Universidad Autónoma de México

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III

Tarea I

Alan Ernesto Arteaga Vázquez

Alma Rocío Sánchez Salgado

Jerónimo Almeida Rodríguez

Jueves 23 de Agosto del 2018

1. Marsden - Tromba — Sección 3.3

18. Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + kyz$

a Comprobar que $(0,0,0)$ es punto crítico para f.

$$\nabla f = \langle \frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta z} \rangle = \langle 2x, 2y + kz, 2z + ky \rangle$$

Igualando las parciales a 0, tenemos que

i Si $2x = 0$, entonces $x = 0$. s

ii Si $2y + kz = 0$, entonces $2y = -kz$ y $y = \dfrac{-kz}{2}$.

iii Si $2z + ky = 0$, entonces $z = \dfrac{-ky}{2}$ y por (ii) $z = \dfrac{-k(\frac{-kz}{2})}{2} = \dfrac{k^2 z}{4}$.

Además, por (iii) tenemos que $z = \dfrac{k^2 z}{4} \Rightarrow \dfrac{z}{z} = \dfrac{k^2}{4} \Rightarrow 1 = \dfrac{k^2}{4}$
$\Rightarrow 4 = k^2 \Rightarrow k = \pm 2$
De (ii) y de (iii) podemos ver que para que se cumpla la igualdad, $y = 0$ y $z = 0$.
Por lo tanto, $f(x,y,z)$ tiene un punto crítico en $(0,0,0)$.

b Cómo k es una constante y el punto crítico de la función es cuándo $x = y = z = 0$, entonces $k \in (-\infty, \infty)$ porque por propiedades de campo, sabemos que $kyz = k(0) = 0$.
Por lo tanto, k puede tomar cualquier valor.

34. Sea $f(x,y) = 5ye^2 - e^{5x} - y^5$

a Demuestre que f tiene un único punto crítico que también es máximo de f. Para encontrar el punto crítico hacemos $\nabla f = 0$. Así,

i $\dfrac{\delta f}{\delta x} = 5ye^x - 5e^{5x}$. Entonces, $\dfrac{\delta f}{\delta x} = 0$ cuando $5ye^x - 5e^{5x} = 0$.

ii $\dfrac{\delta f}{\delta y} = 5e^x - 5y^4$. Entonces, $\dfrac{\delta f}{\delta y} = 0$ cuando $5e^x - 5y^4 = 0$.

De (i) tenemos entonces que $5e^x = 5e^{5x} \Rightarrow ye^x = e^5 x$
De (ii) tenemos que $5e^x = 5y^4 \Rightarrow e^x = y^4$ De esta ecuación, proponemos al vector $\vec{x_0} = (0,1)$.
Evaluando (ii) en $\vec{x_0}$ tenemos que

$$e^x = e^0 = 1 = 1^4 = y^4$$

Y, evaluando (i) en $\vec{x_0}$ tenemos que

$$ye^x = 1 \cdot e^0 = e^0 = 1 = e^{5\cdot 0} = e^{5x}$$

Por lo tanto, $f(\vec{x_0})$ es un punto crítico. Para comprobar que $\vec{x_0}$ es máximo, lo evaluamos en el Hessiano.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\delta^2 f}{\delta x \delta x} & \dfrac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \\ \dfrac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & \dfrac{\delta^2 f}{\delta y \delta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5ye^x - 25e^{5x} & 5e^x \\ 5e^x & -20y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5ye^x - 25e^{5x} & 5e^x \\ 5e^x & -20y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5(1)e^0 - 25e^{5(0)} & 5e^(0) \\ 5e^(0) & -20(1)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 & 5 \\ 5 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20x + 5y & 5x - 20y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20x^2 + 5xy + 5xy - 20y^2 \end{bmatrix}$$

Entonces, $\text{Hess}(\vec{x_0}) = [-20x^2 + 5xy + 5xy - 20y^2]|_{\vec{x_0}} = -20(0) + 10(0)(1) - 20(1) = -20$
Cómo el $\text{Hess}(\vec{x_0}) < 0$, entonces $\vec{x_0}$ es un máximo.

b Muestre que f no está acotado en el eje y y por lo tanto no tiene máximo global.

23. An examination of the function

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (y - 3x^2)(y - x^2)$$

will give an idea of the difficulty of finding conditions that guarantee that a critical point is a relative extremum when Theorem 6 fails. Show that

a) the origin is a critical point of f ;

Procedemos a derivar parcialmente la función, así, se sigue:

$$f(x, y) = y^2 - 3x^2y - x^2y + 3x^4 = y^2 - 4x^2y + 3x^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -8xy + 12x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4x^2$$

luego, para ver que precisamente el origen es un punto crítico, evaluamos las parciales en dicho punto, así:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = -8(0)(0) + 12(0)^3 = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 2(0) - 4(0)^2 = 0$$

así, como todas las parciales son cero en el origen, se sigue que este es un punto crítico.

b) f has a relative minimum at $(0, 0)$ on every straight line through $(0, 0)$; that is, if $g(t) = (at, bt)$, then $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ has a relative minimum at 0,for every choice of a and b;

Consideremos ahora a la función $f \circ g$:

$$f \circ g = (bt)^2 - 4(at)^2(bt) + 3(at)^4$$
$$= b^2t^2 - 4a^2bt^3 + 3a^4t^4$$

ahora, derivando la función compuesta, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2b^2t - 12a^2bt^2 + 12a^4t^3 = 2t(b^2 - 6a^2bt + 6a^4t^2)$$

se sigue que $t = 0$ es un punto crítico correspondiente a $(x, y) = (0, 0)$. Ahora, derivando nuevamente la función, se tiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 2b^2 - 24a^2bt + 36a^4t^2$$

ahora, evaluando la segunda derivada en el punto $t = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_0 = 2b^2 - 24a^2b(0) + 36a^4(0)^2 = 2b^2$$

como

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_0 = 2b^2 > 0$$

se sigue que $t = 0$ es un mínimo local para $\forall a$ si $b \neq 0$

Ahora, si $b = 0$, se cumple que

$$f \circ g(t) = 3(at)^4$$

así que $t = 0$ resulta ser un mínimo local para cualquier elección de a y b.

(c) the origin is not a relative minimum of f .

41. Find the absolute maximum and minimum values for

$$f(x, y) = sinx + cosy$$

on the rectangle R defined by

$$0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$$

Derivando parcialmente, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x$$

ahora, para los intervalos $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$ se cumple:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{si} \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{si} \quad y = 0, \pi, 2\pi$$

así, se sigue que la función tiene puntos críticos en:

$$(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$$

$$(\frac{3\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, \pi), (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$$

ahora, construimos la matriz Hessiana para la función derivando parcialmente por segunda vez a la función, así:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos y$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{bmatrix}$$

luego, evaluando la matriz en los puntos críticos y sacando su determinante, se tiene:

$$det[H(\frac{\pi}{2}, 0)] = \begin{vmatrix} -\sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Como $f_{xx} < 0$ y $det(H) > 0$, entonces corresponde a un máximo local.

$$det[H(\frac{\pi}{2}, \pi)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Como $f_{xx} < 0$ y $det(H) < 0$, entonces corresponde a un punto de ensilladura.

$$det[H(\frac{\pi}{2}, 2\pi)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos 2\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Como $f_{xx} < 0$ y $det(H) > 0$, entonces corresponde a un máximo local.

$$det[H(\frac{3\pi}{2},0)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{3\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Como $f_{xx} > 0$ y $det(H) < 0$, entonces corresponde a un punto de ensilladura.

$$det[H(\frac{3\pi}{2},\pi)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{3\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos \pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Como $f_{xx} > 0$ y $det(H) > 0$, entonces corresponde a un mínimo local.

$$det[H(\frac{3\pi}{2},2\pi)] = \begin{vmatrix} -\sin\frac{3\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\cos 2\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Como $f_{xx} > 0$ y $det(H) < 0$, entonces corresponde a un punto de ensilladura.

Luego, evaluando máximos locales en la función para determinar máximos absolutos:

$$f(\frac{\pi}{2},0) = \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) + cos(\pi) = 1 + 1 = 2$$

$$f(\frac{\pi}{2},2\pi) = \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) + cos(2\pi) = 1 + 1 = 2$$

así, determinamos que la función f tiene máximos absolutos en los puntos

$$(\frac{\pi}{2},0), (\frac{\pi}{2},2\pi)$$

y mínimo absoluto en

$$(\frac{3\pi}{2},\pi)$$

2. Marsden - Tromba — Sección 3.4

3. Hughes-Hallet — Sección 16.1

4. Anton-Bivens-Davis — Sección 14.1