Глава 1

Характеристический многочлен оператора

$\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, $[\mathcal{A}]_E = A$. Задача: найти собственное значение $\mathcal{A}$. λ – собственое значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow [\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E \notin \mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow |\mathcal{A} - \lambda\varepsilon| = 0$. Задача сводится к нахождению таких λ, при которых определитель матрицы равен нулю. $[\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E = A - \lambda E_n \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E_n| = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \ddots & \ddots & \vdots & a_{1n} \\ a_{n1} - \lambda & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обращается в ноль, когда λ является корнем этого уравнения.

Определение 1.1. Пусть $A \in M_n(K)$. Есть характеристический многочлен называется $\chi_A = \underbrace{|A - X \cdot E_n|}_{\in M_n(K[x]) \subset M_n(K(x))} \in K[x]$

$\begin{pmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{pmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \dots (a_{nn} - x) + G = (-1)^{n-1} x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\operatorname{Tr} A} x^{n-1} + \dots + |A|$, где $A = (a_{ij})$, $\deg G \leq n - 2$, $\operatorname{Tr} A$ - след матрицы.

Определение 1.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Его характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ называют $\chi_{[\mathcal{A}]_E}$, где E — любой базис V.

Проверка корректности: пусть $A = [\mathcal{A}]_E, A_1 = [\mathcal{A}]_{E_1}$, $C = M_{E \to E_1}$. Нужно: $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_1}$.

$A_1 = C^{-1} A C$

$\chi_{\mathcal{A}_1} = |A_1 - XE_n| = |C^{-1}AC - XC^{-1}C| = |C^{-1}AC - C^{-1}XE_nC| = |C^{-1}(A - XE_n)C| = \underbrace{|C^{-1}|}_{|C|^{-1}} |A - XE_n||C| = |A - XE_n| = \chi_{\mathcal{A}}$

У эквивалентных матриц след одинаков.

Таким образом, λ - собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \lambda$ – корень $\chi_{\mathcal{A}}$.

Определение 1.3. Кратность корня λ у многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ называется собственной алгебраической кратностью собственного значения λ (обозначается a_λ).

Предложение 1.1. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$.

1. Пусть $W|_{\mathcal{A}}$ - инвариантное подпространство V; $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_w \in W$. Тогда $\chi_{\mathcal{A}_1} | \chi_{\mathcal{A}}$.
2. Пусть $V = W_1 \bigoplus W_2$; W_1, W_2 – $\mathcal{A}$-инвариант. $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{W_1}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}|_{W_2} \Rightarrow \lambda_{\mathcal{A}} = \lambda_{\mathcal{A}_1} \lambda_{\mathcal{A}_2}$.

Доказательство. 1: E – базис V, начальная часть которого - базис W.

$[\mathcal{A}]_E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, $A_1 = [\mathcal{A}_1]_{E_1}$, E_1 - начальная часть E.

$\chi_{\mathcal{A}} = | \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) - XE_m| = | \left(\begin{array}{c|c} A_1 - XE_m & B \\ \hline 0 & A_2 - XE_{n-m} \end{array}\right) | =$

$|A_1 - XE_m||A_2 - XE_{n-m}| = \underbrace{\chi_{A_1}}_{=\chi_{\mathcal{A}_1}} \chi_{A_2}$.

2: аналогично, $[\mathcal{A}]_E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) : A_1 = [\mathcal{A}_1]_{E_1},\ A_2 = [\mathcal{A}_2]_{E_2} \Rightarrow$ $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{A_1}\chi_{A_2} = \chi_{\mathcal{A}_1}\chi_{\mathcal{A}_2}$. ■

Следствие 1.1.1. Допустим, λ – собственное значение $\mathcal{A}$, тогда $g_\lambda \leq g_\lambda$.

Доказательство. Применим предложение $W = V_\lambda$. Очевидно, W – $\mathcal{A}$-инвариант $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}|_{V_\lambda}} | \chi_{\mathcal{A}}$.
$[\mathcal{A}|_{V_\lambda}] = diag(\underbrace{\lambda, \lambda, \ldots, \lambda}_{g_\lambda}) \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}|_{V_\lambda}} = |diag(\underbrace{\lambda - x, \ldots, \lambda - x}_{g_\lambda})| = (\lambda - x)^{g_\lambda} \Rightarrow (\lambda - x)^{g_\lambda} | \chi_{\mathcal{A}} \Rightarrow a_\lambda \geq g_\lambda$. ■

Теорема 1.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда эквивалентны 2 утверждения:

1. $\mathcal{A}$ – диагонализируем.
2. $\chi_{\mathcal{A}}$ – раскладывается на линейные множители, и для любого собственного значения λ выполнено $g_\lambda = a_{lambda}$.

Пример 1.1.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \chi_A = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1\ (K = \mathbb{R})$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \chi_A = \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2,\ a_0 = 2 \neq g_0,\ g_0 = 1.$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: существует базис E, такой что $A = [\mathcal{A}]_E = diag(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{g_{\lambda_1}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{g_{\lambda_2}}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{g_{\lambda_m}})$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – различные собственные значения. $\chi_{\mathcal{A}} = (\lambda_1 - x)^{g_{\lambda_1}} \ldots (\lambda_k - x)^{g_{\lambda_k s}}$ – раскладывается на линейные множители (кратность – степень). $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$.
$2 \Rightarrow 1$: χ раскладывается на линейные множители $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}} = \pm(x - \lambda_1)^{a_{lambda_1}} \ldots (x - \lambda_k)^{a_{lambda_k}},\ g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i} \Rightarrow g_{\lambda_1} + \ldots + g_{\lambda_k} = a_{\lambda_1} + \ldots + a_{\lambda_k} = ? \Rightarrow \chi$ – $\mathcal{A}$ диагонализируем. ■