Ответы АиГ

Черепанов Илья

26.12.2024

Содержание

1 Множества и операции над ними.

Определение множества.

Множество – совокупность объектов, объединенных по какому-то признаку.
Объекты, из которых состоит множество, нахываются его ***элементами***.
Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $\{A, B, \dots, X, Y, \dots\}$, а их элементы – малыми буквами $\{a, b, \dots, x, y, \dots\}$.
Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, обозначается символом $\varnothing$.
Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Обозначается $A \subset B$.
Говорят, что множества A и B ***равны*** или ***совападают***, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. То есть, если множества состоят из одних и тех же элементов.
Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящие из элементов, принадлежащих хотя бы одному их этих множеств. Обозначается $A \cup B$ (или$A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ или } x \in B\}$
Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Обозначают $A \cap B$ (или$A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ и } x \in B\}$

Числовые множества. Множества на прямой.

Множества, элементами которых явлвяются числа, называются ***числовыми***.
Примеры числовых множеств:
$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$ - множество натуральных чисел.
$\mathbb{Z} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm n; \dots\}$ - множество целых чисел.
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел.
$\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел.
Между этими множествами существует соотношение:
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R}$

Действительные числа, не являющиеся рациональными, нызываются *иррациональными.*

Свойства $\mathbb{R}$:

1. Множество *упорядоченное*: для любых двух различных чисел a и b справедливо $a < b$ или $a > b$

2. Множество *плотное*: между двумя раличными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел.

3. Множество *непрерывное.* Пусть множество $\mathbb{R}$ разбито на два непустых класса A и B таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе и для каждой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a < b$. Тогда существует единственное число c, удовлетворяющее неравенству $a \leq c \leq b (\forall a \in A, \forall b \in B)$. Оно отделяет числа класса A от чисел класса B. Число c является либо наибольшим числом в классе A (тогда в классе B нет наименьшего числа), либо наименьшим числом в классе B (тогда в класе A нет наибольшего).

Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Это означает, что каждому числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует единственная точка числовой оси и наоборот.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}, a < b$
Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x \colon a \leq x \leq b\}$ – отрезок;

$(a; b) = \{x \colon a < x < b\}$ – интервал;

$[a; b) = \{x \colon a \leq x < b\}$;

$(a; b] = \{x \colon a < x \leq b\}$ – полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty; b] = \{x \colon x \leq b\}$;

$(-\infty; b) = \{x\colon x < b\}$;

$[a; \infty) = \{x\colon x \geq a\}$;

$(a; \infty) = \{x\colon x > a\}$;

$(-\infty; \infty) = \{x\colon -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$ – бесконечные интервалы (промежутки);

2 Плоскость комплексных чисел.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – точки плоскости.
$\alpha = (a, b)$
$\beta = (b, c)$
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$
Операции:

1. Сложение
   $\alpha + \beta = (a + c, b + d)$

2. Умножение
   $\alpha \cdot \beta = (ac - bd, bc + ad)$

3. Вычитание
   Пусть (x, y) – разность
   $(c, d) + (x, y) = (a, b)$
   $(c + x, d + y) = (a, b)$

$$\begin{cases} c + x = a \\ d + y = b \end{cases} \quad \begin{cases} x = a - c \\ y = b - d \end{cases}$$

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = (a - c, b - d)$$

4. Деление
   Пусть $\frac{\alpha}{\beta} = (x, y)$
   $(x, y) \cdot (c, d) = (a, b)$

$(cx - dy, cy + dx) = (a, b)$

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \\ y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{cases}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

Построенная плоскость, с введенными на ней операциями называется ***комлпексной плоскостью***. т.к. точки вида $(a, 0)$являются точками вещественной оси, они являются аналогом $\mathbb{R}$.
Ox – вещественная (действительная) ось
Oy – мнимая ось

3 Комплексные числа в алгебраической форме. Действия над ними.

$\alpha = a + bi$ – алгебраическая форма записи α.
a – действительная часть числа α
b – мнимая часть числа α
i – мнимая единица $i^2 = -1$
Пусть $\alpha = a + bi, \beta = c + di$
Операции над ними:

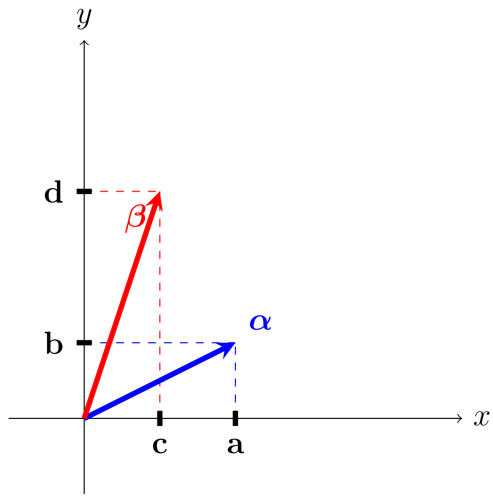
- $\alpha + \beta = a + c + (b + d)i$
- $\alpha - \beta = a - c + (b - d)i$
- $\alpha \cdot \beta = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci - bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

4 Геометрическая интерпретация операций над комплексными числами. Свойства модуля.

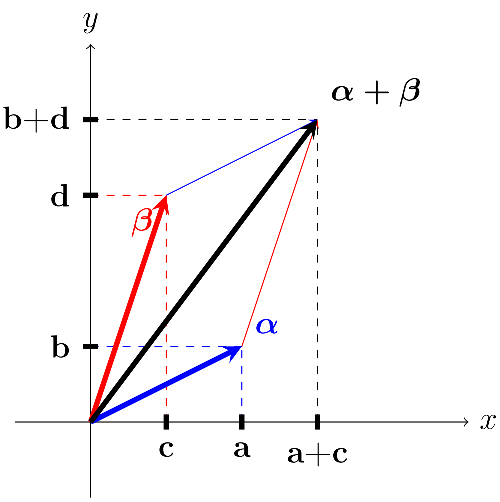
Геометрический смысл

Пусть

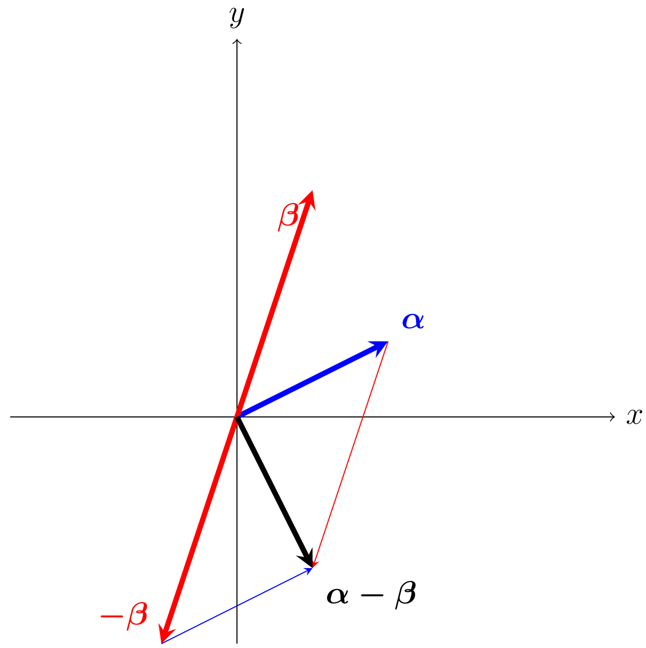
$$\alpha = (a, b) = a + bi$$
$$\beta = (c, d) = c + di$$



- Сложение $\alpha + \beta$

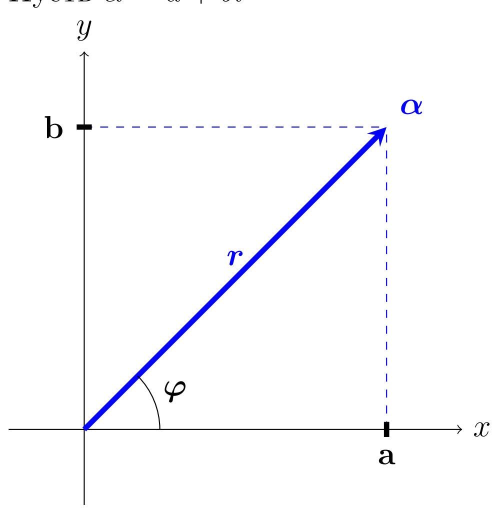


- Вычитание $\alpha - \beta$



Свойства модуля

Пусть $\alpha = a + bi$



(r, φ) – полярные координаты

$r^2 = a^2 + b^2$
$r\cos\varphi = a$
$r\sin\varphi = b$
$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{b}$
$r = |\alpha|$ – ***модуль*** α $\qquad |\alpha \in \mathbb{C}$
φ – ***аргумент*** α $\qquad |\alpha \in \mathbb{C}$
$Arg\alpha = \arg\alpha + 2\pi k$ $\qquad |k \in \mathbb{Z}$

$$\varphi = \arg\alpha \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \alpha \in I, IV \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi, & \alpha \in II \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \pi, & \alpha \in III \end{cases}$$

$\varphi \in [0; 2\pi)$

Свойства:

- $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha + \beta|$
- $|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|$
- $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

5 Сопряженные числа и их свойства.

$\alpha = a + bi$
$\overline{\alpha} = a - bi$ – сопряженное число к α

Свойства сопряженных чисел:

1. $\alpha + \overline{\alpha} = 2a \in \mathbb{R}$
2. $\alpha \cdot \overline{\alpha} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$
3. $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

Доказательство:

$$\alpha = a + bi$$
$$\beta = c + di$$
$$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$$
$$\overline{\alpha + \beta} = (a + c) - (b + d)i = a - bi + c - di = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$\blacksquare$

4. $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$

   Доказательство:

$$\alpha \cdot \beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$\overline{\alpha \cdot \beta} = ac - bd - (ad + bc)i$$
$$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (ad + bc)i$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

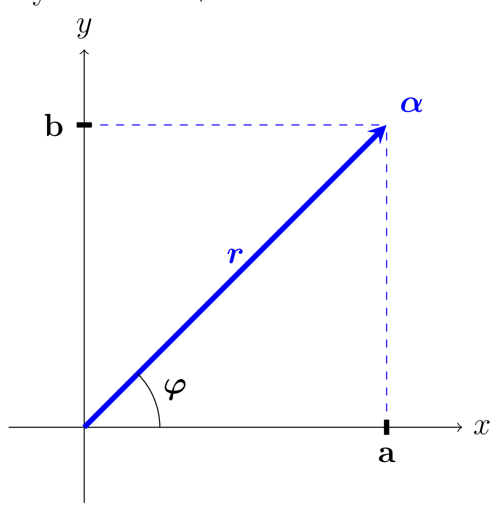
$\blacksquare$

5. $\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$
6. $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

6 Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма записи.

Пусть $\alpha = a + bi$



(r, φ) – полярные координаты

$r^2 = a^2 + b^2$

$r\cos\varphi = a$

$r\sin\varphi = b$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{b}$

$r = |\alpha|$ – модуль α $\qquad |\alpha \in \mathbb{C}$

φ – аргумент α $\qquad |\alpha \in \mathbb{C}$

$Arg\alpha = \arg\alpha + 2\pi k$ $\qquad |k \in \mathbb{Z}$

$$\varphi = \arg\alpha \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \alpha \in I, IV \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi, & \alpha \in II \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \pi, & \alpha \in III \end{cases}$$

$\varphi \in [0; 2\pi)$

$|0| = 0$

$\varphi = \arg 0$ – не определен

$\boxed{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ – } \textbf{\textit{тригонометрическая форма}} \text{ записи } \alpha}$

Умножение

Пусть

$$\alpha = |\alpha|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$\beta = |\beta|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

тогда

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)) =$$
$$= |\alpha| \cdot |\beta|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

то есть

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Деление

Пусть

$$\alpha = |\alpha|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$\beta = |\beta|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

тогда

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{|\alpha|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|\beta|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \\ &= \frac{|\alpha|}{|\beta|}\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\ &= \frac{|\alpha|}{|\beta|}\frac{\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\left(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2\right)}{\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2} = \\ &= \frac{|\alpha|}{|\beta|}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)\end{aligned}$$

то есть

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)$$

7 Формула Муавра. Формулы для синуса и косинуса кратного угла.

$\alpha^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$ – формула Муавра.

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$
$$\Downarrow$$
$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = \underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}_{\text{\textit{Бином Ньютона}}}$$

$$\begin{cases}\cos n\varphi \text{ – действительная часть полинома } (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\ \sin n\varphi \text{ – мнимая часть полинома } (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n\end{cases}$$

8 Извлечение квадратного корня и корня n-й степени из комплексного числа.

Квадратный корень

Пусть
$\alpha = a + bi$

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{a+bi} = x + yi$$
$$a + bi = x^2 + 2xyi - y^2$$
$$\begin{cases} a = x^2 - y^2 & |^2 \\ b = 2xy & |^2 \end{cases}$$
$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 + b^2$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$$
$$y^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

Корень n-ой степени

Пусть
$\alpha = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = R(\cos\psi + i\sin\psi)$$
$$R = \sqrt[n]{r}$$
$$r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = R^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$
$$n\psi = \varphi + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\boxed{\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, \dots, n-1}$$

9 Извлечение корня n-й степени из единицы.

$$1 = \cos 0 + i \sin 0$$
$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1$$
$$\sqrt{1} = \pm 1$$
$$\sqrt[4]{1} = \{\pm 1 \cup \pm i\} = \{1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$$
$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned}
k = 0\colon &\quad \cos 0 + i \sin 0 = 1 \\
k = 1\colon &\quad \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
k = 2\colon &\quad \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Свойства

1. Все значения $\sqrt[n]{\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$ можно получить умножением одного из этих значений на все корни n-ой степени из 1.

2. Произведение двух корней n-ой степени из 1 само есть корень n-ой степени из 1.

3. Число, обратное корню n-ой степени из 1 само есть такой же корень.

4. Всякая степень корня n-ой степени из 1 есть такой же корень n-ой степени из 1.

5. Всякий корень k-ой степени из 1 будет также корнем l-ой степени из 1 для всякого l кратного k.

10 Показательная форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме.

Формула Эйлера

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Показательная форма записи

$$\alpha = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$
$$\alpha = re^{i\varphi}$$

Умножение

$$\alpha = re^{i\varphi}$$
$$\beta = r'e^{i\varphi'}$$
$$\alpha \cdot \beta = re^{i\varphi} \cdot r'e^{i\varphi'} = rr'e^{i(\varphi+\varphi')}$$

Деление

$$\alpha = re^{i\varphi}$$
$$\beta = r'e^{i\varphi'}$$
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{re^{i\varphi}}{r'e^{i\varphi'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\varphi-\varphi')}$$

11 Операции над многочленами и их свойства.

Многочлены

Многочлен – сумма целых неотрицательных степеней неизвестного числа x, взятых с некоторыми коэффициентами.
Выражение вида $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ называется ***полиномом (многочленом)*** n-ой степени от неизвестного x.
$\deg f(x) = n$ – степень многочлена.
Многочленами *нулевой* степени являются отличные от 0 комплексные числа.
Число 0 также будет многочленом, степень которого неопределена.
Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ ***равны***, если равны коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного.

Операции

Пусть

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$
$$g(x) = b_sx^s + b_{s-1}x^{s-1} + \dots + b_1x + b_0, \qquad b_s \neq 0$$

- $f(x) + g(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$,
  где $c_i = a_i + b_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, причем при $n > s$, коэффициенты $b_{s+1}, b_{s+2}, \dots, b_n$ считаем равными 0.
  Свойства:
  1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$
  2. $[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$
- $-f(x) = -a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0$
- $f(x) \cdot g(x) = d_{n+s}x^{n+s} + d_{n+s-1}x^{n+s-1} + \dots + d_1x + d_0$,
  где $d_i = \sum_{k+l=i} a_kb_l$, $i = 0, 1, \dots, n+s-1, n+s$
  Свойства:
  1. $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$

2. $[f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) = f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)]$

- роль единицы в умножении играет число 1.
- $f(x)$ обладает обратным многочленом $f^{-1}(x)$, таким что $f(x) \cdot f^{-1}(x) = 1$, если $f(x)$ является многочленом 0 степени.

12 Деление многочленов с остатком.

$\forall f(x), g(x) \exists! q(x), r(x)\colon$
$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$
Причем $\deg r(x) < \deg g(x)$ или $\deg r(x) = 0$.
$q(x)$ – частное от деления $f(x)$ на $g(x)$.
$r(x)$ – остаток от деления.
Доказательство:

1. $\exists$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ g(x) &= b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

(a) $s > n \Rightarrow q(x) = 0, r(x) = f(x)$
$\deg r(x) < \deg g(x)$

(b) $s \leq n$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) - \frac{a_n}{b_s}x^{n-s} \cdot g(x), && \deg f_1(x) = n_1 < n \\ n_1 \geq s\colon f_2(x) &= f_1(x) - \frac{a_{n_1}}{b_s}x^{n_1-s} \cdot g(x), && \deg f_2(x) = n_2 < n_1 \\ n_2 \geq s\colon f_3(x) &= f_2(x) - \frac{a_{n_2}}{b_s}x^{n_2-s} \cdot g(x), && \deg f_3(x) = n_3 < n_2 \\ & \dots \\ n_{k-1} \geq n_{k-2}\colon f_k(x) &= f_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}-s}}{b_s} \cdot g(x), && \deg f_k(x) = n_k < n_{k-1} \end{aligned}$$

Сложим $f_1(x), f_2(x) \dots, f_{k-1}(x)$:

$$f(x) - \left(\frac{a_n}{b_s}x^{n-s} + \frac{a_{n_1}}{b_s}x^{n_1-s} + \frac{a_{n_2}}{b_s}x^{n_2-s} + \dots + \frac{a_{n_{k-1}-s}}{b_s}\right) \cdot g(x) = f_k(x)$$

$$q(x) = \frac{a_n}{b_s}x^{n-s} + \frac{a_{n_1}}{b_s}x^{n_1-s} + \frac{a_{n_2}}{b_s}x^{n_2-s} + \dots + \frac{a_{n_{k-1}-s}}{b_s}$$

$$r(x) = f_k(x)$$

2. $\exists!$ - Однозначность доказываем от обратного.
   Пусть $\exists \overline{q}(x), \overline{r}(x)$:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \tag{1}$$

$$f(x) = g(x) \cdot \overline{q}(x) + \overline{r}(x) \tag{2}$$

   Из (1) вычтем (2):

$$g(x) \cdot (\overline{q}(x) - q(x)) = r(x) - \overline{r}(x)$$

$$\begin{cases} \overline{q}(x) - q(x) = 0 \\ \overline{r}(x) - r(x) = 0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

Следствие

Если $f(x)$ или $g(x)$ – многочлены с $\mathbb{R}$ коэффициентами, то коэффициенты многочленов $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), g(x)$, а значит и $q(x), r(x)$ – так же $\mathbb{R}$.

13 Теорема о делителе многочлена. Свойства делимости многочлена.

Пусть даны $f(x), g(x)$ с $\mathbb{C}$ коэффициентами.
Если остаток от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен нулю, то говорят, что $f(x)$ ***нацело делится*** на $g(x)$ и $g(x)$ – ***делитель*** $f(x)$.

$$f(x) \vdots g(x) \Leftrightarrow \exists h(x) \colon f(x) = h(x) \cdot g(x)$$

Доказательство:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$
$$r(x) = 0$$
$$q(x) = h(x)$$
$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$
$$\blacksquare$$

Замечание:
если $g(x)$ – делитель многочлена $f(x)$, то и $q(x)$ – делитель.

Свойства делимости

1. Если $f(x) \vdots g(x)$, а $g(x) \vdots h(x)$, то $f(x) \vdots h(x)$.
   Доказательство:

   $$f(x) \vdots g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$$
   $$g(x) \vdots h(x) \Rightarrow g(x) = h(x) \cdot \psi(x)$$
   $$f(x) = [h(x) \cdot \psi(x)] \cdot \varphi(x) = h(x) \cdot [\psi(x) \cdot (\varphi(x))]$$
   $$\Downarrow$$
   $$f(x) \vdots h(x)$$
   $$\blacksquare$$

2. Если $f(x) \vdots \varphi(x)$ и $g(x) \vdots \varphi(x)$, то их сумма и разность так же делится на $\varphi(x)$

Доказательство:

$$f(x) \vdots \varphi(x) \Rightarrow f(x) = \varphi(x) \cdot \psi_1(x)$$

$$g(x) \vdots \varphi(x) \Rightarrow g(x) = \varphi(x) \cdot \psi_2(x)$$
$$f(x) \pm g(x) = \varphi(x) \cdot \psi_1(x) \pm \varphi(x) \cdot \psi_2(x) = \varphi(x) \pm [\psi_1(x) \pm \psi_2(x)]$$
$$\Downarrow$$

$$f(x) \pm g(x) \vdots \varphi(x)$$
■

3. Если $f(x) \vdots \varphi(x)$, то $f(x) \cdot g(x)$ так же делится на $\varphi(x)$
   Доказательство:

   $$f(x) \vdots \varphi(x) \Rightarrow f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$
   $$f(x) \cdot g(x) = [\varphi(x) \cdot \psi(x)] \cdot g(x) = \varphi(x) [\cdot \psi(x) \cdot g(x)]$$
   $$\Downarrow$$

   $$f(x) \cdot g(x) \vdots \varphi(x)$$
   ■

4. Если каждый $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ делится на $\varphi(x)$, то на $\varphi(x)$ будет делиться и многочлен $f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \cdots + f_k(x)g_k(x)$, где $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x)$ – произвольные многочлены.
   Доказательство:
   Следует из 2 и 3 свойств.

5. Всякий многочлен $f(x)$ делится на любой многочлен нулевой степени.
   Доказательство:

   $c = const$ (многочлен нулевой степени)

   $$f(x) = c\left(c^{-1} f(x)\right) \Rightarrow f(x) \vdots c$$
   ■

6. Если $f(x) \vdots \varphi(x)$, то $f(x) \vdots c \cdot \varphi(x)$, где c – произвольное число, отличное от 0.
Доказательство:

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$
$$f(x) = c\varphi(x) \left[c^{-1}\psi(x)\right]$$
$$\blacksquare$$

7. Многочлены $cf(x), c \neq 0$ и только они будут делителями многочлена $f(x)$, имеющими такую же степень, что и $f(x)$
Доказательство:

$$f(x) = cf(x) \cdot c^{-1}, c \neq 0$$
$$\exists\varphi(x), \deg\varphi(x) = \deg f(x)$$
$$f(x) \vdots \varphi(x)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\deg\psi(x) = 0$$
$$\psi(x) = c \Rightarrow f(x) \vdots cf(x)$$
$$\blacksquare$$

8. $f(x) \vdots g(x)$ и $g(x) \vdots f(x) \Leftrightarrow f(x) = cg(x), c \neq 0$
Доказательство:
Следует из свойства 7.

9. Всякий делитель одного из двух многочленов $f(x), cf(x), c \neq 0$, будет делителем и для другого многочлена.
Доказательство:
Следует из свойств 8 и 1.

14 Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.

Многочлен $\varphi(x)$ будет называться ***общим делителем*** для $f(x)$ и $g(x)$, если $f(x) \vdots \varphi(x), g(x) \vdots \varphi(x)$
Замечание:
К числу общих делителей $f(x), g(x)$ принадлежат все многочлены нулевой степени.
Наибольшим общим делителем отличных от 0 многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется такой многочлен $d(x)$, который является их общим делителем и, вместе с тем, сам делится на любой другой их общий делитель.

Алгоритм Евклида

$$
\begin{array}{ll}
\deg f(x) \geq \deg g(x) & \\
f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x), & \deg r_1(x) < \deg g(x) \\
g(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x), & \deg r_2(x) < \deg r_1(x) \\
\ldots & \\
r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x) \cdot q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x), & \deg r_{k-1}(x) < \deg r_{k-2}(x) \\
r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x) \cdot q_k(x) + r_k(x), & \deg r_k(x) < \deg r_{k-1}(x) \\
r_{k-1} = r_k(x) \cdot q_{k+1}(x) & \\
r_k(x) \text{ – НОД} &
\end{array}
$$

15 Теорема о линейном представлении наибольшего общего делителя. Следствия из нее.

Если $d(x)$ – НОД $f(x), g(x)$, то можно найти такие многочлены $u(x), v(x)$, что:

$$\begin{aligned}
&f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = d(x)\\
&\deg f(x) \neq 0; \deg g(x) \neq 0\\
&\deg u(x) < \deg f(x)\\
&\deg v(x) < \deg g(x)
\end{aligned}$$

Следствие:
$f(x)$ и $g(x)$ – взаимно простые $\Leftrightarrow \exists u(x), v(x)\colon\ f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$

Свойства взаимно простых многочленов

1. Если многочлен $f(x)$ взаимно прост с каждым из $\varphi(x), \psi(x)$, то он взаимно прост с их произведением.

2. Если $f(x) \cdot g(x) \vdots \varphi(x)$, но $\varphi(x)$ и $f(x)$ – взаимно простые, то $g(x) \vdots \varphi(x)$

3. Если $f(x) \vdots \varphi(x)$ и $f(x) \vdots \psi(x)$, которые между собой взаимно простые, то $f(x) \vdots \varphi(x) \cdot \psi(x)$

16 Теорема Безу и следствия из нее.

Теорема Безу

Остаток от деления $f(x)$ на линейный многочлен $x - c$ равен значению $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x = c$
Доказательство:

$$f(x) = (x-c)\cdot q(x) + r(x)$$
$$\deg r(x) = 0 f(c) = (c-c)\cdot q(c) + r \Rightarrow \boxed{r = f(c)}$$
$$\blacksquare$$

Следствие:
c – корень $f(x) \Leftrightarrow f(x) \vdots (x-c)$
Таким образом найти корень многочлена $\Leftrightarrow$ найти его линейный делитель

$$f(x) \vdots (ax+b) \Rightarrow f(x) \vdots \left(x - \left(-\frac{a}{b}\right)\right)$$

17 Схема Горнера.

Пусть

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\
f(x) &= (x-c)q(x) + r \\
&\text{где:} \\
q(x) &= b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0 \\
b_n &= a_n \\
b_{n-1} &= cb_n + a_{n-1} \\
b_{n-2} &= cb_{n-1} + a_{n-2} \\
\dots \\
b_1 &= cb_2 + a_1 \\
b_0 &= cb_1 + a_0 \\
r &= b_0
\end{aligned}$$

$f(x)$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
c	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_1	b_0

Кратные корни

Если $f(x) = (x - c)^k \cdot \varphi(x)$, где многочлен $\varphi(x) \not\vdots c$, то число k называется ***кратностью корня*** c в многочлене $f(x)$, а сам корень c – k-кратным корнем (или корнем кратности k). Если $k = 1$, то говорят, что корень c – простой.

18 Основная теорема высшей алгебры. Следствия из нее.

Основная теорема алгебры

Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше 1, имеет хотя бы один корень (в общем случае комплексный).
$\forall f(x), \deg f(x) > 1 : \exists c \in \mathbb{C}\colon f(c) = 0$
Следствие 1:
Любой многочлен n-ой степени можно разложить единственным образом в произведение n линейных множителей

$$f(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$$

Доказательство:

$f(x) \qquad | \deg f(x) = n$

α_1 – корень $f(x)$

$\Downarrow$

$f(x) = (x - \alpha_1)\, g_1(x) \quad | \deg g_1(x) = n - 1$

α_2 – корень $g_1(x)$

$\Downarrow$

$g_1(x) = (x - \alpha_2)\, g_2(x) \quad | \deg g_2(x) = n - 2$

$\Downarrow$

$\dots$

$\Downarrow$

$f(x) = a_n\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$

$f(x) = a_n\,(x - \beta_1)\,(x - \beta_2)\dots(x - \beta_n)$

$\Downarrow$

$(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n) = (x - \beta_1)\,(x - \beta_2)\dots(x - \beta_n)$

$\alpha_1 \neq \beta_j, \forall j = 1, 2, \dots, n$

$x = \alpha_1 \Rightarrow 0 = c \neq 0$– противоречие

■

Следствие 2:
Если многочлены $f(x)$ и $g(x)$, $\deg f(x) \leq n, \deg g(x) \leq n$, имеют равные значения более чем при n различных значениях неизвестного, то $f(x) = g(x)$
Доказательство:

$f(x) - g(x), \deg\,(f(x) - g(x)) \leq n$

при $x = c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots$

$f(c_i) = g(c_i) \forall i$

$c_1, c_2, \dots$ – корни $\Rightarrow f(x) - g(x) = 0$

$f(x) = g(x)$

■

Следствие 3:
Если $\alpha \in \mathbb{C}$ – корень $f(x)$ с $\mathbb{R}$ коэффициентами, то корнем $f(x)$ будет и $\overline{\alpha}$.
Доказательство:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$\alpha \text{ – корень } f(x)$$
$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$
$$a_n \overline{\alpha}^n + a_{n-1} \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{\alpha} \text{ – корень } f(x)$$
$$\blacksquare$$

Следствие 4:
Всякий многочлен $f(x)$ с $\mathbb{R}$ коэффициентами можно представить в виде произведения линейных двучленов и квадратных трехчленов (для $D < 0$), соответствующих парам сопряженных $\mathbb{C}$ корней.
Следствие 5:
Многочлен нечетной степени с $\mathbb{R}$ коэффициентами всегда имеет хотя бы один $\mathbb{R}$ корень.

19 Интерполяционная формула Лагранжа. Формулы Виета.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_i \left(x - a_1\right) \ldots \left(x - a_{i-1}\right) \left(x - ai + 1\right) \ldots \left(x - a_{n+1}\right)}{\left(a_i - a_1\right) \ldots \left(a_i - a_{i-1}\right) \left(a_i - a_{i+1}\right) \ldots \left(a_i - a_{n+1}\right)}$$

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни $f(x)$
$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$
$$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$
$$a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n$$
$$a_{n-3} = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$$
$$a_1 = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\alpha_n + \dots + \alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n)$$
$$a_0 = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n$$

Для $n = 2$ *(Формулы Виета):*

$$a_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$a_0 = \alpha_1\alpha_2$$

Для $n = 3$:

$$a_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$
$$a_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$$
$$a_0 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

20 Теорема о несократимых дробях. Теорема о неправильной дроби.

Рациональной дробью или дробно-рациональной функцией называют частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ двух целых рациональных функций, где $g(x) \neq 0$
Рациональная дробь называется ***несократимой***, если её числитель взаимно прост со знаменателем.

Теорема о несократимых дробях

Всякая рациональная дробь равна некоторой несократимой дроби, определенной однозначно с точностью до множителя нулевой степени, общего для числителя и знаменателя.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(x)\cdot\varphi(x)}{h(x)\cdot\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

Доказательство:

$(f(x), g(x)) = h(x)$ – НОД $f(x), g(x)$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{h(x)\cdot\varphi(x)}{h(x)\cdot\psi(x)} = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ – несократимая дробь

$\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \dfrac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ \dfrac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

$(\varphi(x), \psi(x)) = 1$

$\psi_1(x) \vdots \psi(x)$

$(\varphi_1(x), \psi_1(x)) = 1$

$\varphi(x) \vdots \varphi_1$

$\varphi(x) = c\cdot\varphi_1(x)$

$\varphi(x)\psi_1(x) = \varphi_1(x)\psi(x)$

~~чет хуйня какая-то~~

■

Рациональная дробь называется ***правильной*** если степень числителя больше степени знаменателя. В противном случае дробь ***неправильная***.

Теорема о неправильной рациональной дроби

Всякая рациональная дробь представима (притом единственным способом) в виде суммы многочлена и неправильной рациональной дроби.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
&\deg f(x) \geq \deg g(x)\\
&f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)\\
&\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x) \cdot g(x) + r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}\\
&\blacksquare
\end{aligned}$$

21 Разложение рациональных дробей в сумму простейших.

Правильная рациональная дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется ***простейшей***, если ее знаменатель $g(x)$ является степенью неприводимого многочлена $p(x)$.

$$g(x) = p^k(x), k \geq 1$$

, а степень числителя $f(x)$ меньше степени $p(x)$.// $\alpha \in \mathbb{R}$ – корень $g(x)$:

$$\begin{aligned}
I.&\frac{A}{x-\alpha} & \\
II.&\frac{A}{(x-\alpha)^k}, & k > 1\\
III.&\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, & D < 0\\
IV.&\frac{Mx+N}{(x^2+px+q..)^k}, & k > 1
\end{aligned}$$

Основная Теорема рациональных дробей

Всякая произвольная рациональная дробь разлагается в сумму простейших дробей.

22 Линейные операции над матрицами и их свойства.

Общая информация о матрицах

Матрицей назыается таблица чисел вида:

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

, где a_{ij} – ***элементы матрицы***, при этом i – номер строки, j – номер столбца.
Число строк и столбцов матрицы называется ее ***размерностью*** $(m\times n)$.
Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла образуют ***главную диагональ*** $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.
Если число строк равно числу столбцов $(m = n)$, матрица называется ***квадратной***, а число строк(столбцов) называется ***порядком*** матрицы.
Иначе – матрица прямоугольная.
Матрица, состоящая из одной строки называется ***матрицей-строкой***, а из одного столбца – ***матрицей-столбцом***.
Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме главной диагонали равны нулю, называется ***диагональной*** матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен 1, называется ***единичной*** матрицей. Обозначааемся буквой E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица, все элементы которой равны 0, называется ***нулевой***. Обозначается буквой O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***треугольной***, есди все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Нижняя труегольная *Верхняя треугольная*

Две матрицы A и B называются ***равными***, если они имеют одинаковую размерность и их соответстсвующие элементы равны.

Действия над матрицами

1. Сложение матриц (только для матриц одинаковой размерности).
   Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, такая что

   $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

   Свойства:

   1) $A + B = B + A$
   2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
   3) $A + O = A$
   4) $A - A = O$

2. Умножение матрицы на число
   Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число k называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$, такая что

   $$b_{ij} = a_{ij} \cdot k, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

   Свойства:

1) $1 \cdot A = A$

2) $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

3) $O \cdot A = O$

4) $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$

5) $k_1 \cdot (k_2 \cdot A) = (k_1 \cdot k_2) \cdot A$

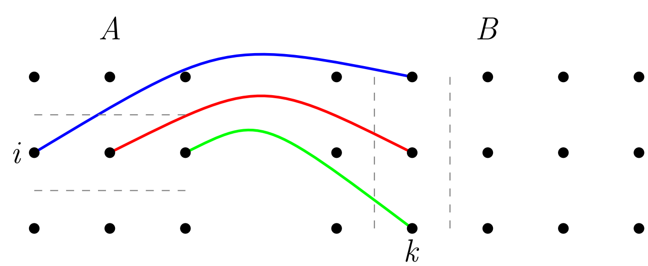
23 Умножение матриц. Элементарные преобразования над матрицами.

Операция умножения для двух матриц вводится для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы*.
Произведением $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на $B_{n\times p} = (b_{jk})$, называется матрица $C_{m\times p} = (c_{jk})$, такая что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

, то есть элемент i-ой строки k-го столбца матрицы C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

$$A_{m\times \underline{n}} \cdot B_{\underline{n}\times p} = C_{m\times p}$$



Свойства:

1. $A\,(BC) = (AB)\,C$

2. $A\,(B + C) = AB + AC$

3. $(A + B)\,C = AC + BC$

4. $k\,(AB) = (kA)\,B$

Матрицы A и B называются ***перестановочныммми*** если $A \cdot B = B \cdot A$
Если матрицы A и B перестановочны, то любые их натуральные степени перестановочны

$$(AB)^p = A^p B^p$$

Транспонирование

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером называется ***транспонированной*** к данной $\left(A^T\right)$.

Элементарные преобразования

1. Перестановка местами двух строк (столбцов) матрицы.
2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на одно и то же число
3. Прибавление ко всем элементам одной строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же ненулевое число.

Две матрицы A и B называют ***эквивалентными*** $A \sim B$, если одна из них может быть получена из другой с помощью элементарных преобразований.
Матрица A называется ***ступенчатой***, если она имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}$$

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

24 Блочные матрицы и операции над ними. Прямая сумма квадратных матриц.

Если матрицу разбить на отдельные прямоугольные блоки, каждый из которых представляет собой матрицу меньшего размераи называется блоком исходной матрицы, то сама матрица называется ***блочной***. Прямой суммой $C = A \oplus B$ двух квадратных матриц называется квадратная блочная матрица C порядка $m + n$, равная

$$C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

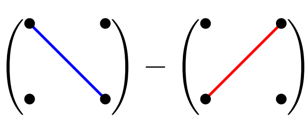
, где O – нулевая матрица соответствующей размерности.

25 Определитель. Частный случай теоремы Лапласа.

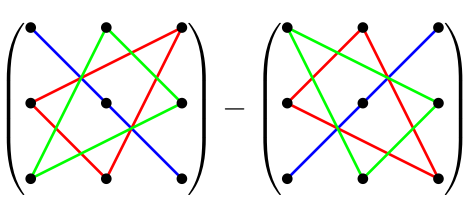
Определеителем квадратной матрицы A называетя число $|A|$, полученное по следующему правилу:

a) если $n = 1$, то $A = (a)$ и $|A| = a$

b) если $n = 2$, то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$



c) Если $n = 3$, то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
и $|A| = a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{33} \cdot a_{21} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$



Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца на пересечении которых стоит элемент a_{ij}

Если $n > 3$, то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

и

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot M_{1n} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j} \end{aligned}$$

, где M_{1j} – минор элемента $a_{1j}, (j = 1, 2, \dots, n)$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента взятый со знаком $+$, если сумма номеров строки и столбца четная, и со знаком $-$, если сумма нечетная.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

25.1 Теорема Лапласа

Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \text{ \textit{для i-ой строки}}$$

Доказательство (индукция):

1) $n = 2$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$$

2) $n - 1$ – верно

3) n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}M_{1n} =$$

$$= a_{11} \sum_{j=2}^{n} a_{ij}M_{ij}^{11} - a_{12} \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}^{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}^{1n} =$$

$$= \dots + a_{ij} (-1)^{i+j} \sum_{k=1, k\neq j}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k}M_{1k}^{ij} + \dots =$$

$$= \dots + a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} + \dots = \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots$$

■

26 Перечислить свойства определителя.

Свойства определителей:

1. Величина определителя не изменится, если его транспонировать

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину.

3. Общий множитель всех элементов какой-либо строки или столбца можно вынести за знак определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda a_{i1}A_{i1} + \lambda a_{i2}A_{i2} + \dots + \lambda a_{in}A_{in} =$$

$$= \lambda \left(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}\right) = \lambda \left|A\right|$$

4. Если все элементы некоторой строки (столбца) равны 0, то и сам определитель равен 0.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

5. Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен 0.
Доказательство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|$$
$$-|A| = |A| \Rightarrow |A| = 0$$
■

6. Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель $= 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

   Доказательство:
   Следует из п.3 и п.5

7. Если каждый элемент строки (столбца) предствляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть предствлен в виде суммы двух определителей, один из которых в соответствующей строке (столбце) имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой - вторые; элементы, стоящие на остальных местах у всех определителей одни и те же.

8. Если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же ненулевое число, то величина определителя не изменится

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} + \lambda a_{k1} & a_{s2} + \lambda a_{k2} & \dots & a_{sn} + \lambda a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   Доказательство:
   Следует из п.6 и п.7

9. Сумма поизведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраическое дополнение соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \cdots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

Доказательство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{l1}A_{l1} + a_{l2}A_{l2} + \cdots + a_{ln}A_{ln}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & _n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{l1} + b_2A_{l2} + \cdots + b_nA_{ln}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \cdots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

(Свойство 5)

■

10. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

11. Пусть дан определитель, все элементы которого, стоящие в первых k строках и последних (от $k+1$ до n) столбцах, равны нулю, тогда этот определитель будет равен произведению двух своих миноров.

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1\ 1} & a_{k+1\ 2} & \dots & a_{k+1\ k} & a_{k+1\ k+1} & \dots & a_{k+1\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1\ k+1} & \dots & a_{k+1\ n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

12. Определитель произведения матриц n-го порядка равен произведению определителей этих матриц.

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

27 Свойство о перестановке двух строк (столбцов) определителя.

При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину.

Доказательство:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1\ 1} & a_{i+1\ 2} & \dots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i+1\ 1} & a_{i+1\ 2} & \dots & a_{i+1\ n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$|A'| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A'_{ij}$$

$$\left. \begin{aligned} A'_{ij} &= (-1)^{i+1+j} M_{ij} \\ A_{ij} &= (-1)^{i+j} M_{ij} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -A'_{ij} = A_{ij} \Rightarrow |A'| = -|A|$$

■

28 Свойство определителя об алгебраических дополнениях.

Сумма поизведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраическое дополнение соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \dots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

Доказательство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{l1}A_{l1} + a_{l2}A_{l2} + \dots + a_{ln}A_{ln}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & {}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{l1} + b_2A_{l2} + \dots + b_nA_{ln}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \dots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

(Свойство 5)

■

29 Свойство определителя треугольной матрицы.

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Доказательство (по индукции):

1)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot c - b \cdot 0 = ac - \text{верно}$$

2) $n - 1$ – верно

3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

■

30 Свойство определителя полураспавшейся матрицы.

Пусть дан определитель, все элементы которого, стоящие в первых k строках и последних (от $k+1$ до n) столбцах, равны нулю, тогда этот определитель будет равен произведению двух своих миноров.

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1\ 1} & a_{k+1\ 2} & \dots & a_{k+1\ k} & a_{k+1\ k+1} & \dots & a_{k+1\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1\ k+1} & \dots & a_{k+1\ n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если квадратную матрицу с помощью горизонтальных и вертикальных линий можно разбить на блоки, где на главной диагонали стоят квадратные матрицы, а по одной стороне от главной диагонали стоит нулевая матрица, то такая матрица называется ***полураспавшаяся***.
Доказательство (по индукции):

1)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot c - b \cdot 0 = ac - \text{верно}$$

2) $n-1$ – верно

3)

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A12 + \dots + a_{1k}A_{1k}$$

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} B_j & 0 \\ C_j & D \end{vmatrix} = |B_j| \cdot |D|$$

$$d = a_{11} \cdot |B_1| \cdot |D| + a_{12} \cdot |B_2| \cdot |D| + \dots + a_{1k} \cdot |B_k| \cdot |D| =$$

$$= (a_{11} \cdot |B_1| + a_{12} \cdot |B_2| \cdot + \dots + a_{1k} \cdot |B_k|) \cdot |D| = |B| \cdot |D|$$

■

31 Свойство определителя произведения квадратных матриц.

Определитель произведения матриц n-го порядка равен произведению определителей этих матриц.

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

Доказательство:

$$|A|\cdot|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum a_{1i}\cdot b_{i1} & \sum a_{1i}\cdot b_{i2} & \dots & \sum a_{1i}\cdot b_{in} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum a_{2i}\cdot b_{i1} & \sum a_{2i}\cdot b_{i2} & \dots & \sum a_{2i}\cdot b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum a_{ni}\cdot b_{i1} & \sum a_{ni}\cdot b_{i2} & \dots & \sum a_{ni}\cdot b_{in} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} \sum a_{1i}\cdot b_{i1} & \sum a_{1i}\cdot b_{i2} & \dots & \sum a_{1i}\cdot b_{in} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sum a_{2i}\cdot b_{i1} & \sum a_{2i}\cdot b_{i2} & \dots & \sum a_{2i}\cdot b_{in} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{ni}\cdot b_{i1} & \sum a_{ni}\cdot b_{i2} & \dots & \sum a_{ni}\cdot b_{in} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n\,|A\cdot B| = |A\cdot B|$$

■

32 Операции над строками матрицы. Линейно зависимые и независимые строки матрицы.

Две строки называются ***равными***, если все их элементы равны.
Строка e называется ***линейной комбинацией*** строк $e_1, e_2, \ldots, e_n$, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные вещественыне числа.

$$e = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n)$$

Строки $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называют ***линейно-зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = O$$
$$O = (0, 0, \ldots, 0)$$

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка является линейной комбинацией остальных
Пусть $\lambda_n \neq 0$

$$e_n = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right) e_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right) e_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) e_{n-1}$$

Строки $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называются ***линейно-независимыми***, если их линейная комбинация $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = O$ равна нулевой строке $\Leftrightarrow$ все λ_i равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

Операции над строками матрицы

1. $\lambda e_m = (\lambda a_{m1}, \lambda a_{m2} \ldots, \lambda a_{mn})$
2. $e_k + e_s = ((a_{k1} + a_{s1}), (a_{k2} + a_{s2}) \ldots, (a_{kn} + a_{sn}))$

33 Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы и следствия из нее.

Максимальное число линейно-независимых строк в матрице называется ее ***рангом***.
$rangA = r$
$r \leq$число строк
Минором** k**-го порядка матрицы A называется определитель, полученный из элементов, стоящих на пересечении выделенных произвольным образом k строк и k столбцов.

Теорема о ранге матрицы

Наивысший порядок отличных от 0 миноров матрицы равен рангу этой матрицы.

Доказательство:

$$A = \left|\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1\ r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \boxed{D} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{r\ r+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline a_{r+1\ 1} & a_{r+1\ 2} & \dots & a_{r+1\ r} & a_{r+1\ r+1} & \dots & a_{r+1\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sr} & a_{sr+1} & \dots & a_{sn} \end{array}\right|$$

$D \neq O$

$e_1, \dots, e_r$ – линейно-независимые строки

$e_{r+1}, \dots, e_s$

$r + 1 \leq k \leq s$

$1 \leq j \leq n$

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix} = 0 \text{ – окаймляющий минор}$$

$r + 1 \leq j \leq n \Rightarrow$ минор A

$1 \leq j \leq r$

$M = a_{1j}A_1 + \dots + a_{rj}A_r + a_{kj} \cdot (-1)^{2r+2} \cdot D = 0$

$a_{kj} = -\dfrac{A_1}{D}a_{1j} - \dots - \dfrac{A_r}{D}a_{rj}$

$e_k = -\dfrac{A_1}{D}e_1 - \dots - \dfrac{A_r}{D}e_r \Rightarrow e_1, \dots, e_r, e_k$ – линейно-зависимые строки

$\Downarrow$

$rangA = r$

■

Следствия из теоремы о ранге матрицы

1. Максимальное число линейно-независимых столбцов всякой матрицы равно максимальному числу линейно-независимых строк, то есть, равно рангу этой матрицы.

2. Определитель n-го порядка тогда и только тогда равен 0, когда между его строками существует линейная зависимость.

3. Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

34 Утверждения о ранге матрицы. Свойства ранга.

Свойства ранга матрицы:

1. Если $A_{m \times n}$, то $rangA \leq \min(m, n)$

2. $rangA = 0 \Leftrightarrow$ все элементы 0

3. $rangA_n = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$

4. $rangA = rangA^T$

5. Если добавить $e = 0, rangA$ не изменится.

35 Теорема о приведении матрицы к ступенчатому виду. Элементарные преобразования как умножение матриц.

Элементарные преобразования над матрицами

1. Перестановка $A_{m \times n}$
Для перестановки i-ой и j-ой строки (столбца) нужно умножить

слева (справа) на квадратную матрицу порядка $m(n)$, вида:

$$S_{\text{лев}} = \begin{matrix}\begin{pmatrix}1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ i\\ \vdots\\ j\\ \vdots\\ m\end{matrix}\end{matrix} S_{\text{прав}} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n\end{matrix}\end{array}$$

2. Умножение всех элементов строки (столбца) на одно и то же число $\neq 0$
   Для i-ой строки (j-го столбца) умножаем матрицу слева (справа) на матрицу вида:

$$S_{\text{лев}} = \begin{matrix}\begin{pmatrix}1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ i\\ \vdots\\ m\end{matrix}\end{matrix} \quad S_{\text{прав}} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}1 & \dots & j & \dots & n\end{matrix}\end{array}$$

3. Прибавление к элементам одной i-ой строки (столбца) всех элементов другой j-ой строки (столбца), умноженных на $\lambda \neq 0$
   Нужно умножить $A_{m\times n}$ слева (справа) на матрицу порядка $m(n)$ вида:

$$S_{\text{лев}} = \begin{matrix}\begin{pmatrix}1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ i\\ \vdots\\ j\\ \vdots\\ m\end{matrix}\end{matrix} \quad S_{\text{прав}} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n\end{matrix}\end{array}$$

36 Обратная матрица и ее свойства. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.

Если A – квадратная матрица, от ***обратной*** к ней называется матрица A^{-1}, такая что $A \cdot A^{-1} = E$ и $A^{-1} \cdot A = E$
Невырожденной матрицей называется квадратная матрица, определитель которой отличен от 0. В противном случае матрица – ***вырожденная***.

Теорема о существовании и единственности обратной матрицы

Матрица A имеет обратную и при этом только одну тогда и только тогда, когда эта матрица невырожденная.
Доказательство:
$\boxed{\Rightarrow}$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = E$$

Пусть $|A| = 0$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \left|A \cdot A^{-1}\right| = |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 0 \\ \left|A \cdot A^{-1}\right| = E = 1 \end{array}\right\} \text{противоречие}$$

$$\Downarrow$$

$|A| \neq 0 \Rightarrow A$ – невырожденная

$\boxed{\Leftarrow}$

A – невырожденная

$\tilde{A}$ – союзная матрица (состоит из алгебраических дополнений элементов)

$$A \cdot \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}A_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{1i}A_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i}A_{ni} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}A_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{2i}A_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{2i}A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}A_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{ni}A_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{ni}A_{ni} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E \Rightarrow A \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = E$$

$\Downarrow$

$$A^{-1} = A\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T$$

■

Свойства обратной матрицы

1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$
4. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

37 Системы линейных уравнений. Правило Крамера.

Системой линейных уравнений, состоящей из m-уравнений с n неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3}$$

, где $a_{ij}(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ – коэффициенты системы, b_i - свободные члены.
Решением системы (3) назыаются n значений неизвестных $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, при подстановке которых в систему, все уравнения обращаются в верные равенства (тождества).
Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение и ***несовместной***, если ни одного решения нет.
Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение и ***неопределенной***, если решений множество.
Каждое решение неопределенной системы называется ***частным решением***. Совокупность всех частных решений наызывается ***общим решением*** системы.
Две системы линейных уравнений назыают ***эквивалентными*** (равносильными), если каждое решение одной из них является решеним другой и наоборот.
Систему линейных уравнений называют ***однородной***, если все свободные члены равны 0.
Однородная система линейных уравнений всегда совместна, т.к. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является решением системы (тривиальным).

Матричная форма записи:

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{ – расширенная матрица системы}$$

Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_1 & \dots & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & b_1 & \dots & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$\Delta \neq 0$: система определена

$\Delta = 0$: $\Delta_i \neq 0 \Rightarrow$ система несовместна

$\Delta_i = 0 \Rightarrow$ сомнительный случай

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, \dots, n$$

38 Матричный метод решения системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A \cdot X = B \qquad | \cdot A^{-1} \text{ (слева)}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Downarrow$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

39 Метод Гаусса.

$\boxed{\Rightarrow}$Последовательное исключение неизвестных с помощью элементарных преобразований (приведение матрицы $A|B$) к ступенчатому виду
$\boxed{\Leftarrow}$ Система раскручивается и находятся все значения.
Если в процессе $\boxed{\Rightarrow}$ появляются строки $0 = b_i(b_i \neq 0)$, то СЛУ несовместна.
Если в процессе $\boxed{\Rightarrow}$ получается система, число уравнений в которой *меньше* числа неизвестных, то СЛУ совместна и неопределена
Если в процессе $\boxed{\Rightarrow}$ получается система, число уравнений в которой *равно* числу неизвестных, то СЛУ совместна и определена

40 Теорема Кронекера–Капелли. Следствия из нее. Правило решения СЛАУ.

СЛУ совместна $\Leftrightarrow rangA = rangA|B$

Следствия:

1. Если $rangA =$ числу неизвестных, то $\exists!$ решение.
2. Если $rangA <$ числа неизвестных, то $\exists\infty$ решений.

41 Однородные системы линейных уравнений. Теорема о существовании ненулевых решений системы линейных однородных уравнений.

Однородная система линейных уравнений $\Leftrightarrow B = O$

1. Если $rangA = n$, то нулевое – единственное решение
   ($r < n$ – решения, отличные от 0)
2. СЛОУ имеет 1 решение $\neq 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$

3. Если число уравнений $<$ числа неизвестных, то $\exists$ решения $\neq 0$.

42 Свойства решений однородной системы линейных уравнений.

1. Если строка $e_i = (b_{i1}, b_{i2} \dots)$ – решение СЛОУ, то λe_i – тоже решение.

2. Если e_1 и e_2 – решения СЛОУ, то $(e_1 + e_2)$ – тоже решение.

$$\sum a_{ij}(b_j + c_j) = \sum a_{ij}b_j + \sum a_{ij}c_j = 0$$

43 Фундаментальная система решений. Теорема о фундаментальной системе решений.

Это всякая максимальная линейно-независимая система решений $e_1, e_2, e_3, \dots$ СЛОУ (если каждое решение этой СЛУ являвется линейной комбинацией решений $e_1, e_2, e_3, \dots)$

Теорема о фундаментальной системе решений.

Если $rangA <$ числа неизвестных, то всякая другая система решений этой СЛОУ состоит из $n - rangA$ решений.

44 Теорема о связи решений однородной и неоднородной систем.

Общее решение S СЛУ с n неизвестных равно сумме общего решения соответствующей ей СЛОУ и произвольного частного решения первоначальной системы

45 Проекция вектора на ось и ее свойства.

Проекция $\overline{AB}$ на l – это $\left|\overline{A_1 B_1}\right|$, взятая с $+$, если $\varphi < 90°$, иначе с $-$.
Точки A_1 и B_1 - проекции точек A и B на l.

$$\text{пр}_l \overline{AB} = \left(\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}|}\right)$$

Свойства проекции

1. $\text{пр}_l \overline{a} = |\overline{a}| \cos\varphi$
2. Постоянный множитель можно вынести за знак проекции
$$\text{пр}_l \lambda\overline{a} = \lambda \text{пр}_l \overline{a}$$
3. Проекция суммы весторов равна сумме проекций
$$\text{пр}_l \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \text{пр}_l \overline{a} + \text{пр}_l \overline{b}$$

46 Линейная зависимость и независимость векторов и ее свойства.

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ – ***линейно-зависимы***, если $\exists A_1, A_2, \ldots, A_n$, такие что:

$$A_1\overline{a_1} + A_2\overline{a_2} + \cdots + A_n\overline{a_n} = 0$$

и ***линейно-независимы*** если $A_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$
$A_1\overline{a_1} + A_2\overline{a_2} + \cdots + A_n\overline{a_n}$ – ***линейная комбинация*** векторов.
Векторы линейно-зависимы $\Leftrightarrow$ один из векторов – линейная комбинация остальных.

Свойства ЛЗ и ЛНЗ

1. Всякие 3 вектора на плоскости линейно-зависимы.
2. Если векторов на плоскости больше 3, то они линейно-зависимы.

3. $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – линейно-зависимы $\Leftrightarrow$ $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарны.

4. 4 вектора в пространстве линейно-зависимы.

5. Если векторов в пространстве больше 4, то они линейно-зависимы.

6. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – линейно-зависимы $\Leftrightarrow$ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – коллинеарны в пространстве.

7. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – линейно-независимы $\Leftrightarrow$ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – некомпланарны.

47 Базис, разложение вектора по базису. Условия коллинеарности векторов.

Базис – максимальная система линейно-независимых векторов.
Линейная комбинация базисных векторов, равная заданному вектору, называется ***разложением*** вектора по базису.

Теорема о единственности разложения

Разложить $\overline{a}$ по базису возможно единственным способом.

Условия колинеарности векторов

1. $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, если $\exists n \colon \overline{a} = n\overline{b}$

2. $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, если отношения координат равны

3. $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, если $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$

48 Скалярное произведение векторов. Свойства и вычисление. Условие ортогональности векторов.

Это число:

$$\begin{aligned} &\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi \\ &\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cdot \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} \end{aligned} \tag{4}$$

Свойства скалярного произведения

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

2. $\lambda \left(\overline{a} \cdot \overline{b} \right) = (\lambda \overline{a}) \cdot \overline{b}$

3. $\overline{a} \left(\overline{b} + \overline{c} \right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$

4. $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$

Условие ортогональности векторов.

Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0.

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$$

49 Векторное произведение векторов. Свойства и вычисление. Третье условие коллинеарности векторов.

$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c}$

1. $\overline{c} \perp \overline{a}$ и $\overline{c} \perp \overline{b}$

2. $|\overline{c}| = S_{\square}$

3. Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку векторов (если смотреть с конца $\overline{c}$, то поворот от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ будет против часовой стрелки.)

Свойства векторного произведения

1. При перестановке меняет знак:

$$\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$$

2. $\lambda \left(\overline{a} \times \overline{b} \right) = (\lambda \overline{a}) \times \overline{b}$

3. $\overline{a} \times \left(\overline{b} + \overline{c} \right) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$

50 Смешанное произведение векторов. Свойства и вычисление. Геометрический смысл смешанного произведения. Условие компланарности векторов.

$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c}$ – число

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

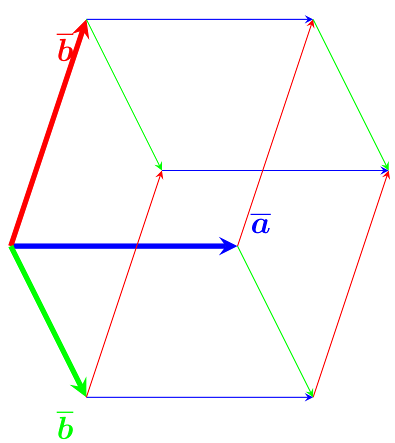
Свойства смешанного произведения

1. $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \left(\overline{b} \times \overline{c}\right) \cdot \overline{a} = \left(\overline{c} \times \overline{a}\right) \cdot \overline{b}$
2. $-\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = -\left(\overline{b} \times \overline{c}\right) \cdot \overline{a} = -\left(\overline{c} \times \overline{a}\right) \cdot \overline{b}$

Геометрический смысл смешанного произведения

Смешанное произведение трех векторов с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| \cdot \left|\overline{c}\right| \cdot \cos\varphi = \pm V$$



Условие компланарности векторов

Для того, чтобы 3 вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ были компланарными, необходимо и достаточно, чтобы их сммешанное произведение было равно нулю.

$$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{– компланарны} \Leftrightarrow \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = 0$$

Доказательство:
$\boxed{\Leftarrow} \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – компланарны.

$$\overline{a} \times \overline{b} \perp \overline{a}, \overline{a} \times \overline{b} \perp \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \times \overline{b} \perp \overline{c}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = 0 \text{ (на основании условий ортогональности)}$$

$\boxed{\Rightarrow} \overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$
Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – некомпланарны, $\Rightarrow V = \left|\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c}\right| = 0$ – противоречие $\Rightarrow \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – компланарны.
■

51 Преобразования систем координат: параллельный перенос и поворот осей координат.

52 Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору. Общее уравнение прямой и его исследование.

53 Векторное уравнение прямой на плоскости, параметрическое уравнение прямой. Нормальное уравнение прямой.

54 Каноническое уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Уравнение прямой в отрезках.

55 Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении. Уравнение прямой линии с заданным угловым коэффициентом.

56 Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.

57 Расстояние от точки до прямой. Деление отрезка в заданном соотношении.

58 Общее уравнение плоскости и его частные случаи. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.