Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III
Tarea 2

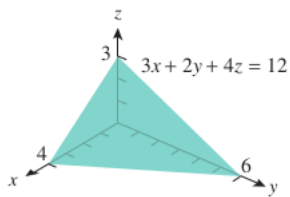
Alan Arteaga, Alma Sánchez, Jerónimo Almeida

Anton-Bivens-Davis

Sección 14.2

37-38 Use double integration to find the volume of the solid.

37.



Tenemos que integrar

$$\int_0^4 \int_0^{6-3x/2} \left(3 - \frac{3x}{4} - \frac{y}{2}\right) dydx$$

Comenzamos a integrar respecto a y, por lo que pasa como constantes $(3-\frac{3x}{4})$ multiplicado por y, entonces :

$$\int_0^4 y\left(3 - \frac{3x}{4}\right) - \frac{y^2}{4}\Big|_0^{6-3x/2} dx$$

Evaluamos:

$$\int_0^4 \left(6 - \frac{3x}{2}\right)\left(3 - \frac{3x}{4}\right) - \frac{\left(6 - \frac{3x}{2}\right)^2}{4} dx = 12$$

Sección 14.5

37. Let G be the tetrahedron in the first octant bounded by the coordinate planes and the plane

$$\tfrac{x}{a} + \tfrac{y}{b} + \tfrac{z}{c} = 1, (a > 0, b > 0, c > 0)$$

(a) List six different iterated integrals that represent the volume of G.

i

$$V_G(xyz) = \int_0^a \int_0^{(b(1-\frac{x}{a}))} \int_0^{(c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}))} dzdydx$$

ii

$$V_G(xzy) = \int_0^a \int_0^{(c(1-\frac{x}{a}))} \int_0^{(b(1-\frac{x}{a}-\frac{z}{c}))} dydzdx$$

iii

$$V_G(yxz) = \int_0^b \int_0^{(a(1-\frac{y}{b}))} \int_0^{(c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}))} dzdxdy$$

iv

$$V_G(yzx) = \int_0^b \int_0^{(c(1-\frac{y}{b}))} \int_0^{(a(1-\frac{z}{c}-\frac{y}{b}))} dxdzdy$$

v

$$V_G(zxy) = \int_0^c \int_0^{(a(1-\frac{z}{c}))} \int_0^{(b(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}))} dydxdz$$

vi

$$V_G(zyx) = \int_0^c \int_0^{(b(1-\frac{z}{c}))} \int_0^{(a(1-\frac{z}{c}-\frac{y}{b}))} dxdydz$$

(b) Evaluate any one of the six to show that the volume of G is $\frac{1}{6}abc$.

$$
\begin{aligned}
V_G(xyz) &= \int_0^c \int_0^{b(1-\frac{z}{c})} \int_0^{a(1-\frac{z}{c}-\frac{y}{b})} dxdydz \\
&= \int_0^c \int_0^{b(1-\frac{z}{c})} x\Big|_0^{a(1-\frac{z}{c}-\frac{y}{b})} dydz \\
&= \int_0^c \int_0^{b(1-\frac{z}{c})} a(1-\tfrac{z}{c}-\tfrac{y}{b})dydz \\
&= a\int_0^c \int_0^{b(1-\frac{z}{c})} (1-\tfrac{z}{c}-\tfrac{y}{b})dydz \\
&= a\int_0^c (y-\tfrac{yz}{c}-\tfrac{y^2}{2b})\Big|_0^{b(1-\frac{z}{c})} dz \\
&= a\int_0^c \bigg(\Big(b(1-\tfrac{z}{c})\Big)-\Big(\tfrac{b^2(1-\frac{z}{c})^2}{2b}\Big)-\Big(\tfrac{bz(1-\frac{z}{c})}{c}\Big)\bigg)dz \\
&= ab\int_0^c \bigg(\Big(1-\tfrac{z}{c}\Big)-\Big(\tfrac{b(1-\frac{z}{c})^2}{2}\Big)-\Big(\tfrac{z(1-\frac{z}{c})}{c}\Big)\bigg)dz \\
&= ab\int_0^c \bigg(\Big(1-\tfrac{z}{c}\Big)-\Big(\tfrac{(1-\frac{2z}{c}+\frac{z^2}{c^2})}{2}\Big)-\Big(\tfrac{(z-\frac{z^2}{c})}{c}\Big)\bigg)dz \\
&= ab\int_0^c \Big(1-\tfrac{z}{c}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{z}{c}+\tfrac{z^2}{2c^2}-\tfrac{z}{c}+\tfrac{z^2}{c^2}\Big)dz \\
&= ab\int_0^c \Big(1-\tfrac{z}{c}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{z}{c}+\tfrac{z^2}{2c^2}-\tfrac{z}{c}+\tfrac{z^2}{c^2}\Big)dz \\
&= ab\int_0^c \Big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{z^2}{2c^2}-\tfrac{z}{c}\Big)dz \\
&= ab\Big(\tfrac{z}{2}+\tfrac{z^3}{6c^2}-\tfrac{z^2}{2c}\Big|_0^c\Big) \\
&= ab\Big(\tfrac{c}{2}+\tfrac{c^3}{6c^2}-\tfrac{c^2}{2c}\Big) \\
&= ab\big(\tfrac{c}{2}+\tfrac{c}{6}-\tfrac{c}{2}\big) \\
&= abc\big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}\big) \\
&= \frac{1}{6}abc
\end{aligned} \tag{1}
$$

Hughes-Hallet

Sección 16.2

62. Find the area of the crescent-moon shape with circular arcs as edges and the dimensions shown in Figure 16.22.

Cómo la luna está compuesta de dos secciones circulares, sabemos que cada curva que contiene a la región está conformada por un círculo de radio fijo.
Sean E el círculo exterior e I el círculo interior de la media luna.
Sea r_E el radio del círculo exterior. Sabemos que este radio es de tamaño $r_E = 4$ porque es cuándo sabemos que la distancia entre el punto más alto, el más bajo y el extremo del lado dado son consistentes.
Sea r_I el radio del círculo interior I. Si "trazamosüna línea del punto más alto de la luna al centro del círculo interior podemos formar un triángulo de altura $r_E = 4$, hipotenusa de tamaño r_I y longitud

horizontal de tamaño $r_I - 2$ (Obtenemos esta medida trazando una línea del centro de I al centro del círculo E que está a distancia 2 del borde de I).
De esta manera, por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\begin{aligned} r_I^2 &= 4^2 + (r_I)^2 \\ &= 16 + r_I^2 - 4r_I + 4 \\ &= 20 + r_I^2 - 4r_I \\ r_I^2 - r_I^2 &= 20 - 4r_I \\ 0 &= 20 - 4r_I \\ 4r_I &= 20 \\ r_I &= 5 \end{aligned} \tag{2}$$

Luego, si suponemos que el centro de I está en el origen, tenemos porque

$$I = (x, y)|x^2 + y^2 = 25$$

y que

$$E = (x, y)|(x - (r_I - 2))^2 + y^2 = (x - 3)^2 + y^2 = 16$$

De esta manera tenemo que el área de la luna se encuentra entre las curvas

$$x^2 = 25 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{25 - y^2}$$

y

$$(x - 3)^2 = 16 - y^2 \Rightarrow x - 3 = \sqrt{16 - y^2} \Rightarrow x = 3 + \sqrt{16 - y^2}$$

Así, tenemos que el área de la media luna es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{4} \int_{\sqrt{25-y^2}}^{3+\sqrt{16-y^2}} dxdy \\ &= \int_{-4}^{4} x\Big|_{\sqrt{25-y^2}}^{3+\sqrt{16-y^2}} dy \\ &= \int_{-4}^{4} \left(3 + \sqrt{16 - y^2} - \sqrt{25 - y^2}\right) dy \\ &= 12 + 8\pi - 25 sin^{-1}(\tfrac{4}{5}) \\ &= 13{,}9504 \end{aligned} \tag{3}$$

La penúltima línea se obtuvo de evaluar la antepenúltima línea en el software de Mathematica y la última línea de evaluar este último resultado en la graficadora Desmos.

Sección 16.3

In Problems 14–18, decide whether the integrals are positive,negative, or zero. Let S be the solid sphere $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, and T be the top half of this sphere (with $z \geq 0$), and B be the bottom half (with $z \leq 0$), and R be the right half of the sphere (with $x \geq 0$), and L be the left half (with $x \leq 0$).

14. $\int_T e^z \, \mathrm{d}V$
Como e^z es positiva en T, entonces la integral es positiva.

15. $\int_B e^z \, \mathrm{d}V$
Como e^z es positiva en B, la integral es posiitva

16. $\int_S \sin z \, \mathrm{d}V$
Tenemos que $\sin z$ es positiva en T y es negativa con el mismo valor absoluto en la mitad inferior de R por lo que la integral de $\sin z$ es cero.

17. $\int_T \sin z \, \mathrm{d}V$
Tenemos que el $sinz$ es positiva en T por lo que la integral es positiva

18. $\int_R \sin z \, \mathrm{d}V$
El $\sin z$ es positivo en la mitad superior de R y negativa con el mismo valor absoluto en la mitad inferior de R por lo que la integral de $sinz$ es cero.

66. Find the center of mass of the tetrahedron that is bounded by the xy, yz, xz planes and the plane $x + 2y + 3z = 1$. Assume the density is 1 gm/cm^3 and x, y, z are in centimeters.
Sabemos que $m = \int_W 1dV$. Estableciendo los límites en función de z y desta en términos de y tenemos que

$$z = \frac{1 - x - \frac{y}{2}}{3}$$

y

$$y = \frac{1 - x}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_W dV &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} \int_0^{\frac{1-x-2y}{3}} dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} z\Big|_0^{\frac{1-x-2y}{3}} dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} \frac{1-x-2y}{3} dydx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} \big(1-x-2y\big)\ dydx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 y-xy-y^2\Big|_0^{\frac{1-x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \Big(\big(\tfrac{1}{2}-\tfrac{x}{2}\big)-\big(\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{2}\big)-\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2}-x+\tfrac{x^2}{2}\big)\Big)dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \Big(\big(1-x\big)-\big(x-x^2\big)-\tfrac{1}{2}\big(1-x+x^2\big)\Big)dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \Big(\big(1-2x-x^2\big)-\tfrac{1}{2}\big(1-x+x^2\big)\Big)dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \Big(\big(1-2x-x^2\big)-\big(\tfrac{1}{2}-\tfrac{x}{2}+\tfrac{x^2}{2}\big)\Big)dx \\
&= \tfrac{1}{6}\Big(\big(x-x^2-\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x}{2}+\tfrac{x^2}{4}-\tfrac{x^3}{6}\big)\Big|_0^1\Big) \\
&= \tfrac{1}{6}\Big(1-1-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}\Big) \\
&= \tfrac{1}{6}\Big(\tfrac{12-12+4-6+3-2}{12}\Big) \\
&= \tfrac{1}{6}\Big(-\tfrac{1}{12}\Big) \\
&= -\tfrac{1}{36}
\end{aligned} \tag{4}$$

Pero cómo la masa siempre es positiva, entonces

$$\int_W dV = \Big|-\tfrac{1}{36}\Big| = \tfrac{1}{36}$$

Evaluando en el CAS tenemos que esto se cumple. $x = 1/4, y = 1/8, z = 1/12$

Problems 67–69 concern a rotating solid body and its *moment of inertia* about an axis; this moment relates angular acceleration to torque (an analogue of force). For a body of constant density and mass m occupying a region W of volume V , the moments of inertia about the coordinate axes are

$$I_x = \tfrac{m}{V}\int_W (y^2+z^2)\,\mathrm{d}V$$

$$I_y = \tfrac{m}{V}\int_W (x^2+z^2)\,\mathrm{d}V$$

$$I_z = \tfrac{m}{V}\int_W (x^2+z^2)\,\mathrm{d}V$$

67. Find the moment of inertia about the z-axis of the rectangular solid of mass m given by $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$.

Como nos pide encontrar el momento de inercia respecto al eje z entonces tomamos de las ecuaciones de arriba y tomamos I_z

$$I_z = \frac{m}{V} \int_W (x^2 + y^2) dV$$

Por lo que tenemos que integrar : $\frac{m}{6} \int_W x^2 + y^2 dV$
Sustituyendo las regiones de integración:

$$\frac{m}{6} \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x^2 + y^2 dz dy dx$$

Resolveremos en el siguiente orden:

$$\frac{m}{6} \left[\int_0^1 \left[\int_0^2 \left[\int_0^3 x^2 + y^2 dz \right] dy \right] dx \right]$$

Como en $\int_0^3 x^2 + y^2 dz$ es una integral respecto a z y no existe esta variable dentro de la ecuación $x^2 + y^2$ entonces evaluamos en $z = 3$ y :

$$\frac{m}{6} \int_0^1 \int_0^2 3 \left(x^2 + y^2 \right) dy dx$$

Ahora integramos respecto a y:

$$\frac{m}{2} \int_0^1 \left(x^2 y + y^3/3 \right) |_0^2 dx$$

Evaluamos con $y = 2$ y con $y = 0$ y tenemos que :

$$\frac{m}{2} \int_0^1 \left(2x^2 + 8/3 \right) dx = \frac{5m}{3}$$

Calculamos la integral respecto a x

$$\frac{m}{2} \left(2x^3/3 + 8/3x \right) |_0^1$$

Are the statements in Problems 74–83 true or false? Give reasons for your answer.