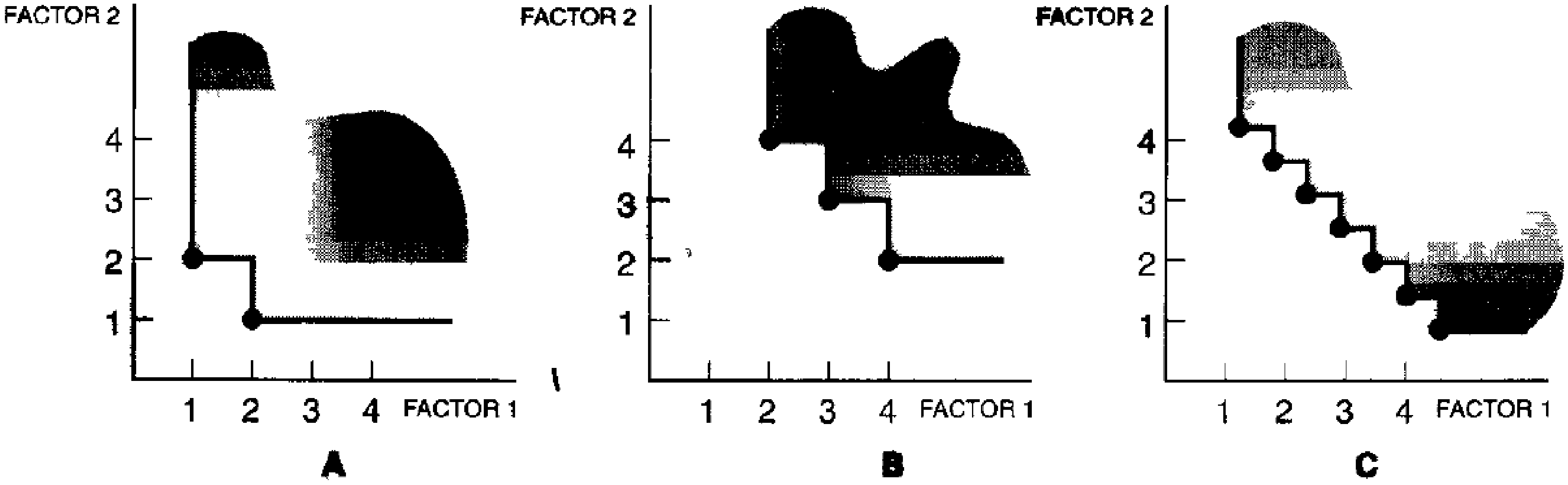
- $f(tx)=tf(x)$ 一次齐次（规模报酬不变）
- $f(tx)=t^k f(x)$ k次齐次
  - $k>1$ 规模报酬递增
  - $k<1$ 规模报酬递减
  - $k=0$ 0次齐次
- 位似函数（homothetic function）是一个一次齐次函数的单调变换。函数$f(x)$是位似的，当且仅当它可以表示成$f(x)=g(h(x)).h(\cdot)$是一次 齐次的，$g(\cdot)$是单调函数



Homogeneous and homothetic functions. Panel *A* depicts a function that is homogeneous of degree 1. If $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x}'$ can both produce y units of output, then $2\mathbf{x}$ and $2\mathbf{x}'$ can both produce $2y$ units of output. Panel *B* depicts a homothetic function. If $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x}'$ produce the *same* level of output, y, then $2\mathbf{x}$ and $2\mathbf{x}'$ can produce the *same* level of output, but not necessarily $2y$.

1.4单调技术

- 单调性（monotonicity）：如果x在$V(y)$中，并且$x'\geq x$，那么x'也在$V(y)$中.要想产出更多，投入也需更多。



Monotonicity. Here are the same three input requirement sets if we also assume monotonicity.

1.5凸技术

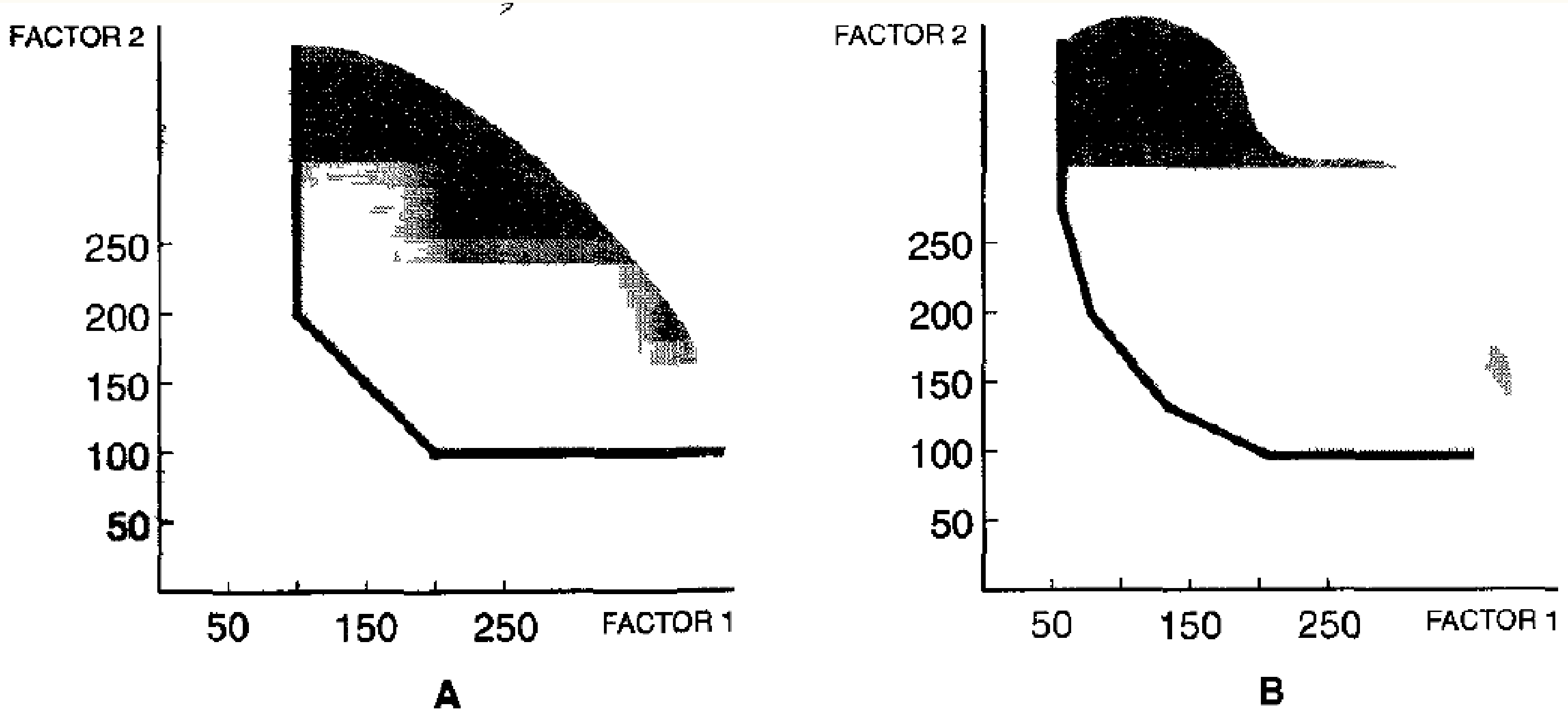
- (1, 2) (2, 1) 在V(1)中
- t $1-t$
- 复制100次，（100,200）和（200,100）在V(100)中
- 若t=0.25
- $0.25(100,200)+0.75(200,100)=(175,125)$ 在V(100)中

$$t(100,200)+(1-t)(200,100)=(100t+200(1-t),200t+(1-t)100)$$

在V(100)中，$0\leqslant t\leqslant 1$

1.5凸技术

- **Convexity**. *If* $\mathbf{x}$ *and* $\mathbf{x}'$ *are in* $V(y)$*, then* $t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{x}'$ *is in* $V(y)$ *for all* $0\le t\le 1$*. that is* $V(y)$ *is a* ***convex set***.



Convex input requirement sets. If $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x}'$ can produce y units of output, then any weighted average $t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{x}'$ can also produce y units of output. Panel *A* depicts a convex input requirement set with two underlying activities; panel *B* depicts a convex input requirement set with many activities.

1.5凸技术

- 如果假定y和y'都在Y中，那么对$0 \le t \le 1$而言， $ty+(1-t)y'$也在Y中，即Y是一个凸集
- 凸生产集意味着凸投入要求集
- 凸投入要求集等价于拟凹生产函数。$V(y)$是凸集，当且仅当$f(\mathbf{x})$是一个拟凹函数（quasiconcave function）
- 证明: $V(y)=\{\mathbf{x}:f(\mathbf{x})\geq y\}$ 恰恰是$f(\mathbf{x})$的上等值集（upper contour set）. 根据拟凹函数的定义，它当且仅当有一个凸的上等值集。

1.6正则技术

- **Regular.** *$V(y)$ is a closed, nonempty set for all $y \geq 0$.*
- $V(y)$非空要求总存在可想到的方法来生产处任意给定生产的产出。任何产出都是可实现的。企业有事做。
- $V(y)$是闭集的含义：若有一序列投入束($\mathbf{x}^i$)，它们都可生产y单位产出，那么这一序列收敛于某个投入束$\mathbf{x}^0$

$$\left.\begin{matrix} 1000\text{亩} \\ 900\text{亩} \\ \vdots \end{matrix}\right\} \rightarrow 100\text{斤小麦}$$

收敛于1亩。若无此假定，则不能实现最优。

- 公理性假定：凸，闭，非空，单调，规模报酬

1.8技术替代率

- 土地，人之间的替代
- 替代率决定了资产的价格

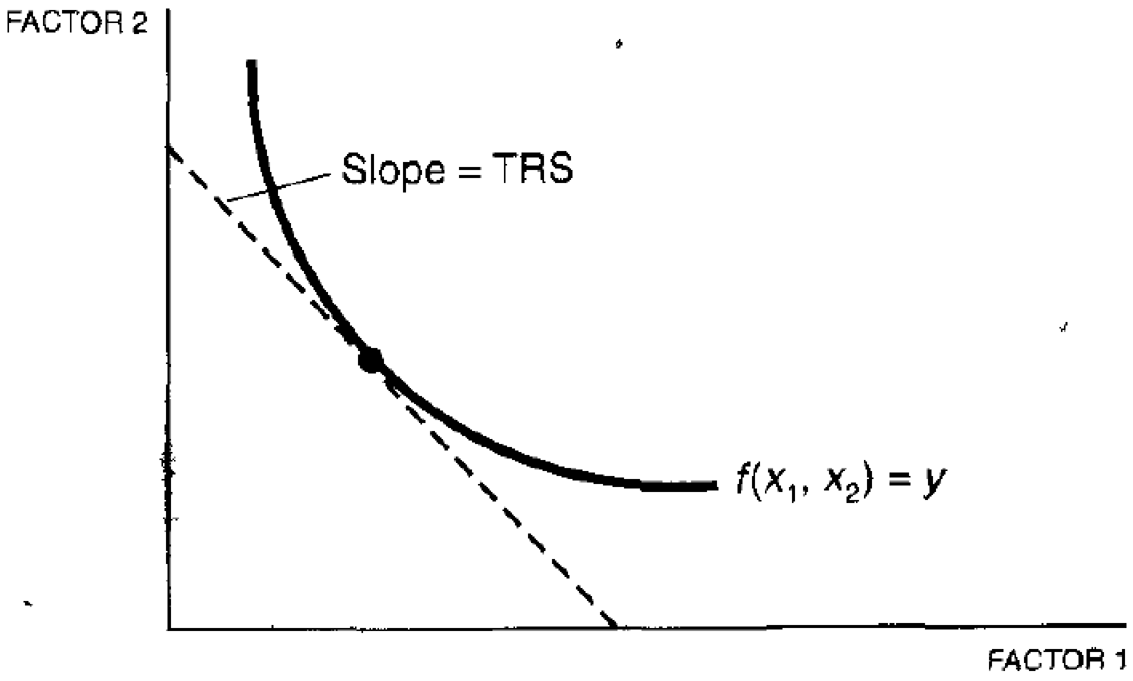
$$y = f(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2),$$

取全微分

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}$$

- 给定产出的情况下，技术替代率反映了两种要素的替代性有多强



The technical rate of substitution. The technical rate of substitution measures how one of the inputs must adjust in order to keep output constant when another input changes.

- 资本与人的替代反映了工业化程度
- 若替代率大，则说明对某种要素过度依赖，对供应商的谈判能力就很差
- 人与资本的替代性（大学生与资本）

1.8技术替代率

- 用隐函数的方法来计算技术替代率

$$f(x_1, x_2(x_1)) \equiv y \text{对} x_1 \textbf{求导数}$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(x_1^*)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial x_2(x_1^*)}{\partial x_1} = -\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_1}{\partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_2}$$

- 自己计算柯布-道格拉斯技术的TRS

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$$

$$\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2} = -\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1}$$

- 经济含义更明确

1.9替代弹性

- 技术替代率是等产量线的斜率。替代弹性（elasticity of substitution）则度量等产量线的曲率
- 它反映随着等产量线斜率的变动，要素投入比率如何变动
- 两个技术什么时候一致？
- 答：σ一样

$$\sigma=\frac{\mathrm{d}\left(x_2/x_1\right)/\left(x_2/x_1\right)}{\mathrm{d}TRS/TRS}$$

$$=\frac{TRS\,\mathrm{d}\left(x_2/x_1\right)}{\left(x_2/x_1\right)\mathrm{d}TRS}=\frac{\mathrm{d}\ln\left(x_2/x_1\right)}{\mathrm{d}\ln|TRS|}$$

1.9替代弹性

- 柯布-道格拉斯生产函数

$$TRS = -\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \sigma = 1$$

- CES（constant elasticity of substitution）生产函数

$$y = A(a_1 x_1^{\rho} + a_2 x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$$

可简化为 $y = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$

- ρ=1，线性生产函数 $y=x_1+x_2$

- ρ=0，柯-道生产函数

$$f'(x_1) = \frac{1}{\rho}(x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot \rho x_1^{\rho-1}$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{\rho}(x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot \rho x_2^{\rho-1}$$

$$TRS = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{f'(x_1)}{f'(x_2)} = -\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1}$$

若$\rho \to 0$ $TRS = -\frac{x_2}{x_1}$

这就是C-D函数的TRS

1.9替代弹性

ρ=-∞ ，**里昂惕夫函数**

ρ=-∝时，$TRS = -\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-\infty} = -\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\infty}$

若$x_2 > x_1$,则TRS是-∞

若$x_2 < x_1$,则TRS=0

这恰恰是Leontif技术的特征

- 因此对于CES生产函数来说

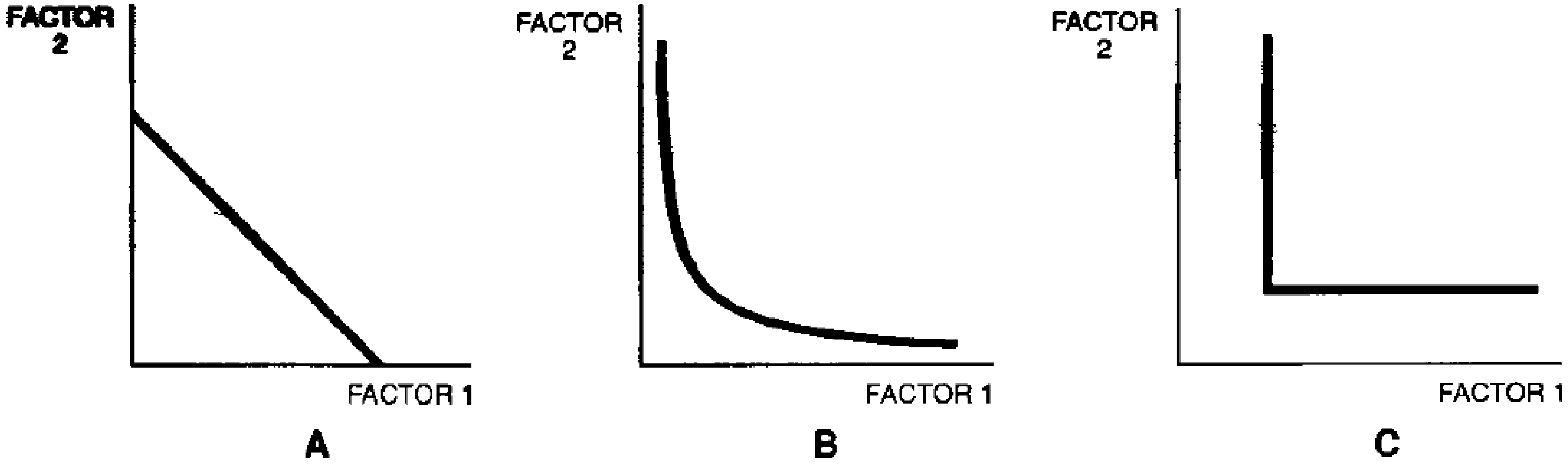
可得到

$$TRS = -\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1}$$

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

因此，CES是最具一般性的函数

1.9替代弹性



The CES production function. The CES production function takes on a variety of shapes depending on the value of the parameter ρ. Panel A depicts the case where $\rho = 1$, panel B the case where $\rho = 0$, and panel C the case where $\rho = -\infty$.

复习

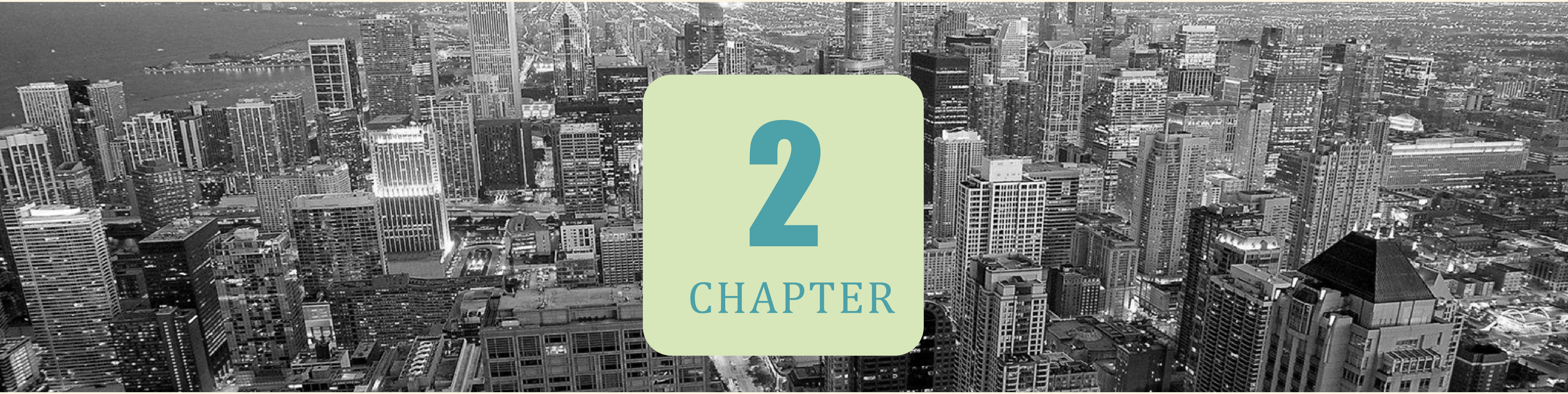
我们希望从最一般意义上描述投入-产出关系

- 投入要求集　约束的投入要求集
- 等产量线
- 转换函数
- 单调性（多投入多产出）
- 凸性（技术组合可行）

- 正则性（一定能到达彼岸）
- 连续的生产过程
- 规模报酬 $\begin{cases} \uparrow \\ - \\ \downarrow \end{cases}$
- 技术替代率
- 替代弹性

复习

- 我们希望从最一般意义上描述投入-产出关系
- 投入要求集　约束的投入要求集
- 等产量线
- 转换函数
- 单调性（多投入多产出）　凸性（技术组合可行）
- 正则性（一定能到达彼岸）　连续的生产过程
- 规模报酬



2

CHAPTER

PROFIT MAXIMIZATION

- 我们把收益写作n中活动水平的函数$R(a_1,\ldots,a_n)$，把成本作为同样n种活动水平的函数$C(a_1,\ldots,a_n)$
- 这里的活动包括慈善、广告等各种活动。收益包括各种收益，如声誉等非货币收益
- 厂商选择活动$(a_1,\ldots,a_n)$以便最大化净收益$R(a_1,\ldots,a_n)$-$C(a_1,\ldots,a_n)$

$$\max_{a_1,\cdots,a_n} R(a_{1,\ldots,}a_n) - C(a_{1,\ldots,}a_n)$$

- 厂商面临两类约束
  - 技术性约束。有关生产计划可行性的约束（第1章内容）
  - 市场约束。其他当事人的行为对厂商影响的约束（**p,w**）
- 厂商若是价格接受者，**p**和**w**完全外生。则是竞争性厂商（完全竞争的市场）。若厂商参与**w**的制定，则是买方垄断，若厂商参与**p**的制定，则是卖方垄断。

2.1利润最大化

- 若p代表厂商投入和产出的价格向量，则利润最大化问题是

$$\pi(\mathbf{p}) = \max \mathbf{p}\mathbf{y}$$

$$such\ that\ \ \mathbf{y}\ \ is\ in\ Y$$

- 定义短期利润函数，即受约束的利润函数

$$\pi(\mathbf{p}, \mathbf{z}) = \max \mathbf{p}\mathbf{y}$$

$$such\ that\ \ \mathbf{y}\ \ is\ in\ Y(\mathbf{z})$$

- 若只生产一种产出，则利润函数，$\mathbf{w}$是要素价格向量，$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$为投入向量

$$\pi(p, \mathbf{w}) = \max pf(\mathbf{x}) - \mathbf{w}\mathbf{x}$$

2.1利润最大化

- 我们也可以定义一个成本函数

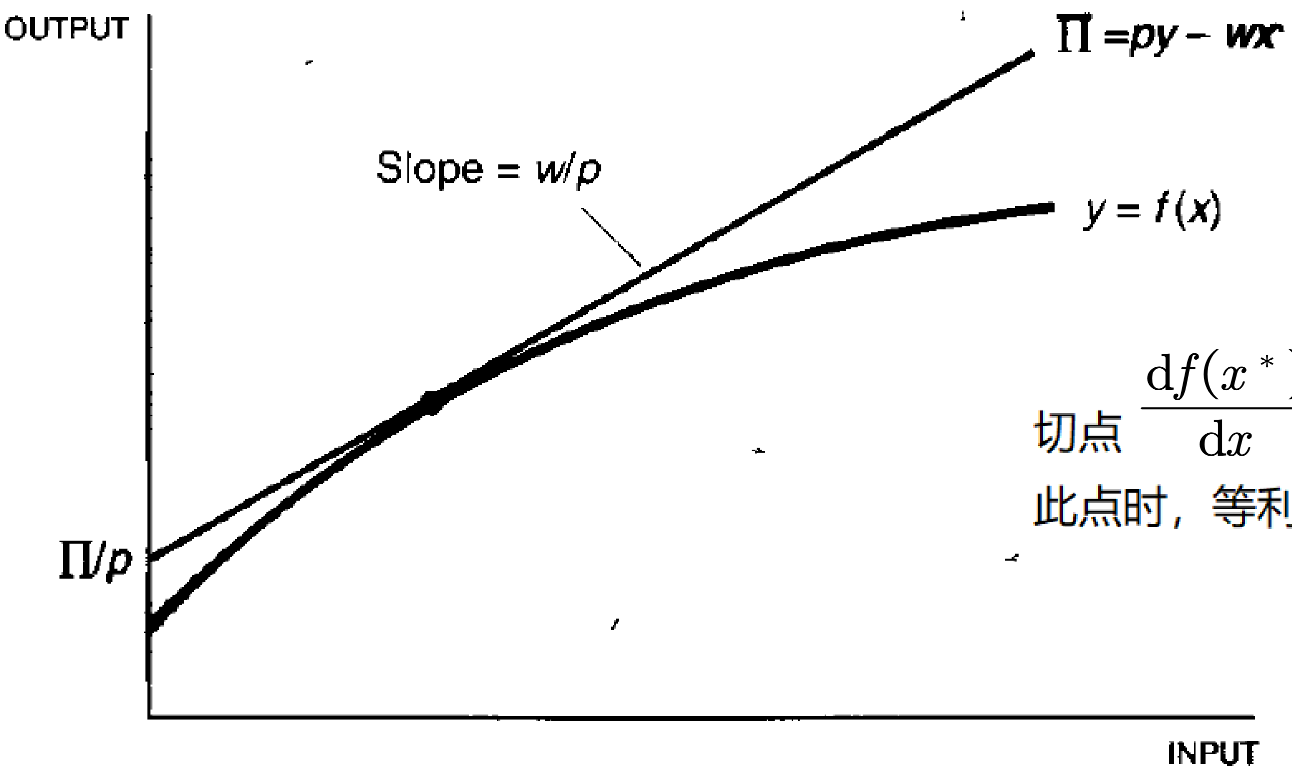
$$c(\mathbf{w},y)=\min \mathbf{wx}$$
$$such\ that\ \ \mathbf{x}\ \ in\ V(y)$$

- 利润最大化和成本最小化实际上是一个问题（对偶性，第6章）
- 把y写成$f(\mathbf{x})$的意思是技术约束不用再考虑了。p和$\mathbf{w}$外生意味着要素市场和产品市场都是竞争性的。
- 单个产出的利润最大化一阶条件

$$p\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i}=w_i,\quad i=1,\cdots,n$$

- 含义：每种要素的边际产品价值必须等于它的价格

2.1利润最大化



(等利润线)

$$y = \frac{\Pi}{p} + \frac{w}{p}x$$

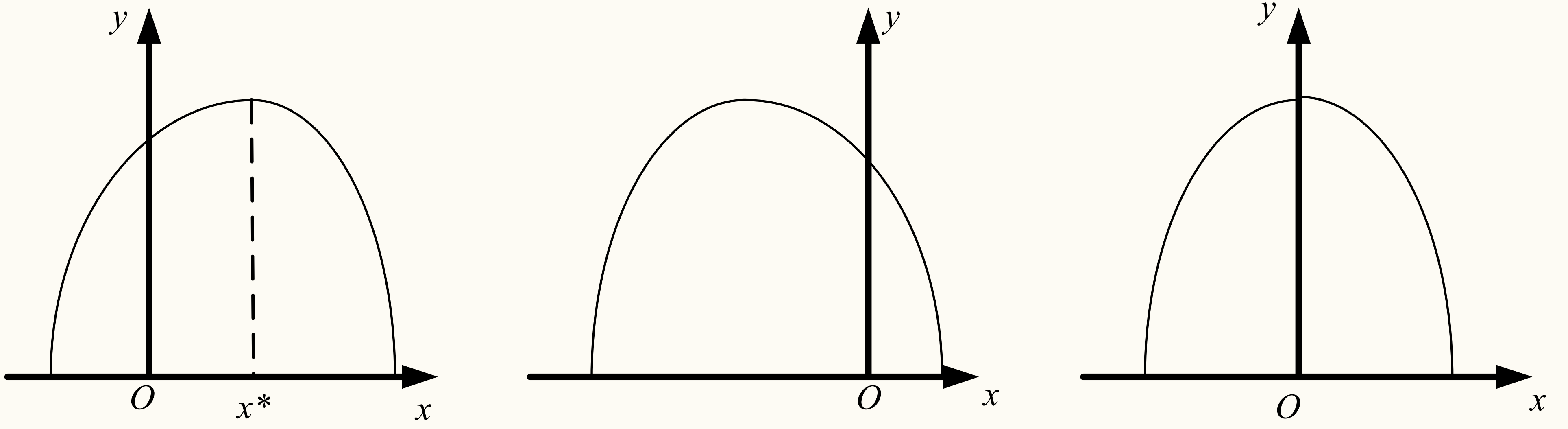
切点 $\dfrac{\mathrm{d}f(x^*)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{w}{p}$

此点时，等利润线纵截距最大

Profit maximization. The profit-maximizing amount of input occurs where the slope of the isoprofit line equals the slope of the production function.

2.2困难

- 一阶条件不足以保证利润的最大。需二阶条件



$$x_i = 0\text{时，} \; pf'(x_i) - w_i \leqslant 0 \qquad (boundary\ solution)$$

$$x_i > 0\text{时，} \; pf'(x_i) - w_i = 0 \qquad (interior\ solution)$$

- 要素的使用量为正，Kuhn-Trcker Theorem

2.2困难

- 利润最大化的二阶条件：$\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x^*)}{\mathrm{d}x^2} \leqslant 0$
- 这意味着利润最大化点上，生产函数必须位于$x*$点切线的下方，即它是局部凹的。

- 困难：
  - 一阶条件暗含的约束：生产技术连续、可微。这不符合现实。（产出是离散的）
  - 极大值利润有可能不存在（规模报酬不变时）

$$pf(x^*) - wx^* = \pi^* > 0$$

$$pf(tx^*) - wtx^* = t[pf(x^*) - wx^*] = t\pi^* > \pi^*$$

产业不受进出限制（free entry）.直至达到零利润。

2.3需求函数和供给函数的特性　2.4使用一阶条件的比较静态

- 我们考察假如p,w发生变动，导致**产品供给和要素需求**的变动（可交叉）
- 把价格当自变量所给出投入和产出的最优选择的函数称为**要素需求函数和产出供给函数。**
- 考虑一种产出时w变动对x的影响
- 厂商面临的问题是 $\max\limits_{x} pf(x)-wx$
- 一阶条件 $pf'(x(p,w))-w\equiv 0$
- 二阶条件 $pf''(x(p,w))\leqslant 0$

2.4使用一阶条件的比较静态

- 注意一阶条件是p和w的恒等式.x(p,w)对所有的p和w都要满足利润最大化的一阶条件。
- 对w进行微分 $pf''(x(p,w))\dfrac{\mathrm{d}x(p,w)}{\mathrm{d}w}-1\equiv 0$
- 得到 $\dfrac{\mathrm{d}x(p,w)}{\mathrm{d}w}\equiv\dfrac{1}{pf''(x(p,w))}$
- 根据利润最大化的二阶条件，可知$\mathrm{d}x(p,w)/\mathrm{d}w$为负，即要素需求曲线向下倾斜

2.4使用一阶条件的比较静态

- 两种投入。把p正规化为$p=1$
- 一阶条件 $$\frac{\partial f(x_1(w_1,w_2),x_2(w_1,w_2))}{\partial x_1}\equiv w_1$$

$$\frac{\partial f(x_1(w_1,w_2),x_2(w_1,w_2))}{\partial x_2}\equiv w_2$$

- 对w_1求导 $$f_{11}\frac{\partial x_1}{\partial w_1}+f_{12}\frac{\partial x_2}{\partial w_1}=1$$

$$f_{21}\frac{\partial x_1}{\partial w_1}+f_{22}\frac{\partial x_2}{\partial w_1}=0$$

- 对w_2求导 $$f_{11}\frac{\partial x_1}{\partial w_2}+f_{12}\frac{\partial x_2}{\partial w_2}=0$$

$$f_{21}\frac{\partial x_1}{\partial w_2}+f_{22}\frac{\partial x_2}{\partial w_2}=1$$

- 写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1}{\partial w_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial w_1} & \frac{\partial x_2}{\partial w_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4使用一阶条件的比较静态

- 左乘逆矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1}{\partial w_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial w_1} & \frac{\partial x_2}{\partial w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

- 二阶导决定了极大值还是极小值。利润最大化的二阶条件是替代矩阵式负半定的

- 结论：
  - 对角线元素肯定为负（自价格效应为负）（负定矩阵的对角项必须为负）
  - 对称阵 $\frac{\partial x_i}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j}{\partial w_i}$

（交叉价格效应相等）（纯数学结论）

例：钢，汽油

2.4使用一阶条件的比较静态

- 考虑任意数目的投入。同样将p正规化为1
- 梯度阵，每一项求导数，再对w求导数
- 一阶条件 $Df(\mathbf{x}(\mathbf{w}))-\mathbf{w}\equiv 0$
- 二阶条件$D^2f(\mathbf{x}(\mathbf{w}))D\mathbf{x}(\mathbf{w})-\mathbf{I} \equiv 0D$
- 解方程求替代矩阵$D\mathbf{x}(\mathbf{w}) \equiv [D^2f(\mathbf{x}(\mathbf{w}))]^{-1}$
- $D\mathbf{x}(\mathbf{w})$是负半定的对称阵

2.5使用代数的比较静态

- 经济学家把对一个经济变量如何对其环境的变化做出反应的研究称为"比较静态"。它是从一种静态跳到另一种静态进行比较。比较静态常用于政策研究（基础利率下降多少会使市场资金需求达到合适水平）

- 理性分析
- (i)生产函数
- (ii)比较静态

- 经验分析
- （i）观察到一组企业行为，看是否像理性分析那样的利润最大化
- (ii)已知利润最大化，看显示出企业的特性（技术f(x)）

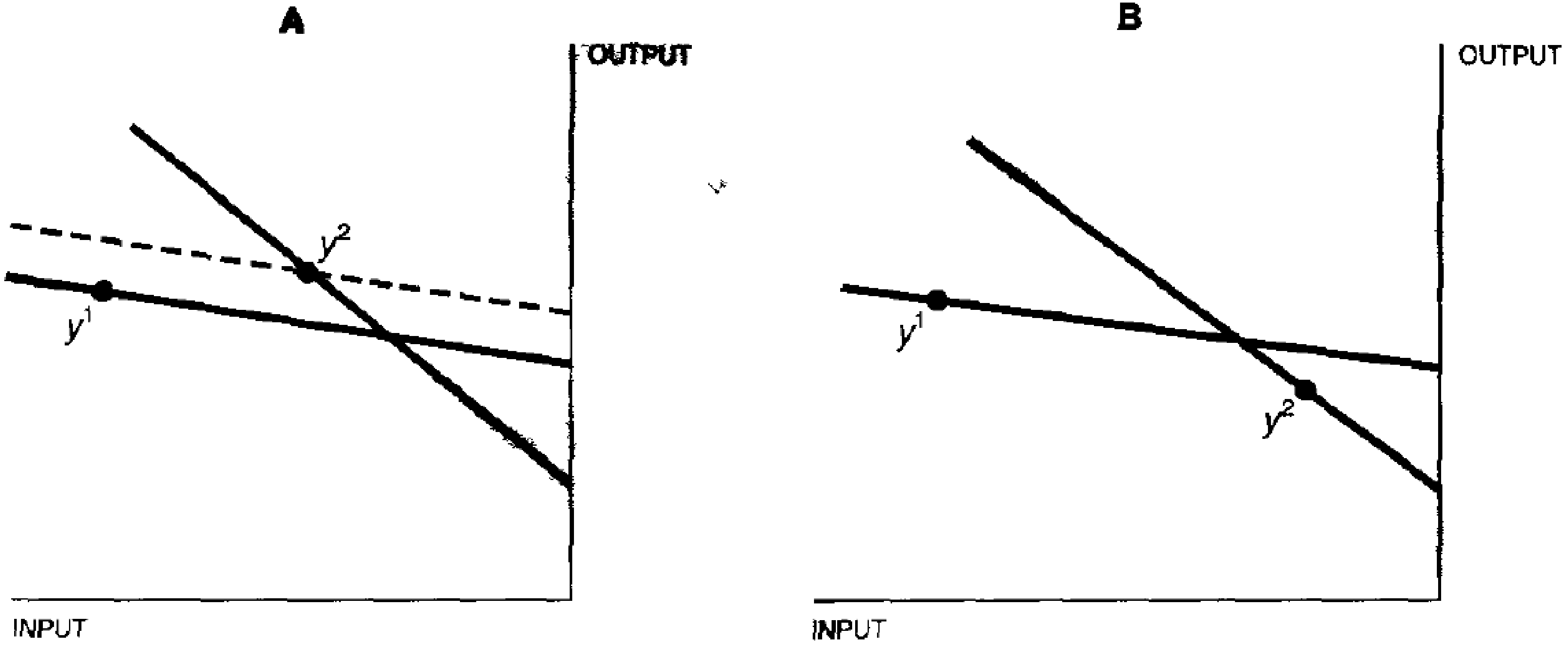
2.5使用代数的比较静态

- 给定价格环境，y^t比其他选择都好。说明是利润最大化。能选y^s而没选y^s。
- 利润最大化的必要条件: $\mathbf{p}^t\mathbf{y}^t \geqslant \mathbf{p}^t\mathbf{y}^s$, for all t and $s=1,2,\cdots,T$
- Weak Axion of Profit Maximization(WAPM)

$$\mathbf{p}^t(\mathbf{y}^t-\mathbf{y}^s)\geqslant 0$$

$$-\mathbf{p}^s(\mathbf{y}^t-\mathbf{y}^s)\geqslant 0$$

- 二式相加 $(\mathbf{p}^t-\mathbf{p}^s)(\mathbf{y}^t-\mathbf{y}^s)\geqslant 0$
- 得到 $\triangle\mathbf{p}\triangle\mathbf{y}\geqslant 0$
- 价格向量与相关联的净产出变动向量的内积是非负的

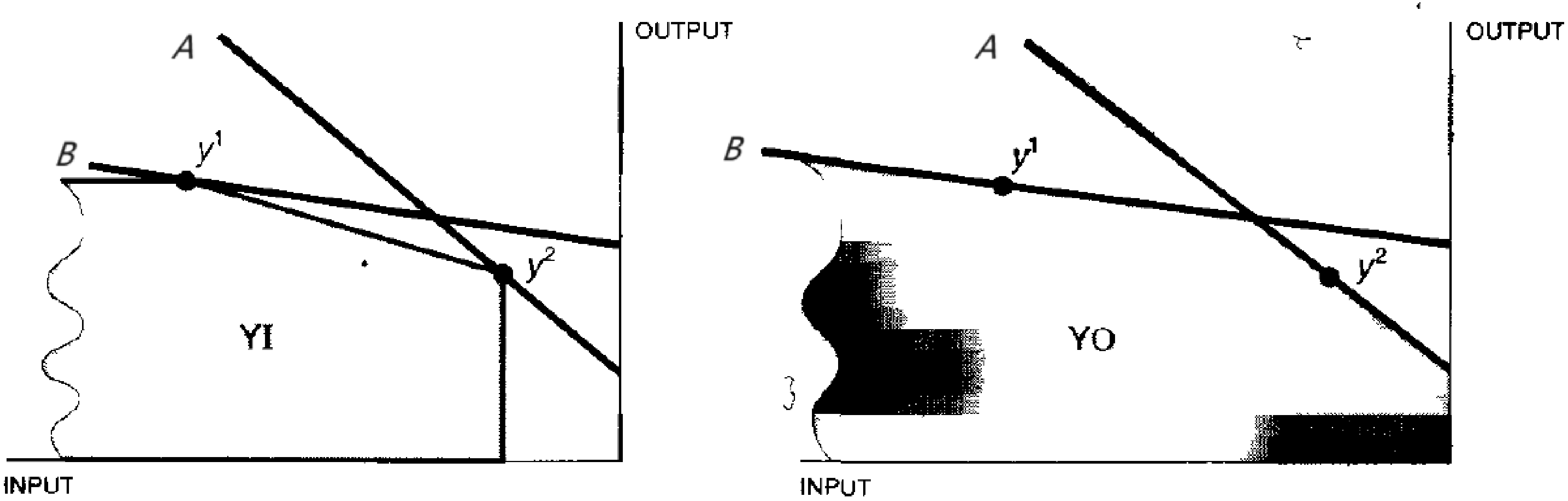


WAPM. Panel *A* shows two observations that violate WAPM, since $\mathbf{p}^1\mathbf{y}^2 > \mathbf{p}^1\mathbf{y}^1$. Panel *B* shows two observations that satisfy WAPM.

- （记得：等利润线截距为 $\dfrac{\Pi}{p}$ ，斜率为 $\dfrac{w}{p}$ ）

2.6寻回性

- 已知是利润最大化的，想知道背后被掩盖的技术$f(x)$是什么。用无限近似的方法，把不可能的排除掉，把所有最可能的找到。两个集合之间找到共同点，就是技术。
- 先找最可能的。如A，B两条线。若生产集Y是凸的且单调的，A和B的连线是可行的。



The sets YI **and** YO. **The set** $\boldsymbol{YI}$ **is** the smallest convex, monotonic set that could be a production set consistent with the data. The set YO is the largest convex, monotonic set that could be a production set consistent with the data.

- 定义内壳

YI = convex, monotonic hall of $\{y^t : t=1,2,\ldots,T\}$

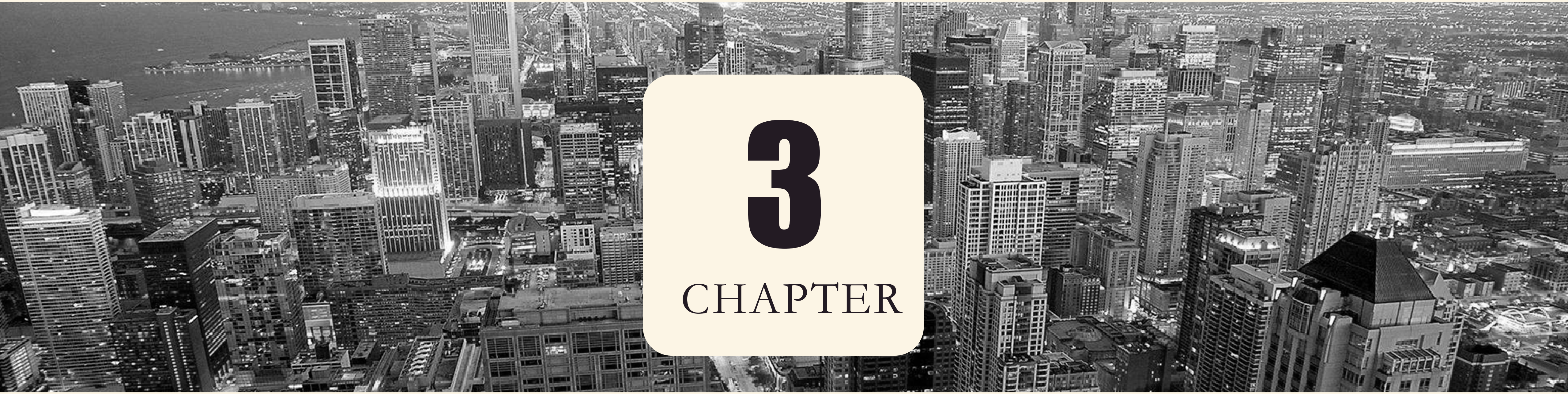
2.6寻回性

- YI集是最小的凸的单调集。它是与数据相一致的生产集。所有点都能产出A和B上的任何一个点的产出。企业不会在内部运行。利润最大化决定了它只能在边界运行。

- 然后把不可能的点排除掉。A和B上面可追求最大利润。但技术上无法选。A和B向上平移的所有点都应排除。剩下的称为外界。

$$YO=\{\mathbf{y}:\mathbf{p}^t\mathbf{y}\leqslant\mathbf{p}^t\mathbf{y}^t\ for\ all\ t=1,\cdots,T\}$$

- 企业不管怎样，技术上顶多做到外界。企业不管怎么松弛，只能做到内界，不能往里，否则不能满足利润最大化。最后找到的是内外界夹的部分。



3
CHAPTER

PROFIT FUNCTION

- 利润函数就是厂商把其作为净产出价格向量的函数的最大利润

$$\pi(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{y}} \mathbf{py}$$

$$\textit{such that } \mathbf{y} \textit{ is in } Y$$

3.1利润函数的特性

- 1.Nondecreasing in output prices, nonincreasing in input prices. If $p_i' \geqslant p_i$ for all outputs and $p_j' \leqslant p_j$ for all inputs, then $\pi(\mathbf{p}') \geqslant \pi(\mathbf{p})$
- 根据利润最大化弱公理， $\mathbf{p}'\mathbf{y}' \geqslant \mathbf{p}'\mathbf{y}$
- 因为对所有 $y_i \geqslant 0, p_i' \geqslant p_i$
- 对所有 $y_i \leqslant 0, p_i' \leqslant p_i$

都有$\mathbf{p}'\mathbf{y} \geqslant \mathbf{p}\mathbf{y}$

- 因此有 $\pi(\mathbf{p}') = \mathbf{p}'\mathbf{y}' \geqslant \mathbf{p}\mathbf{y} = \pi(\mathbf{p})$

3.1利润函数的特性

- 2.Homogeneous of degree 1 in p. $\pi(t\mathbf{p}) = t\pi(\mathbf{p})$ *for all* $t \geqslant 0$
- 整个价格体系调整，则利润也做相同的调整。这并不意味着热爱通货膨胀。这里的p是真实价格，相对价格，剔除了通货膨胀，用物品来作对应的价格。
- 令y是p时的利润最大化净产出向量。对在 Y中所有的$\mathbf{y}'$有 $\mathbf{py} \geqslant \mathbf{py}'$ 。 对所有在 Y中的$\mathbf{y}'$, $t\mathbf{py} \geqslant t\mathbf{py}'$ 。因此y在价格为$t\mathbf{p}$时也可使利润最大化。
- $\pi(t\mathbf{p}) = t\mathbf{py} = t\pi(\mathbf{p})$。$\mathbf{p}$环境下的最优选择也是$t\mathbf{p}$环境下的最优选择。

3.1利润函数的特性

- 3.Convex in p. Let $\mathbf{p}''=t\mathbf{p}+(1-t)\mathbf{p}'\ for\ 0\leqslant t\leqslant 1$. Then

  $$\pi(\mathbf{p}'')\leqslant t\pi(\mathbf{p})+(1-t)\pi(\mathbf{p}')$$

- 净供给是价格的0次齐次函数**y**(*t***p**)=**y**(**p**)

- p′′是p和p′的凸组合 $\mathbf{p}''=t\mathbf{p}+(1-t)\mathbf{p}'$

$$\pi(\mathbf{p}'')=\mathbf{p}''\mathbf{y}''=[t\mathbf{p}+(1-t)\mathbf{p}']\mathbf{y}''=t\mathbf{p}\mathbf{y}''+(1-t)\mathbf{p}'\mathbf{y}''$$

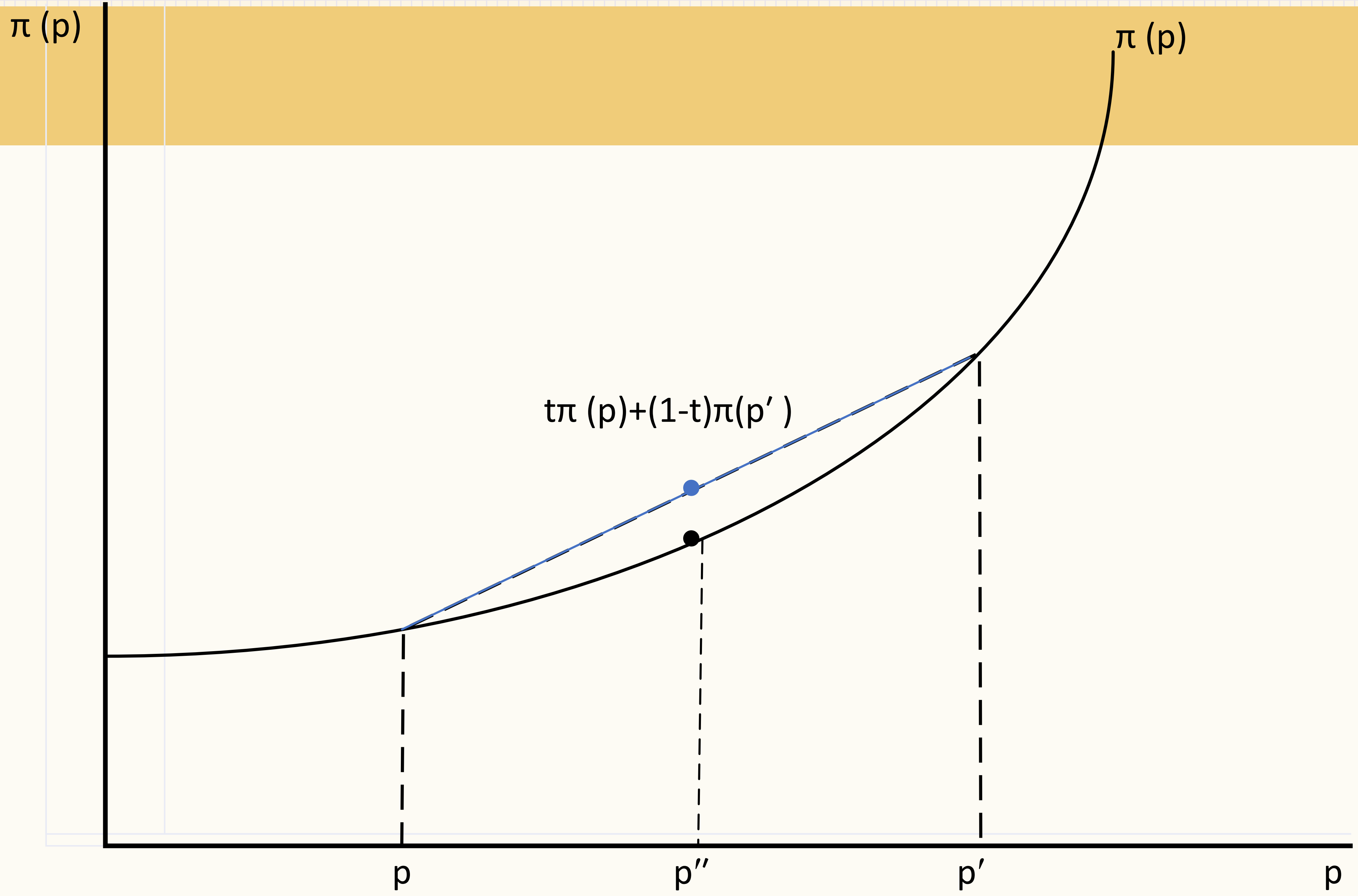
根据利润最大化定义有

$$t\mathbf{p}\mathbf{y}''\leqslant t\mathbf{p}\mathbf{y}=t\pi(\mathbf{p})$$

$$(1-t)\mathbf{p}'\mathbf{y}''\leqslant(1-t)\mathbf{p}'\mathbf{y}'=(1-t)\pi(\mathbf{p}')$$

两式相加 $\pi(\mathbf{p}'')\leqslant t\pi(\mathbf{p})+(1-t)\pi(\mathbf{p}')$

价格凸组合的利润小于利润的凸组合


π (p)
π (p)
tπ (p)+(1-t)π(p′)
p
p′′
p′
p

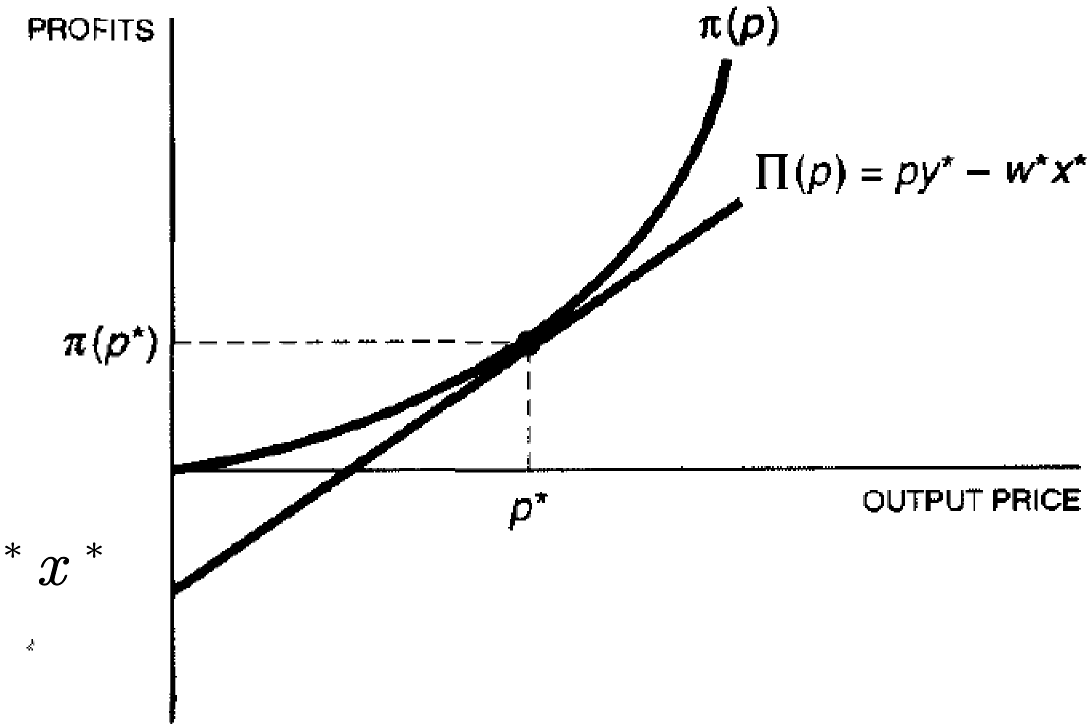
3.1利润函数的特性

- 应用：价格波动。
  - 企业有2个选择：(i)勤快选择。每一个价格给出一个反应。(ii)懒惰选择。取个中值（凸组合）
  - 若是勤快选择，π(p)和π(p′)概率是q和1-q。期望利润为$q\pi(p)+(1-q)\pi(p')$
  - 懒惰选择利润是$\pi(qp+(1-q)p')$
  - 所以懒惰的利润低

3.1利润函数的特性

- 应用：中国农民是否理性
- 随价格波动而进行产量选择恰恰是理性的
- 把握价格信息应由政府做（期货），大的农产品经销商（拼多多，淘宝，p和q确定），给农民持续的订单。
- 我国缺乏的是市场机制组织模式而不应关心农民是否理性。

- 考虑在要素价格保持不变时，利润与单个产出物品价格之间的关系。
- 价格向量为p*时，利润为 $\pi(p^*)=p^*y^*-w^*x^*$
- 若p上升，但厂商仍然使用使用生产计划(y*,x*)



The profit function. As the output price increases, the profit function increases at an increasing rate.

企业这种惰性行为产生的利润必然在 $\Pi(p)=py^*-w^*x^*$ 这条直线上，它被称为passive profit function.显然每个价格追求最优的利润，一定不会少于维持产出不变的懒惰行为的利润。即π(p)一定位于Π(p)上方。任何p均有此结论。从而π(p)一定为凸函数

3.1利润函数的特性

- 4.Continuous in **p**. The function $\pi(\mathbf{p})$ is continuous, at least when $\pi(\mathbf{p})$ is well-defined and $p_i > 0$ for $i = 1, \ldots, n$.
- 利润对价格高度敏感。对市场经济的赞美
- 总结：凸性说明变比不变好。勤快利润更高。连续性说明企业对价格很敏感，很勤快。

3.2来自利润函数的供给和需求函数

- 如果给出净供给函数y(p)，很容易计算利润函数, π(p)=py(p)
- 但如果我们已知利润函数，怎样找到净供给函数?
- Hotelling's Lemma. Let $y_i(\mathbf{p})$ be the firm's net supply function for good i.

  then $y_i(\mathbf{p}) = \dfrac{\partial \pi(\mathbf{p})}{\partial p_i}$, assuming that the derivative exists and that $p_i>0$
- 假设y*是价格为p*时的利润最大化净产出向量。定义函数
- $$g(\mathbf{p}) = \pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y}^*$$
  $$\mathbf{p} \to \mathbf{p}^* \text{时，} g(\mathbf{p}) \to 0$$
- 函数g在p*时达到最小值0

3.2来自利润函数的供给和需求函数 3.3包络定理

- g最小的一阶条件

$$\frac{\partial g(\mathbf{p}^*)}{\partial p_i}=\frac{\partial \pi(\mathbf{p}^*)}{\partial p_i}-y_i^*=0$$

- 这里的证明只是图3.1所描述关系的一种代数说明
- 霍特林引理实际上是包络定理的一个特例

- 目标函数依赖于参数a：
- 值函数 $M(a)=\max_x f(x,a)$
- 要知道M(a）怎样随a的变动而变动

$$\frac{\mathrm{d}M(a)}{\mathrm{d}a}=\left.\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right|_{x=x(a)}$$

- 这个式子表明，M对a的导数由f对a求偏导，并保持x固定在最优选择上给出

3.3包络定理

- 包络定理的含义：在已优化过的结果（π(p)）中，已包含了所有各种力量的均衡。当把未优化的一些结果代回去获得的结论是一样的。把后面未处理过的函数求导数然后把一方的最优结果代进去和我直接把结果进行处理，后果一样。因为我们得到的利润函数各方力量都达到了最优。投入、产出都是最优的。因此它对价格环境的应对时得到的结果和你正向得到结果是一样的。都是最优的。

$$\frac{\mathrm{d}M(a)}{\mathrm{d}a}=\underbrace{\frac{\partial f(x(a),a)}{\partial x}}_{=0}\cdot\frac{\partial x(a)}{\partial a}+\frac{\partial f(x(a),a)}{\partial a}$$

3.3包络定理

- 包络定理在单投入、但产出的利润最大化问题的应用

$$\pi(p,w)=\max_{x} pf(x)-wx$$

- $$\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial p}=f(x)\big|_{x=x(p,w)}=f(x(p,w))$$ （产品的供给函数）
- $$\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial w}=-x\big|_{x=x(p,w)}=-x(p,w)$$ （要素的需求函数）

3.4使用利润函数的比较静态

- 利润函数是价格的单调函数

$$y(p_i)=\frac{\partial\pi(p)}{\partial p_i}\geqslant 0,\quad i:output$$

$$y(p_j)=\frac{\partial\pi(p)}{\partial p_j}\leqslant 0,\quad j:input$$

- 利润函数对价格是一次齐次的。说明净供给函数对价格是0次齐次的。

- 凸性 $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\pi}{\partial p_1^2} & \dfrac{\partial^2\pi}{\partial p_1\partial p_2}\\ \dfrac{\partial^2\pi}{\partial p_1\partial p_2} & \dfrac{\partial^2\pi}{\partial p_2^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial p_2}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial p_2}\end{pmatrix}$

- 替代矩阵为正定

- 净供给函数是利润函数导数这个事实使我们能方便的在利润函数特性和净供给函数特性间移动

3.4使用利润函数的比较静态

- The LeChatelier principle
- 考察企业供给行为的短期和长期反应。在长期中，有更多的要素可以调整。因此企业对价格变动的反应更大。
- 短期利润函数$\pi_S(p,z)$,z是短期被固定的某种要素。
- z可理解为关键技术、土地面积。长期来说，如果z的价格高到严重影响生产的程度，必定会出现替代技术

3.4使用利润函数的比较静态

- 长期利润函数$\pi_L(p)=\pi_S(p,z(p))$。令p^*为某个给出的产出价格，$z^*=z(p^*)$为价格p^*时对z要素的最优长期需求

$$h(p)=\pi_L(p)-\pi_S(p,z^*)=\pi_S(p,z(p))-\pi_S(p,z^*)\geq 0$$

- 价格p^*时，长期利润与短期利润之差为0.即$h(p)$在$p= p^*$时取最小值。根据霍特林引理，价格为p^*时，对每种物品的短期和长期净供给相等。
- 根据凸性，$h(p)$的二阶导是非负的
- 使用霍特林引理 $\dfrac{\mathrm{d}y_L(p^*)}{\mathrm{d}p}-\dfrac{\partial y_S(p^*,z^*)}{\partial p}=\dfrac{\partial^2\pi_L(p^*)}{\partial p^2}-\dfrac{\partial^2\pi_S(p^*,z^*)}{\partial p^2}\geq 0$

3.4使用利润函数的比较静态

- 长期对价格的调整幅度更大。只要价格足够高，z在长期肯定会去掉。市场原教旨主义认为，没有东西是买不来的。就是个钱的问题。关键是价格。
- $z^*=z(p^*)$犹太人：所有问题有钱就好了

4 COST MINIMIZATION

4.1成本最小化的微分分析

$$\max_{\mathbf{y}} \mathbf{py} \quad \Longleftrightarrow \quad \min_{x} \mathbf{wx}$$

$$s.t.\ \mathbf{y} \in Y \qquad\qquad s.t.\ f(\mathbf{x}) = y$$

- 使用Lagrange multiplier方法

$$L(\lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{wx} - \lambda(f(\mathbf{x}) - y)$$

$$w_i - \lambda \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \ for\ i = 1, \cdots, n$$

$$f(\mathbf{x}^*) = y$$

- 以第*i*个条件除以第*j*个条件

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\partial f(x^*)/\partial x_i}{\partial f(x^*)/\partial x_j} \quad i, j = 1, \cdots, n$$

- 右边是技术替代率，左边是经济替代率，这实际上是两种生产模式(1)企业（2）市场的互相替代。企业自己做，则需要得到价格信息，管理成本高，但讨价还价成本低。若市场来作则反过来

$$\text{市场} \longleftarrow \quad \longrightarrow \text{企业}$$

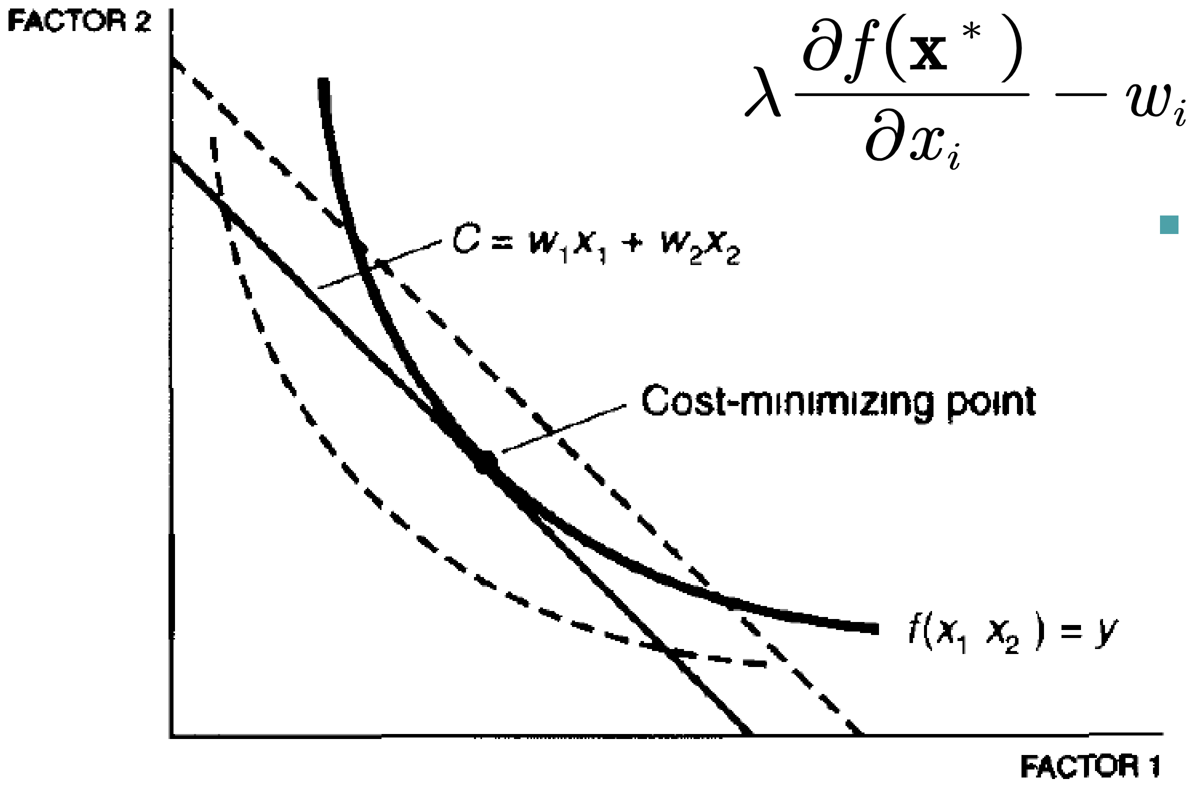
（原教旨市场经济）（计划经济）

4.1成本最小化的微分分析

- 边界情形的处理

$$\lambda \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - w_i \leqslant 0 \ if \ x_i^* = 0$$

$$\lambda \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - w_i = 0 \ if \ x_i^* > 0$$



Cost minimization. At a point that minimizes costs, the isoquant must be tangent to the constant cost line.

- 图4.1表明，在成本最小处的选择处，必须满足一个二阶条件，等产量线必须位于某条等成本线之上。保持成本不变的要素投入的任何变动，即沿等成本线的移动，一定导致产出减少或保持不变。

4.1成本最小化的微分分析

- 我们使用二阶泰勒展开

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2)\approx f(x_1,x_2)+f_1h_1+f_2h_2$$
$$+\frac{1}{2}(f_{11}h_1^2+2f_{12}h_1h_2+f_{22}h_2^2)$$
$$\approx f(x_1,x_2)+(f_1\quad f_2)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{2}(h_1\quad h_2)\begin{pmatrix}f_{11}&f_{12}\\f_{21}&f_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$$

- 要保持成本不变，必须满足

$$w_1h_1+w_2h_2=0$$

- 带入一阶条件 $w_1h_1+w_2h_2=\lambda f_1h_1+\lambda f_2h_2$

$$=\lambda(f_1h_1+f_2h_2)=0$$

- 因此泰勒展开的一阶项为0
- 这样，沿等成本线的任何移动，产出下降的要求可表示为

$$(h_1\quad h_2)\begin{pmatrix}f_{11}&f_{12}\\f_{21}&f_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\leqslant 0$$
$$(f_1\quad f_2)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=0$$

拟凹技术（上等值集为凸集）

解释：在成本最小化点，相切于等成本线的一阶移动意味着产出保持不变。二阶移动意味着产出下降

4.2关于二阶条件更进一步的内容

$$L(\lambda, x_1, x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda[f(x_1, x_2) - y]$$

- 二阶条件

$$\mathrm{D}^2 L(\lambda^*, x_1^*, x_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 \\ -f_1 & -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} \\ -f_2 & -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} \end{bmatrix}$$

- 加边的海塞矩阵负定

4.3困难

- 里昂惕夫技术（不连续）完全互补

$$f(x_1,x_2)=\min\{ax_1,bx_2\}$$

$$c(w_1,w_2,y)=\frac{w_1y}{a}+\frac{w_2y}{b}=y\left(\frac{w_1}{a}+\frac{w_2}{b}\right)$$

- 线性技术 $f(x_1,x_2)=ax_1+bx_2$

（完全替代）$c(w_1,w_2,y)=\min\left\{\frac{w_1}{a},\frac{w_2}{b}\right\}y$

- 有角点解，有一种要素使用量为0
- 正规解法（使用库恩-塔克定理）
- 假定$a=b=1$

$$\min w_1x_1+w_2x_2$$

$$s.t.\ x_1+x_2=y$$

$$x_1\geqslant 0$$

$$x_2\geqslant 0$$

- 拉格朗日函数

$$\mathcal{L}(\lambda,\mu_1,\mu_2,x_1,x_2)=w_1x_1+w_2x_2-\lambda(x_1+x_2-y)-\mu_1x_1-\mu_2x_2$$

- 库恩-塔克一阶条件

$$w_1-\lambda-\mu_1=0$$

$$w_2-\lambda-\mu_2=0$$

$$x_1+x_2=y$$

$$x_1\geqslant 0$$

$$x_2\geqslant 0$$

4.3困难

- 互补-松弛条件 $$\mu_1 \geqslant 0, \mu_1 = 0 \ if \ x_1 > 0$$ $$\mu_2 \geqslant 0, \mu_2 = 0 \ if \ x_2 > 0$$
- 必须考虑不等式约束起作用或不起作用的所有情形（2×2）
- (1)$x_1=0,x_2=0$.除非$y=0$，否则不满足$x_1+x_2=y$
- (2) $x_1=0,x_2>0$.此时$\mu_2=0$.前2个一阶条件是
- $$\left.\begin{aligned} w_1 &= \lambda + \mu_1 \\ w_2 &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow w_1 \geqslant w_2$$ 因为$x_1=0$,因此$x_2=y$
- (3) $x_2=0$, $x_1>0$.此时$\mu_1=0,\mu_2\geq 0$.同理$x_1=y$， $w_2 \geq w_1$
- (4) $x_1>0$, $x_2>0$.此时互补松弛条件意味着$\mu_1=0,\mu_2=0$

4.4条件要素需求函数

- 比较静态：conditional factor demand function
- 利润最大化一阶条件得到的要素需求函数。它和条件要素需求函数是一码事
- 两要素情形。一阶条件

$$f\left(x_1(w_1,w_2,y),x_2(w_1,w_2,y)\right)\equiv y$$

$$w_1-\lambda\frac{\partial f\left(x_1(w_1,w_2,y),x_2(w_1,w_2,y)\right)}{\partial x_1}\equiv 0$$

$$w_2-\lambda\frac{\partial f\left(x_1(w_1,w_2,y),x_2(w_1,w_2,y)\right)}{\partial x_2}\equiv 0$$

- 关于w_1,w_2的隐函数，λ也是w_1的函数
- 让这三个恒等式对w_1求导

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial w_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial w_1}\equiv 0$$

$$1-\lambda\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial w_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial w_1}\right]-\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial w_1}\equiv 0$$

$$0-\lambda\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial w_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\frac{\partial x_2}{\partial w_1}\right]-\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \lambda}{\partial w_1}\equiv 0$$

4.4条件要素需求函数

- 写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 \\ -f_1 & -\lambda f_{11} & -\lambda f_{21} \\ -f_2 & -\lambda f_{12} & -\lambda f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial w_1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

加边的海塞矩阵

- 基本条件：生产技术是拟凹的（上等值集为凸集）

- 这里加边的海塞矩阵是正半定的

- 使用克莱姆法则

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -f_2 \\ -f_1 & -1 & -\lambda f_{21} \\ -f_2 & 0 & -\lambda f_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 \\ -f_1 & -\lambda f_{11} & -\lambda f_{21} \\ -f_2 & -\lambda f_{12} & -\lambda f_{22} \end{vmatrix}}$$

$H<0$

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_1} = \frac{f_2^2}{H} < 0$$

- 因此，条件要素需求曲线向下倾斜

4.5成本最小化的代数方法

$$\mathbf{w}^t\mathbf{x}^t \leqslant \mathbf{w}^t\mathbf{x}^s$$

$$\mathbf{w}^s\mathbf{x}^s \leqslant \mathbf{w}^s\mathbf{x}^t$$

- （1）经验主义
- 检验一组数据是否是成本最小化的，即企业是否是理性的

$$\mathbf{w}^t\mathbf{x}^t \leqslant \mathbf{w}^t\mathbf{x}^s \quad for\ all\ s$$

$$and\ t\ such\ that\ y^s \geqslant y^t$$

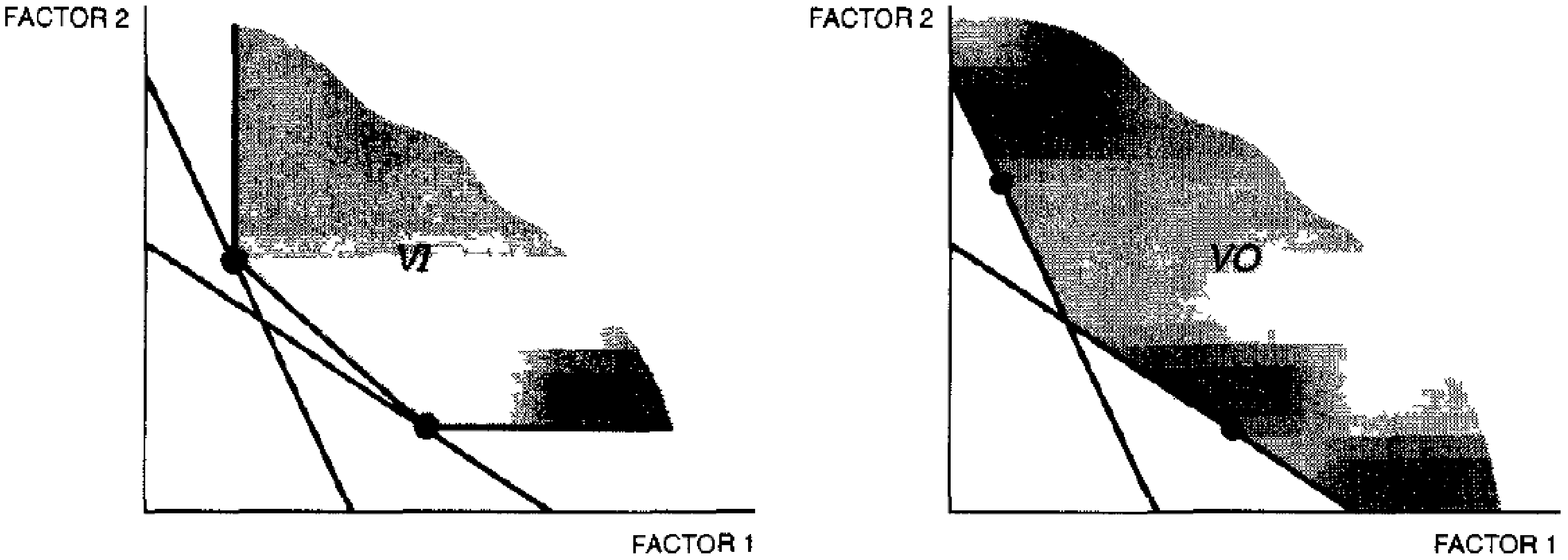
- Weak Axion of Cost Minimization(WACM)
- 选$\mathbf{x}^s$时产出高一些，但它仍没有被选择，因为没那么多钱。选$\mathbf{x}^t$
- 重写第二个不等式 $-\mathbf{w}^s\mathbf{x}^t \leqslant -\mathbf{w}^s\mathbf{x}^s$
- 加到第一个不等式，得到

$$\left(\mathbf{w}^t - \mathbf{w}^s\right)\left(\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^s\right) \leqslant 0$$

- 即 $\triangle\mathbf{w}\triangle\mathbf{x} \leqslant 0$ （需求定律）
- 即要素需求向量一定与要素价格向量反向移动
- 这里没有任何假定，只从弱公理推出

4.5成本最小化的代数方法

- （2）已知企业理性，怎样复制技术 w^t x^t $f(x^t)$



Inner and outer bounds. The sets VI and VO give inner and outer bounds to the true input requirement set.

5 COST FUNCTION

5.1平均成本和边际成本

- 考虑成本函数和产出、要素价格的关系 $c(\mathbf{w},y)\equiv\mathbf{wx}(\mathbf{w},y)$

- 短期

$$c(\mathbf{w},y,\mathbf{x}_f)=\underbrace{\mathbf{w}_v\mathbf{x}_v(\mathbf{w},y,\mathbf{x}_f)}_{SVC}+\underbrace{\mathbf{w}_f\mathbf{x}_f}_{FC}$$

$$SAC=\frac{c(\mathbf{w},y,\mathbf{x}_f)}{y}$$

$$SAVC=\frac{\mathbf{w}_v\mathbf{x}_v(\mathbf{w},y,\mathbf{x}_f)}{y}$$

$$SMC=\frac{\partial c(\mathbf{w},y,\mathbf{x}_f)}{\partial y}$$

- 长期中，所有要素都可变。可按照短期成本函数来表达长期成本函数。令 $\mathbf{x}_f(\mathbf{w},y)$是固定要素的最优选择。令

$$\mathbf{x}_v(\mathbf{w},y)=\mathbf{x}_v(\mathbf{w},y,\mathbf{x}_f(\mathbf{w},y))$$

为可变要素的长期最优选择

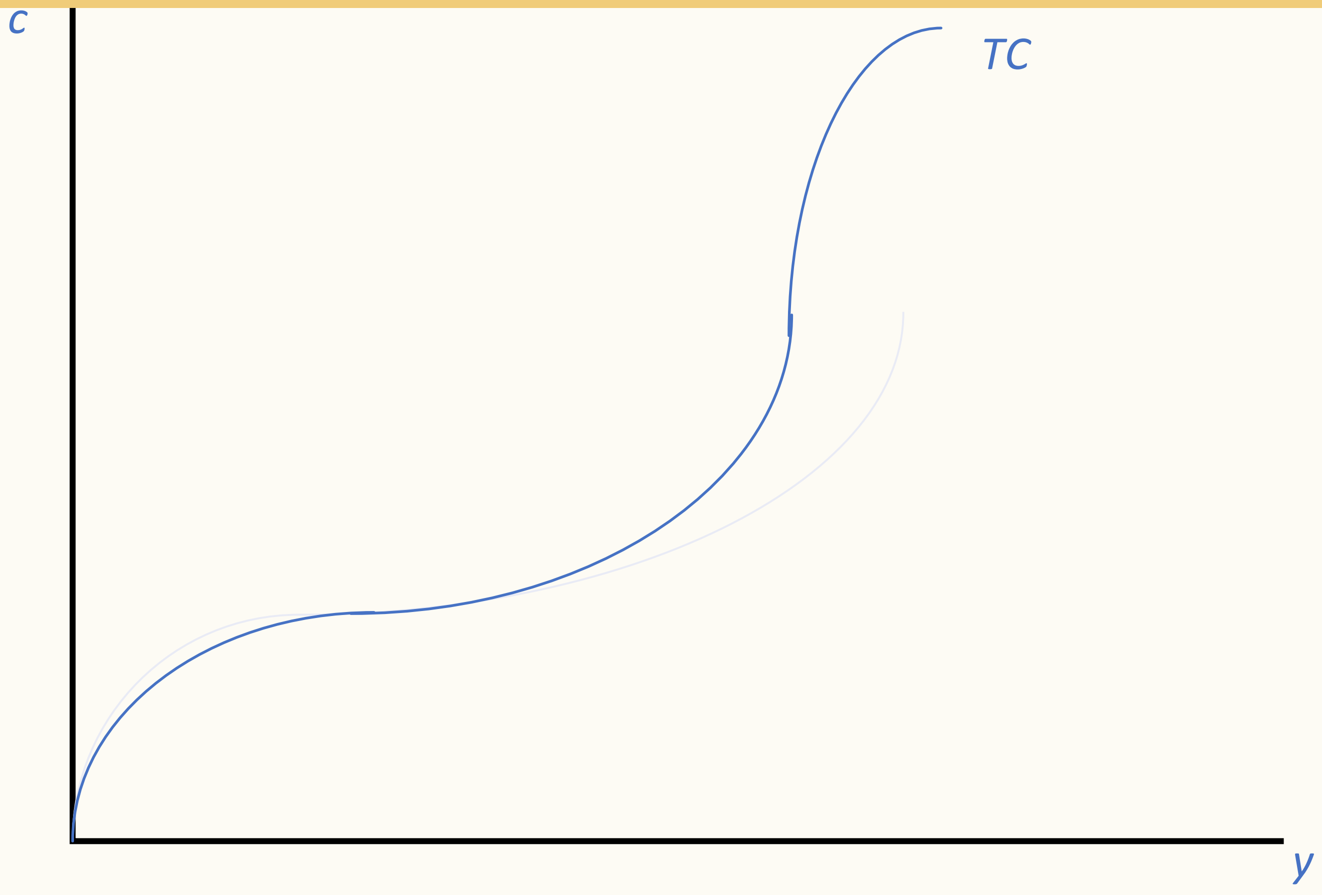
$$c(\mathbf{w},y)=\mathbf{w}_v\mathbf{x}_v(\mathbf{w},y)+\mathbf{w}_f\mathbf{x}_f(\mathbf{w},y)$$
$$=c(\mathbf{w},y,\mathbf{x}_f(\mathbf{w},y))$$

$$LAC=\frac{c(\mathbf{w},y)}{y}$$

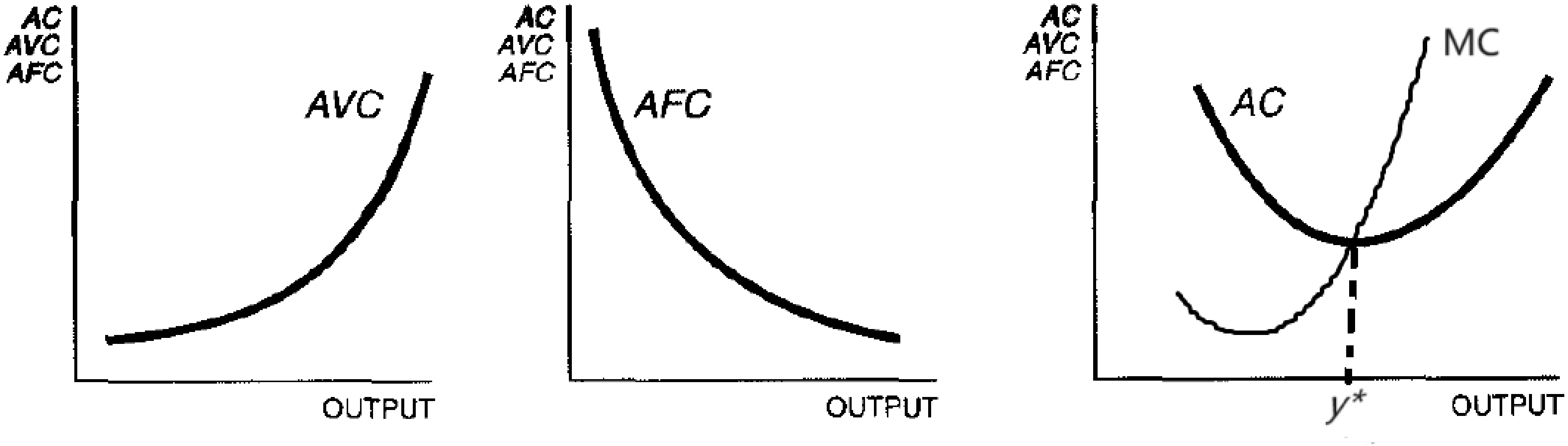
$$LMC=\frac{\partial c(\mathbf{w},y)}{\partial y}$$

5.1平均成本和边际成本

- 在初期需要大型设备（钻井），专业技术人员（李四光）。所以MC上升快，中期设备充分发挥作用，李四光已建立团队，MC上升慢，末期面临技术资源瓶颈，MC再次加速上升



5.2成本的几何图形



Average cost curves. The average variable cost curve will eventually rise with output, while the average fixed cost curve always falls with output. The interaction of these two effects produces a U-shaped average cost curve.

5.2成本的几何图形

- y^*是最小的平均成本点。在y^*左边，$y \leq y^*$,AC在下降。即 $\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{c(y)}{y}\right)}{\mathrm{d}y} \leqslant 0$
- 求导得到 $\dfrac{yc'(y)-c(y)}{y^2} \leqslant 0$ 从而有

$c'(y) \leqslant \dfrac{c(y)}{y}$ 即$MC \leq AC$.同理可得

$y \geq y^*$时， $MC \geq AC$。$y=y^*$时,$MC=AC$

- 边际成本：决策的前瞻性
- 若国际原油价格为40美元/桶。它即是国内生产石油的机会成本。中石油进口还是生产要看MC是否超过40.
- 国家存钱还是存油?

5.3长期成本曲线和短期成本曲线

- 短期实际上是长期的受约束版本。$y=y^*$时，$z=z^*$。短期成本与长期成本相等，克服了约束
- 长期中$c(y)=c(y,z(y))$
- 短期中$c(y,z)$

$c(y^*,z^*)= c(y^*,z(y^*))$

- 因此，长期和短期成本曲线在y^*处相切，这正是包络定理的几何表述。

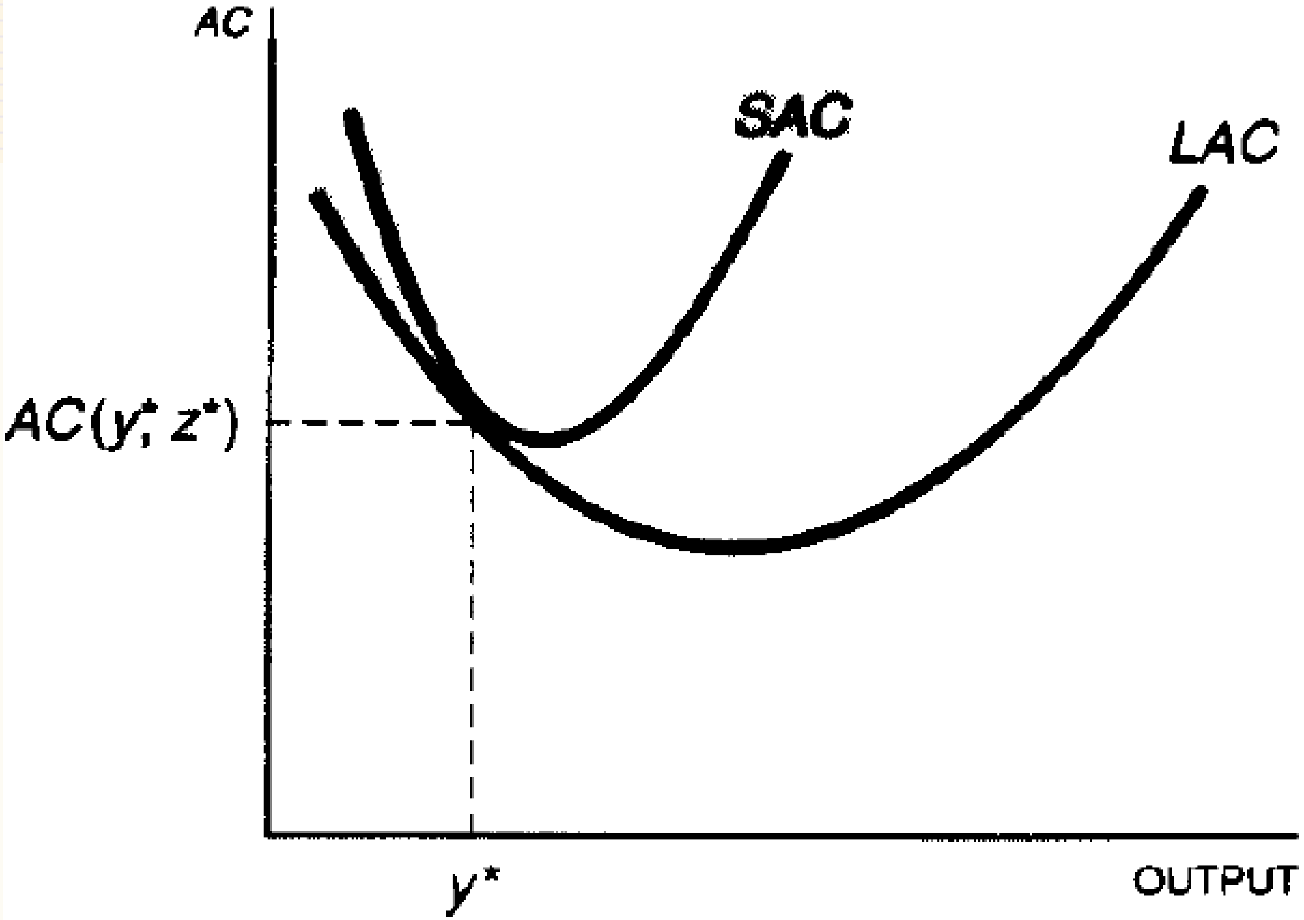
- 长期成本曲线在y^*的斜率

$$\frac{\mathrm{d}c(y^*,z(y^*))}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial c(y^*,z^*)}{\partial y}+\frac{\partial c(y^*,z^*)}{\partial z}\frac{\partial z(y^*)}{\partial y}$$

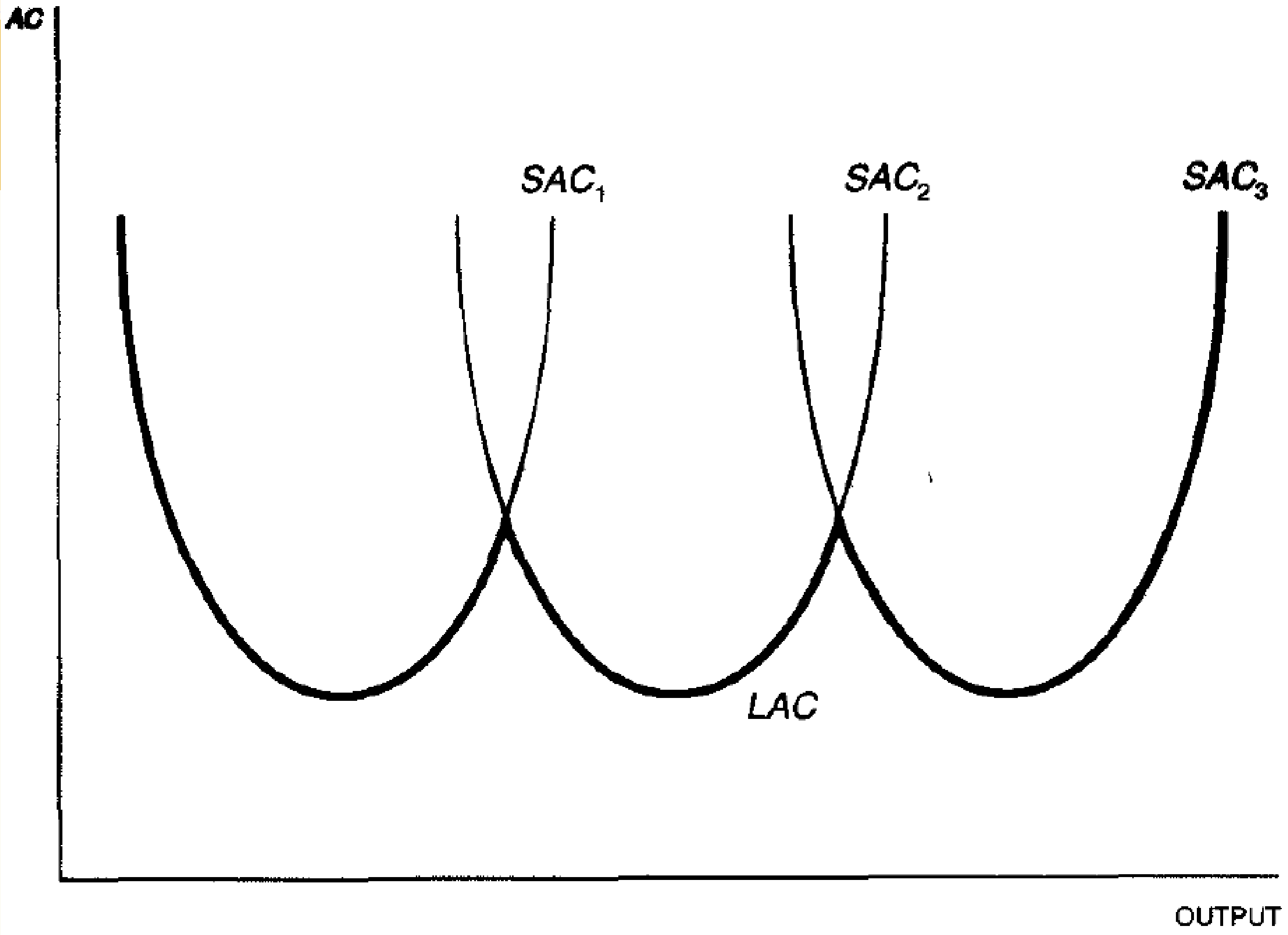
- z^*是产出为y^*时的最优选择。因此有

$$\frac{\partial c(y^*,z^*)}{\partial z}=0$$

- 这样，在y^*处的长期边际成本等于(y^*, z^*)处的短期边际成本
- 生产的核心约束z，如技术、资源



Long-run and short-run average cost curves. Note that the long-run and the short-run average cost curves must be tangent which implies that the long-run and short-run marginal costs must be equal.



Long-run average cost curve. The long-run average cost curve, LAC, is the lower envelope of the short-run average cost curves, SAC_1, SAC_2, and SAC_3.

5.4要素价格和成本函数

- 成本函数的性质

- (1)Nodecreasing in **w**. If $\mathbf{w}'\geq\mathbf{w}$, then $c(\mathbf{w}',y) \geq c(\mathbf{w},y)$

$\mathbf{wx}\leq\mathbf{wx}'$ $\mathbf{wx}' \leq \mathbf{w}'\mathbf{x}'$ 从而$\mathbf{wx}\leq \mathbf{w}'\mathbf{x}'$

- **(2)**Homogeneous of degree 1 in **w.** $c(t\mathbf{w},y)=tc(\mathbf{w},y)$ for $t>0$

可推出：$\mathbf{x}(\mathbf{w})$是关于关于**w**的0次齐次函数。各要素相对价格不变，w_i/w_j不变。**w**向量的整体变动不影响要素需求

5.4要素价格和成本函数

- (3) concave in **w**.

$$c[t\mathbf{w}+(1-t)\mathbf{w}']\geq tc(\mathbf{w},y)+(1-t)c(\mathbf{w}',y)$$

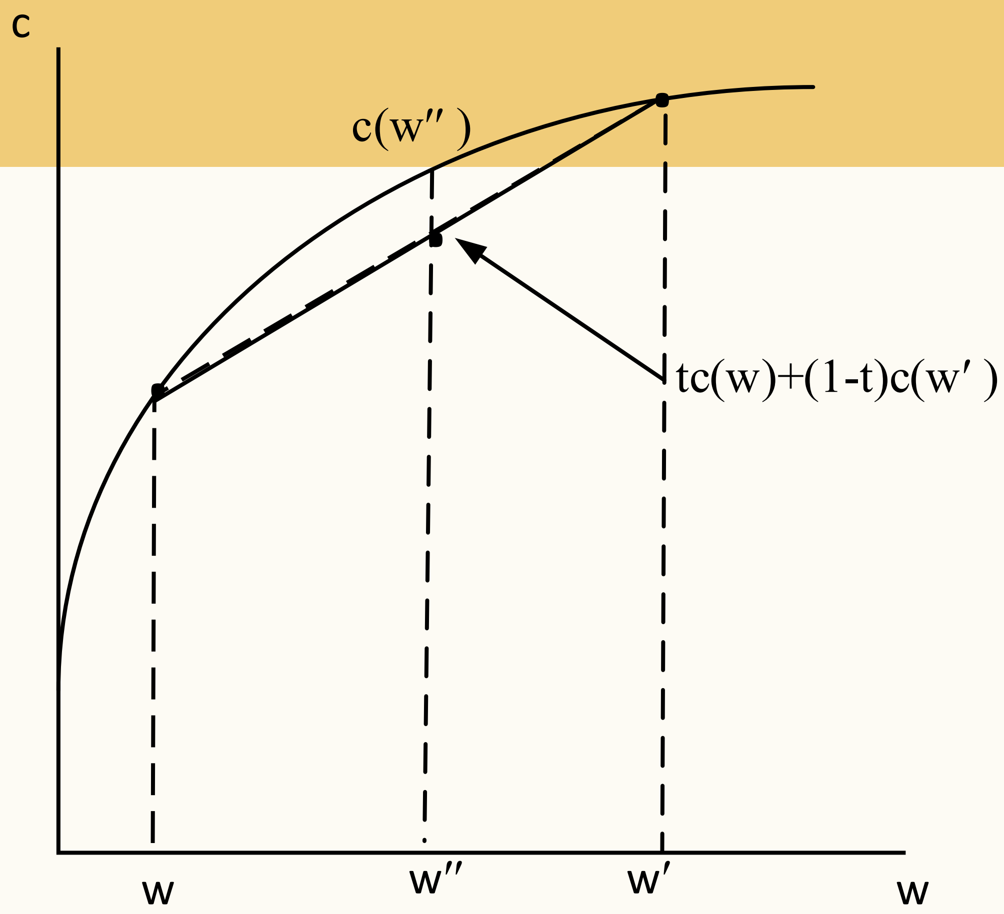
$$for\ 0\leq t\leq 1$$

- 令 $\mathbf{w}''=t\mathbf{w}+(1-t)\mathbf{w}'$

$$我们有\mathbf{wx}''\geq c(\mathbf{w},y)和\mathbf{w}'\mathbf{x}''\geq c(\mathbf{w}',y)$$

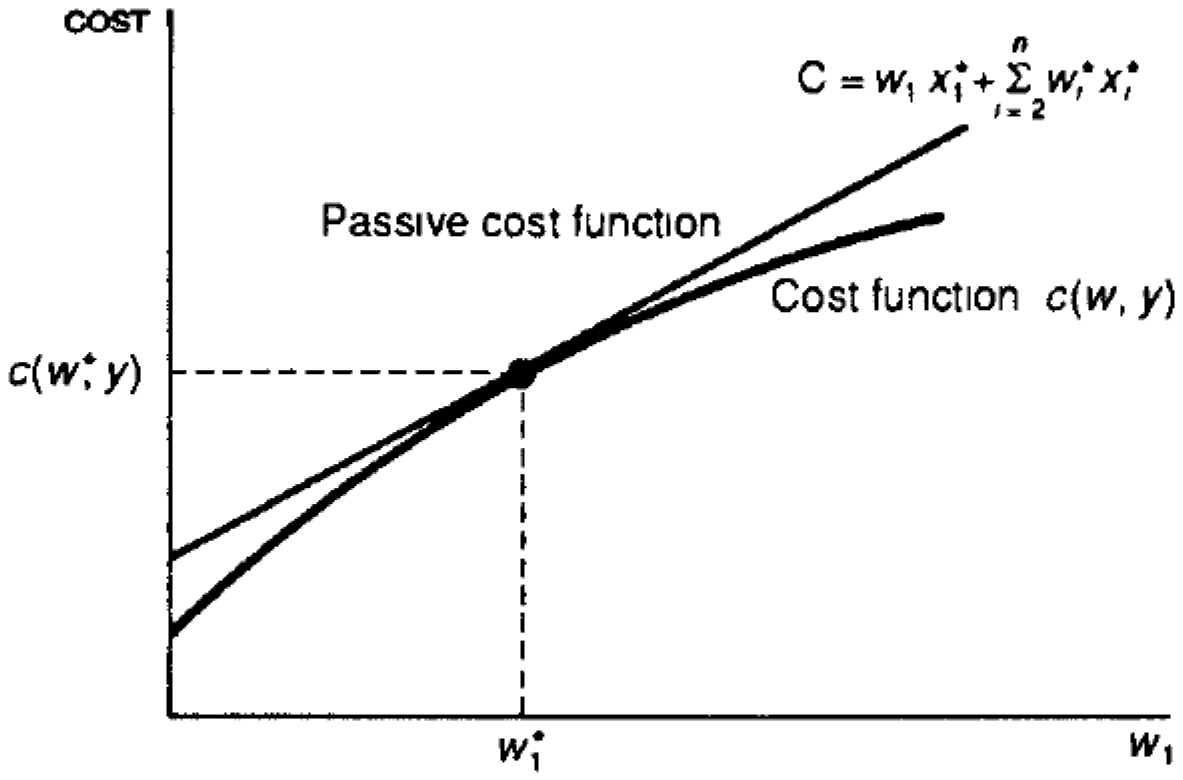
$$t\mathbf{wx}''+(1-t)\mathbf{w}'\mathbf{x}''\geq tc(\mathbf{w},y)+(1-t)c(\mathbf{w}',y)$$

$$即c(\mathbf{w}'',y)\geq tc(\mathbf{w},y)+(1-t)c(\mathbf{w}',y)$$



5.4要素价格和成本函数

- 勤快的厂商成本低
- 理性的厂商是勤快的厂商



Concavity of the cost function. The cost function will be a concave function of the factor price since it must always lie below the "passive" cost function.

5.4要素价格和成本函数　5.5适用于带约束条件的最优化问题的包络定理

- Continuous in w. $c(\mathbf{w},y)$ is continuous as a function of w, for $\mathbf{w} \gg 0$

（理性：厂商对价格高度敏感）

- 谢泼德引理（Shephard's Lemma）:x_i是厂商对投入i的条件要素需求 $x_i(\mathbf{w},y)=\dfrac{\partial c(\mathbf{w},y)}{\partial w_i},\ i=1,\cdots,n$
- 证明与霍特林引理的证明类似

- 定义 $g(\mathbf{w})=c(\mathbf{w},y)-\mathbf{w}\mathbf{x}^*$
- w=w*时，$g(\mathbf{w}^*)=0$（最大值）。因此有

$$\frac{\partial g(\mathbf{w}^*)}{\partial w_i}=\frac{\partial c(\mathbf{w}^*,y)}{\partial w_i}-x_i^*=0,\ i=1,\cdots,n$$

- 带约束条件的最优化问题的包络定理

$$M(a)=\max_{x_1,x_2} g(x_1,x_2,a)$$

$$such\ that\ h(x_1,x_2,a)=0$$

- （在成本函数例子里）

$$g(x_1,x_2,a)=w_1x_1+w_2x_2$$

$$h(x_1,x_2,a)=f(x_1,x_2)-y$$

5.5适用于带约束条件的最优化问题的包络定理

- 拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=g(x_1,x_2,a)-\lambda h(x_1,x_2,a)$$

- 一阶条件 $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}-\lambda\dfrac{\partial h}{\partial x_1}=0$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}-\lambda\frac{\partial h}{\partial x_2}=0$$

$$h(x_1,x_2,a)=0$$

- 最大值函数

$$M(a)\equiv g(x_1(a),x_2(a),a)$$

$$\frac{\mathrm{d}M(a)}{\mathrm{d}a}=\left.\frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{x},a)}{\partial a}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(a)}$$

$$=\left.\frac{\partial g(x_1,x_2,a)}{\partial a}\right|_{x_i=x_i(a)}-\lambda\left.\frac{\partial h(x_1,x_2,a)}{\partial a}\right|_{x_i=x_i(a)}$$

- 偏导数是g和h保持x_1和x_2固定在它们的最优选择而对a的导数
- 把参数a作为要素价格w_i，值函数$M(a)$看做成本函数 $\dfrac{\partial c(\mathbf{w},y)}{\partial w_i}=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_i}=x_i\big|_{x_i=x_i(\mathbf{w},y)}$
- 这就是谢泼德引理

5.6使用成本函数的比较静态

- 既然条件要素需求函数是成本函数的导数，那么可以把成本函数的特性转换成要素需求函数的约束
- 成本函数是w的一次齐次函数，因此要素需求在w上是零次齐次的
- 成本函数是w的凹函数。因此成本函数的二阶导矩阵——要素需求函数的一阶导矩阵是负半定的

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 c}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 c}{\partial w_1 \partial w_2} \\ \dfrac{\partial^2 c}{\partial w_2 \partial w_1} & \dfrac{\partial^2 c}{\partial w_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial w_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial w_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial w_2} \end{pmatrix}$$

- 替代阵为负半定
- 含义：（1）交叉价格效应是对称的

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{w},y)}{\partial w_j} = \frac{\partial^2 c(\mathbf{w},y)}{\partial w_j \partial w_i} = \frac{\partial^2 c(\mathbf{w},y)}{\partial w_i \partial w_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{w},y)}{\partial w_j}$$

（2）自身价格效应非正。条件要素需求曲线向下倾斜 $\dfrac{\partial x_i(\mathbf{w},y)}{\partial w_i} = \dfrac{\partial^2 c(\mathbf{w},y)}{\partial w_i^2} \leqslant 0$

总结

- 厂商利润最大化 净供给 净要素需求 利润函数 成本最小化 条件要素需求 成本函数（企业战略）
- 范式 市场行为可预知
- 方法：（1）理性主义 最大化 最小化 函数特性
- （2）经验主义 检验或证伪理性主义

6 DUALITY

- 把技术放宽，看会怎样（理性主义要求生产函数拟凹，条件要素需求函数凹）
- 给定成本函数，“解出”一项产出该成本函数的技术，这意味着成本函数包含着与生产函数包含的相同的信息

6.1对偶

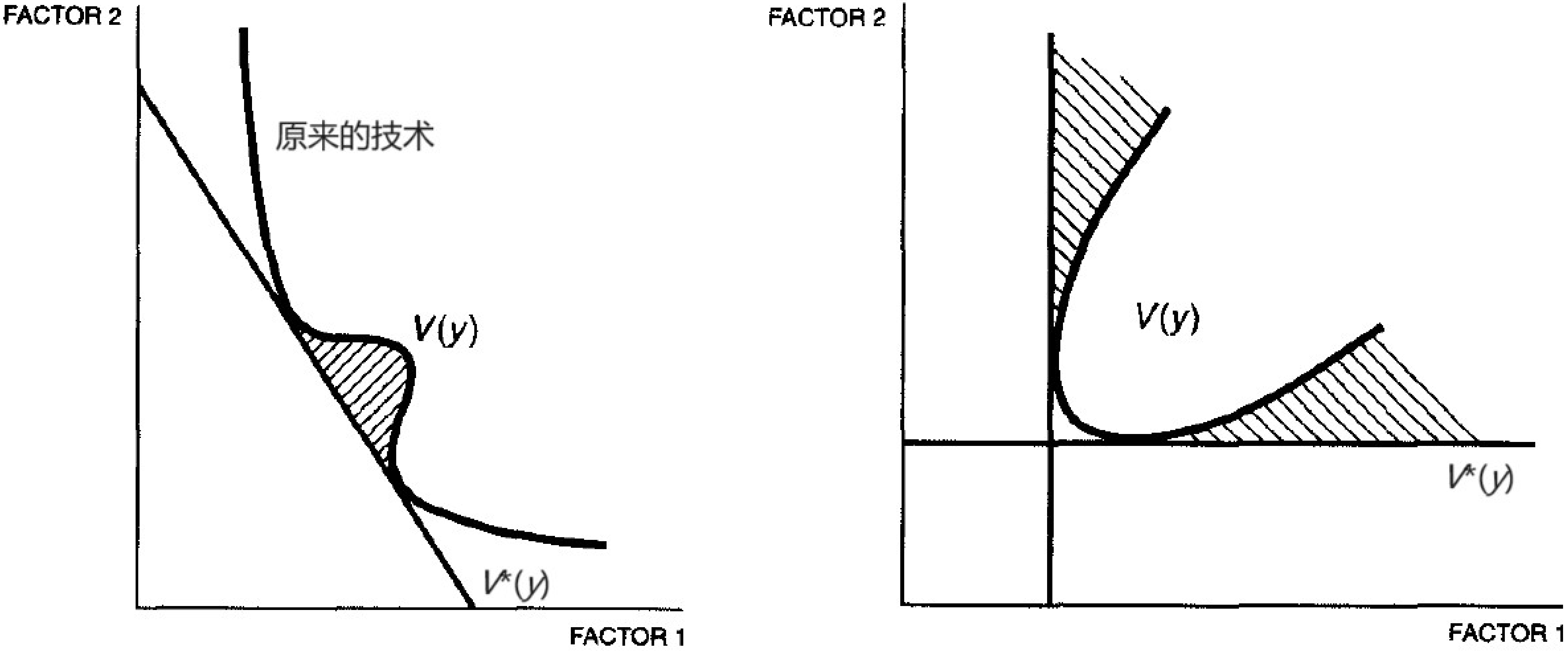
- 真实的投入要求集 $V(y)$的外界 $VO(y)$定义为

$$VO(y)=\{\mathbf{x}:\mathbf{w}^t\mathbf{x}\geqslant\mathbf{w}^t\mathbf{x}^t\ \ for\ all\ t\ such\ that\ y^t\leqslant y\}$$

- 内界：我已经尽力了 $VI(y)=\{\mathbf{x}^t:y^t\geqslant y\}$ 的凸的单调壳
- 外界：我不能不这样选（$VO(y)$是凸的，单调的闭的技术），（硬约束，它之外都是生产不出来的）
- VO(y)似乎比较接近真实的V(y)了。令要素价格在**w**≥0的所有可能的向量中变动。VO一般化为 $V^*(y)=\{\mathbf{x}:\mathbf{wx}\geqslant\mathbf{wx}(\mathbf{w},y)=c(\mathbf{w},y)\ \ for\ \ \mathbf{w}\geqslant 0\}$

6.1对偶

- $V^*(y)$包含$V(y)$
- $V^*(y)$是经过凸化的技术。$V(y)$是真实的技术
- 借用理性主义思路，把最优的成本函数描述成了$V(y)$。借用经验主义研究思路，把比它大的都排除掉，就称为$V^*(y)$。 $V^*(y)$和$V(y)$的差别?
- 理性主义最优化得到的轨迹（隐含着生产技术可微可导）。凹进去的这块就忽略掉了。我们用连线来表达。 $V^*(y)$是对真实的非拟凹的技术的凸化处理。
- 向右、上弯、进行凸化处理，补直



Relationship between $V(y)$ **and** $V^*(y)$. In general $V^*(y)$ will strictly contain $V(y)$.

6.1对偶

- 真实的技术是凸技术时，外界 $V^*(y)$与$V(y)$相等
- 证明： $V^*(y)$包含$V(y)$。只要证明如果**x**属于$V^*(y)$，那么**x**一定属于$V(y)$
- 分离超平面定理（26.11）
- 反证法。若x在$V^*(y)$而不在$V(y)$中。 $V(y)$为闭、单调、凸的。可运用分离超平面定理，找到一个向量**w**$^*\geq 0$.对$V(y)$中的**z**有**w*x< w*z**. **z***为$V(y)$中在价格**w***下成本最小化的点。有**w*x< w*z***$=c($**w***$,y)$**.这样x就不属于**$V^*(y)$了。
- 我们这就得到了一个鼓舞人心的结论：理性主义的成本函数和经验分析得到的成本函数是相同的。

6.1对偶

- 如果在经验上有一组数据拟合出的成本函数，它与从一系列假设开始进行理性分析得出的成本函数的轨迹完全相同。
- 原始技术进行凸化处理后，尽管它包含了一些技术上有瑕疵的信息，把凹进去的那一段曲线忽略掉了，但在成本上没有什么损失，是一样的。
- 运用下面的证明，不管原始技术是不是凸的，投入要求集从哪边凹进来，还是表现良好，凸的，得到的成本函数是一样的
- $c^*(\mathbf{w}, y) = \min \mathbf{wx}$ （凸化处理后的技术）

  $s.t.\ \mathbf{x}\ \ in\ V^*(y)$
- 原始技术 $c(\mathbf{w}, y)$

6.1对偶

- 我们要证明无论原始技术是否是凸的。它和凸化后得到的成本函数是一样的。
- 显然$c^*(\mathbf{w},y) \le c(\mathbf{w},y)$.因为$V^*(y)$集大于$V(y)$集。 $V^*(y)$中的最小成本束是不可能大于$V(y)$中的最小成本束的。另外，根据成本最小化弱公理，在$\mathbf{w}$环境下，最终选择的是$\mathbf{x}$，而不是$\mathbf{x}^*$，一定是因为$\mathbf{wx}^*$更高，因此有 $\mathbf{wx}^* = c^*(\mathbf{w},y) \geqslant \mathbf{wx} = c(\mathbf{w},y)$ 因此$c^*(\mathbf{w},y)$与$c(\mathbf{w},y)$只能相等
- （第一个式子来自于$V^*(y)$ 这个集合比 $V(y)$ 这个集合大，第二个式子来自于 $V^*(y)$ 的定义）
- 更加鼓舞人心的结论：不管技术是不是凸的，你拿来描述的成本函数是同一个。$c(\mathbf{w})$是能做到的唯一的有效率的结果。要描述成本函数，无论是经验方法，还是理性主义，得到的结果一样。只要厂商理性即可。经验主义背后包含着成本最小化弱公理。理性主义包含着厂商理性的最一般最宽松的描述。成本函数的求解过程在数学上也没有瑕疵。

6.2成本函数的充分条件

- 给定数据如何模拟厂商的成本函数和条件要素需求函数。成本函数怎样设置才合理?
- 函数$\phi(\mathbf{w},y)$满足下面4个条件，那么它就是一个合理的成本函数
- (1)一次齐次。

$$\phi(t\mathbf{w},y)=t\phi(\mathbf{w},y)\ \ for\ all\ t\geqslant 0$$

- (2) $\phi(\mathbf{w},y)\geqslant 0\ for\ \ \mathbf{w}\geqslant 0\ and\ y\geqslant 0$
- （3）单调性，非减函数

$$\phi(\mathbf{w}',y)\geqslant\phi(\mathbf{w},y)\ \ for\ \ \mathbf{w}'\geqslant\mathbf{w}$$

- (4)$\phi(\mathbf{w},y)$ is concave in $\mathbf{w}$.
- $\phi(\mathbf{w},y)$是定义在集合$V^*(y)=\{\mathbf{x}\geq 0:\mathbf{wx}\geq \phi(\mathbf{w},y)$ for all $\mathbf{w}\geq 0\}$上。（它和外界的定义一样，在**w**的环境下，如果没有选择$\mathbf{x}(\mathbf{w},y)$，一定会带来更高的成本）
- 先找着条件要素需求函数$\mathbf{x}(\mathbf{w},y)$，如果$\mathbf{x}(\mathbf{w},y)$使得**wx**对所有在$V^*(y)$中的x最小，那么就可说明可使用$\phi(\mathbf{w},y)$来作为成本函数

6.2成本函数的充分条件

- 定义 $\mathbf{x}(\mathbf{w},y)=\left(\frac{\partial\phi(\mathbf{w},y)}{\partial w_1},\cdots,\frac{\partial\phi(\mathbf{w},y)}{\partial w_n}\right)$
- 欧拉定理。如果 $f(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in R_+^n$ 为 k 次齐次，则有

$$f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n=kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

- 证明：由于f是k次齐次，我们有

$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

两边对t求导数，得

$$\frac{\partial f}{\partial(tx_1)}\cdot\frac{\partial(tx_1)}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial(tx_2)}\cdot\frac{\partial(tx_2)}{\partial t}+\cdots$$

$$+\frac{\partial f}{\partial(tx_n)}\cdot\frac{\partial(tx_n)}{\partial t}=kt^{k-1}f(x_1,\cdots,x_n)$$

- 由于对任何 t都成立，取 $t=1$

$$f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n=kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

由于$\phi(\mathbf{w},y)$在$\mathbf{w}$上一次齐次，根据欧拉法则，

$$\phi(\mathbf{w},y)=\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{\partial\phi(\mathbf{w},y)}{\partial w_i}=\mathbf{w}\mathbf{x}(\mathbf{w},y)$$

我们需要证明对任何$\mathbf{w}'>0,\mathbf{x}(\mathbf{w}',y)$使得$\mathbf{w}'\mathbf{x}$对所有在$V^*(y)$中的$\mathbf{x}$成为最小：

$$\phi(\mathbf{w}',y)=\mathbf{w}'\mathbf{x}(\mathbf{w}',y)\leqslant\mathbf{w}'\mathbf{x}$$

首先证明$\mathbf{x}(\mathbf{w}',y)$在$V^*(y)$中

根据$\phi(\mathbf{w},y)$在$\mathbf{w}$上的凹性，有

$$\phi(\mathbf{w}',y)\leqslant\phi(\mathbf{w},y)+\mathrm{D}\phi(\mathbf{w},y)(\mathbf{w}'-\mathbf{w})$$

6.2成本函数的充分条件

$$\left[\phi(\mathbf{w}',y)=\phi(\mathbf{w},y)+\mathrm{D}\phi(\mathbf{w},y)(\mathbf{w}'-\mathbf{w})+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi(\mathbf{w},y)(\mathbf{w}'-\mathbf{w})^2\right]$$

- 用欧拉定理 $\phi(\mathbf{w},y)=\mathbf{wx}(\mathbf{w},y)$
- 其中 $\mathbf{x}(\mathbf{w},y)=\mathrm{D}\phi(\mathbf{w},y)$
- 因此 $\phi(\mathbf{w}',y)\leqslant\mathbf{w}'\mathbf{x}(\mathbf{w},y)$
- 根据定义，$\mathbf{x}(\mathbf{w},y)$在$V^*(y)$中
- 下面说明$V^*(y)$中的$\mathbf{x}$，$\mathbf{x}(\mathbf{w},y)$最小化了$\mathbf{wx}$ $\mathbf{wx}\geqslant\phi(\mathbf{w},y)$
- **根据欧拉定理** $\phi(\mathbf{w},y)=\mathbf{wx}(\mathbf{w},y)$
- **从而** $\mathbf{wx}\geqslant\mathbf{wx}(\mathbf{w},y)$

6.3需求函数

- 要成为条件要素需求函数要满足什么条件？$g_i(\mathbf{w},y)$

① 在w上0次齐次

② 替代阵 $\frac{\partial g_i(\mathbf{w},y)}{\partial w_j}$ 负半定

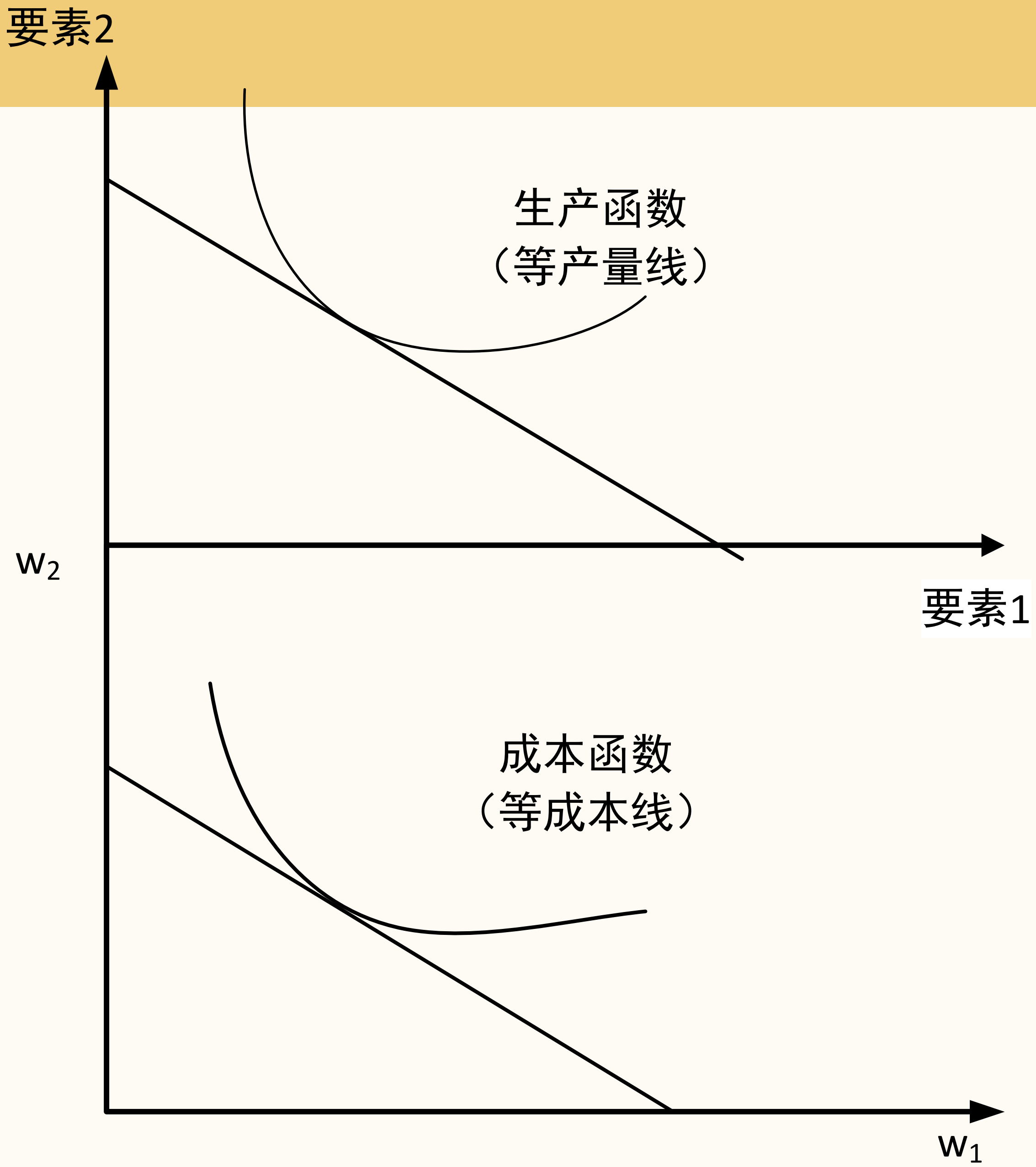
可证明，如果$\phi(\mathbf{w},y)$可以做成本函数，那么根据谢泼德引理得到的$g_i(\mathbf{w},y)$也可作为条件要素需求函数

6.3需求函数

- $f(\mathbf{x})=y$规模报酬不变，那么成本函数可写成$c(\mathbf{w},y)=yc(\mathbf{w},1)$.相当于把成本函数复制了$y$次
- 反过来也一样，如果成本函数可写成$c(\mathbf{w})y$，那么技术上一定是规模报酬不变的
- 结论：成本函数包含的信息并没有因为把技术的要求放宽而损失

- 成本函数和生产函数之间的关系
  - 利润最大化：技术信号通过带入生产函数来解决
  - 成本最小化：设定目标产出来把技术信号放入
- 我们要知道成本函数和技术之间的内在联系

6.4对偶的几何说明



$$y \equiv f(\mathbf{x}) \quad \text{全微分}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\partial f(\mathbf{x})/\partial x_1}{\partial f(\mathbf{x})/\partial x_1} = -\frac{w_1}{w_2}$$

(一阶条件)

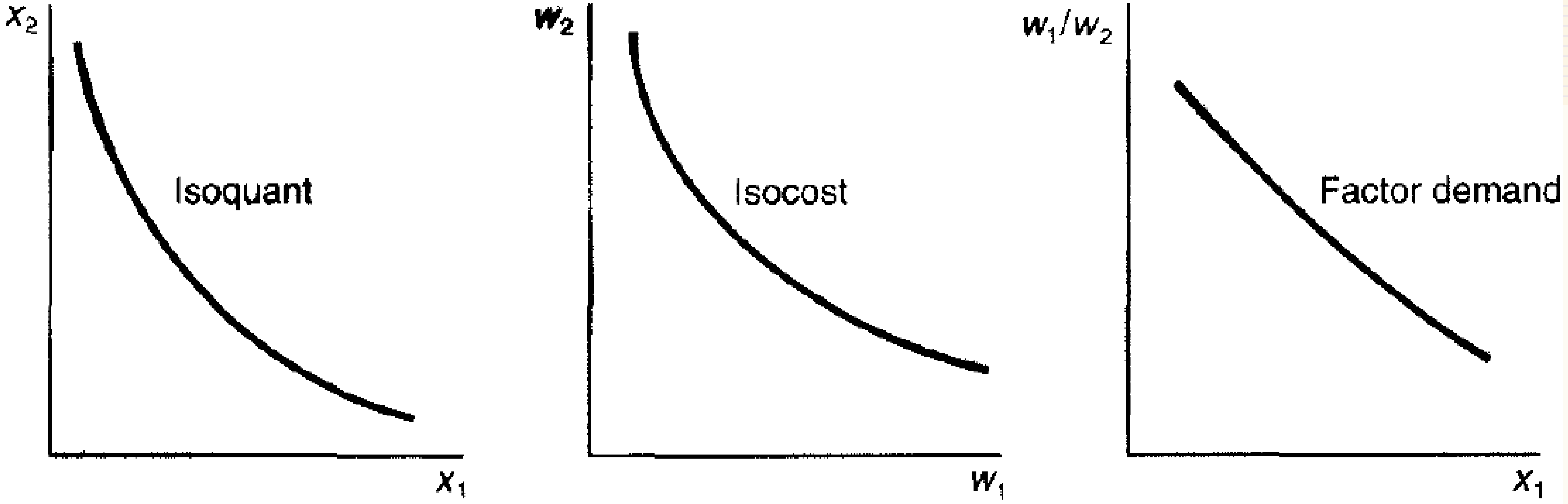
$$c \equiv c(\mathbf{w}, y) \quad \text{全微分（保证成本不变）}$$

$$\frac{dw_2}{dw_1} = -\frac{\partial c(\mathbf{w}, y)/\partial w_1}{\partial c(\mathbf{w}, y)/\partial w_2} = -\frac{x_1(\mathbf{w}, y)}{x_2(\mathbf{w}, y)}$$

(谢泼德引理)

6.4对偶的几何说明

- 良好的对偶：等产量线的斜率是要素价格之比，而等成本线的斜率则等于要素之比
- 生产函数包含了要素市场价格的信息。反过来，要素价格变动的信号包含了技术的信息。成本函数已经把生产里的技术包含进去了
- 我们充分考虑了成本在紧的情况下多用哪些要素，少用哪些要素。
- 要素市场相对价格的变动
- 电力 投入 技术（煤、风、水）考虑产出给定，那么把各种投入的价格都已考虑在内。因此生产系统很紧



Technology, costs, and demand. Case of smooth, convex isoquant.

- 如果等成本线非常弯曲。等产量曲线就比较平缓。反之亦然

总结

- 把理性主义技术上的限制放开。成本函数是同样的结果。成本函数已包含了技术的所有信息。即使技术上有瑕疵，成本函数仍然包含全部信息。
- 副产品：要设定成本函数，必须满足那4个条件。条件要素需求函数也是同样处理。
- 生产理论结束。我们介绍了技术黑箱。进行技术的最一般的描述。理性主义的两个方向的企业个体描述：利润最大化和成本最小化。用对偶的方法把这两个理论的一致性揭示出来

7 UTILITY MAXIMIZATION

7.1消费者偏好

- 消费者的个体理性建立在偏好之上。对微观经济学的攻击主要来自于消费理论。因为无法描述偏好。形式化后的微观经济学发现，经过对偏好的一系列约束，它是可信的。

- 消费集X：k维实数空间的非负子集。它包含所有消费束：吃、穿、用等。也包括跨时间消费束：今天的消费和明天的消费。它定义了消费者福利的边界。暗含了这个集合越大越好。但可选择集越大，成本越高(削土豆由用刀削→用工具削，信息成本增加）。这个集合并不是无穷大。但在可控范围内越大越好。

- 集贸市场→超市就是增加消费可选项，扩大消费集，提高福利水平

7.1消费者偏好

- COMPLETE. For all x and y in X, either $x \succeq y \ or \ y \succeq x$,or both.
- REFLEXIVE. For all x in X, $x \succeq x$
- TRANSITIVE. For all x, y and z in X, if $x \succeq y \ and \ y \succeq z$, then $x \succeq z$
- 3个假设：消费者只好歹，偏好稳定，有逻辑性，心智完整

7.1消费者偏好

- Continuity. For all y in X, the sets $\{x{:}x \succeq y\}$ *and* $\{x{:}x \preceq y\}$ are closed sets. It follows that $\{x{:}x \succ y\}$ *and* $\{x{:}x \prec y\}$ are open sets.
- 说明消费者不迟钝，能感知微小的差异。
- 若果(x^i)是一组至少和消费束y同样好的消费束。且如果该组消费束趋近于某一消费束x^*，则x^*至少与消费束y同样好。
- LOCAL NONSATIATION. Given any x in X and any ε>0 then there is some bundle y in X with |x-y|< ε such that $y \succ x$
- 不知足，经济人。假设的重要方面：一个顽强的人，只要一点点改进的机会，他就会去改进。

7.1消费者偏好

- 以下是两个更强的假设
- WEAK MONOTONICITY. If $x \geqslant y,\ then\ x \succsim y$
- STRONG MONOTONICITY. If $x \geqslant y\ and\ x \neq y,\ then\ x \succ y$
- 前7个假设总结：消费者知好歹，偏好稳定，有逻辑性，心智健全，敏感，顽强。
- 序数效用论直观，但参数化不方便。
- 基数效用论（效用函数）

7.1消费者偏好

- 效用函数存在性的证明
- 要证明存在一个能代表偏好的连续效用函数u。我们对一篮子商品x赋值。把一篮子商品中挑出一个作为参照物，把比这个商品好的分成一堆，比这个商品坏的分成一堆。
- 令e为由1组成的R^k_+向量
- 令 $$B=\{t\in R: t\mathbf{e}\succeq\mathbf{x}\}$$ $$W=\{t\in R: \mathbf{x}\succeq t\mathbf{e}\}$$
- 有一个x，肯定能制定一个t
- W和B均是非空的闭集
- 两个集合相交的点定义为t_x
- 用t_x为x赋值，用t_y为y赋值

$$u(\mathbf{x})=t_x \;\; where \;\; t_x\mathbf{e}\sim\mathbf{x}$$
$$u(\mathbf{y})=t_y \;\; where \;\; t_y\mathbf{e}\sim\mathbf{y}$$

7.1消费者偏好

- 如果$t_x < t_y$根据强单调性，$t_x\mathbf{e} \prec t_y\mathbf{e}$
- 根据传递性，$\mathbf{x} \sim t_x\mathbf{e} \prec t_y\mathbf{e} \sim \mathbf{y}$
- 这说明可以找到一个函数来说明x和y之间的偏好关系。
- 我们的思路是先分堆，参照物那个商品既不在这一堆又不在那一堆。用参照物为一篮子商品来赋值。赋来赋去就找到了这个函数

7.2消费者行为

- 消费者偏好最大化问题 $\max u(\mathbf{x})$ *such that* $\mathbf{px} \leq m$, $\mathbf{x}$ *is in* $\mathbf{X}$
- 这个问题是否有解?
- 我们可证明目标函数连续，即消费者对商品的微小变化高度敏感。约束集是闭的，有界的。
- 在局部非饱和性假设下，只要有一点点改进的可能，消费者一定会改进，因此消费者的选择必在预算集的边界，即$\mathbf{px}^* = m$

7.2消费者行为

■重新表述消费者最优化问题

$$v(\mathbf{p},m)=\max u(\mathbf{x})$$

$$such\ that\ \ \mathbf{px}=m$$

■间接效用函数。它给出了在给定价格和收入条件下消费者可实现的最大效用。

■我们把价格p和收入m与需求联系起来的函数称为消费者的需求函数：$\mathbf{x}(\mathbf{p},m)$

■解效用最大化问题的拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=u(\mathbf{x})-\lambda(\mathbf{px}-m)$$

■一阶条件 $\dfrac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}-\lambda p_i=0\ for\ i=1,\cdots,k$

■同成本问题一样处理

$$\frac{\dfrac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j}}=\frac{p_i}{p_j}\quad for\ i,j=1,\cdots,k$$

边际替代率

7.2消费者行为

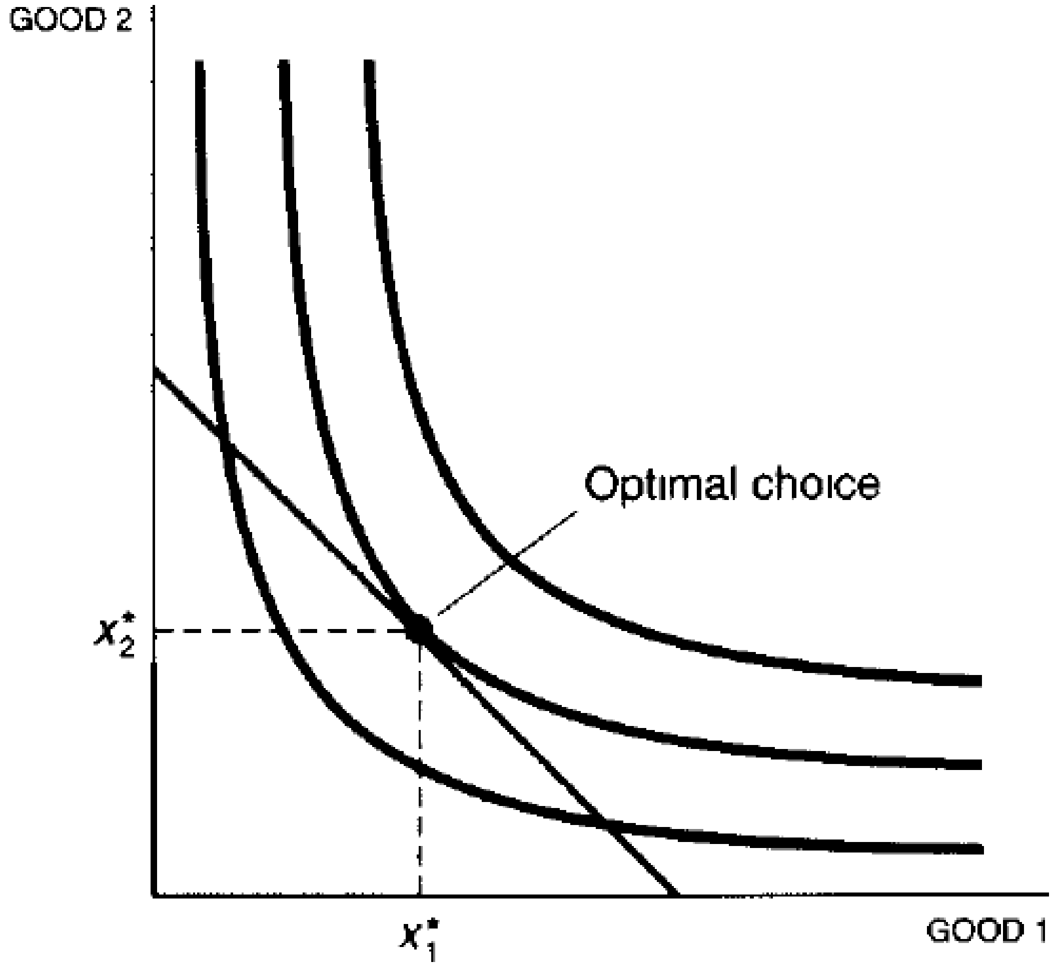
- 对效用函数取全微分

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j=0$$

- 从而 $\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_i}=-\frac{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i}{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_j}$
- 效用函数仅表达了我们对一束商品束的评价体系。效用函数不是唯一的。它只是表达一个序列。如果对u(x)做个单调变换，这个次序不会改变。如$u(x)=x$和$v(x)=x^2$次序不变。$u(\mathbf{x})=x_1^{a}x_2^{1-a}$取对数后，偏好的次序不变。这个性质与利润函数不同
- 这个式子说明消费者内心对商品的评价等于两种商品价格之比。把私人对物品的评价变成了一个社会的公共信号。
- 预算线 $\{\mathbf{x}: p_1x_1+p_2x_2=m\}$

$$x_2=\frac{m}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1$$

- 最优选择：两线相切



Preference maximization. The optimal consumption bundle will be at a point where an indifference curve is tangent to the budget constraint.

7.2消费者行为

- 用向量语言来说：$\mathbf{x}^*$为最优选择，$\mathrm{d}\mathbf{x}$是满足预算约束的$\mathbf{x}^*$的微小变动（perturbation），必有 $\mathbf{p}(\mathbf{x}^* \pm \mathrm{d}\mathbf{x}) = m$

(不能突破预算约束)

- 由于$\mathbf{p}\mathbf{x}=m$，因此有$\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{x}=0$，即$\mathrm{d}\mathbf{x}$正交于$\mathbf{p}$
- 对于任何微小变动$\mathrm{d}\mathbf{x}$，效用不能变，因此有

$$\mathrm{D}u(\mathbf{x}^*)\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

- 因此$\mathrm{D}u(\mathbf{x}^*)$也正交于$\mathrm{d}\mathbf{x}$，从而 $\mathrm{D}u(\mathbf{x}^*)$正交于$\mathbf{p}$

- 二阶条件可写成，

$$\mathbf{h}^t \mathrm{D}^2 u(\mathbf{x}^*)\mathbf{h} \leqslant 0 \ \textit{for all such that} \ \mathbf{ph} = 0$$

- 这要求效用函数的海塞矩阵对正交于价格向量的所有h都是负半定的，即效用函数$u(\mathbf{x})$为局部拟凹

7.3间接效用函数

- 间接效用函数 $v(\mathrm{p},m)=\max u(\mathbf{x})$

  $such\ that\ \mathbf{px}=m$

是p和m的函数。它相当于利润函数

- 性质：（1）$v(\mathbf{p},m)$对价格p非递增，即如果$\mathbf{p}'\geq\mathbf{p}$，则$v(\mathbf{p}',m)\leq v(\mathbf{p},m)$.类似的，$v(\mathbf{p},m)$对$m$非递减。

令$B=\{\mathbf{x}:\mathbf{px}\leq m\}$，$B'=\{\mathbf{x}:\mathbf{p}'\mathbf{x}\leq m\}$.对于$\mathbf{p}'>\mathbf{p}$,则 $B'\in B$ 因此在B上，$u(\mathbf{x})$的最大值至少与B'的最大值一样大，即$v(\mathbf{p},m)\geq v(\mathbf{p}',m)$.

同理，令$B=\{\mathbf{x}:\mathbf{px}\leq m\}$,$B'=\{\mathbf{x}:\mathbf{px}\leq m'\}$.若$m<m'$，则$B\in B'$ 因此$v(\mathbf{p},m')\geq v(\mathbf{p},m)$.

- （2） $v(\mathbf{p},m)$对$\mathbf{p}$和m是零次齐次。

因为所有的价格和收入同时乘以一个正数，预算集不变。因此若t>0，$v(t\mathbf{p},tm)=v(\mathbf{p},m)$

- (3) $v(\mathbf{p},m)$对价格$\mathbf{p}$是拟凸的。即对所有的k，$\{\mathbf{p}:v(\mathbf{p},m)\leq k\}$是一个凸集。（下等值集为凸）（拟凹函数的定义为上等值集为凸）

7.3间接效用函数

- 假设$v(\mathbf{p},m)\le k$， $v(\mathbf{p}',m)\le k$ 。令$\mathbf{p}''$是$\mathbf{p}$和$\mathbf{p}'$的凸组合， $\mathbf{p}''=t\mathbf{p}+(1\text{-}t)\,\mathbf{p}'$,需证明$v(\mathbf{p}'',m)\le k$
- 定义$B=\{\mathbf{x}:\mathbf{px}\le m\}$, $B'=\{\mathbf{x}:\mathbf{p}'\mathbf{x}\le m\}$ ，$B''=\{\mathbf{x}:\mathbf{p}''\mathbf{x}\le m\}$.要证明$B\cup B'\supset B''$
- 反证法。假设存在一个x，使$t\mathbf{px}+(1\text{-}t)\,\mathbf{p}'\mathbf{x}\le m$,但$\mathbf{px}>m$, $\mathbf{p}'\mathbf{x}>m$. *可得*

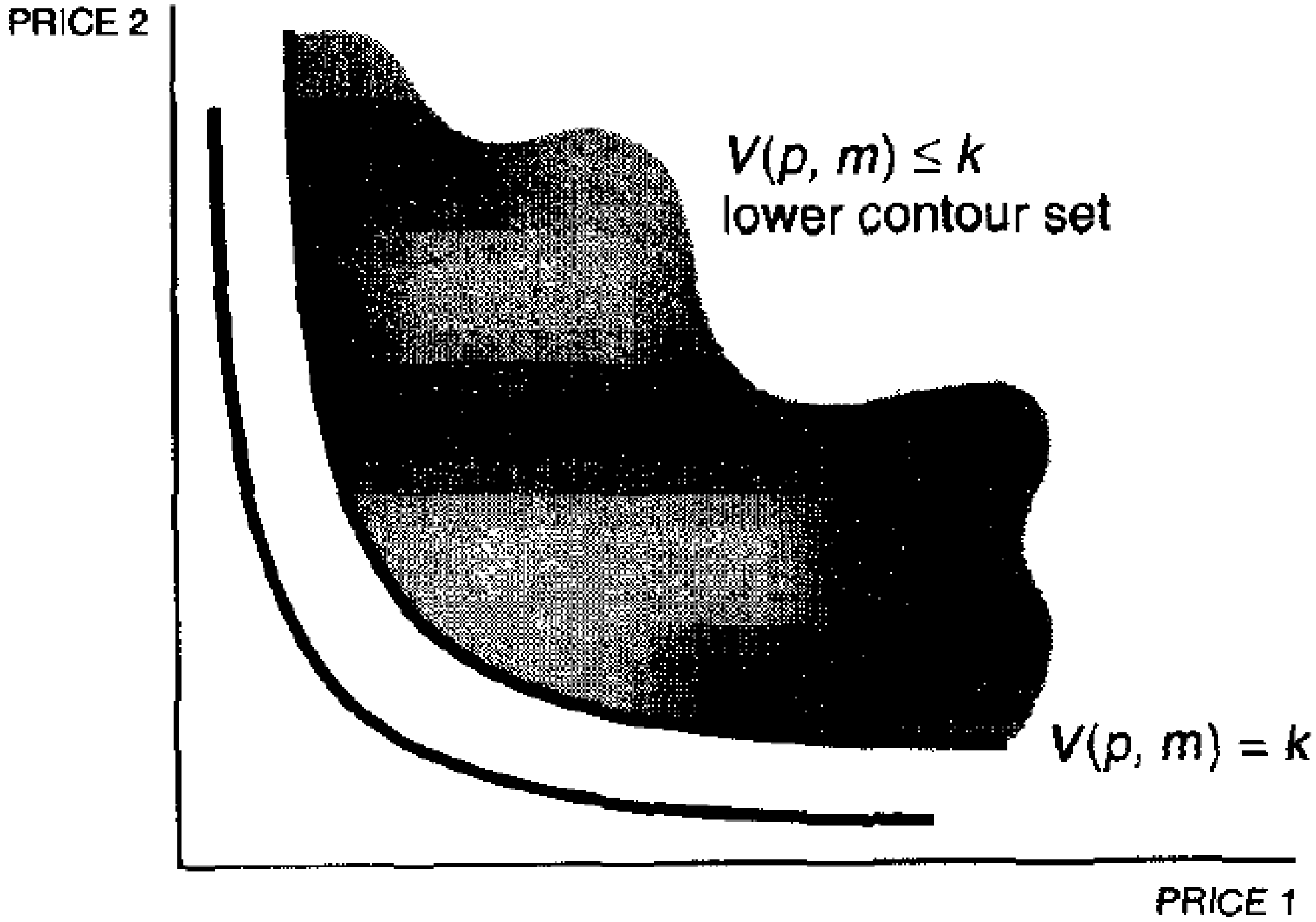
$$t\,\mathbf{px} > tm$$

$$(1-t)\mathbf{p}'\mathbf{x} > (1-t)m$$

- 求和得$t\mathbf{px}+(1\text{-}t)\,\mathbf{p}'\mathbf{x} > m$,*这与假设相矛盾*
- 因此有 $B\cup B'\supset B''$ B''里找到的极大值肯定小于B和B'里边的极大值（k）
- （4）对所有的 $\mathbf{p}\gg 0, m>0, v(\mathbf{p},m)$

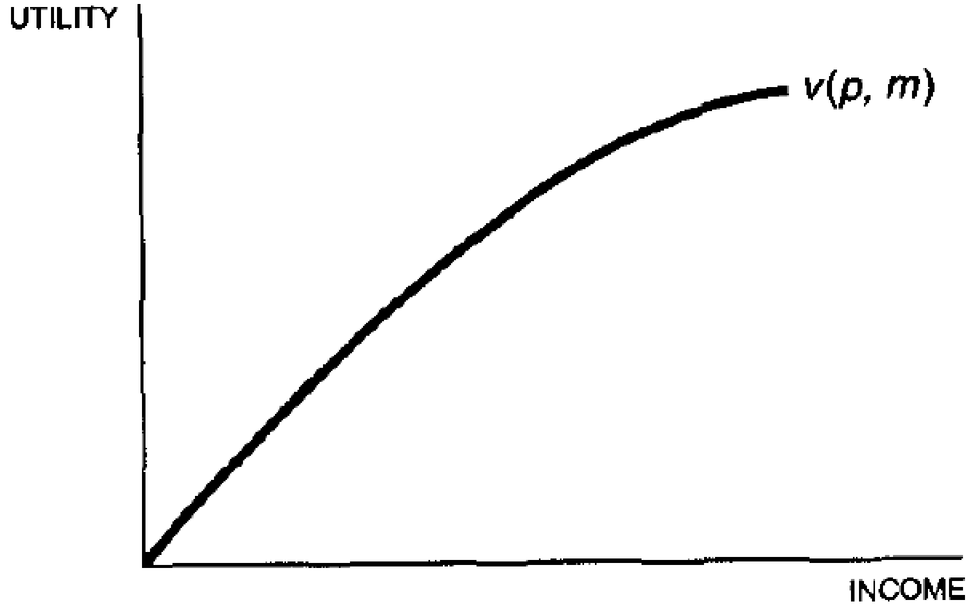
是连续的。

无需证明



- 价格无差异曲线集。这些价格无差异曲线是间接效用函数的水平集。越接近原点，代表着越高的效用水平。下等值集位于价格无差异曲线的东北部，是凸集。

Price indifference curves. The indifference curve is all those prices such that $v(\mathbf{p}, m) = k$, for some constant k. The lower contour set consists of all prices such that $v(\mathbf{p}, m) \leq k$.



Utility as a function of income. As income increases indirect utility must increase.

- 间接效用函数$v(\mathbf{p},m)$对m是严格递增的。可以得到这个函数的反函数。解出收入m。图中可找到在价格水平p下，实现效用u所必需的最小收入。这个函数称为支出函数。用$e(\mathbf{p},u)$表示

7.3间接效用函数

$$e(\mathbf{p},u)=\min \mathbf{px}$$

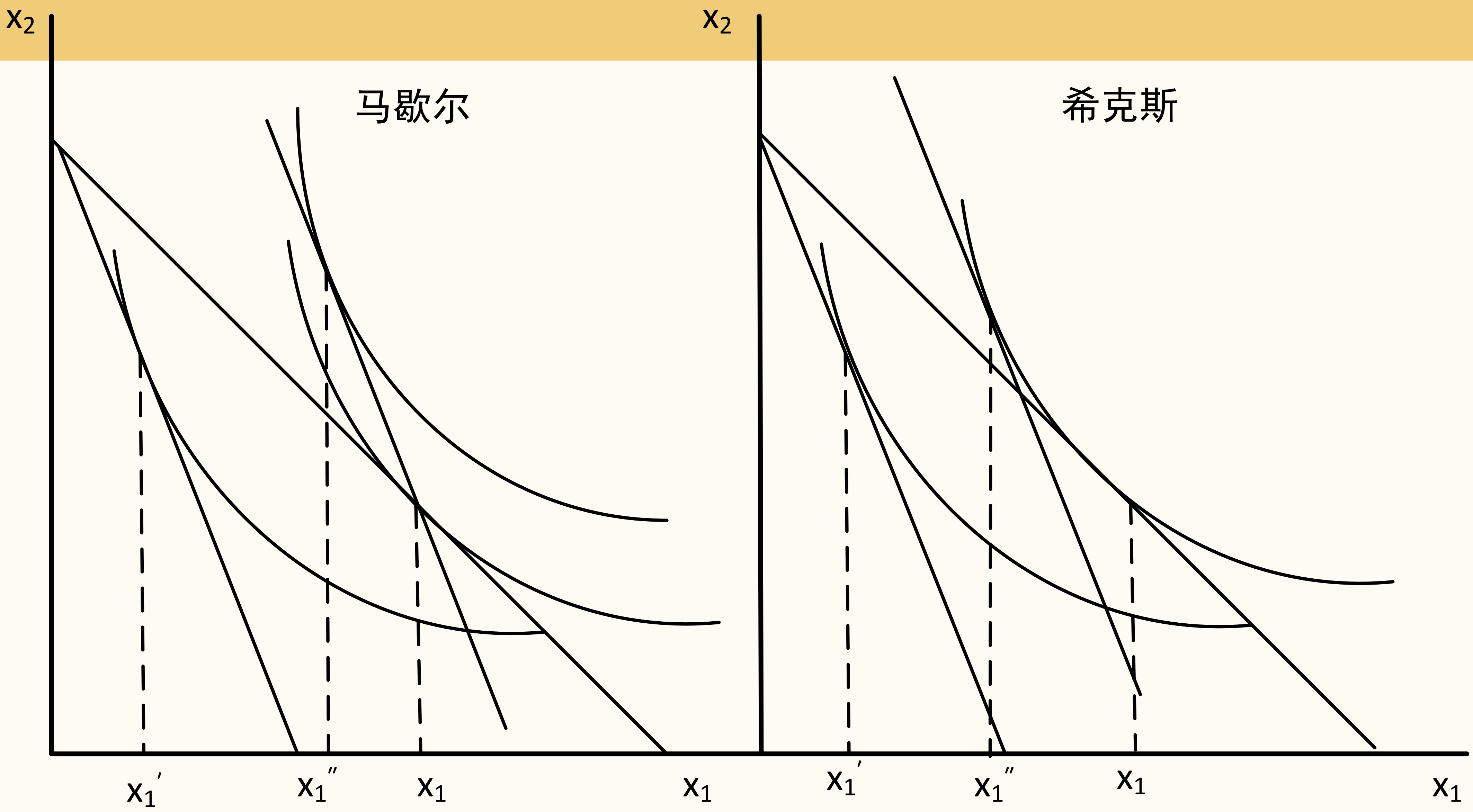
$$such\ that\ u(\mathbf{x})\geqslant u$$

- u不变，价格变动后，支出会怎样变动。它给出了实现某一效用的最小成本。类似于成本函数。
- （1）支出函数$e(\mathbf{p},u)$对价格$\mathbf{p}$是非递减的。
- （2）支出函数$e(\mathbf{p},u)$对价格$\mathbf{p}$是一次齐次的
- （3）支出函数$e(\mathbf{p},u)$关于p是凹的。
- （4）对 $\mathbf{p}\gg 0$, $e(\mathbf{p},u)$对价格$\mathbf{p}$是连续的
- （5）若$\mathbf{h}(\mathbf{p},u)$表示在价格$\mathbf{p}$，实现效用水平u所必需的最小化支出的消费束，如果$e(\mathbf{p},u)$可导，且$p_i>0$,那么

$$h_i(\mathbf{p},u)=\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}$$

7.3间接效用函数

- （谢泼德引理）希克斯需求函数。类似于条件要素需求函数。即通过变化价格和收入以便把消费者维持在某一固定的效用水平而形成的需求函数。
- 马歇尔需求函数表示为价格和收入的函数$\mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$
- 希克斯需求是福利经济学的基础，更多的用于福利经济学和政策研究。希克斯需求与支出有关，而马歇尔需求则与效用最大化有关
- 马歇尔与希克斯有时候相等。前者是给定预算约束，让无差异曲线去贴，后者是效用给定，让预算线去贴。



x2
马歇尔
x1′
x1″
x1
x1
x2
希克斯
x1′
x1″
x1
x1

7.4一些重要的恒等式

- 4个恒等式

- 效用最大化 $v(\mathbf{p},m^*)=\max u(\mathbf{x})$

  $$such\ that\ \mathbf{px}\leqslant m^*$$

- $\mathbf{x}^*$是这个问题的解。令$u^*=u(\mathbf{x}^*)$.

- 支出最小化 $e(\mathbf{p},u^*)=\min\mathbf{px}$

  $$such\ that\ u(\mathbf{x})\geqslant \mathbf{u}^*$$

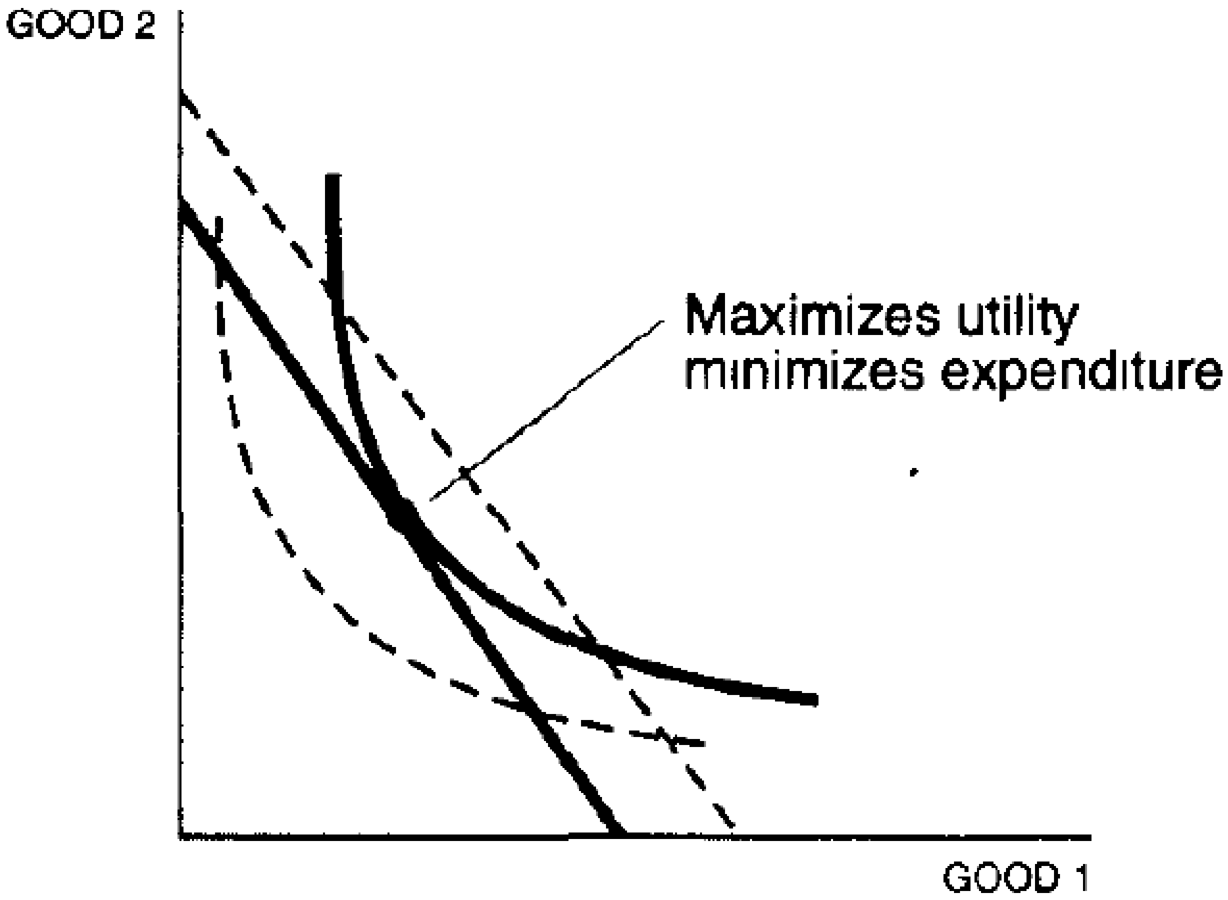
- 效用最大化和支出最小化有相同的解$\mathbf{x}^*$

- （1）$e(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))\equiv \mathrm{m}$.实现效用水平$v(\mathbf{p},m)$所需的最小支出是$m$。

- （2）$v(\mathbf{p},e(\mathbf{p},u))\equiv u$。由收入$e(\mathbf{p},u)$所能获得的最大效用是$u$。

- （3）$x_i(\mathbf{p},m)\equiv h_i(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))$.在收入$m$下的马歇尔需求与在效用水平$v(\mathbf{p},m)$下的希克斯需求相等。

- （4）$h_i(\mathbf{p},u)\equiv x_i(\mathbf{p},e(\mathbf{p},u))$.效用水平$u$下的希克斯需求与收入水平$e(\mathbf{p},u)$下的马歇尔需求相等。



- 恒等式（4）把可以观测的马歇尔需求函数和不可观测的希克斯需求函数联系在一起。它表明希克斯需求函数等于适当收入水平下的马歇尔需求函数

Maximize utility and minimize expenditure. Normally, a consumption bundle that maximizes utility will also minimize expenditure and vice versa.

7.4一些重要的恒等式

- Roy's identity. If $\mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$ is the Marshallian demand function, then

$$x_i(\mathbf{p},m) = -\frac{\dfrac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial m}}$$

- (与霍特林、谢泼德类似)
- 第二种方法只是求导，较简单，自己看

- 第一种证明方法
- 设消费束$\mathbf{x}^*$在$(\mathbf{p}^*, m^*)$得到最大效用u^*。根据恒等式 $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*, m^*) \equiv \mathbf{h}(\mathbf{p}^*, u^*)$ (1)

  $u^* \equiv v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*))$ (2)（对所有p都成立）
- 不管价格水平如何，如果消费者在这些价格下以最低收入实现效用u^*，那么该消费者能获得的最大效用就是u^*

7.4—些重要的恒等式

- （2）式对p_i求导

$$0=\frac{\partial v(\mathbf{p}^*,m^*)}{\partial p_i}+\frac{\partial v(\mathbf{p}^*,m^*)}{\partial m}\frac{\partial e(\mathbf{p}^*,u^*)}{\partial p_i}$$

- 与（1）式结合

$$x_i(\mathbf{p}^*m^*)\equiv h_i(\mathbf{p}^*,u^*)$$

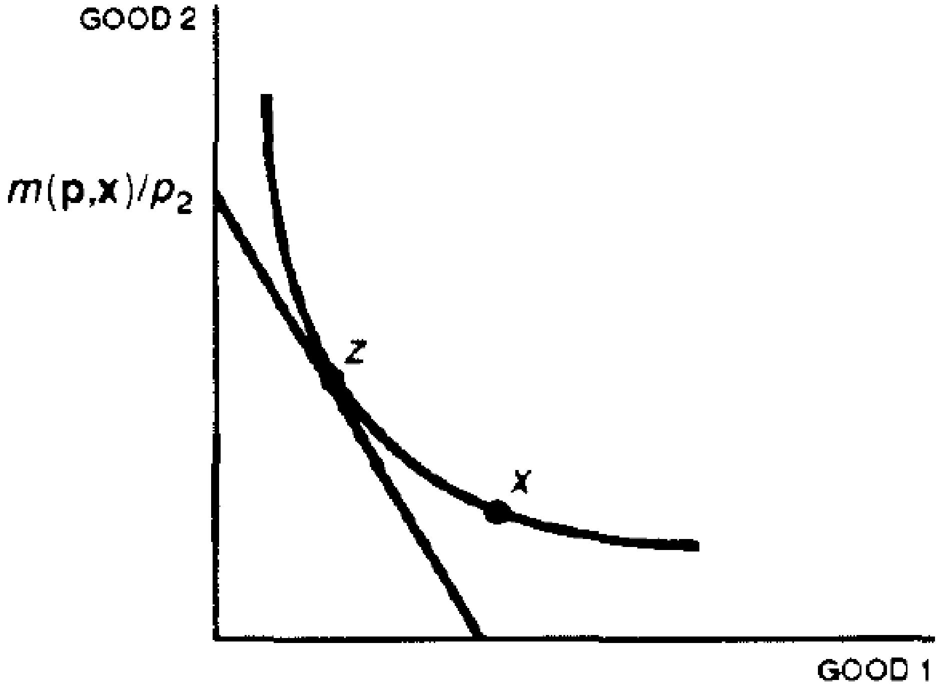
$$=\frac{\partial e(\mathbf{p}^*,u^*)}{\partial p_i}=-\frac{\partial v(\mathbf{p}^*,m^*)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}^*,m^*)/\partial m}$$

- 这个恒等式对所有与的（$\mathbf{p}^*,m^*$）都满足，由于$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^*$ （$\mathbf{p}^*,m^*$）,结果得证

- 含义：价格变了，预算线沿着无差异曲线 变。切点的变化由对p_i求导数得到。得到2项，其中包括希克斯需求。一旦得到希克斯需求，价格就固定在p*上，那么希克斯需求就等于马歇尔需求。就可把两个恒等式连起来了

- 与厂商理论中相关命题的证明基本一样，只是所表达的含义不同

7.5货币测度的效用函数



Direct money metric utility function. The money metric utility function gives the minimum expenditure at prices $\mathbf{p}$ necessary to purchase a bundle at least as good as $\mathbf{x}$.

- 问题：在价格p，一个给定的消费者需要多少货币才能与其消费束**x**的境况同样好?
- 新农村运动后，把农民搬下山，新提供一篮子商品z正好和之前的一篮子商品x的效用相等。（最小化支出）需要多少钱?
- 用货币测度农民之前的生活水准。
- （地震后重建需感受到和以前一样好）

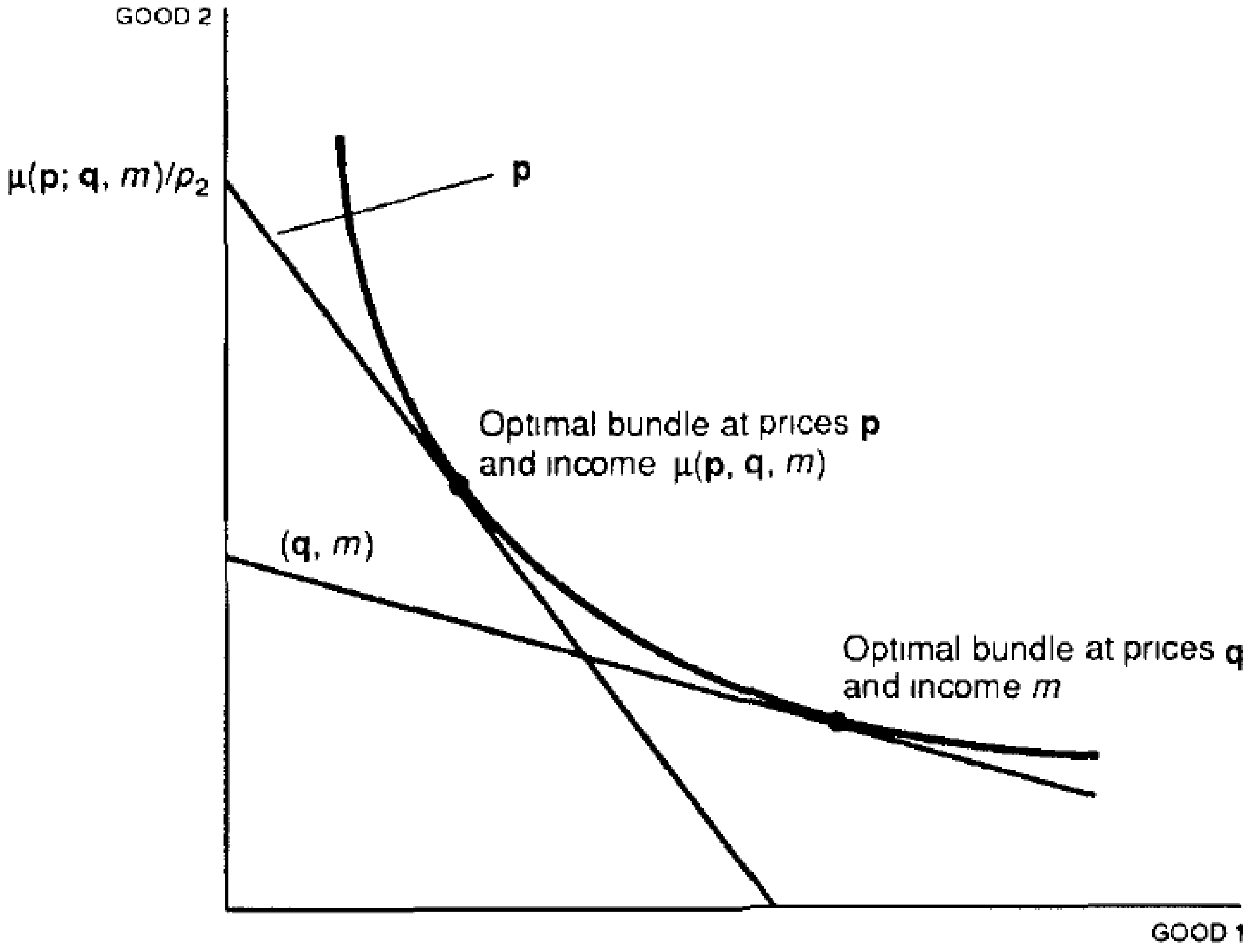
7.5货币度量的效用函数

- 要解决以下问题 $$\min_{z} \mathbf{pz}$$ $$such\ that\ u(\mathbf{z}) \geqslant u(\mathbf{x})$$
- 货币度量的效用函数$m(\mathbf{p},\mathbf{x}) \equiv e(\mathbf{p},u(\mathbf{x}))$
- x固定时，效用u(x)固定。$m(\mathbf{p},\mathbf{x})$类似于支出函数。
- p固定时，$m(\mathbf{p},\mathbf{x})$实际上是一个效用函数。对于固定价格，$m(\mathbf{p},\mathbf{x})$仅是效用函数的单调变换。因此它本身也是一个效用函数
- 货币度量的间接效用函数

$$\mu(\mathbf{p};\mathbf{q},m) \equiv e(\mathbf{p},v(\mathbf{q},m))$$

目标效用函数，要达到这个目标效用要多少钱

- $\mu(\mathbf{p};\mathbf{q},m)$形式上是一个关于p的支出函数。但实际上是一个关于价格q和收入m的间接效用函数。因为它是间接效用函数的单调变换



Indirect money metric utility function. This function gives the minimum expenditure at prices $\mathbf{p}$ for the consumer to be as well off as he would be facing prices $\mathbf{q}$ and having income m.

7.5货币度量的效用函数

- 例子：CES效用函数

$$u(x_1,x_2)=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$$

- 也可单调变换为

$$u(x_1,x_2)=\frac{1}{\rho}\ln(x_1^\rho+x_2^\rho)$$

$$e(\mathbf{p},u)=(p_1^r+p_2^r)^{1/r}u$$

其中$r=\rho/(\rho-1)$

- 求这个方程的反函数，即间接效用函数

$$v(\mathbf{p},m)=(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}m$$

- 使用罗伊恒等式，得到需求函数

$$x_1(\mathbf{p},m)=\frac{-\partial v(\mathbf{p},m)/\partial p_1}{\partial v(\mathbf{p},m)/\partial m}$$

$$=\frac{\frac{1}{r}(p_1^r+p_2^r)^{-\left(1+\frac{1}{r}\right)}mrp_1^{r-1}}{(p_1^r+p_2^r)^{-\frac{1}{r}}}=\frac{p_1^{r-1}m}{p_1^r+p_2^r}$$

- 可得对应于CES效用函数的货币度量的效用函数

$$m(\mathbf{p},\mathbf{x})=e(\mathbf{p},u(\mathbf{x}))=(p_1^r+p_2^r)^{\frac{1}{r}}(x_1^\rho+x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

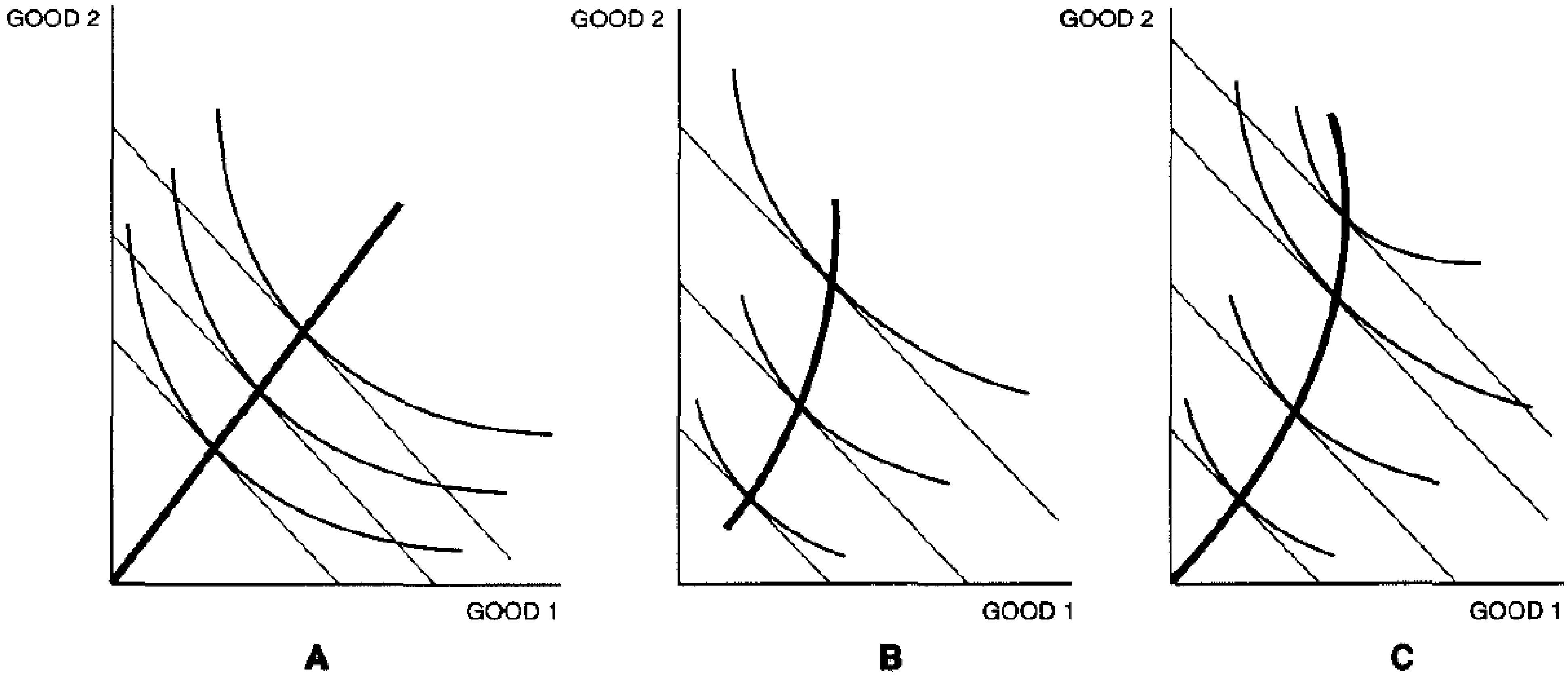
$$\mu(\mathbf{p};\mathbf{q},m)=e(\mathbf{p},v(\mathbf{q},m))=(p_1^r+p_2^r)^{\frac{1}{r}}(q_1^r+q_2^r)^{-\frac{1}{r}}m$$

总结

- 对偶的例子
- 柯布-道格拉斯效用函数（自己看）
- 我们得到间接效用函数、支出函数、希克斯需求、马歇尔需求。它们对应于生产理论的利润函数、成本函数、条件要素需求函数、要素需求函数。它们的一系列性质都是对应的。如利润（间接效用）函数是价格的凸函数，成本（支出）函数对价格是凹的。
- 我们知道一个可知道另一个

8 CHOICE

8.1比较静态



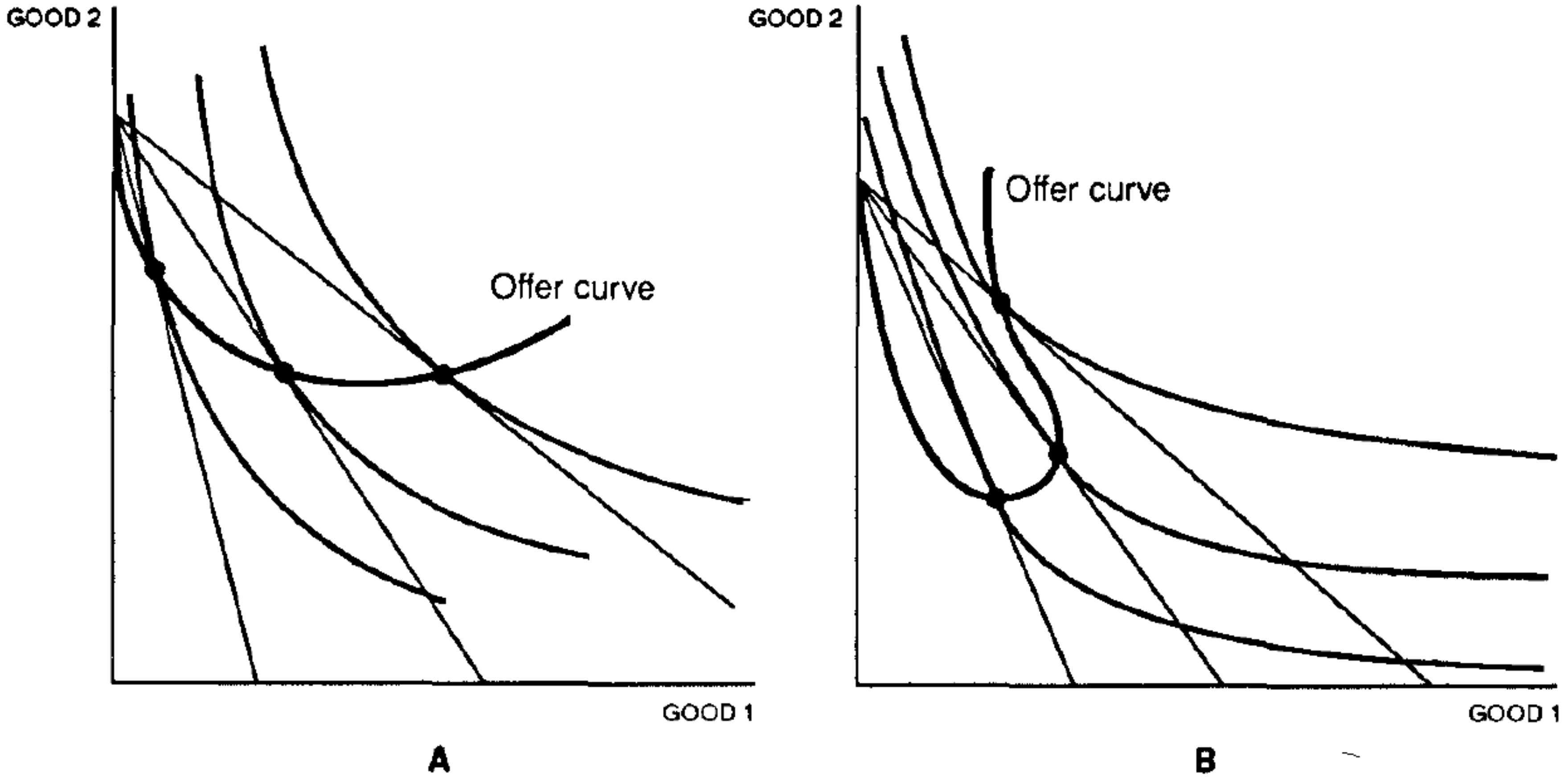
Income expansion paths. Panel A depicts unit elastic demands, in panel B good 2 is a luxury good, and in panel C, good 1 is an inferior good.

- 研究当价格和收入变化时，消费者需求怎样变化（比较静态）。即需求对价格和收入的响应程度。
- 给定价格。收入于物品需求的函数关系，称为恩格尔曲线

8.1比较静态

- （1）等比例变动。收入5000→10000每种消费都增加1倍。收入增加后，维持原有的消费习惯更容易了。研究特定群体的消费习惯是重要的。不同国家，不同年龄段的群体都不同。这是个营销策略问题。
- （2）一种物品需求的增加幅度大于另一种。这种物品被称为奢侈品。奢侈品的定义随时代不同而变动（服装）
- （3）低档物品：收入增加而导致需求减少。（土豆）

8.1比较静态

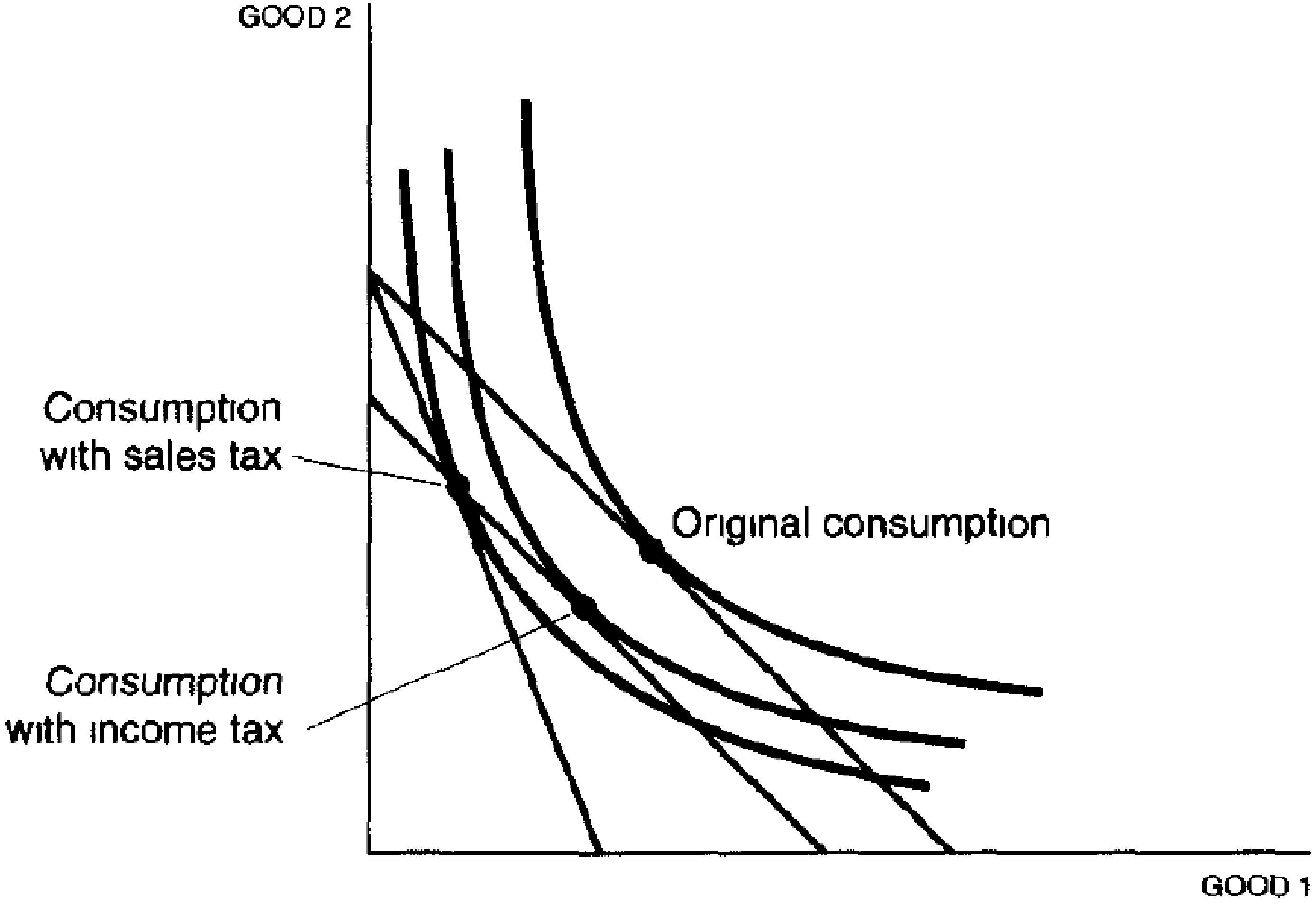


Offer curves. In panel *A* the demand for good 1 increases as the price decreases so it is an ordinary good. In panel *B* the demand for good 1 decreases as its price decreases, so it is a Giffen good.

- 给定收入，价格变动引起需求的变动
  （A）正常情况
  （B）吉芬物品

8.1比较静态

- 消费税和所得税（Excise and income taxes）
  - 考虑消费税。征税前预算约束$p_1x_1+p_2x_2=m$　征税后预算约束$(p_1+t)x_1+p_2x_2=m$ 用(x_1^*,x_2^*)表示税后消费水平。征税后得到的税收为tx_1^*.
  - 假定对收入征税以获取同样的税收。消费者的预算约束变为$p_1x_1+p_2x_2=m-tx_1^*$ 这条预算线穿过了通过(x_1^*,x_2^*)的无差异曲线。
  - 因此尽管税收所得相等。但消费者缴纳所得税的效用水平更高。
  - 若征消费税，则替消费者做出选择。迫使他更偏好x_2，减少x_1的消费，因为你干扰了它的价格



Excise tax and income tax. A consumer is always worse off facing an excise tax than an income tax that generates the same revenue.

8.1比较静态

- 更一般的含义：尽量不要破坏价格为代表的市场机制。
- 应用：家电下乡2种方案
  - 购买确定的品牌，补贴13%
  - 同样一笔钱，如20亿，直接补给农民
  - 第2种模式更好。把选择权还给农民，有利于厂商的竞争。

8.2斯勒茨基方程

- 希克斯需求函数不可直接观测，但可以通过马歇尔需求函数的偏导数来得到希克斯需求。这个关系称为斯勒茨基方程。

$$\frac{\partial x_j(\mathbf{p},m)}{\partial p_i}=\frac{\partial h_j[\mathbf{p},v(\mathbf{p},m)]}{\partial p_i}-\frac{\partial x_j(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_i(\mathbf{p},m)$$

- 证明：令$\mathbf{x}^*$在$(\mathbf{p}^*,m^*)$使效用最大化。令$u^*=u(\mathbf{x}^*)$.有恒等式

$$h_j(\mathbf{p},u^*)\equiv x_j[\mathbf{p},e(\mathbf{p},u^*)]$$

- 两边对p_i求导，并在$\mathbf{p}^*$求偏导数的值

$$\frac{\partial h_j(\mathbf{p}^*,u^*)}{\partial p_i}=\frac{\partial x_j(\mathbf{p}^*,m^*)}{\partial p_i}+\frac{\partial x_j(\mathbf{p}^*,m^*)}{\partial m}\frac{\partial e(\mathbf{p}^*,u^*)}{\partial p_i}$$

8.2斯勒茨基方程

- 左边是p_i变化时，希克斯需求的变化。右边是把支出固定在m^*时马歇尔需求的变化，加上收入变化引起的马歇尔需求的变化与为维持效用水平不变收入必须变化的量之积。其中最后一项 $\frac{\partial e(\mathbf{p}^*, u^*)}{\partial p_i}$

就是x_i^*（参见罗伊恒等式，p82）。

- 从而有

$$\frac{\partial x_j(\mathbf{p}^*, m^*)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(\mathbf{p}^*, u^*)}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j(\mathbf{p}^*, m^*)}{\partial m} x_i^*$$

- （不涉及收入变化）

- 这就是斯勒茨基方程。证毕。