制御系構成特論 レポート課題2

機械知能工学専攻 16344217 津上 祐典

課題1.

以下のシステム方程式を相似変換し，伝達関数を導出せよ．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2}$$

解答

$z(t) = Tx(t)$（ただし，T は正則行列）とおくと，状態方程式は

$$\begin{aligned} T^{-1}\dot{z}(t) &= AT^{-1}z(t) + Bu(t) \\ \dot{z}(t) &= TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \end{aligned} \tag{3}$$

となり，出力方程式は

$$y(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t) \tag{4}$$

となる．初期値を零としラプラス変換すると，状態方程式は

$$\begin{aligned} sZ(s) &= TAT^{-1}Z(s) + TBU(s) \\ Z(s) &= (sI - TAT^{-1})^{-1}TBU(s) \end{aligned} \tag{5}$$

となり，出力方程式は

$$Y(s) = CT^{-1}Z(s) + DU(s) \tag{6}$$

となる．ただし，$Y(s) = \mathcal{L}[(t)]$，$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ である．(5) 式を (6) 式に代入すると，

$$Y(s) = \left\{CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D\right\}U(s) \tag{7}$$

となる．これより伝達関数 $G(s)$ は

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\
&= CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D \\
&= CT^{-1}\left\{T(sI - A)T^{-1}\right\}^{-1}TB + D \\
&= CT^{-1}T(sI - A)^{-1}T^{-1}TB + D \\
&= C(sI - A)^{-1}B + D \qquad (8)
\end{aligned}
$$

となる．

課題 2.

伝達関数 $G(s)$ が

$$
G(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ -b & a & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad (9)
$$

で表され，$x(0) = [0 \quad -1/b]^{\mathrm{T}}$ のとき，入力 $u(t) = e^{at}$ に対する応答 $y(t)$ を求めよ．

解答

出力 $y(t)$ は

$$
\begin{aligned}
y(t) &= C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) \\
&= [1 \quad 0]\begin{bmatrix} s-a & -b \\ b & s-a \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ -1/b \end{bmatrix} + [1 \quad 0]\begin{bmatrix} s-a & -b \\ b & s-a \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{1}{s-a} \\
&= \frac{1}{(s-a)^2+b^2}[1 \quad 0]\begin{bmatrix} -1 \\ (a-s)/b \end{bmatrix} + \frac{1}{(s-a)^2+b^2}[1 \quad 0]\begin{bmatrix} s-a \\ -b \end{bmatrix}\frac{1}{s-a} \\
&= \frac{-1}{(s-a)^2+b^2} + \frac{1}{(s-a)^2+b^2} \\
&= 0 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となる．零点 a の働きを図 1 に示す．$G(s)$ の分子 $s-a$ は積分器 s とゲイン $-a$ の並列結合であり，$u(t) = e^{at}$ が印加されると出力が 0 であることが図 1 より確認できる．

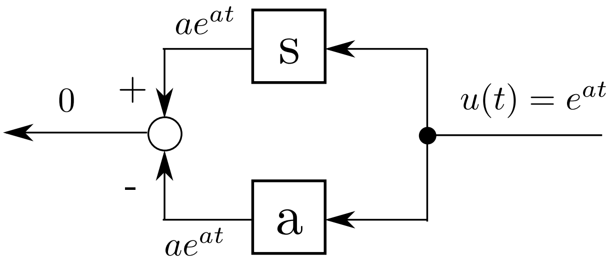

図 1. ブロック線図

課題3.

$$G_1 = \frac{s-1}{s+1}\ ,\ G_2 = \frac{1}{s-1} \tag{11}$$

の場合について，直列，並列結合を求め，結合後のシステムの可制御・可観測性を調べよ．

また，それぞれにおいて，結合後の伝達関数を求めよ．さらに，

$$G_1' = G_2' = \frac{1}{s-1} \tag{12}$$

のときの並列結合と可制御・可観測性を調べよ．

解答

はじめに G_1 を厳密なプロパーの形に変換すると，

$$G_1 = \frac{s-1}{s+1} = 1 + \frac{-2}{s+1} \tag{13}$$

となる．入力を u，出力を y とすると $y = G_1 u$ であるから，

$$\begin{aligned} y &= \left(1 + \frac{-2}{s+1}\right) u \\ &= -\frac{2}{s+1} u + u \end{aligned} \tag{14}$$

となる．x を状態変数とするとシステム方程式は，

$$\dot{x} = -x - 2u \tag{15}$$

$$y = x + u \tag{16}$$

となる．これより伝達関数 G_1 をドイルの記法で記述すると

$$G_1 = \left[\begin{array}{c|c} -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right] \tag{17}$$

となる．同様に G_2 をドイルの記法で記述すると

$$G_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \tag{18}$$

となる．G_1, G_2 を直列結合すると，

$$G_1G_2 = \left[\begin{array}{c|c} -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \tag{19}$$

となる．可制御性行列 U_c，可観測性行列 U_o は，

$$U_c = [B \ \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

となる．$\det U_c = 2 \neq 0$, $\det U_0 = 0$ より，直列結合後のシステムは可制御で不可観測である．

また，直列結合後の伝達関数 G は，

$$\begin{aligned} G &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= [1 \ \ 1] \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2-1}[1 \ \ 1] \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1} \end{aligned} \tag{22}$$

となる．同様に並列結合の場合は

$$G_1 + G_2 = \left[\begin{array}{c|c} -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \tag{23}$$

となる．可制御性行列 U_c，可観測性行列 U_o は，

$$U_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

となる．$\det U_c = -4 \neq 0$，$\det U_0 = 2 \neq 0$ より，並列結合後のシステムは可制御で可観測である．また，並列結合後の伝達関数 G は，

$$\begin{aligned} G &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{s^2 - 1} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{s^2 - s + 2}{s^2 - 1} \end{aligned} \tag{26}$$

となる．

次に G_1', G_2' の並列結合を求めると，

$$G_1' + G_2' = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \tag{27}$$

となる．可制御性行列 U_c，可観測性行列 U_o は，

$$U_c = [B \ \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

となる．$\det U_c = 0$，$\det U_0 = 0$ より，G_1', G_2' の並列結合後のシステムは不可制御で不可観測である．