

制御系構成特論 レポート課題2

機械知能工学専攻 16344217 津上 祐典

課題 1.

以下のシステム方程式を相似変換し，伝達関数を導出せよ．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2)$$

解答

$z(t) = Tx(t)$ （ただし， T は正則行列）とおくと，状態方程式は

$$\begin{aligned} T^{-1}\dot{z}(t) &= AT^{-1}z(t) + Bu(t) \\ \dot{z}(t) &= TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \end{aligned} \quad (3)$$

となり，出力方程式は

$$y(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t) \quad (4)$$

となる．初期値を零としラプラス変換すると，状態方程式は

$$\begin{aligned} sZ(s) &= TAT^{-1}Z(s) + TBU(s) \\ Z(s) &= (sI - TAT^{-1})^{-1}TBU(s) \end{aligned} \quad (5)$$

となり，出力方程式は

$$Y(s) = CT^{-1}Z(s) + DU(s) \quad (6)$$

となる．ただし， $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ ， $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ である．(5) 式を (6) 式に代入すると，

$$Y(s) = \{CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D\}U(s) \quad (7)$$

となる．これより伝達関数 $G(s)$ は

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\
 &= CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D \\
 &= CT^{-1}\{T(sI - A)T^{-1}\}^{-1}TB + D \\
 &= CT^{-1}T(sI - A)^{-1}T^{-1}TB + D \\
 &= C(sI - A)^{-1}B + D
 \end{aligned} \tag{8}$$

となる．

課題 2.

伝達関数 $G(s)$ が

$$G(s) = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2} = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ -b & a & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \tag{9}$$

で表され, $x(0) = [0 \quad -1/b]^T$ のとき, 入力 $u(t) = e^{at}$ に対する応答 $y(t)$ を求めよ.

解答

出力 $y(t)$ は

$$\begin{aligned}
 y(t) &= C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) \\
 &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} s - a & -b \\ b & s - a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1/b \end{bmatrix} + [1 \ 0] \begin{bmatrix} s - a & -b \\ b & s - a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s - a} \\
 &= \frac{1}{(s - a)^2 + b^2} [1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 \\ (a - s)/b \end{bmatrix} + \frac{1}{(s - a)^2 + b^2} [1 \ 0] \begin{bmatrix} s - a \\ -b \end{bmatrix} \frac{1}{s - a} \\
 &= \frac{-1}{(s - a)^2 + b^2} + \frac{1}{(s - a)^2 + b^2} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

となる． $G(s)$ の分子に着目したブロック線図を図 1 に示す．これより入力 $u(t) = e^{at}$ が印加されても出力が 0 であることが確認できる．

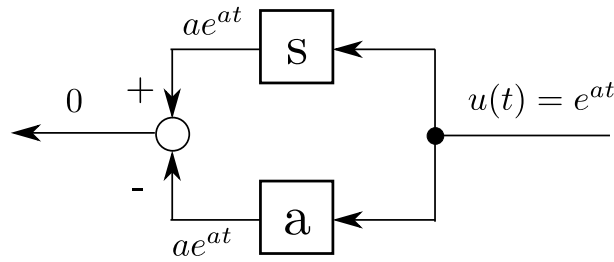


図 1. ブロック線図

課題 3.

$$G_1 = \frac{s-1}{s+1}, \quad G_2 = \frac{1}{s-1} \quad (11)$$

の場合について，直列，並列結合を求め，結合後のシステムの可制御・可観測性を調べよ．また，それぞれにおいて，結合後の伝達関数を求めよ．さらに，

$$G'_1 = G'_2 = \frac{1}{s-1} \quad (12)$$

のときの並列結合と可制御・可観測性を調べよ．

解答

はじめに G_1 を厳密なプロパーの形に変換すると，

$$G_1 = \frac{s-1}{s+1} = 1 + \frac{-2}{s+1} \quad (13)$$

となる．入力を u ，出力を y とすると $y = G_1 u$ であるから，

$$\begin{aligned} y &= \left(1 + \frac{-2}{s+1}\right) u \\ &= -\frac{2}{s+1} u + u \end{aligned} \quad (14)$$

となる． x を状態変数とするとシステム方程式は，

$$\dot{x} = -x - 2u \quad (15)$$

$$y = x + u \quad (16)$$

となる．これより伝達関数 G_1 をドイルの記法で記述すると

$$G_1 = \left[\begin{array}{c|c} -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right] \quad (17)$$

となる．同様に G_2 をドイルの記法で記述すると

$$G_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] \quad (18)$$

となる． G_1, G_2 を直列結合すると，

$$G_1 G_2 = \left[\begin{array}{c|c} -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (19)$$

となる．可制御性行列 U_c ，可観測性行列 U_o は，

$$U_c = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

となる． $\det U_c = 2 \neq 0$ ， $\det U_o = 0$ より，直列結合後のシステムは可制御で不可観測である．

また，直列結合後の伝達関数 G は，

$$\begin{aligned} G &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= [1 \ 1] \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2-1} [1 \ 1] \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1} \end{aligned} \quad (22)$$

となる．同様に並列結合の場合は

$$G_1 + G_2 = \left[\begin{array}{c|c} -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (23)$$

となる．可制御性行列 U_c ，可観測性行列 U_o は，

$$U_c = [B \ AB] = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

となる． $\det U_c = -4 \neq 0$ ， $\det U_o = 2 \neq 0$ より，並列結合後のシステムは可制御で可観測である．また，並列結合後の伝達関数 G は，

$$\begin{aligned} G &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= [1 \ 1] \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{s^2-1} [1 \ 1] \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{s^2 - s + 2}{s^2 - 1} \end{aligned} \quad (26)$$

となる．

次に G'_1, G'_2 の並列結合を求めると，

$$G'_1 + G'_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (27)$$

となる．可制御性行列 U_c ，可観測性行列 U_o は，

$$U_c = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

となる． $\det U_c = 0$ ， $\det U_o = 0$ より， G'_1, G'_2 の並列結合後のシステムは不可制御で不可観測である．