電機システム制御特論

Assignment (2016/05/20)

九州工業大学大学院　工学府

機械知能工学専攻　知能制御工学コース

所属： 西田研究室

学籍番号： 16344217

提出者氏名： 津上　祐典

平成 28 年 5 月 27 日

目 次

1 問題

Consider the following system

$$\begin{cases} x = ax + bu + v \\ y = x + w \end{cases} \tag{1}$$

where $a = -0.02$, $b = 0.001351$, and v and w are both White Gaussian noise $E\{v^2\} = E\{w^2\} = 0.7$. Design kalman filter for the system, and demonstrate the performance with computer simulations.

2 カルマンフィルタとは

カルマンフィルタとは，雑音が入った観測値を用いて，ある動的システムの状態推定（フィルタリング）するものである．状態方程式の状態推定する方法として，ルーエンバーガによるオブザーバ（状態推定器）が有名であるが，これは雑音などが存在しない確定的な場合を対象としている．それに対して，カルマンフィルタは，確定的な枠組みで状態推定問題を検討した．カルマンフィルタでは，雑音の正規白色性を仮定することにより，システマティックに最適設計が可能という優位点を持つ．制御対象の正確なモデルを利用できれば，状態推定（フィルタリング）することが出来る．これは，カルマンフィルタの重要なポイントである．つまり，制御対象のモデリングの正確さがカルマンフィルタの精度に関わってくる．図 1 に，あるシステムにカルマンフィルタを適応したものを示す．図 1 に示す一入力一出力のシステム

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu + v \\ y = cx + w \end{cases} \tag{2}$$

を考える．ここで (A, c) の組は可観測である．また，v はシステムノイズであり，w は観測ノイズである．これらの 2 つのノイズは白色ガウス雑音と呼ばれており，システムノイズ $v(t)$，観測ノイズ $w(t)$ は

$$E\{v(t)\} = 0\ ,\ E\{w(t)\} = 0 \tag{3}$$

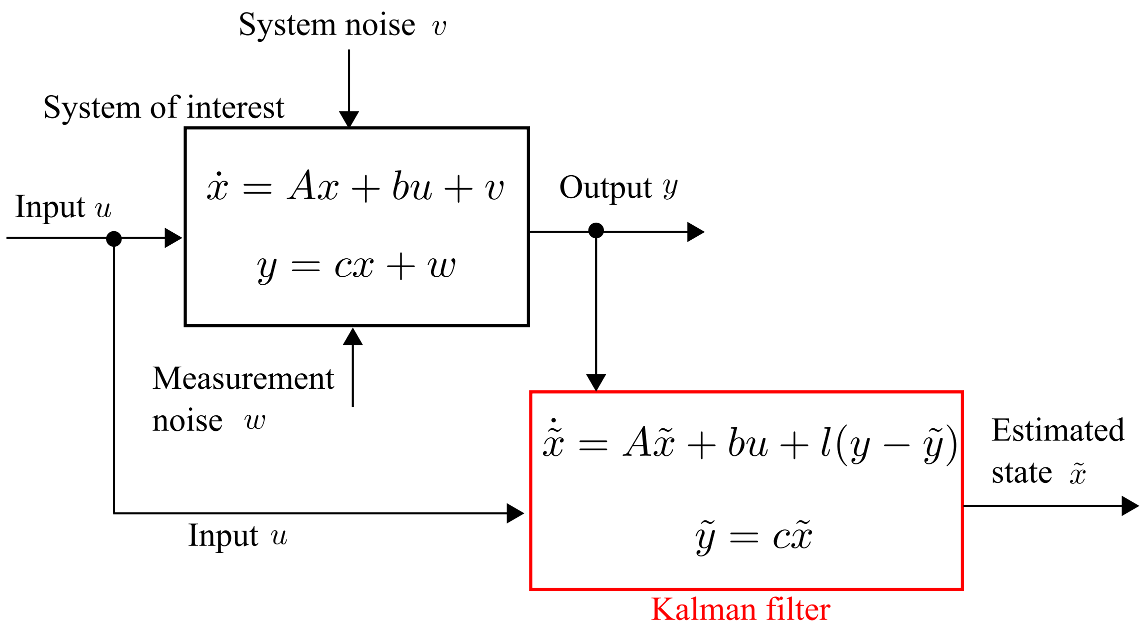

図 1. カルマンフィルタ

$$E\{v(t)v(\tau)^T\} = Q\delta(t-\tau)\ ,\ E\{w(t)w(\tau)^T\} = r\delta(t-\tau) \tag{4}$$

$$E\{v(t)w(\tau)\} = 0 \tag{5}$$

を満たす．ここで (3) 式では $v(t), w(t)$ の平均が 0 であること，(4) 式は $v(t)$ と $w(t)$ の自己相関がそれぞれ Q, r であること，(5) 式では $v(t), w(\tau)$ の相互相関が 0 であることを表している．

定常カルマンフィルタは同一次元オブザーバと同じ構造であり，以下の式で与えられる．

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + bu + l(y - \tilde{y}) \\ \tilde{y} = c\tilde{x} \end{cases} \tag{6}$$

同一次元オブザーバを考えるときは l はフィードバックゲインであり，定常カルマンフィルタと考えるときはカルマンゲインである．

3　カルマンゲインの導出

この節ではカルマンゲイン l を導出する．前節でカルマンフィルタと同一次元オブザーバは同じ構造であると述べた．カルマンゲイン l を導出することは，同一次元オブザーバのフィードバックゲイン l を導出することと同じ意味である．はじめに，オブザーバの推定誤差ベクト

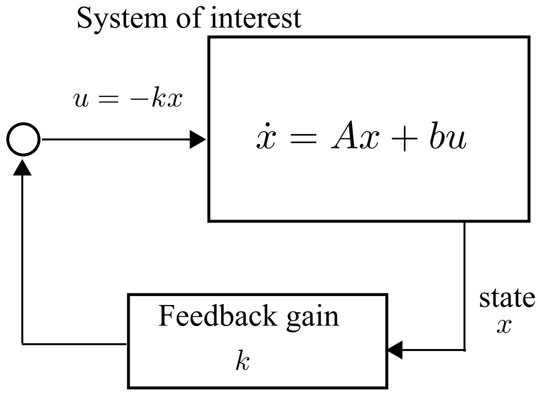

図 2. 状態フィードバック制御系

ルを

$$e = x - \tilde{x} \tag{7}$$

とおく．すると誤差ベクトルのダイナミクスとして，

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\tilde{x}} \qquad (8) \\ &= (Ax + bu) - \left\{ A\tilde{x} + bu + l(y - \tilde{y}) \right\} \qquad (9) \\ &= (A - lc)e \qquad (10) \end{aligned}$$

を得る．上式よりオブザーバの特性方程式は，

$$\det(sI - A + lc) = 0 \tag{11}$$

となる．ただし，I は単位行列である．ここで図 2 に示すような，状態フィードバック制御系について考える．このシステムの特性方程式は，

$$\det(sI - A + bk) = 0 \tag{12}$$

となる．行列 H が正則であるとき，

$$\det H = \det H^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

が成り立つので (11) 式は

$$\det(sI - A^{\mathrm{T}} + c^{\mathrm{T}} l^{\mathrm{T}}) = 0 \tag{14}$$

と書き換えることが出来る．(12),(14) 式をより，オブザーバの設計と制御系の設計に双対性があることがわかる．オブザーバの設計に用いる係数行列 (A, b, c) は係数行列 $(A^{\mathrm{T}}, c^{\mathrm{T}}, b^{\mathrm{T}})$ で表現されるレギュレータ問題に変換される．以下の式で表現される状態フィードバック制御系を用いて LQ レギュレータ問題を考える．

$$\begin{cases} \dot{x} = A^{\mathrm{T}}x + c^{\mathrm{T}}u \\ y = b^{\mathrm{T}}x \\ u = -l^{\mathrm{T}}x \end{cases} \tag{15}$$

ここで評価関数 J を

$$J = \int_0^{\infty} (\dot{x}^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}ru)dt \tag{16}$$

と定義する．ただし，行列 Q は $Q \geq 0$，スカラ r は $r > 0$ を満たす．(15) 式よりリッカチ方程式は，

$$AP + PA^T - \frac{1}{r}Pc^TcP = -Q \tag{17}$$

となる．これを J に代入する．まず，積分を抜いた式に代入すると，

$$\begin{aligned}
\dot{x}^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}ru &= -x^{\mathrm{T}}APx - x^{\mathrm{T}}PA^{\mathrm{T}}x + \frac{1}{r}x^{\mathrm{T}}Pcc^{\mathrm{T}}Px + u^{\mathrm{T}}ru && (18)\\
&= -(\dot{x}^{\mathrm{T}} - u^{\mathrm{T}}c)Px - x^{\mathrm{T}}P(\dot{x} - c^{\mathrm{T}}u) + \frac{1}{r}x^{\mathrm{T}}Pcc^{\mathrm{T}}Px + u^{\mathrm{T}}ru && (19)\\
&= -\dot{x}^TPx + u^TcPx - x^{\mathrm{T}}P\dot{x} + x^{\mathrm{T}}Pc^{\mathrm{T}}u + \frac{1}{r}x^{\mathrm{T}}Pcc^{\mathrm{T}}Px + u^{\mathrm{T}}ru && (20)\\
&= -2\dot{x}^{\mathrm{T}}Px + u^{\mathrm{T}}ru + 2ru^{\mathrm{T}}cPx + \frac{1}{r}x^{\mathrm{T}}Pcc^{\mathrm{T}}Px && (21)
\end{aligned}$$

となる．ここで P は正定行列であるから，

$$\begin{aligned}
\dot{x}^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}ru &= -2\dot{x}^{\mathrm{T}}Px + r\left(u + \frac{1}{r}cPx\right)^{\mathrm{T}}\left(u + \frac{1}{r}cPx\right) && (22)\\
&= -\frac{d}{dt}\left(x^{\mathrm{T}}Px\right) + r\left(u + \frac{1}{r}cPx\right)^{\mathrm{T}}\left(u + \frac{1}{r}cPx\right) && (23)
\end{aligned}$$

となる．定常状態において状態量は見かけ上 0 である．つまり $x(\infty) = 0$ であるから，評価関数 J は，

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty \left\{ -\frac{d}{dt}\left(x^{\mathrm{T}} P x\right) + r\left(u + \frac{1}{r} cPx\right)^{\mathrm{T}}\left(u + \frac{1}{r} cPx\right) \right\} dt \qquad (24) \\
&= x^{\mathrm{T}}(0) P x(0) + r\int_0^\infty \left(u + \frac{1}{r} cPx\right)^{\mathrm{T}}\left(u + \frac{1}{r} cPx\right) dt \qquad (25)
\end{aligned}
$$

となる．すると，J を最小にするには制御入力 u を

$$
u = -\frac{1}{r} cPx \tag{26}
$$

とすれば良いことがわかる．よってカルマンゲイン l は

$$
l = \frac{1}{r} P c^T \tag{27}
$$

と求まる．

4　カルマンフィルタの設計

カルマンフィルタを設計するために，カルマンゲイン l を導出する．カルマンゲインは以下の式より導出できる．

$$
l = \frac{1}{r} P c^T \tag{28}
$$

ただし，P はリッカチ方程式

$$
AP + PA^T - \frac{1}{r} P c^T c P = -Q \tag{29}
$$

の実正定行列解である．(29) 式に

$$
\begin{cases}
A = -0.02 \\
r = 0.7 \\
Q = 0.7 \\
c = 1
\end{cases} \tag{30}
$$

を代入し，整理すると

$$P^2 + 0.028P - 0.49 = 0 \tag{31}$$

を得る．$P > 0$ より上式の解は

$$P = 0.686 \tag{32}$$

となる．するとカルマンゲイン l は，

$$l = \frac{1}{0.7} \times 0.686 \times 1 = 0.98 \tag{33}$$

となる．したがってカルマンフィルタは以下の式で与えられる．

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -0.02x + 0.001351u + 0.98\bigl(y - \tilde{y}\bigr) \\ \tilde{y} = \tilde{x} \end{cases} \tag{34}$$

5　シミュレーション

制御入力（ステップ入力）u を $u = 1000$ として MATLAB/Simulink でシミュレーションを行った．このとき，構成した Simulink のモデルを図 3 に示す．また，シミュレーション結果を図 4 に示す．また，Time が 300 から 400 のときの拡大図も図 4 に合わせて示す．ただし，システムノイズ v を $v = 0$ とし，シミュレーションを行った．

6　考察

図 4 を見ると，カルマンフィルタを用いた推定値（$\tilde{y} = \tilde{x}$）が測定値（$y = x + w$）より観測ノイズを除いた真値（$y = x$）との誤差が小さいことがわかる．つまり，カルマンフィルタを使ったことにより観測ノイズの影響を抑えていることがわかる．本レポートでは，システムノイズや観測ノイズの分散が既知としてシミュレーションを行ったが，現実世界ではノイズの正確な分散を得るのは難しい．よって，カルマンゲイン l を一定にするのでなく，ノイズの変化に合わせて l も変化させなければならないと考えられる．また，節で述べたように制御対象のモデル化の精度にも状態推定の精度が関わってくるため，制御対象をモデル化も精度良く行わなければならないと考えられる．

7　まとめ

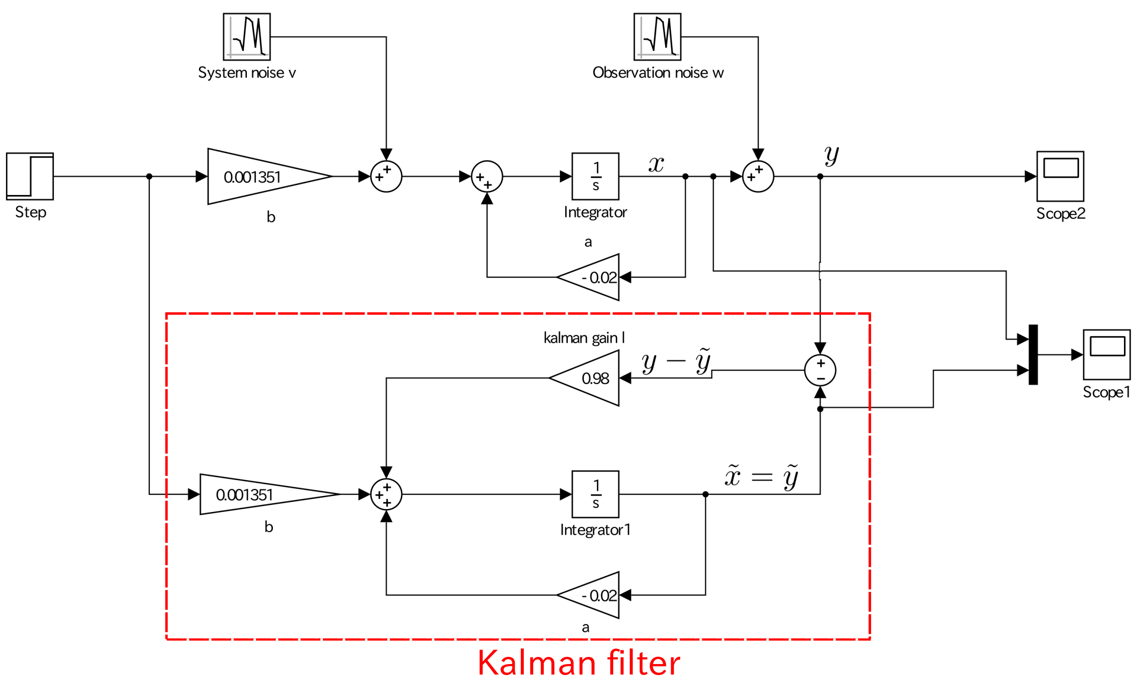

図 3. simulink で構成したモデル

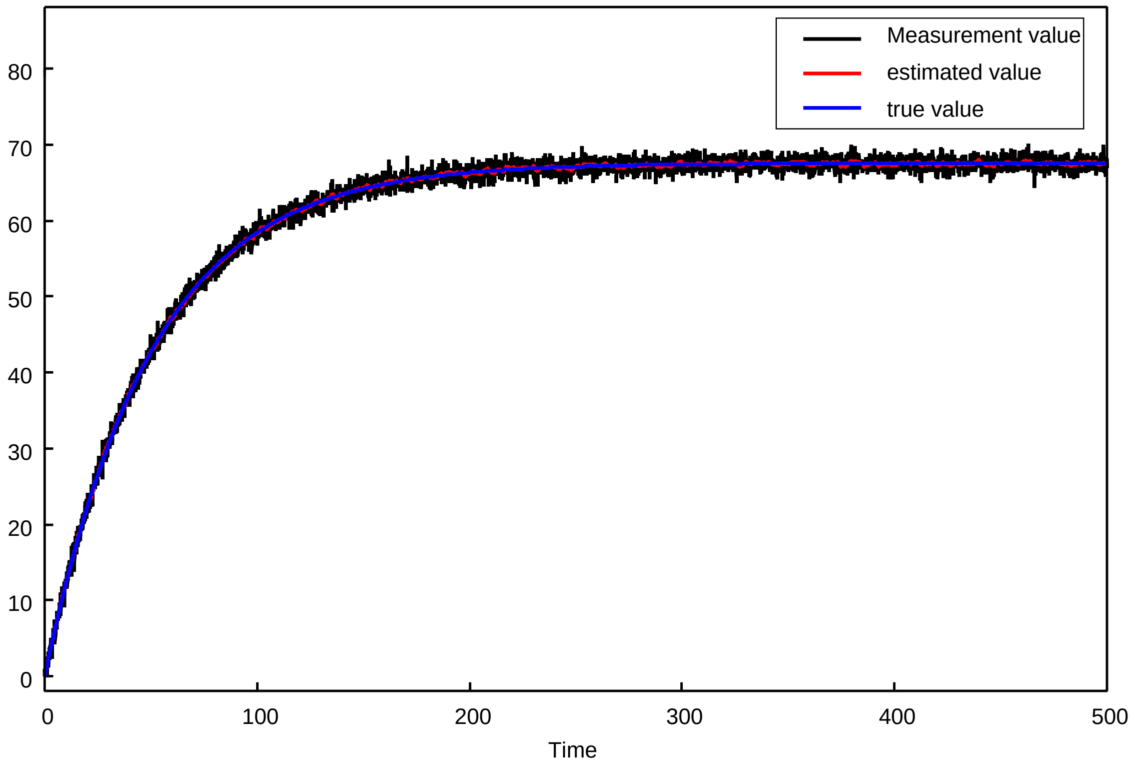

図 4. シミュレーション結果

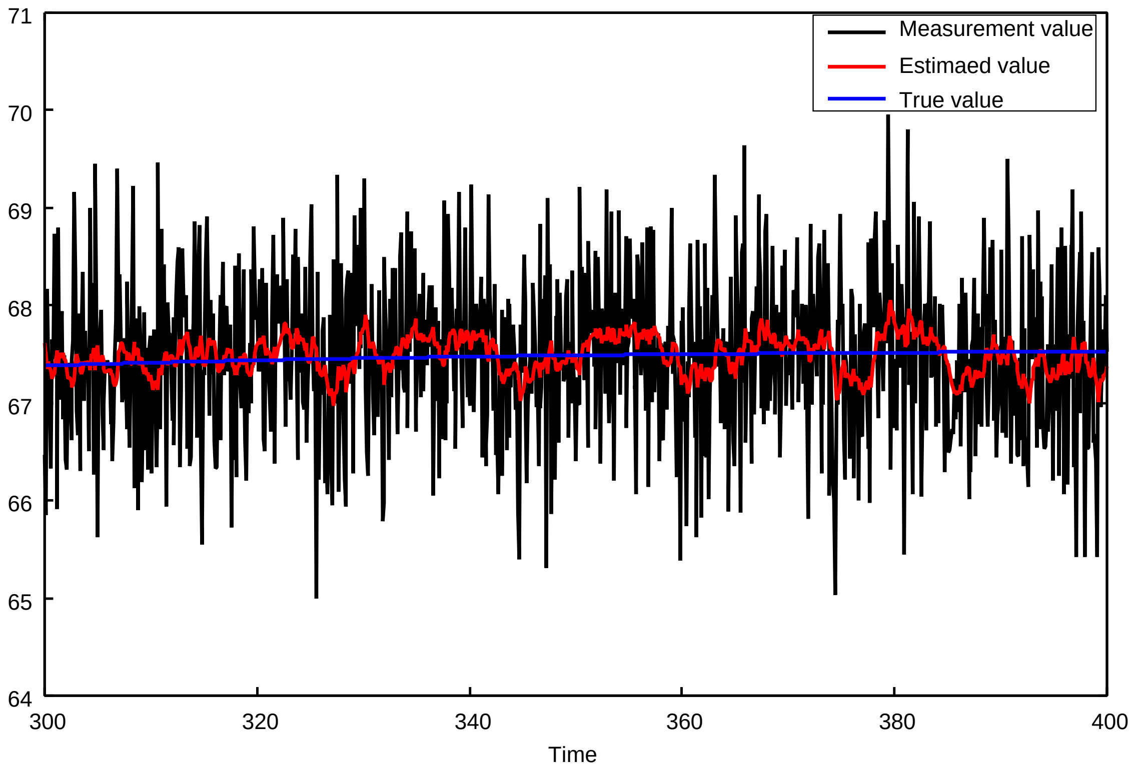

図 5. シミュレーション結果（Time が 300 から 400 のとき）

参考文献

[1] T.Sakamoto, "Lecture Notes of Advanced Electrical Drive Control System", 2016.

[2] 足立修一，丸田一郎，"カルマンフィルタの基礎"，東京電機大学出版局，2014.

[3] 堀洋一，大西公平，"応用制御工学"，丸善株式会社，1998.

[4] 金井喜美雄，"適応制御入門"，オーム社，1986.