

Ответы МатАн

Черепанов Илья

26.12.2024

Содержание

1	Множества на числовой прямой; определение окрестности конечной точки. Бесконечные точки.	7
1.1	Определение множества.	7
1.2	Числовые множества. Множества на прямой.	7
1.3	Окрестность конечной точки.	9
2	Определение функции. Область определения. Монотонная функция. Четная и нечетная функции. Обратная функция. Сложная функция. Элементарные функции.	9
2.1	Определение функции. Область определения	9
2.2	Четность/нечетность	10
2.3	Монотонность.	10
2.4	Обратная функция.	10
2.5	Сложная функция.	11
2.6	Элементарные функции.	11
3	Определение предела последовательности; определение предела функции в точке (конечной и бесконечной). Простейшие пределы $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ и $\lim_{x \rightarrow a} x = a$. Единственность конечного предела.	12
3.1	Предел последовательности	12
3.2	Предел функции в конечной точке	12
3.3	Предел функции в бесконечной точке	13
3.4	Простейшие пределы	14
3.5	Единственность конечного предела.	14
4	Свойства функций, стремящихся к конечному пределу (ограниченность функции, имеющей конечный предел; теорема о сжатой переменной; предельный переход в неравенстве).	15
5	Односторонние пределы функции в точке. Необходимое и достаточное условие существования конечного предела(использующее односторонние пределы). Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.	16
5.1	Односторонние пределы	16

5.2	Необходимое и достаточное условие существования конечного предела	17
5.3	Первый замечательный предел	17
6	Теорема о монотонной ограниченной функции и последовательности (без доказательства). Второй замечательный предел. Доказательство существования .	18
6.1	Теорема о монотонной ограниченной последовательности .	18
6.2	Теорема о монотонной ограниченной функции	18
6.3	Второй замечательный предел	18
7	Бесконечно малые функции, их свойства. Необходимое и достаточное условие стремления функции к конечному пределу.	19
7.1	Б.М.Ф.	19
7.2	Необходимое и достаточное условие стремления функции к конечному пределу	19
8	Бесконечно большие функции их свойства. Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.	19
8.1	Б.Б.Ф.	19
8.2	Теорема о связи б.м. и б.б. функций	20
9	Предел суммы, произведения и частного функций, стремящихся к конечным пределам.	20
10	Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентных бесконечно малых(доказательство). Теорема о замене бесконечно малой на эквивалентную при вычислении пределов.	21
10.1	Сравнение б.м.ф.	21
10.2	Эквивалентные б.м.ф.	21
10.3	Таблица эквивалентных б.м.ф.	21
11	Непрерывность функции в точке. Необходимое и достаточное условия непрерывности функции в точке(использующие приращения).	22
11.1	Непрерывность функции в точке	22

11.2	Необходимое и достаточное условия непрерывности функции в точке	22
11.3	Свойства непрерывности функции в точке	23
12	Свойства функций, непрерывных в точке. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке(без доказательства)	24
12.1	Свойства функций, непрерывных в точке	24
12.2	Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке	24
13	Классификация точек разрыва функции.	25
14	Определение производной. Примеры нахождения производной с помощью определения.	26
15	Геометрический и механический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.	27
15.1	Геометрический смысл производной	27
15.2	Механический смысл производной	28
15.3	Уравнение касательной к графику функции	28
16	Дифференцируемость функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Непрерывность дифференцируемой функции.	28
16.1	Дифференцируемость функции в точке	28
16.2	Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.	29
16.3	Непрерывность дифференцируемой функции	29
17	Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций.	30
17.1	Геометрический смысл дифференциала	30
17.2	Производная суммы	31
17.3	Производная произведения	31
17.4	Производная частного	32
18	Теорема о дифференцируемости сложной функции.	32
19	Производная обратной функции. Вывод производных обратных тригонометрических функций.	33
19.1	Производная обратной функции	33

19.2 Вывод обратных тригонометрических функций	34
20 Правило логарифмического дифференцирования. Его применение к нахождению производных функций $f(x) = a^x$, $f(x) = x^a$.	34
21 Производные и дифференциалы высших порядков.	35
22 Таблица производных.	37
23 Дифференцирование функций, заданных параметрически (первая и вторая производные). Теорема Ролля, ее геометрический смысл.	38
23.1 Дифференцирование функций, заданных параметрически .	38
23.2 Теорема Ролля	38
24 Теорема Коши. Формула конечных приращений Лагранжа, ее геометрический смысл.	39
24.1 Теорема Коши	39
24.2 Формула конечных приращений Лагранжа	40
25 Правило Лопиталя.	40
26 Формула Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа и форме Пеано.	41
27 Формулы Тейлора (Маклорена) для функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, , в окрестности точки $x = 0$.	41
28 Необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) функции $y = f(x)$.	42
28.1 Необходимое условие	42
28.2 Достаточное условие	43
29 Определение экстремума функции $y = f(x)$. Необходимое условие экстремума.	43
30 Достаточное условие экстремума, использующее первую производную.	43

31	Достаточное условие экстремума, использующее вторую производную.	44
32	Определение направления выпуклости графика функции $y = f(x)$. Признак выпуклости вверх и выпуклости вниз. Точки перегиба графика функции.	44
32.1	Достаточный признак направления выпуклости	44
33	Асимптоты графика функции $y = f(x)$. Правило нахождения вертикальных и невертикальных асимптот.	44
34	Определение первообразной. Теорема о двух первообразных одной функции.	45
35	Определение неопределенного интеграла и его свойства. Инвариантность формул интегрирования.	46
36	Метод интегрирования по частям для неопределенного интеграла.	46
37	Метод подстановки для неопределенного интеграла.	46
38	Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.	46
39	Интегрирование дробно-рациональных функций.	46
40	Интегрирование тригонометрических функций.	46
41	Использование подстановок , , примеры.	46

1 Множества на числовой прямой; определение окрестности конечной точки. Бесконечные точки.

1.1 Определение множества.

Множество – совокупность объектов, объединенных по какому-то признаку. Объекты, из которых состоит множество, называются его **элементами**. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $\{A, B, \dots, X, Y, \dots\}$, а их элементы – малыми буквами $\{a, b, \dots, x, y, \dots\}$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым**, обозначается символом \emptyset .

Множество A называется **подмножеством** множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B . Обозначается $A \subset B$.

Говорят, что множества A и B **равны** или **совпадают**, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. То есть, если множества состоят из одних и тех же элементов.

Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. Обозначается $A \cup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}$

Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B . Обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}$

1.2 Числовые множества. Множества на прямой.

Множества, элементами которых являются числа, называются **числовыми**.

Примеры числовых множеств:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$ - множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm n; \dots\}$ - множество целых чисел.

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}: m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел.

\mathbb{R} – множество вещественных чисел.

Между этими множествами существует соотношение:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Свойства \mathbb{R} :

1. Множество *упорядоченное*: для любых двух различных чисел a и b справедливо $a < b$ или $a > b$
2. Множество *плотное*: между двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел.
3. Множество *непрерывное*. Пусть множество \mathbb{R} разбито на два непустых класса A и B таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе и для каждой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a < b$. Тогда существует единственное число c , удовлетворяющее неравенству $a \leq c \leq b (\forall a \in A, \forall b \in B)$. Оно отделяет числа класса A от чисел класса B . Число c является либо наибольшим числом в классе A (тогда в классе B нет наименьшего числа), либо наименьшим числом в классе B (тогда в классе A нет наибольшего).

Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Это означает, что каждому числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует единственная точка числовой оси и наоборот.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$$[a; b] = \{x: a \leq x \leq b\} - \text{отрезок};$$

$$(a; b) = \{x: a < x < b\} - \text{интервал};$$

$$[a; b) = \{x: a \leq x < b\};$$

$$(a; b] = \{x: a < x \leq b\} - \text{полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки)};$$

$$(-\infty; b] = \{x: x \leq b\};$$

$$(-\infty; b) = \{x: x < b\};$$

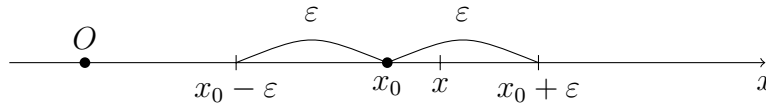
$$[a; \infty) = \{x: x \geq a\};$$

$$(a; \infty) = \{x: x > a\};$$

$$(-\infty; \infty) = \{x: -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R} - \text{бесконечные интервалы (промежутки)};$$

1.3 Окрестность конечной точки.

Пусть x_0 – любое действительное число. **Окрестностью** точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0 . В частности интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется **ε -окрестностью** точки x_0 . Число x_0 называется **центром**, а число ε – **радиусом**.



Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε -окрестность точки x_0 .

2 Определение функции. Область определения. Монотонная функция. Четная и нечетная функции. Обратная функция. Сложная функция. Элементарные функции.

2.1 Определение функции. Область определения

Пусть даны два непустых множества X и Y . Соответствие f , которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется **функцией** и записывается $y = f(x), x \in X$ или $f: X \rightarrow Y$. Говорят ещё, что функция f **отображает** множество X на множество Y .

Множество X называется **областью определения** функции f и обозначается $D(f)$. Множество Y называется **множеством значений** функции f и обозначается $E(f)$.

2.2 Четность/нечетность

Функция, определенная на множестве D , называется **четной**, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$; **нечетной**, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$; остальные относятся к функциям **общего вида**.

2.3 Монотонность.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$ аргументов их неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство

$f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется **возрастающей** на множестве D_1 ;

$f(x_1) \leq f(x_2)$ – **неубывающей** на множестве D_1 ;

$f(x_1) > f(x_2)$ – **убывающей** на множестве D_1 ;

$f(x_1) \geq f(x_2)$ – **невозрастающей** на множестве D_1 ;

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D_1 называются **монотонными** на этом множестве, а возрастающие и убывающие – **строго монотонными**. Интервалы, в которых функция монотонна, называются **интервалами монотонности**.

2.4 Обратная функция.

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E . Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D . Такая функция $\varphi(y)$ называется **обратной** к функции $f(x)$ и записывается как $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными. Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$ достаточно решить уравнение $y = f(x)$ относительно x (если это возможно).

Из определения обратной функции вытекает, что функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ задает взаимно

однозначное соответствие между множествами D и E . Отсюда следует, что любая *строго монотонная функция имеет обратную*.

2.5 Сложная функция.

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D , а функция $u = \varphi(x)$ на множестве D_1 , причем для $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\varphi(x))$, которая называется *сложной функцией* от (x) (или *суперпозицией* заданных функций).

Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* сложной функции.

2.6 Элементарные функции.

Основные элементарные функции:

1. Показательная функция $y = a^x, a > 0, a \neq 0$
2. Степенная функция $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
3. Логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
4. Тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$
5. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения деления) и операций взятия функции от функции, называется *элементарной функцией*.

3 Определение предела последовательности; определение предела функции в точке (конечной и бесконечной). Простейшие пределы $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ и $\lim_{x \rightarrow a} x = a$. Единственность конечного предела.

3.1 Предел последовательности

Под **числовой последовательностью** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ понимается функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве \mathbb{N} , кратко обозначается $\{x_n\}$.

Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут

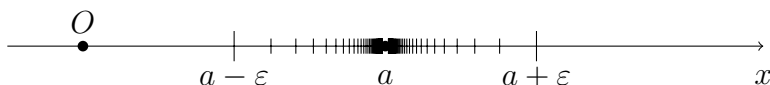
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

или $x_n \rightarrow a$.

Короткое определение предела:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Геометрическая интерпретация:



Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε -окрестности точки a найдется $N \in \mathbb{N}$, что все значения x_n , для которых $n > N$, попадут в ε -окрестность точки a .

3.2 Предел функции в конечной точке

Определение 1 (на языке последовательностей или по Гейне).

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента $x_n, n \in \mathbb{N} (x_n \neq x_0)$, сходящейся к x_0 (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$),

последовательность соответствующих значений функции $f(x_n), n \in \mathbb{N}$, сходится к числу A (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$).
 В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$.
 Геометрический смысл предела функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ означает, что для всех точек x , достаточно близких к точке x_0 , соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A .

Определение 2 (на языке ε - δ или по Коши) Число A называется пределом функции в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ , что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Это определение коротко можно записать так

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \implies |f(x) - A| < \varepsilon) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Геометрический смысл предела функции $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, если для любой ε -окрестности точки A найдется такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой δ -окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε -окрестности точки A . Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε , ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon, y = A - \varepsilon$. Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε , поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

3.3 Предел функции в бесконечной точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; \infty)$. Число A называется **Пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$** , если для любого положительного числа ε существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Коротко:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x: |x| > M \implies |f(x) - A| < \varepsilon) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Если $x \rightarrow +\infty$, то пишут $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, если $x \rightarrow -\infty$, то $-A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Геометрический смысл этого определения таков: для $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$, что при $x \in (-\infty; -M)$ или $x \in (M; +\infty)$ соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в ε -окрестность точки A , т.е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε , ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$.

3.4 Простейшие пределы

1. $\lim_{x \rightarrow a} x = a.$

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap f(x) = x \in \mathring{U}_\varepsilon(A)$$

$$\delta = \varepsilon$$

■

2. $f(x) = c = \text{const} \implies \lim_{x \rightarrow a} c = c$

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap f(x) = c \in \mathring{U}_\varepsilon(c)$$

δ – любое, чтобы окрестность входила в область определения. ■

3.5 Единственность конечного предела.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ – единственный предел.

Доказательство:

Допустим $f(x) \rightarrow A; x \rightarrow a$

$f(x) \rightarrow B; x \rightarrow a$

$B > A$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1: x \in \mathring{U}_{\delta_1}(a) \cap \left(f(x) \in \mathring{U}_\varepsilon(A) \right) \Leftrightarrow (A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon) \quad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2: x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) \cap \left(f(x) \in \mathring{U}_\varepsilon(B) \right) \Leftrightarrow (B - \varepsilon < f(x) < B + \varepsilon) \quad (2)$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow$ при $x \in \mathring{U}_\delta$ выполнены правила (1) и (2)

Возьмем $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} (1): \dots < f(x) < A + \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2} \\ (2): B - \frac{B-A}{2} < f(x) < A + \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{B+A}{2} < f(x) < \frac{B+A}{2} \Rightarrow \text{Предел единственный}$$

■

4 Свойства функций, стремящихся к конечному пределу (ограниченность функции, имеющей конечный предел; теорема о сжатой переменной; предельный переход в неравенстве).

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ – единственный
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ – конечный $\Rightarrow \exists \mathring{U}(a): f(x)$ – ограничена в $\mathring{U}(a)$
3. Предельный переход в неравенстве

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \\ f(x) \leq g(x), x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ A \leq B \end{aligned}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0: x \in \mathring{U}_{\delta_1}(a) \curvearrowright (A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0: x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) \curvearrowright (B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon) \\ \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \\ A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < B + \varepsilon \\ A < B + 2\varepsilon \\ A \leq B \end{aligned}$$

■

4. $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ – Т. о сжатой переменной (двух милиционеров)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$$

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in \mathring{U}_\delta(a) : \begin{array}{l} A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \\ A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \end{array}$$

$$A - \varepsilon < f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x) < A + \varepsilon$$

■

5 Односторонние пределы функции в точке.

Необходимое и достаточное условие существования конечного предела (использующее односторонние пределы). Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

5.1 Односторонние пределы

$f(x)$ — определена на $(b; a)$, a — конечная точка.

Число A — предел $f(x)$ слева в точке a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in (a - \delta; a) \cap \curvearrowright f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Обозначение:

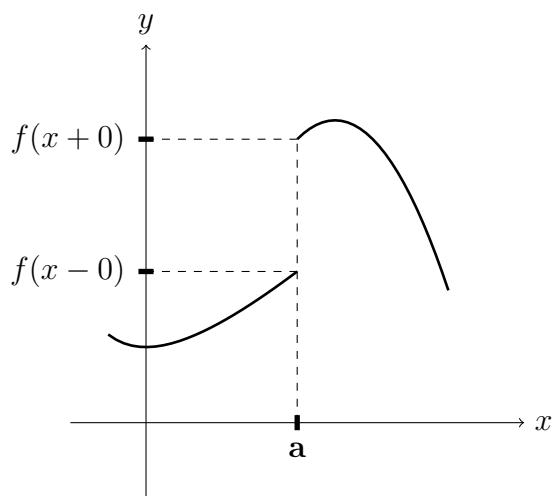
$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

Справа аналогично

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$



5.2 Необходимое и достаточное условие существования конечного предела

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$$

5.3 Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

6 Теорема о монотонной ограниченной функции и последовательности (без доказательства). Второй замечательный предел. Доказательство существования .

6.1 Теорема о монотонной ограниченной последовательности

Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

6.2 Теорема о монотонной ограниченной функции

Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ или ее правый предел $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$

6.3 Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство существования:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-(n-1)) \cdot n}{k! n^k} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-(n-1))}{k! n^{k-1}} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n-1}{2n} + \frac{(n-1)(n-2)}{3!n^2} + \dots + \frac{(n-(n-1))(n-(n-2)) \dots (n-2)(n-1)}{n!n^{n-1}} \end{aligned}$$

■

Следствия:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

7 Бесконечно малые функции, их свойства. Необходимое и достаточное условие стремления функции к конечному пределу.

7.1 Б.М.Ф.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Свойства б.м.ф.

1. $f(x) - \text{б. м. в точке } a \Rightarrow c \cdot f(x) - \text{б. м. в точке } a$
2. $f(x) - \text{б. м. в точке } a; g(x) - \text{ограничена в } U(a) \text{ или } g(x) - \text{б.м. в точке } a \Rightarrow f(x) \cdot g(x) - \text{б.м. в точке } a$
3. $f(x) - \text{б. м. в точке } a; g(x) - \text{б.м. в точке } a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = 0$

7.2 Необходимое и достаточное условие стремления функции к конечному пределу

$$\lim_{x \rightarrow a} A_{\text{кон}} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

8 Бесконечно большие функции их свойства. Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

8.1 Б.Б.Ф.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Свойства Б.Б.Ф.

1. $cf(x) - \text{б.б. в точке } (c \neq 0)$

2. $f(x) + A_{\text{кон}} - \text{б.б. в точке } a$
3. $f(x) \cdot g(x) - \text{б.б. в точке } a \ (g(x) - \text{б.б.})$
- 4.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

8.2 Теорема о связи б.м. и б.б. функций

- $f(x) - \text{б.б. в точке } a \Rightarrow \frac{1}{f(x)} - \text{б.м. в точке } a$
- $f(x) - \text{б.м. в точке } a \Rightarrow \frac{1}{f(x)} - \text{б.б. в точке } a$

9 Предел суммы, произведения и частного функций, стремящихся к конечным пределам.

$$\text{Пусть } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \qquad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

1. $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cA$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = AB$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B}$

10 Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентных бесконечно малых (доказательство). Теорема о замене бесконечно малой на эквивалентную при вычислении пределов.

10.1 Сравнение б.м.ф.

$f(x), g(x)$ – б.м. в точке a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ более высокого порядка} \\ A \neq 0, & f(x) \text{ и } g(x) \text{ одного порядка} \\ \infty, & g(x) \text{ более высокого порядка} \\ \nexists, & \text{несравнимы} \end{cases}$$

10.2 Эквивалентные б.м.ф.

Предел отношения б.м.ф. не изменится, если каждую из них (или одну) заменить на эквивалентную б.м.ф.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то α и β эквивалентны в точке a .

Доказательство:

$$f(x) \sim \alpha(x)$$

$$g(x) \sim \beta(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\cancel{\alpha(x)}} \cdot \frac{\beta(x)}{\cancel{\beta(x)}} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{aligned}$$

10.3 Таблица эквивалентных б.м.ф.

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$

$$3. 1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$$

$$4. \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$5. \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$6. e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$$

$$7. \ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$8. (1 + \alpha(x)^n) - 1 \sim \alpha(x)^n$$

11 Непрерывность функции в точке. Необходимое и достаточное условия непрерывности функции в точке(использующие приращения).

11.1 Непрерывность функции в точке

Функция $y = f(x)$ определена в $U(a)$

$f(x)$ – непрерывна в точке a , если существует предел, и он равен значению функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

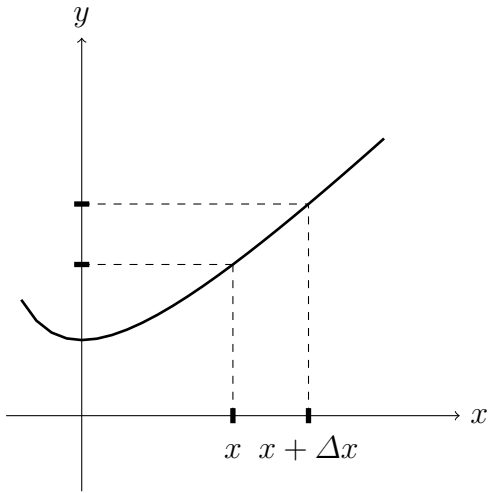
11.2 Необходимое и достаточное условия непрерывности функции в точке

$$\Delta f(x) = f(x_1) - f(x)$$

$$x_1 = x + \Delta x$$

$$\Delta x = x_1 - x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \text{непрерывна в точке } x$$



11.3 Свойства непрерывности функции в точке

1. $f(x)$ – непрерывна в точке $x \Rightarrow cf(x)$ – непрерывна в точке x
2. $f(x), g(x)$ – непрерывны в точке $x \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) + g(x) \\ f(x) \cdot g(x) \end{array} \right\}$ – непрерывны в точке x
3. $f(x)$ – непрерывна в точке $x_0, f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists U(x_0): f(x)$ – того же знака, что $f(x_0)$
Доказательство:
 Пусть $f(x_0) > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in U_\delta(x_0)$$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Выберем $\varepsilon: f(x_0) - \varepsilon > 0 \Rightarrow \delta$ – искомое

■

4. $f(x), g(x)$ – непрерывны в точке $x_0, g(x) \neq 0$:
 $\frac{f(x)}{g(x)}$ – непрерывна в точке x_0

5. $u(x)$ – непрерывна в точке x_0 , $u(x_0) = u_0$:
 $f(u)$ – непрерывна в точке $u_0 \Rightarrow f(x) = f(u(x))$ – непрерывна в точке x_0
6. Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

12 Свойства функций, непрерывных в точке. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке(без доказательства)

12.1 Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если $f(x)$ – непрерывна в точке a , то существует $U(a)$, в которой $f(x)$ ограничена.
2. Если $f(x)$ – непрерывна в точке a , $f(a) \neq 0$, то в некоторой $U(a)$ $f(x)$ сохраняет свой знак.

12.2 Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке

$f(x)$ – непрерывна на промежутке $[a; b]$, если:

- 1) $f(x)$ – непрерывна на $(a; b)$
- 2) $f(a + 0) = f(a)$
- 3) $f(b - 0) = f(b)$

1 теорема Вейерштрасса

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она на нем ограничена.

2 теорема Вейерштрасса

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она достигает на нем наибольшее и наименьшее свое значение.

1 теорема Больцано-Коши

$f(x)$ непрерывна на $[a; b]$
 $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a; b]: f(c) = 0$

3 теорема Больцано-Коши

$f(x)$ непрерывна на $[a; b]$
 $f(a) = A, f(b) = B \Rightarrow A \neq B \forall C \in (A; B) \exists c \in (a; b): f(c) = C$

13 Классификация точек разрыва функции.

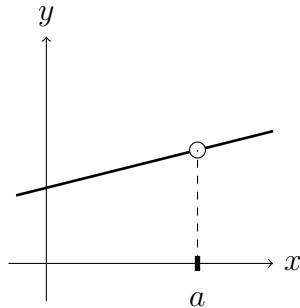
$f(x)$ определена в $U(a)$ или $\dot{U}(a)$
 $x = a$ – точка разрыва функции $f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий:

- 1) Функция не определена в точке a
- 2) Функция определена в точке a , но не существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 3) Функция определена, существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, но не выполняется условие $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$

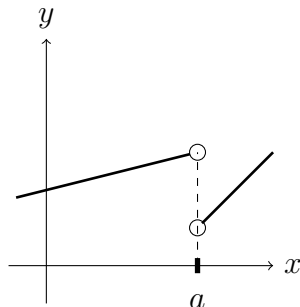
Классификация точек разрыва функции

I. a – точка разрыва I-го рода, если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ – конечные

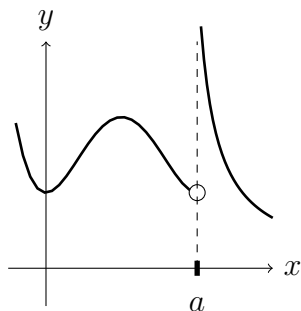
- 1) Если $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, то a – точка устранимого разрыва.



2) Если $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, то a – точка конечного разрыва.



II. a – точка разрыва II-го рода, если хотя бы один из $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ – бесконечный или не существует



14 Определение производной. Примеры нахождения производной с помощью определения.

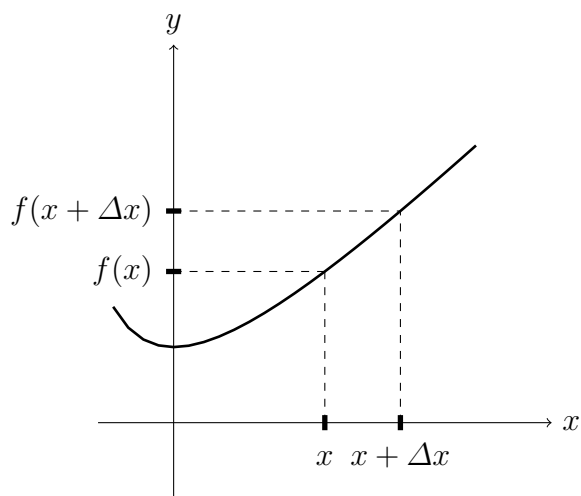
$f(x)$ – определена в $U(x)$

$\Delta x: x + \Delta x \in U(x)$

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

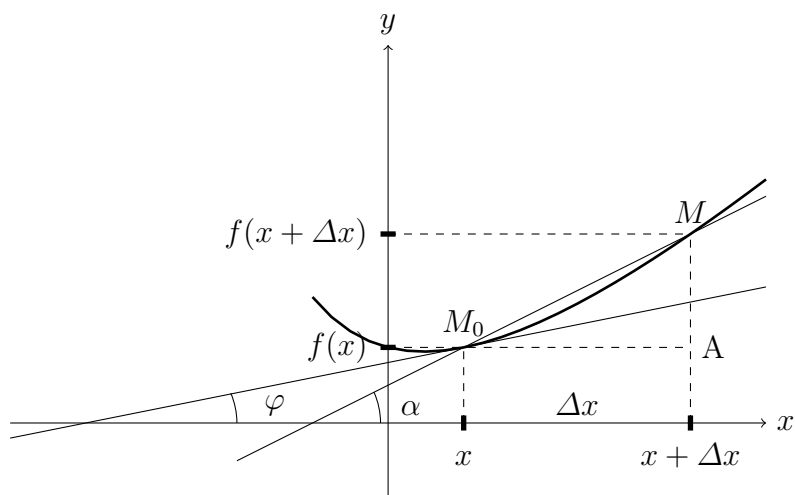
Предел отношения приращения функции к приращению аргумента называется **производной**.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{df(x)}{d(x)}$$



15 Геометрический и механический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

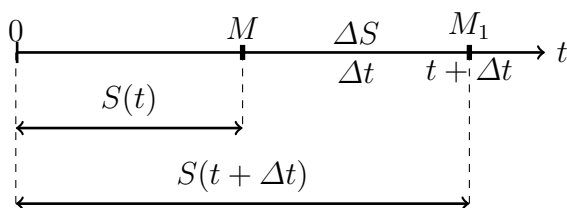
15.1 Геометрический смысл производной



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{MA}{M_0A} = \operatorname{tg} \alpha$$

При $M \rightarrow M_0$: $\alpha \rightarrow \varphi \Rightarrow f'(x) = \operatorname{tg} \varphi$

15.2 Механический смысл производной



$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t)$$

15.3 Уравнение касательной к графику функции

$$y_0 = f(x_0)$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$$

16 Дифференцируемость функции в точке.

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции.

Непрерывность дифференцируемой функции.

16.1 Дифференцируемость функции в точке

$f(x)$ – дифференцируема в точке x , если приращение функции $\Delta f(x)$ можно представить в виде:

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

A – число

$\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $\Delta x \rightarrow 0$

16.2 Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.

$f(x)$ – дифференцируема в точке $x \Leftrightarrow \exists$ конечная $f'(x)$ *Доказательство:*

\Leftarrow

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \Leftrightarrow f(x) - A = \alpha(x)$$

\Downarrow

$$f'(x) = \frac{\Delta f(x) + \alpha_1(\Delta x)}{\Delta x}$$

\Downarrow

$$f'(x)\Delta x = \Delta f(x) + \alpha_1(\Delta x)$$

\Downarrow

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

$$\alpha = -\alpha_1 \Rightarrow f(x) - \text{дифференцируема}$$

\Rightarrow

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = A + 0 = A$$

■

16.3 Непрерывность дифференцируемой функции

$f(x)$ – дифференцируема в точке $x \Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке x

17 Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций.

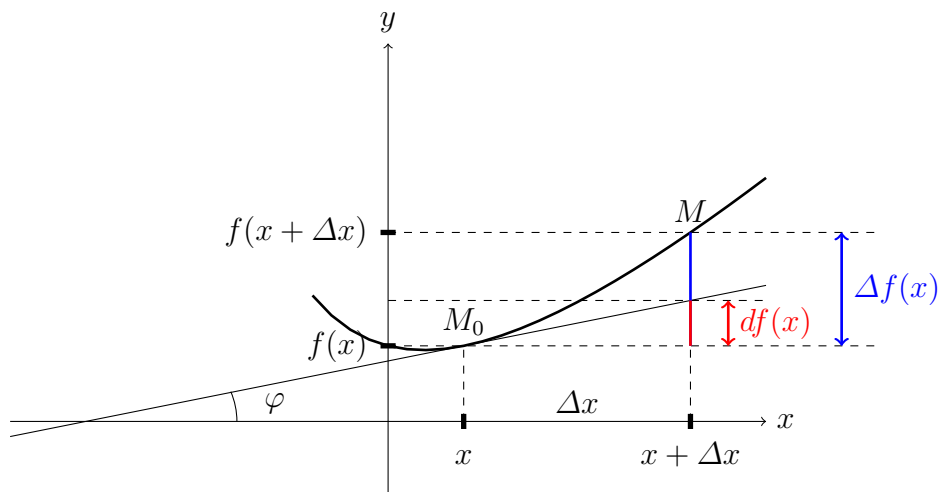
$f'(x)$ – конечная $\Rightarrow \underbrace{f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x}$

$df(x) = f'(x)\Delta x$ – дифференциал функции $f(x)$ в точке x .
 $dx = \Delta x$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

17.1 Геометрический смысл дифференциала

$$df(x) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x$$



17.2 Производная суммы

$$u = u(x); v = v(x)$$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right) \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) = \\ &= u'(x) \pm v'(x) \end{aligned}$$

17.3 Производная произведения

$$u = u(x); v = v(x)$$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x)) - (u(x) \cdot v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v)) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{u(x)v(x)} + u(x)\Delta v + v(x)\Delta u + \Delta u\Delta v - \cancel{u(x)v(x)}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x} \right) = \\ &= u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \end{aligned}$$

17.4 Производная частного

$$u = u(x); v = v(x)$$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{u(x)v(x)} + v(x)\Delta u - \cancel{u(x)v(x)} - u(x)\Delta v}{\Delta x v(x) (v(x) + \Delta v)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{\Delta x (v^2(x) + \Delta v v(x))} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{u(x)v(x)} + v(x)\Delta u - \cancel{u(x)v(x)} - u(x)\Delta v}{\Delta x v(x) (v(x) + \Delta v)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + \Delta v v(x)} = \\ &= \frac{v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u} = \\ &= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

18 Теорема о дифференцируемости сложной функции.

$$\left. \begin{array}{l} u(x) - \text{дифференцируема в точке } x \\ f(u) - \text{дифференцируема в точке } u = u(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(u(x)) - \text{дифференцируема в точке } x$$

$$\frac{df}{dx} = f'_u(u(x)) \cdot u'(x)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= f(u + \Delta u) - f(u) = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u \\
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(u)\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta u) \cdot \Delta u}{\Delta x} \overset{0}{=} = \\
 &= f'(u) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)u'(x)
 \end{aligned}$$

■

19 Производная обратной функции. Вывод производных обратных тригонометрических функций.

19.1 Производная обратной функции

$y = f(x)$ – монотонна в $U(x)$ и дифференцируема в точке x , $f'(x) \neq 0$
 $g(y)$ – обратная для $f(x)$
 $\Rightarrow g(y)$ – дифференцируема в точке $y = y(x)$ и

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
 g'(y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}} = \frac{1}{f'(x)}
 \end{aligned}$$

■

19.2 Вывод обратных тригонометрических функций

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g(x) = \arcsin y$$

$$g'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

20 Правило логарифмического дифференцирования. Его применение к нахождению производных функций $f(x) = a^x$, $f(x) = x^a$.

$$y = f'(x)$$

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

1. $f(x) = a^x$

$$\ln f(x) = x \ln a$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a$$

$$f'(x) = \ln a \cdot f(x) = \ln a \cdot a^x$$

$$2. \quad f(x) = x^a$$

$$\ln f(x) = a \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a$$

$$f'(x) = \frac{a}{x} \cdot x^a$$

$$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$$

21 Производные и дифференциалы высших порядков.

$$y = f(x)$$

$\exists f'(x)$ – первого порядка

$(f'(x))'$ – производная второго порядка

Обозначение:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4 f}{dx^4}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Дифференциал:

$$df(x) = f'(x)dx$$

2-го порядка :

$$d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)d(x))' dx = f''(x)dx^2$$

3-го порядка :

$$f'''(x)dx^3$$

4-го порядка :

$$f^{(4)}(x)dx^4$$

n-го порядка :

$$f^{(n)}(x)dx^n$$

22 Таблица производных.

1. $x' = 1$

2. $C' = 0$

3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

4. $(u + v)' = u' + v'$

5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

7. $(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

8. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$

10. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

11. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

12. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

13. $(\operatorname{tgu})' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

14. $(\operatorname{ctgu})' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

15. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

16. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

17. $(\operatorname{arctgu})' = \frac{u'}{1+u^2}$

18. $(\operatorname{arcctgu})' = -\frac{u'}{1+u^2}$

23 Дифференцирование функций, заданных параметрически (первая и вторая производные). Теорема Ролля, ее геометрический смысл.

23.1 Дифференцирование функций, заданных параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t) - \text{дифференцируема, монотонна} \\ y = \psi(t) - \text{дифференцируема} \end{cases}$$

\Downarrow

$$\exists \varphi^{-1}(x) \Rightarrow y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

$$\text{Обозначим } g(x) = \varphi^{-1}(x)$$

$$g(x) - \text{обратная для } \varphi(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$y(x) = \psi(g(x))$$

$$y'(x) = \psi'(g(x)) \cdot g'(x) = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$y''(x) = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}$$

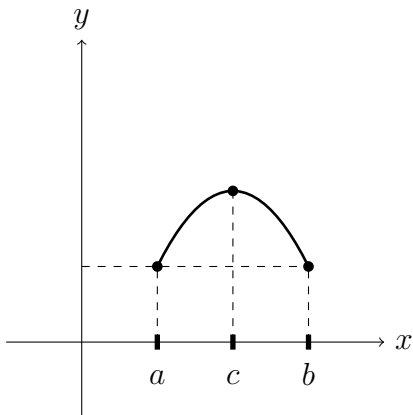
23.2 Теорема Ролля

$f(x)$ – непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \text{ хотя бы одна } c \in (a; b): f'(c) = 0$$

Доказательство:

1. $f(x) = \text{const} \Rightarrow c - \forall \text{ точка } \in (a; b)$
2. $f(x) \neq \text{const} \Rightarrow$ по Теореме Ферма.



24 Теорема Коши. Формула конечных приращений Лагранжа, ее геометрический смысл.

24.1 Теорема Коши

$f(x), g(x)$ — непрерывны на $[a; b]$, дифференцируемы на $(a; b)$
 $g(x) \neq 0, x \in (a; b) \Rightarrow \exists$ хотя бы одна точка $c \in (a; b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство:

$$F(x) = f(x) - R(g(x) - g(a))$$

$$F(a) = f(a)$$

$$F(b) = f(b)$$

По Теореме Ролля: $\exists c: f'(c) = 0$

$$F'(c) = f'(c) - R(g'(c) - 0) = 0$$

\Downarrow

$$R = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

■

24.2 Формула конечных приращений Лагранжа

$$a = x$$

$$b = x + \Delta x$$

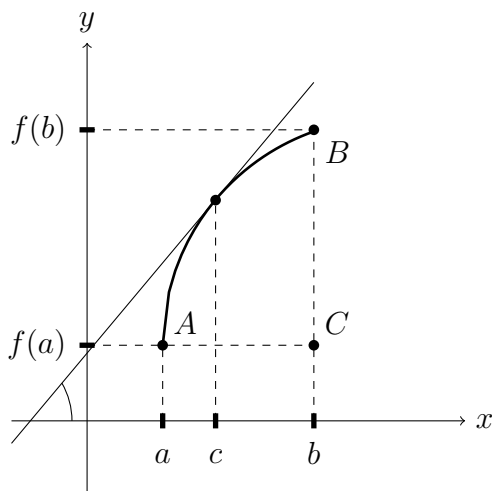
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c) \cdot \Delta x$$

$$f(b) - f(a) = BC$$

$$b - a = AC$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = \operatorname{tg} \angle BAC$$



25 Правило Лопиталя.

Для неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Теорема 1 $f(x), g(x)$ – дифференцируемы в $U(a)$ и бесконечно малые в точке $a, g(a) \neq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ если } \exists$$

Доказательство:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = (\text{Теорема Коши}) = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема 2 $f(x), g(x)$ – бесконечно большие в точке $a \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

26 Формула Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа и форме Пеано.

$f(x)$ – определена в $U(x_0)$ и имеет в ней производные до $(n+1)$ порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется $c \in (x_0; x)$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Последний член – остаточный.

В форме Лагранжа:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

В форме Пеано:

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, c \in (x; x_0)$$

27 Формулы Тейлора (Маклорена) для функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, , в окрестности точки $x = 0$.

При $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

1. e^x

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = e^x & f(0) = 1 \\
 f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\
 f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\
 \dots & \dots \\
 f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1
 \end{array}$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^0}{(n+1)!}$$

2. $\sin x$

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
 f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
 f''(x) = -\sin(x) & f''(0) = 0 \\
 f'''(x) = -\cos(x) & f'''(0) = -1 \\
 f^{(4)}(x) = \sin(x) & f^{(4)}(0) = 0
 \end{array}$$

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

28 Необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) функции $y = f(x)$.

28.1 Необходимое условие

$f(x)$ – дифференцируема на X

$$\begin{array}{l}
 f(x) \nearrow \Rightarrow f'(x) \geq 0, x \in X \\
 f(x) \searrow \Rightarrow f'(x) \leq 0, x \in X
 \end{array}$$

28.2 Достаточное условие

$$f'(x) > 0, x \in X \Rightarrow f(x) \nearrow$$

$$f'(x) < 0, x \in X \Rightarrow f(x) \searrow$$

29 Определение экстремума функции $y = f(x)$. Необходимое условие экстремума.

$f(x)$ – определена на X

$x_0 - \max$, если $\exists U(x_0): f(x) < f(x_0) \forall x \in U(x_0)$

$x_0 - \min$, если $\exists U(x_0): f(x) > f(x_0) \forall x \in U(x_0)$

$f(x)$ – дифференцируема на $X, x_0 \in X$

x_0 – точка экстремума $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

30 Достаточное условие экстремума, использующее первую производную.

$f(x)$ – дифференцируема на X

x_0 – бесконечно малая точка, определенная на X

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ при } x < x_0 \\ f'(x) < 0 \text{ при } x > x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 - \max$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ при } x < x_0 \\ f'(x) > 0 \text{ при } x > x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 - \min$$

$f'(x) = 0$ или ∞ или \nexists – критическая точка (подозрительная на экстремум)

$f'(x) > 0$ – стационарная точка

31 Достаточное условие экстремума, использующее вторую производную.

$f(x)$ – два раза непрерывна на X , дифференцируема на X

$x = x_0$ – стационарная точка ($f'(x) = 0$)

$\Rightarrow f'' < 0 \Rightarrow x_0 - \max$

$\Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow x_0 - \min$

32 Определение направления выпуклости графика функции $y = f(x)$. Признак выпуклости вверх и выпуклости вниз. Точки перегиба графика функции.

Выпуклая вверх на $X \Leftrightarrow \forall x, x + \Delta x \in X \Rightarrow \Delta y < dy$

Выпуклая вниз на $X \Leftrightarrow \forall x, x + \Delta x \in X \Rightarrow \Delta y > dy$

32.1 Достаточный признак направления выпуклости

$f(x)$ – 2 раза дифференцируема на X

\Rightarrow Если $f''(x) > 0$ на $X \Rightarrow$ график выпуклый вниз на X

\Rightarrow Если $f''(x) < 0$ на $X \Rightarrow$ график выпуклый вверх на X

Точки, в которых меняется направление выпуклости – точки перегиба

33 Асимптоты графика функции $y = f(x)$. Правило нахождения вертикальных и невертикальных асимптот.

Асимптота – прямая, к которой приближается график функции (расстояние $\rightarrow 0$)

1. Вертикальная асимптота. $x = a$ – вертикальная асимптота, если:

$$\begin{cases} a - \text{точка бесконечного разрыва} \\ a - \text{граничная точка области определения, если односторонний предел} = \infty \end{cases}$$

2. Наклонная асимптота

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx$$

Если хотя бы один из этих пределов \nexists или ∞ , то наклонных асимптот нет.

34 Определение первообразной. Теорема о двух первообразных одной функции.

$F(x), f(x)$ – определена на X

$F(x)$ – первообразная для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$

Теорема $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные для $f(x)$, то $F_1(x) = F_2(x) + c, c = \text{const}$

Доказательство:

$$(f_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = c$$

- 35 Определение неопределенного интеграла и его свойства. Инвариантность формул интегрирования.
- 36 Метод интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
- 37 Метод подстановки для неопределенного интеграла.
- 38 Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.
- 39 Интегрирование дробно-рациональных функций.
- 40 Интегрирование тригонометрических функций.
- 41 Использование подстановок , , примеры.