質問回答

姫 伯邑考

2017 年 01 月 24 日

⑮ a を定数とする。2 次方程式 $x^2+5x-(a^2+a-7)=0$ が異なる 2 つの解をもつとき a の値の範囲は $\boxed{ア}$ である。このとき、2 次方程式 $x^2+5x-(a^2+a-7)=0$ の 2 解の差の絶対値は $\boxed{イ}$ である。また、2 次不等式 $x^2+5x \leq a^2+a-7$ を満たす整数 x が存在しないとき a の値の範囲は $\boxed{ウ}$ である。

解）ア）2 次方程式 $x^2+5x-(a^2+a-7)=0$ の解の判別式を D をすると、この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつための条件は次式で与えられる。

$$D=5^2+4(a^2+a-7)>0$$

この 2 次不等式を解くと、

$$5^2+4(a^2+a-7)>0 \iff 4a^2+4a-3>0 \iff (2a+3)(2a-1)>0 \iff a<-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}<a$$

故に、$a<-\frac{3}{2}$、$\frac{1}{2}<a$ である。$\cdots$ $\boxed{ア}$

イ）2 次方程式の 2 解を α、β とおくと、解と係数の関係より、

$$\alpha+\beta=-5,\quad \alpha\beta=-(a^2+a-7)$$

ここで、

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=25+4(a^2+a-7)=4a^2+4a-3 \iff |\alpha-\beta|=\sqrt{4a^2+4a-3}\end{aligned}$$

故に、$\sqrt{4a^2+4a-3}$ である。$\cdots$ $\boxed{イ}$

ウ）$k=x^2+5x$ とおくと、k の最小値は、

$$k=x^2+5x=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

より、$x=-\frac{5}{2}$ のときの値 $-\frac{25}{4}(=-6.25)$ である。

従って、a^2+a-7 の値が -6 より小さければ、与式は整数解をもたない。故に、

$$\begin{aligned}&a^2+a-7<-6\\ \iff\ & a^2+a-1<0 \iff \left(a-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(a-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)<0 \iff \frac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

以上より、$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ である。