Universidad Autónoma de México

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III

Tarea I

Alan Ernesto Arteaga Vázquez

Alma Rocío Sánchez Salgado

Jerónimo Almeida Rodríguez

Jueves 23 de Agosto del 2018

1. Marsden - Tromba — Sección 3.3

18. Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + kyz$

a Comprobar que $(0,0,0)$ es punto crítico para f.

$$\nabla f = \langle \frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta z} \rangle = \langle 2x, 2y + kz, 2z + ky \rangle$$

Igualando las parciales a 0, tenemos que

i Si $2x = 0$, entonces $x = 0$. s

ii Si $2y + kz = 0$, entonces $2y = -kz$ y $y = \dfrac{-kz}{2}$.

iii Si $2z + ky = 0$, entonces $z = \dfrac{-ky}{2}$ y por (ii) $z = \dfrac{-k(\frac{-kz}{2})}{2} = \dfrac{k^2 z}{4}$.

Además, por (iii) tenemos que $z = \dfrac{k^2 z}{4} \Rightarrow \dfrac{z}{z} = \dfrac{k^2}{4} \Rightarrow 1 = \dfrac{k^2}{4}$
$\Rightarrow 4 = k^2 \Rightarrow k = \pm 2$
De (ii) y de (iii) podemos ver que para que se cumpla la igualdad, $y = 0$ y $z = 0$.
Por lo tanto, $f(x,y,z)$ tiene un punto crítico en $(0,0,0)$.

b Cómo k es una constante y el punto crítico de la función es cuándo $x = y = z = 0$, entonces $k \in (-\infty, \infty)$ porque por propiedades de campo, sabemos que $kyz = k(0) = 0$.
Por lo tanto, k puede tomar cualquier valor.

34. Sea $f(x,y) = 5ye^x - e^{5x} - y^5$

a Demuestre que f tiene un único punto crítico que también es máximo de f. Para encontrar el punto crítico hacemos $\nabla f = 0$. Así,

i $\dfrac{\delta f}{\delta x} = 5ye^x - 5e^{5x}$. Entonces, $\dfrac{\delta f}{\delta x} = 0$ cuando $5ye^x - 5e^{5x} = 0$.

ii $\dfrac{\delta f}{\delta y} = 5e^x - 5y^4$. Entonces, $\dfrac{\delta f}{\delta y} = 0$ cuando $5e^x - 5y^4 = 0$.

De (i) tenemos entonces que $5e^x = 5e^{5x} \Rightarrow ye^x = e^5x$
De (ii) tenemos que $5e^x = 5y^4 \Rightarrow e^x = y^4$ De esta ecuación, proponemos al vector $\vec{x_0} = (0,1)$.
Evaluando (ii) en $\vec{x_0}$ tenemos que

$$e^x = e^0 = 1 = 1^4 = y^4$$

Y, evaluando (i) en $\vec{x_0}$ tenemos que

$$ye^x = 1 \cdot e^0 = e^0 = 1 = e^{5 \cdot 0} = e^{5x}$$

Por lo tanto, $f(\vec{x_0})$ es un punto crítico. Para comprobar que $\vec{x_0}$ es máximo, lo evaluamos en el Hessiano.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5ye^x - 25e^{5x} & 5e^x \\ 5e^x & -20y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5ye^x - 25e^{5x} & 5e^x \\ 5e^x & -20y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5(1)e^0 - 25e^{5(0)} & 5e^(0) \\ 5e^(0) & -20(1)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 & 5 \\ 5 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20x + 5y & 5x - 20y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20x^2 + 5xy + 5xy - 20y^2 \end{bmatrix}$$

Entonces, $\text{Hess}(\vec{x_0}) = [-20x^2 + 5xy + 5xy - 20y^2]|_{\vec{x_0}} = -20(0) + 10(0)(1) - 20(1) = -20$
Cómo el $\text{Hess}(\vec{x_0}) < 0$, entonces $\vec{x_0}$ es un máximo.

b Muestre que f no está acotado en el eje y y por lo tanto no tiene máximo global. Fijamos a $x = 0$ y evaluamos la funcion $f(0, y) = 5ye^0 - e^0 - y^5 = 5y - 1 - y^5$ y observamos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(0, y) = \pm\infty$$

Por lo tanto, $f(0, y)$ no está acotada y no tiene máximo global.

23. An examination of the function

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (y - 3x^2)(y - x^2)$$

will give an idea of the difficulty of finding conditions that guarantee that a critical point is a relative extremum when Theorem 6 fails. Show that

a) the origin is a critical point of f *;*

Procedemos a derivar parcialmente la función, así, se sigue:

$$f(x, y) = y^2 - 3x^2y - x^2y + 3x^4 = y^2 - 4x^2y + 3x^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -8xy + 12x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4x^2$$

luego, para ver que precisamente el origen es un punto crítico, evaluamos las parciales en dicho punto, así:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = -8(0)(0) + 12(0)^3 = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 2(0) - 4(0)^2 = 0$$

así, como todas las parciales son cero en el origen, se sigue que este es un punto crítico.

b) f *has a relative minimum at* $(0, 0)$ *on every straight line through* $(0, 0)$*; that is, if* $g(t) = (at, bt)$*, then* $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *has a relative minimum at 0,for every choice of a and b;*

Consideremos ahora a la función $f \circ g$:

$$f \circ g = (bt)^2 - 4(at)^2(bt) + 3(at)^4$$

$$= b^2t^2 - 4a^2bt^3 + 3a^4t^4$$

ahora, derivando la función compuesta, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2b^2t - 12a^2bt^2 + 12a^4t^3 = 2t(b^2 - 6a^2bt + 6a^4t^2)$$

se sigue que $t = 0$ es un punto crítico correspondiente a $(x, y) = (0, 0)$. Ahora, derivando nuevamente la función, se tiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 2b^2 - 24a^2bt + 36a^4t^2$$

ahora, evaluando la segunda derivada en el punto $t = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_0 = 2b^2 - 24a^2b(0) + 36a^4(0)^2 = 2b^2$$

como

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_0 = 2b^2 > 0$$

se sigue que $t = 0$ es un mínimo local para $\forall a$ si $b \neq 0$

Ahora, si $b = 0$, se cumple que

$$f \circ g(t) = 3(at)^4$$

así que $t = 0$ resulta ser un mínimo local para cualquier elección de a y b.

(c) the origin is not a relative minimum of f .

27.*Suppose $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ is C^2, and that x_0 is a critical point for f. Suppose $Hf(x_0)(h) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 4h_2h_3$ Does f have a local maximum, minimum, or saddle a x_0?* ***51.***

(a) *Let f be a C^1 function on the real line $\mathbb{R}$. Suppose that f has exactly one critical point x_0 that is a strict local minimum for f . Show that $x_0 4$ is also an absolute minimum for f; that is, that $f(x) \geq f(x_0)$ for all x.*

(b) *The next example shows that the conclusion of part (a) does not hold for functions of more tha one variable. Let $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ be defined by*

$$f(x, y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$$

41. Find the absolute maximum and minimum values for

$$f(x, y) = sinx + cosy$$

on the rectangle R defined by

$$0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$$

Derivando parcialmente, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x$$

ahora, para los intervalos $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$ se cumple:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{si} \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{si} \quad y = 0, \pi, 2\pi$$

así, se sigue que la función tiene puntos críticos en:

$$(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$$

$$(\frac{3\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, \pi), (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$$

ahora, construimos la matriz Hessiana para la función derivando parcialmente por segunda vez a la función, así:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos y$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{bmatrix}$$

luego, evaluando la matriz en los puntos críticos y sacando su determinante, se tiene:

$$det[H(\frac{\pi}{2},0)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Como $f_{xx} < 0$ y $det(H) > 0$, entonces corresponde a un máximo local.

$$det[H(\frac{\pi}{2},\pi)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos \pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Como $f_{xx} < 0$ y $det(H) < 0$, entonces corresponde a un punto de ensilladura.

$$det[H(\frac{\pi}{2},2\pi)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos 2\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Como $f_{xx} < 0$ y $det(H) > 0$, entonces corresponde a un máximo local.

$$det[H(\frac{3\pi}{2},0)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{3\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Como $f_{xx} > 0$ y $det(H) < 0$, entonces corresponde a un punto de ensilladura.

$$det[H(\frac{3\pi}{2},\pi)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{3\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos \pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Como $f_{xx} > 0$ y $det(H) > 0$, entonces corresponde a un mínimo local.

$$det[H(\frac{3\pi}{2},2\pi)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{3\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos 2\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Como $f_{xx} > 0$ y $det(H) < 0$, entonces corresponde a un punto de ensilladura.

Luego, evaluando máximos locales en la función para determinar máximos absolutos:

$$f(\frac{\pi}{2},0) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}) + cos(\pi) = 1 + 1 = 2$$

$$f(\frac{\pi}{2},2\pi) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}) + cos(2\pi) = 1 + 1 = 2$$

así, determinamos que la función f tiene máximos absolutos en los puntos

$$(\frac{\pi}{2},0), (\frac{\pi}{2},2\pi)$$

y mínimo absoluto en

$$(\frac{3\pi}{2},\pi)$$

2. Marsden - Tromba — Sección 3.4

26.*An irrigation canal in Arizona has concrete sides and bottom with trapezoidal cross section of area* $A = y(x + y\tan\theta)$ *and wetted perimeter*
$P = x + \dfrac{2y}{\cos\theta}$, *where* x *=bottom width,* y *=water depth, and* θ *=side inclination, measured from vertical.The best design for a fixed inclination* θ *is found by solving* P = *minimum subject to the condition* A = *constant. Show that* $y^2 = \dfrac{A\cos\theta}{2-\sin\theta}$

3. Hughes-Hallet — Sección 16.1

5. *Figure* 16,8 *shows a contour plot of population density, people per square kilometer, in a rectangle of land* 3 *km by* 2 *km. Estimate the population in the refion represented by Figure* 16,8

Sea R el rectángulo y $f(x,y)$ la densidad poblacional en el punto (x,y), la población está dada por $\int_R f(x,y)dA$.. Si aproximamos la integral con sumas de Riemann usando la información de cada km por km, entonces podemos tomar la densidad en un un punto y sumarlos. Vamos a dividir el eje y en dos partes y el eje x en tres, tenemos los puntos: (0.5, 1.5)=500, (0.5, 0.5)= 650, (1.5,1.5)= 450, (1.5, 0.5)=200, (2.5, 1.5)=100 y (2.5, 0.5)= 400 por lo que la densidad por km cuadrado es la suma de estos valores

$$\int_R (x,y)dA \approx 500 + 450 + 100 + 650 + 200 + 400 = 2300$$

6-12 *Decide(without calculation) wheter the integrals are positive, negative, or zero. Let D be the region inside the unit circle centered at the origin, let R be the rigth half of D and let B be the bottom half of D*

6. $\int_D dA$ Es positiva, la integral de $f(x,y) = 1$

7. $\int_R 5x dA$ La integral es positiva, tomemos en cuenta que es la mitad derecha del área total del círculo unitario, entonces toma x toma valores mayores a 0. La función siendo integrada es $f(x,y) = 5x$

8. $\int_B 5x dA$ B es una función simétrica respecto a x por lo que la integral se cancela: $f(x,y) = -f(-x,y)$ y el resutado es cero.

9. $\int_D (y^3 + y^5)dA$ D es simétrico respecto a y, por lo que la integral es cero también

10. $\int_B (y^3 + y^5)dA$ Los valores de la función con $y < 0$ (porque es la mitad de abajo del círculo)son negativos,por lo que la integral también lo es.

11. $\int_D (y - y^3)dA$ $f(x,y) = y - y^3$ es una función impar, y D es simétrica respecto a y por lo que la integral se cancela y es igual a cero

12. $\int_B (y - y^3)dA$ La función $f(x,y) = y - y^3$ es negativa en la región B ya que todos los valores de y en esa región son negativos, entonces tenemos que $\mid y^3 \mid < \mid y \mid$ por lo que la integral es negativa.

4. Anton-Bivens-Davis — Sección 14.1

10. $\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 x\cos xy dy dx$ En nuestra herramienta de cálculo pusimos : N[Integrate[x Cos[x y], x, 1, 2, y, Pi/2, Pi]] y nos arroja :

$$int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 x\cos xy dy dx = -\frac{4}{\pi} \approx -1{,}27324$$

28.*Use the result in Exercise 27 to evaluate the integral*

$$\int_0^{ln3}\int_-^1 1\sqrt{e^y+1}\tan x dx dy$$

by inspection. Explain your reasoning ***33***