Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III
Tarea 2

Alan Arteaga, Alma Sánchez, Jerónimo Almeida

El cuaderno dónde se resuelven los problemas evaluados en un CAS se encuentran en la siguiente liga:
$https : //github.com/chiknahuikoatl/Tarea\_MCA\_III$
$/blob/master/Tarea\_MCA\_III/Tarea\_2/Tarea\_2.nb$

Anton-Bivens-Davis

Sección 14.2

15-18 Evaluate the double integral in two ways using iterated integrals: (a) viewing R as a type I region, and (b) viewing R as a type II region.

18.

$\iint\limits_R y \,\mathrm{d}A$; R is the region in the first quadrant enclosed between the circle $x^2 + y^2 = 25$ and the line $x + y = 5$.

Entonces la integral al definir los límites de integración, tenemos:

$$\iint\limits_R y \quad textdA = \int_0^5 \int_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} y\,dy\,dx$$

Integramos con respecto a y

$$= \int_0^5 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} dx$$

Sacamos el $\frac{1}{2}$, evaluamos y resolvemos las operaciones

$$= \frac{1}{2}\int_0^5 \left(25 - x^2\right) - (5 - x)^2 \, dx$$

Llegamos a

$$= \frac{1}{2}\int_0^5 10x - 2x^2\,dx$$

Calculando las integrales por separado

$$= \frac{1}{2}\int 10x\,dx - \int 2x^2\,dx$$

$$= 10\int x\,dx = 10 * \frac{x^{1+1}}{1+1} = 5x^2$$

$$= 2\int x^2\,dx = 2 * \frac{x^2+1}{2+1} = \frac{2x^3}{3}$$

$$= 5x^2 - \frac{2x^2}{3}$$

Entonces tenemos que calcular los límites tal que

$$\int_0^5 10 - 2x^2\, dx = \frac{125}{3}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} * \frac{125}{3} = \frac{125}{6}$$

Ahora la otra región

$$\iint_R y \quad textdA = \int_0^5 \int_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} \quad y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^5 y[\sqrt{25 - y^2} - (5 - y)]\, dy$$

Que lo podemos separar

$$= \int_0^5 y\sqrt{25 - y^2} dy - \int_0^5 y(5 - y)\, dy$$

$$= \frac{125}{3}$$

Por lo tanto

$$\frac{125}{3} - \frac{125}{6} = \frac{125}{6}$$

19-24. Evaluate the double integral.

22. $\iint_R x \text{ d}A$; R is the region enclosed by $y = sin^{-1}x, x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, and $y = 0$.

Notamos que la región R es el área entre las curvas:

Entonces, la integral iterada es:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\arcsin x} x \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

Resolviendo la integral interna:

$$\int_0^{\arcsin x} x \, \mathrm{d}y = x \int_0^{\arcsin x} \mathrm{d}y$$

$$= x(\arcsin x)$$

Entonces:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\arcsin x} x \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x(\arcsin x) \, \mathrm{d}x$$

Integrando por partes:

$$u = \arcsin x \to du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$dv = x dx \to v = \frac{x^2}{2}$$

Entonces:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x(\arcsin x) \, \mathrm{d}x = \arcsin(x) \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Donde:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Por sustitución trigonométrica:

$$x = \sin(\theta) \to \frac{dx}{d\theta} = \cos(\theta) \to dx = \cos(\theta) d\theta$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\sin(\theta) = x \to \sin^2(\theta) = x^2$$
$$x = \sin(\theta) \to \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\theta) \to \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$
$$x = \sin(\theta) \to 0 = \sin(\theta) \to \theta_2 = 0$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-\cos 2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) - 0 + \frac{1}{2}\sin\left(2\cdot 0\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin 0\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \\
&= \frac{\pi-2}{16}
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x(\arcsin x)\,\mathrm{d}x &= \arcsin(x)\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \arcsin(x)\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{\pi-2}{16} \\
&= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} - \arcsin(0)\frac{(0)^2}{2} - \frac{\pi-2}{16} \\
&= \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi-2}{16} \\
&= \frac{1}{4}\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi-2}{4}\right) = 0{,}125u^2
\end{aligned}
$$

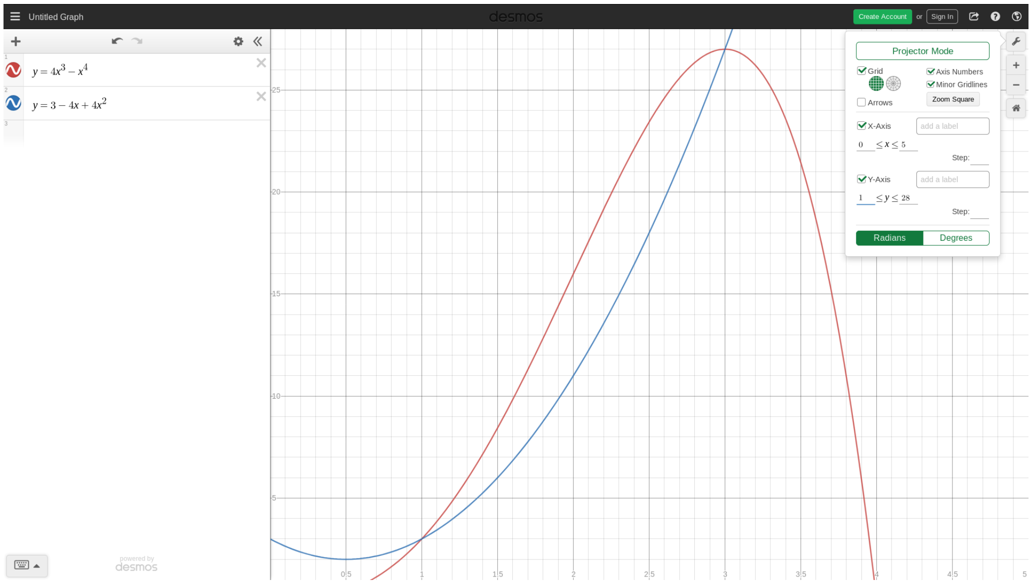

Figura 1: Gráfica de las funciones dadas para el ejercicio 14.2.28.

28.

(a) By hand or with the help of a graphing utility, make a sketch of the region R enclosed between the curves $y = 4x^3 - x^4$ and $y = 3 - 4x + 4x^2$.

(b) Find the intersection of the curves in part (a)
Según las gráficas del inciso anterior pdemos ver que las curvas se intersectan en los puntos

$$x = 1,\ 3\ \ \&\ \ y = 3,\ 27$$

(c) Find $\displaystyle\iint_R x \; dA$

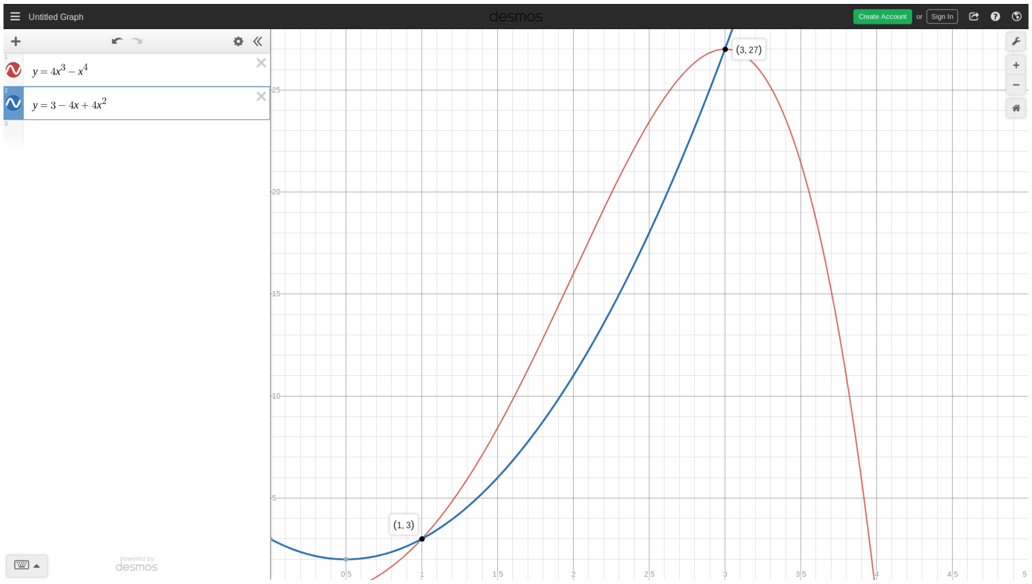

Figura 2: Gráfica de las funciones dadas para el ejercicio 14.2.28 con los puntos dónde se intersectan las gráficas.

$$
\begin{aligned}
\int\int_R x &= \int_1^3 \int_{3-4x+4x^2}^{4x^3-x^4} xdydx \\
&= \int_1^3 yx\Big|_{3-4x+4x^2}^{4x^3-x^4} dx \\
&= \int_1^3 (4x^4 - x^5 - 3x + 4x^2 - 4x^3)dx \\
&= \left(\tfrac{4x^5}{5} - \tfrac{x^6}{6} - \tfrac{3x^2}{2} + \tfrac{4x^3}{3} - x^4\right)\Big|_1^3 \\
&= \tfrac{972}{5} - \tfrac{243}{2} - \tfrac{27}{2} + 36 - 81 - \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{2} - \tfrac{4}{3} + 1 \\
&= \tfrac{968}{5} - 135 + 36 - 81 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{2} - \tfrac{4}{3} + 1 \\
&= \tfrac{968}{5} - 179 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{2} - \tfrac{4}{3} \\
&= \tfrac{968}{5} - 179 + \tfrac{1+9-8}{6} \\
&= \tfrac{968}{5} - 179 + \tfrac{1}{3} \\
&= \tfrac{2904}{15} - \tfrac{2685}{15} + \tfrac{5}{15} \\
&= \tfrac{2904-2685+5}{15} \\
&= \tfrac{224}{15}
\end{aligned} \tag{1}
$$

37-38 Use double integration to find the volume of the solid.

37.

Tenemos que integrar

$$\int_0^4 \int_0^{6-3x/2} \left(3 - \frac{3x}{4} - \frac{y}{2}\right) dydx$$

Comenzamos a integrar respecto a y, por lo que pasa como constantes $(3 - \frac{3x}{4})$ multiplicado por y, entonces :

$$\int_0^4 y\left(3 - \frac{3x}{4}\right) - \frac{y^2}{4}|_0^{6-3x/2} dx$$

Evaluamos:

$$\int_0^4 \left(6 - \frac{3x}{2}\right)\left(3 - \frac{3x}{4}\right) - \frac{\left(6 - \frac{3x}{2}\right)^2}{4} dx = 12$$

57. Try to evaluate the integral with a CAS using the stated order of integration, and then by reversing the order of integration.

(a)

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \pi y^3$$

(b)

$$\int_0^1 \int_{sin^{-1} y}^{\frac{\pi}{2}} \sec \cos x^2 \ \mathrm{dxdy}$$

59. Evaluate $\iint\limits_R xy^2 \ \mathrm{d}A$ over the region R shown in the accompanying figure.

63. Suppose that the temperature in degrees Celsius at a point (x, y) on a flat metal plate is $T(x, y) = 5xy + x^2$, where x and y are in meters. Find the average temperature of the diamond-shaped portion of the plate for which $|2x + y| \leq 4$ and $|2x - y| \leq 4$.

Sección 14.5

12. $\iiint\limits_G \cos \frac{z}{y} \ \mathrm{d}V$, where G is the solid defined by the inequalities $\frac{\pi}{6} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq xy$.

Entonces, la integral iterada es:

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{xy}\cos\frac{z}{y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y}^{\frac{\pi}{2}} y\sin\frac{z}{y}\Bigg|_{0}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y}^{\frac{\pi}{2}} y\left(\sin\frac{xy}{y}-\sin\frac{0}{y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y}^{\frac{\pi}{2}} y\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} y\int_{y}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} y\left(-\cos x\Bigg|_{y}^{\frac{\pi}{2}}\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} y\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos y\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} y\cos y\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Integrando por partes:

$$
\begin{aligned}
u = y &\to du = dy \\
dv = \cos y dy &\to v = \sin y
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} y\cos y\,\mathrm{d}y &= y\sin y\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin y dy \\
&= y\sin y\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \left(-\cos y\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= y\sin y\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \left(-\cos(\frac{\pi}{2})+\cos(\frac{\pi}{6})\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\approx 0{,}443u^{3}
\end{aligned}
$$

37. Let G be the tetrahedron in the first octant bounded by the coordinate planes and the plane

$$\tfrac{x}{a} + \tfrac{y}{b} + \tfrac{z}{c} = 1, (a > 0, b > 0, c > 0)$$

(a) List six different iterated integrals that represent the volume of G.

i

$$V_G(xyz) = \int_0^a \int_0^{(b(1-\frac{x}{a}))} \int_0^{(c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}))} dzdydx$$

ii

$$V_G(xzy) = \int_0^a \int_0^{(c(1-\frac{x}{a}))} \int_0^{(b(1-\frac{x}{a}-\frac{z}{c}))} dydzdx$$

iii

$$V_G(yxz) = \int_0^b \int_0^{(a(1-\frac{y}{b}))} \int_0^{(c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}))} dzdxdy$$

iv

$$V_G(yzx) = \int_0^b \int_0^{(c(1-\frac{y}{b}))} \int_0^{(a(1-\frac{z}{c}-\frac{y}{b}))} dxdzdy$$

v

$$V_G(zxy) = \int_0^c \int_0^{(a(1-\frac{z}{c}))} \int_0^{(b(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}))} dydxdz$$

vi

$$V_G(zyx) = \int_0^c \int_0^{(b(1-\frac{z}{c}))} \int_0^{(a(1-\frac{z}{c}-\frac{y}{b}))} dxdydz$$

(b) Evaluate any one of the six to show that the volume of G is $\frac{1}{6}abc$.

$$
\begin{aligned}
V_G(xyz) &= \int_0^c \int_0^{b(1-\frac{z}{c})} \int_0^{a(1-\frac{z}{c}-\frac{y}{b})} dxdydz \\
&= \int_0^c \int_0^{b(1-\frac{z}{c})} x\Big|_0^{a(1-\frac{z}{c}-\frac{y}{b})} dydz \\
&= \int_0^c \int_0^{b(1-\frac{z}{c})} a(1-\tfrac{z}{c}-\tfrac{y}{b})dydz \\
&= a\int_0^c \int_0^{b(1-\frac{z}{c})} (1-\tfrac{z}{c}-\tfrac{y}{b})dydz \\
&= a\int_0^c (y-\tfrac{yz}{c}-\tfrac{y^2}{2b})\Big|_0^{b(1-\frac{z}{c})} dz \\
&= a\int_0^c \left(\left(b(1-\tfrac{z}{c})\right)-\left(\tfrac{b^2(1-\frac{z}{c})^2}{2b}\right)-\left(\tfrac{bz(1-\frac{z}{c})}{c}\right)\right)dz \\
&= ab\int_0^c \left(\left(1-\tfrac{z}{c}\right)-\left(\tfrac{b(1-\frac{z}{c})^2}{2}\right)-\left(\tfrac{z(1-\frac{z}{c})}{c}\right)\right)dz \\
&= ab\int_0^c \left(\left(1-\tfrac{z}{c}\right)-\left(\tfrac{(1-\frac{2z}{c}+\frac{z^2}{c^2})}{2}\right)-\left(\tfrac{(z-\frac{z^2}{c})}{c}\right)\right)dz \\
&= ab\int_0^c \left(1-\tfrac{z}{c}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{z}{c}+\tfrac{z^2}{2c^2}-\tfrac{z}{c}+\tfrac{z^2}{c^2}\right)dz \\
&= ab\int_0^c \left(1-\tfrac{z}{c}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{z}{c}+\tfrac{z^2}{2c^2}-\tfrac{z}{c}+\tfrac{z^2}{c^2}\right)dz \\
&= ab\int_0^c \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{z^2}{2c^2}-\tfrac{z}{c}\right)dz \\
&= ab\Big(\tfrac{z}{2}+\tfrac{z^3}{6c^2}-\tfrac{z^2}{2c}\Big|_0^c\Big) \\
&= ab\Big(\tfrac{c}{2}+\tfrac{c^3}{6c^2}-\tfrac{c^2}{2c}\Big) \\
&= ab\big(\tfrac{c}{2}+\tfrac{c}{6}-\tfrac{c}{2}\big) \\
&= abc\big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}\big) \\
&= \frac{1}{6}abc
\end{aligned}
\tag{2}
$$

38. Use a triple integral to derive the formula for the volume of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Hughes-Hallet

Sección 16.2

35.

$$\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{1}\sqrt{2+x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

37.

$$\int_{0}^{1}\int_{e^y}^{e}\frac{x}{\ln x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Primero obtengamos los límites de integración reescribiendo la integral de $dx\,dy$ a $dy\,dx$

Para los límites en y tenemos 0 para el inferior y $\ln x$ en donde $x = e^y$ por lo tanto $\ln e^y = \ln x$ entonces $y = \ln x$ para el superior.
Por otro lado para los límites en x tenemos 1 como el inferior y e para el superior.

Rescribiendo la integral tenemos:

$$\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x}\frac{x}{\ln x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Procediendo con la integral interior

$$=\int_{1}^{e}\left[\frac{x}{\ln x}\right]_{0}^{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

Evaluando

$$=\int_{1}^{e}\frac{x}{\ln x}\left(\ln x-0\right)\,\mathrm{d}x$$

Llegamos a que

$$=\int_{1}^{e}x\,\mathrm{d}x$$

Evaluando

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{1}^{e}$$

Por lo tanto el resultado es

$$=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$$

60. Show that for a right triangle the average distance from any point in the triangle to one of the legs is one-third the length of the other leg. (The legs of a right triangle are the two sides that are not the hypotenuse.)

62. Find the area of the crescent-moon shape with circular arcs as edges and the dimensions shown in Figure 16.22.

Cómo la luna está compuesta de dos secciones circulares, sabemos que cada curva que contiene a la región está conformada por un círculo de radio fijo.
Sean E el círculo exterior e I el círculo interior de la media luna.
Sea r_E el radio del círculo exterior. Sabemos que este radio es de tamaño $r_E = 4$ porque es cuándo sabemos que la distancia entre el punto más alto, el más bajo y el extremo del lado dado son consistentes.
Sea r_I el radio del círculo interior I. Si "trazamosüna línea del punto más alto de la luna al centro del círculo interior podemos formar un triángulo de altura $r_E = 4$, hipotenusa de tamaño r_I y longitud horizontal de tamaño $r_I - 2$ (Obtenemos esta medida trazando una línea del centro de I al centro del círculo E que está a distancia 2 del borde de I).
De esta manera, por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\begin{aligned}
r_I^2 &= 4^2 + (r_I)^2 \\
&= 16 + r_I^2 - 4r_I + 4 \\
&= 20 + r_I^2 - 4r_I \\
r_I^2 - r_I^2 &= 20 - 4r_I \\
0 &= 20 - 4r_I \\
4r_I &= 20 \\
r_I &= 5
\end{aligned} \tag{3}$$

Luego, si suponemos que el centro de I está en el origen, tenemos porque

$$I = (x, y)|x^2 + y^2 = 25$$

y que

$$E = (x, y)|(x - (r_I - 2))^2 + y^2 = (x - 3)^2 + y^2 = 16$$

De esta manera tenemo que el área de la luna se encuentra entre las curvas

$$x^2 = 25 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{25 - y^2}$$

y

$$(x - 3)^2 = 16 - y^2 \Rightarrow x - 3 = \sqrt{16 - y^2} \Rightarrow x = 3 + \sqrt{16 - y^2}$$

Así, tenemos que el área de la media luna es:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-4}^{4} \int_{\sqrt{25-y^2}}^{3+\sqrt{16-y^2}} dxdy \\
&= \int_{-4}^{4} x\Big|_{\sqrt{25-y^2}}^{3+\sqrt{16-y^2}} dy \\
&= \int_{-4}^{4} \big(3 + \sqrt{16 - y^2} - \sqrt{25 - y^2}\big)dy \\
&= 12 + 8\pi - 25sin^{-1}(\tfrac{4}{5}) \\
&= 13{,}9504
\end{aligned} \tag{4}$$

La penúltima ecuación se obtuvo de evaluar la antepenúltima ecuación en el software de Mathematica y la última ecuación de evaluar este último resultado en la graficadora Desmos.

Sección 16.3

In Problems 14–18, decide whether the integrals are positive,negative, or zero. Let S be the solid sphere $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, and T be the top half of be the right half of the sphere (with $x \geq 0$), and L be the left half this sphere (with $z \geq 0$), and B be the bottom half (with $z \leq 0$), and R (with $x \leq 0$).

14. $\int_T e^z \, \mathrm{d}V$
Como e^z es positiva en T, entonces la integral es positiva.

15. $\int_B e^z \, \mathrm{d}V$
Como e^z es positiva en B, la integral es posiitva

16. $\int_S \sin z \, \mathrm{d}V$
Tenemos que $\sin z$ es positiva en T y es negativa con el mismo valor absoluto en la mitad inferior de R por lo que la integral de $\sin z$ es cero.

17. $\int_T \sin z \, \mathrm{d}V$
Tenemos que el $sinz$ es positiva en T por lo que la integral es positiva

18. $\int_R \sin z \, \mathrm{d}V$
El $\sin z$ es positivo en la mitad superior de R y negativa con el mismo valor absoluto en la mitad inferior de R por lo que la integral de $sinz$ es cero.

31. A trough with triangular cross-section lies along the x-axis for $0 \leq x \leq 10$. The slanted sides are given by $z = y$ and $z = -y$ for $0 \leq z \leq 1$ and the ends by $x = 0$ and $x = 10$, where x, y, z are in meters. The trough contains a sludge whose density at the point (x, y, z) is $\delta = e^{-3x}$ kg per m^3.

a) Express the total mass of sludge in the trough in terms of triple integrals.

b) Express the total mass of sludge in the trough in terms of triple integrals.

55. E is the region bounded by $x = 0, y = 0, z = 0, z = 2$, and $2x + 4y + z = 4$.

57. Figure 16.28 shows part of a spherical ball of radius 5 cm. Write an iterated triple integral which represents the volume of this region.

Si consideramos que ese corte de la esfera se encuentra centrado en el origen, entonces podemos notar que si su radio es de 5cm y tiene una altura de 2cm, entonces definimos el sólido con las desigualdades:

$$0 \leq z \leq 2, -5 \leq x \leq 5, -\sqrt{25 - x^2} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}$$

Entonces:

$$\iiint_G z(x, y) dV = \int_0^2 \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} z(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z$$

66. Find the center of mass of the tetrahedron that is bounded by the xy, yz, xz planes and the plane $x+2y+3z=1$. Assume the density is 1 gm/cm^3 and x, y, z are in centimeters.
Sabemos que $m = \int_W 1dV$. Estableciendo los límites en función de z y desta en términos de y tenemos que

$$z = \frac{1-x-\frac{y}{2}}{3}$$

y

$$y = \frac{1-x}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_W dV &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} \int_0^{\frac{1-x-2y}{3}} dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} z\Big|_0^{\frac{1-x-2y}{3}} dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} \frac{1-x-2y}{3} dydx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} \big(1-x-2y\big)\ dydx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 y-xy-y^2\Big|_0^{\frac{1-x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \Big(\big(\tfrac{1}{2}-\tfrac{x}{2}\big)-\big(\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{2}\big)-\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2}-x+\tfrac{x^2}{2}\big)\Big)dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \Big(\big(1-x\big)-\big(x-x^2\big)-\tfrac{1}{2}\big(1-x+x^2\big)\Big)dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \Big(\big(1-2x-x^2\big)-\tfrac{1}{2}\big(1-x+x^2\big)\Big)dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \Big(\big(1-2x-x^2\big)-\big(\tfrac{1}{2}-\tfrac{x}{2}+\tfrac{x^2}{2}\big)\Big)dx \\
&= \tfrac{1}{6}\Big(\big(x-x^2-\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x}{2}+\tfrac{x^2}{4}-\tfrac{x^3}{6}\big)\Big|_0^1\Big) \\
&= \tfrac{1}{6}\Big(1-1-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}\Big) \\
&= \tfrac{1}{6}\Big(\tfrac{12-12+4-6+3-2}{12}\Big) \\
&= \tfrac{1}{6}\Big(-\tfrac{1}{12}\Big) \\
&= -\tfrac{1}{36}
\end{aligned} \tag{5}$$

Pero cómo la masa siempre es positiva, entonces

$$\int_W dV = \Big|-\tfrac{1}{36}\Big| = \tfrac{1}{36}$$

Entonces, $\frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{1}{36}} = 36$ De esto, tenemos las siguientes tres ecuaciones con sus resultados correspondientes evaluados en un CAS:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= 36\int_W dV \\
&= 36\int_0^1\int_0^{\frac{1-x}{2}}\int_0^{\frac{1-x-2y}{3}} xdzdydx \\
&= 36\frac{1}{144} \\
&= \frac{1}{4} \\
\bar{y} &= 36\int_W dV \\
&= 36\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1-2y}\int_0^{\frac{1-x-2y}{3}} ydzdydx \\
&= 36\frac{1}{288} \\
&= \frac{1}{8} \\
\bar{z} &= 36\int_W dV \\
&= 36\int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{1-3z}\int_0^{\frac{1-x-3z}{2}} zdzdydx \\
&= 36\frac{1}{432} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned} \tag{6}$$

Problems 67–69 concern a rotating solid body and its *moment of inertia* about an axis; this moment relates angular acceleration to torque (an analogue of force). For a body of constant density and mass m occupying a region W of volume V , the moments of inertia about the coordinate axes are

$$I_x = \tfrac{m}{V}\int_W (y^2+z^2)\,\mathrm{d}V$$

$$I_y = \tfrac{m}{V}\int_W (x^2+z^2)\,\mathrm{d}V$$

$$I_z = \tfrac{m}{V}\int_W (x^2+z^2)\,\mathrm{d}V$$

67. Find the moment of inertia about the z-axis of the rectangular solid of mass m given by $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3$.

Como nos pide encontrar el momento de inercia respecto al eje z entonces tomamos de las ecuaciones de arriba y tomamos I_z

$$I_z = \frac{m}{V}\int_W (x^2+y^2)dV$$

Por lo que tenemos que integrar : $\frac{m}{6}\int_W x^2+y^2dV$
Sustituyendo las regiones de integración:

$$\frac{m}{6}\int_0^1\int_0^2\int_0^3 x^2+y^2dzdydx$$

Resolveremos en el siguiente orden:

$$\frac{m}{6}\left[\int_0^1\left[\int_0^2\left[\int_0^3 x^2+y^2dz\right]dy\right]dx\right]$$

Como en $\int_0^3 x^2+y^2dz$ es una integral respecto a z y no existe esta variable dentro de la ecuación x^2+y^2 entonces evaluamos en $z=3$ y :

$$\frac{m}{6}\int_0^1\int_0^2 3\left(x^2+y^2\right)dydx$$

Ahora integramos respecto a y:

$$\frac{m}{2}\int_0^1\left(x^2y+y^3/3\right)|_0^2dx$$

Evaluamos con $y=2$ y con $y=0$ y tenemos que :

$$\frac{m}{2}\int_0^1\left(2x^2+8/3\right)dx=\frac{5m}{3}$$

Calculamos la integral respecto a x

$$\frac{m}{2}\left(2x^3/3+8/3x\right)|_0^1$$

Are the statements in Problems 74–83 true or false? Give reasons for your answer.

75. The region of integration of the triple iterated integral $\int_0^1\int_0^1\int_0^x fdzdydx$ lies above a square in the xy-plane and below a plane.

78. The iterated integrals $\int_{-1}^1\int_0^1\int_0^{1-x^2} fdzdydx$ and $\int_0^1\int_0^1\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} fdzdydx$ are equal.

80. If W is the unit cube $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ and $\int_W f\,\mathrm{d}V=0$, then $f=0$ everywhere in the unit.

Falso, si la función f es simétrica con respecto a el plano xy, provoca que al realizar la integral en la región, el volumen inferior al plano se cancele con el volumen superior. Por ejemplo, si $f(x,y,z)=\frac{1}{2}-x$, el resultado de la integral es:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_0^1\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1\int_0^1 0\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0\end{aligned}$$