Ответы МатАн

Черепанов Илья

26.12.2024

Содержание

1 Множества на числовой прямой; определение окрестности конечной точки. Бесконечные точки.

1.1 Определение множества.

Множество – совокупность объектов, объединенных по какому-то признаку.
Объекты, из которых состоит множество, нахываются его ***элементами***.
Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $\{A, B, ..., X, Y, ...\}$, а их элементы – малыми буквами $\{a, b, ..., x, y, ...\}$.
Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, обозначается символом $\varnothing$.
Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Обозначается $A \subset B$.
Говорят, что множества A и B ***равны*** или ***совападают***, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. То есть, если множества состоят из одних и тех же элементов.
Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящие из элементов, принадлежащих хотя бы одному их этих множеств. Обозначается $A \cup B$ (или$A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ или } x \in B\}$
Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Обозначают $A \cap B$ (или$A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ и } x \in B\}$

1.2 Числовые множества. Множества на прямой.

Множества, элементами которых являвются числа, называются ***числовыми***.
Примеры числовых множеств:
$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...; n; ...\}$ - множество натуральных чисел.
$\mathbb{Z} = \{\pm1; \pm2; \pm3; ...; \pm n; ...\}$ - множество целых чисел.
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел.
Между этими множествами существует соотношение:
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R}$
Действительные числа, не являющиеся рациональными, нызываются *иррациональными.*

Свойства $\mathbb{R}$:

1. Множество *упорядоченное*: для любых двух различных чисел a и b справедливо $a < b$ или $a > b$

2. Множество *плотное*: между двумя раличными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел.

3. Множество *непрерывное.* Пусть множество $\mathbb{R}$ разбито на два непустых класса A и B таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе и для каждой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a < b$. Тогда существует единственное число c, удовлетворяющее неравенству $a \le c \le b (\forall a \in A, \forall b \in B)$. Оно отделяет числа класса A от чисел класса B. Число c является либо наибольшим числом в классе A (тогда в классе B нет наименьшего числа), либо наименьшим числом в классе B (тогда в класе A нет наибольшего).

Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Это означает, что каждому числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует единственная точка числовой оси и наоборот.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}, a < b$
Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x \colon a \le x \le b\}$ – отрезок;

$(a; b) = \{x \colon a < x < b\}$ – интервал;

$[a; b) = \{x \colon a \le x < b\}$;

$(a; b] = \{x \colon a < x \le b\}$ – полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty; b] = \{x\colon x \leq b\}$;

$(-\infty; b) = \{x\colon x < b\}$;

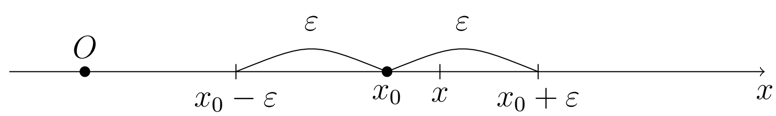
$[a; \infty) = \{x\colon x \geq a\}$;

$(a; \infty) = \{x\colon x > a\}$;

$(-\infty; \infty) = \{x\colon -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$ – бесконечные интервалы (промежутки);

1.3 Окрестность конечной точки.

Пусть x_0 – любое действительное число. ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0. В частоности итервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-***окрестностью*** точки x_0. Число x_0 называется ***центром***, а число ε – *радиусом*.



Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_o + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0.

2 Определение функции. Область определения. Монотонная функция. Четная и нечетная функции. Обратная функция. Сложная функция. Элементарные функции.

2.1 Определение функции. Область определения

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопостовляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x), x \in X$ или $f\colon X \to Y$. Говорят ещё, что функция f ***отображает*** множество X

на множество Y.
Множество X называется ***областью определения*** функции f и обозначается $D(f)$. Множество Y называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

2.2 Четность/нечетность

Функция, определенная на множестве D, называется ***четной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$; ***нечетной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$; остальные относятся к функциям **общего вида**.

2.3 Монотонность.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$ аргументов их неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство

$f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется ***возрастающей*** на множестве D_1;

$f(x_1) \leq f(x_2)$ – ***неубывающей*** на множестве D_1;

$f(x_1) > f(x_2)$ – ***убывающей*** на множестве D_1;

$f(x_1) \geq f(x_2)$ – ***невозрастающей*** на множестве D_1;

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D_1 называются ***монотонными*** на этом множестве, а возрастающие и убывающие - ***строго монотонными***. Интервалы, в которых функция монотонна, называются ***интервалами монотонности***

2.4 Обратная функция.

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если каждому знчению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D. Такая функция $\varphi(y)$ называется ***обратной*** к функции $f(x)$ и записывается как $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными. Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$ достаточно решить уравнение $y = f(x)$ относительно x (если это возможно).

Из определения обратной функции вытекает, что функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами D и E. Отсюда следует, что любая ***строго монотонная функция имеет обратную***.

2.5 Сложная функция.

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ на множестве D_1, причем для $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\varphi(x))$, которая называется ***сложной функцией*** от (x) (или ***суперпозицией*** заданных функций).
Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* сложной функции.

2.6 Элементарные функции.

Основные элементарыне функции:

1. *Показательная* функция $y = a^x, a > 0, a \neq 0$

2. *Степенная* функция $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

3. *Логарифмическая* функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

4. *Тригонометрические* функции $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$

5. *Обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения деления) и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***.

3 Определение предела последовательности; определение предела функции в точке (конечной и бесконечной). Простейшие пределы $\lim_{x\to a} c = c$ и $\lim_{x\to a} x = a$. Единственность конечного предела.

3.1 Предел последовательности

Под ***числовой последовательностью*** $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ понимается функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве $\mathbb{N}$, кратко обозначается $\{x_n\}$.

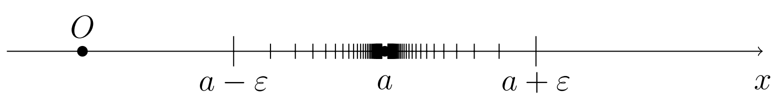
Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \lim x_n = a$$

или $x_n \to a$.
Короткое определение предела:

$$(\forall\varepsilon > 0 \exists N \colon \forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Геометрическая интерпритация:



Чило a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдется $N \in \mathbb{N}$, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε-окрестность точки a.

3.2 Предел функции в конечной точке

Определение 1 (на языке последовательностей или по Гейне). Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента $x_n, n \in \mathbb{N}(x_n \neq x_0)$, сходящейся к x_0 (т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соотоветвующих значений функции $f(x_n), n \in \mathbb{N}$, сходится

к числу A (т.е. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$).
В этом случае пишут $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$. Геометрический смысл предела функции $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A.

Определение 2 (на языке ε-δ или по Коши) Число A наызается пределом функции в точке x_0(или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Это определение коротко можно записать так

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x\colon |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Геометрический смысл предела функции $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε- окрестности точки A. Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon, y = A - \varepsilon$. Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

3.3 Предел функции в бесконечной точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; \infty)$. Число A называется ***Пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует такое счисло $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Коротко:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x\colon |x| > M \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

Если $x \to +\infty$, то пишут $A = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, если $x \to -\infty$, то – $A = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Геометрический смысл этого определения таков: для $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$, что при $x \in (-\infty; -M)$ или $x \in (M; +\infty)$ соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A, т.е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$.

3.4 Простейшие пределы

1. $\lim_{x\to a} x = a$.
   Доказательство:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0\colon x \in \mathring{U}_\delta(a) \curvearrowright f(x) = x \in \mathring{U}_\varepsilon(A)$$

$$\delta = \varepsilon$$

   ■

2. $f(x) = c = const \Longrightarrow \lim_{x\to a} c = c$
   Доказательство:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0\colon x \in \mathring{U}_\delta(a) \curvearrowright f(x) = c \in \mathring{U}_\varepsilon(c)$$

   δ – любое, чтобы окрестность входила в область опредления. ■

3.5 Единственность конечного предела.

$\lim_{x\to a} f(x) = A$– единственный предел.
Доказательство:
Допустим $f(x) \to A; x \to a$
$f(x) \to B; x \to a$
$B > A$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_1\colon x \in \mathring{U}_{\delta_1}(a) \curvearrowright \Big(f(x) \in \mathring{U}_\varepsilon(A)\Big) \Leftrightarrow (A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon) \ \ (1)$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_1\colon x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) \curvearrowright \Big(f(x) \in \mathring{U}_\varepsilon(B)\Big) \Leftrightarrow (B - \varepsilon < f(x) < B + \varepsilon) \ \ (2)$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow$ при $x \in \mathring{U}_\delta$ выполнены правила (1) и (2)
Возьмем $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\colon \dots < f(x) < A + \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2} \\ &(2)\colon B - \frac{B-A}{2} < f(x) < A + \dots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{B+A}{2} < f(x) < \frac{B+A}{2} \Rightarrow \text{Предел единствен}$$

■

4 Свойства функций, стремящихся к конечному пределу (ограниченность функции, имеющей конечный предел; теорема о сжатой переменной; предельный переход в неравенстве).

1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$ – единственный
2. $\lim_{x\to a} f(x) = A$ – конечный $\Rightarrow \exists \mathring{U}(a)\colon f(x)$ – ограничена в $\mathring{U}(a)$
3. Предельный переход в неравенстве

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$$
$$f(x) \leq g(x), x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$
$$A \leq B$$

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0\colon x \in \mathring{U}_{\delta_1}(a) \curvearrowright (A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0\colon x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) \curvearrowright (B - \varepsilon < f(x) < B + \varepsilon)$$
$$\delta = min(\delta_1, \delta_2)$$
$$A - \varepsilon < f(x \leq g(x) < B + \varepsilon)$$
$$A < B + 2\varepsilon$$
$$A \leq B$$
$$\blacksquare$$

4. $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ – Т. о сжатой переменной (двух милиционеров)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = A\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \varphi(x) = A$$

Доказательство:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : x \in \mathring{U}_\delta(a) \colon \begin{array}{l} A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon \\ A-\varepsilon < g(x) < A+\varepsilon \end{array}$$

$$A-\varepsilon < f(x) \le \varphi(x) \le g(x) < A+\varepsilon$$

$\blacksquare$

5 Односторонние пределы функции в точке. Необходимое и достаточное условие существования конечного предела(использующее односторонние пределы). Первый замечательный предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

5.1 Односторонние пределы

$f(x)$ – определена на $(b;a), a$ – конечная точка.
Число A – предел $f(x)$ слева в точке a, если

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \colon x \in (a-\delta; a) \curvearrowright f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Обозначение:

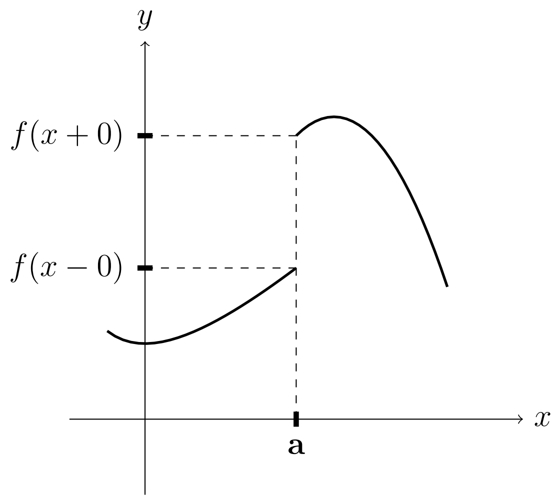
$$\lim_{x\to a-} f(x)$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x)$$

Справа аналогично

$$\lim_{x\to a+} f(x)$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x)$$



5.2 Необходимое и достаточное условие существования конечного предела

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = A$$

5.3 Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

6 Теорема о монотонной ограниченной функции и последовательности (без доказательства). Второй замечательный предел. Доказательство существования .

6.1 Теорема о монотонной ограниченной последовательности

Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

6.2 Теорема о монотонной ограниченной функции

Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ или ее правый предел $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$

6.3 Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство существования:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-(n-1)) \cdot n}{k! n^k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-(n-1))}{k! n^{k-1}} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n-1}{2n} + \frac{(n-1)(n-2)}{3! n^2} + \dots + \frac{(n-(n-1))(n-(n-2)\dots(n-2)(n-1)}{n! n^{n-1}}$$

$\blacksquare$

Следствия:

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

7 Бесконечно малые функции, их свойства. Необходимое и достаточное условие стремления функции к конечному пределу.

7.1 Б.М.Ф.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Свойства б.м.ф.

1. $f(x)$ – б. м. в точке $a \Rightarrow c\cdot f(x)$ – б. м. в точке a
2. $f(x)$ – б. м. в точке $a; g(x)$ – ограничена в $U(a)$ или $g(x)$ – б.м. в точке $a \Rightarrow f(x)\cdot g(x)$ – б.м. в точке a
3. $f(x)$ – б. м. в точке $a; g(x)$ – б.м. в точке $a \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = 0$

7.2 Необходимое и достаточное условие стремления функции к конечному пределу

$$\lim_{x\to a} A_{\text{кон}} \Leftrightarrow \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x)$$

8 Бесконечно большие функции их свойства. Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

8.1 Б.Б.Ф.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Свойства Б.Б.Ф.

1. $cf(x)$ – б.б. в точке $(c \neq 0)$

2. $f(x) + A_{\text{кон}}$ – б.б. в точке a

3. $f(x) \cdot g(x)$ –б.б. в точке a ($g(x)$ – б.б.)

4.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

8.2 Теорема о связи б.м. и б.б. функций

- $f(x)$ – б.б. в точке $a \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ – б.м. в точке a
- $f(x)$ – б.м. в точке $a \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ – б.б. в точке a

9 Предел суммы, произведения и частного функций, стремящихся к конечным пределам.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

1. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cA$
2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B$
3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = AB$
4. $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{A}{B}$

10 Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентных бесконечно малых(доказательство). Теорема о замене бесконечно малой на эквивалентную при вычислении пределов.

10.1 Сравнение б.м.ф.

$f(x), g(x)$ – б.м. в точке a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ более высокого порядка} \\ A \neq 0, & f(x) \text{ и } g(x) \text{ одного порядка} \\ \infty, & g(x) \text{ более высокого порядка} \\ \nexists, & \text{несравнимы} \end{cases}$$

10.2 Эквивалентные б.м.ф.

Предел отношения б.м.ф. ге изменится, если каджую из них (или одну) заменить на эквивалентную б.м.ф.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то α и β эквивалентны в точке a.

Доказательство:

$$f(x) \sim \alpha(x)$$
$$g(x) \sim \beta(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\cancelto{1}{\frac{f(x)}{\alpha(x)}}\cdot\cancelto{1}{\frac{\beta(x)}{g(x)}}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

10.3 Таблица эквивалентных б.м.ф.

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
2. $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$

3. $1 - \cos\alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$
4. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
5. $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$
6. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
7. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
8. $(1 + \alpha(x)^n) - 1 \sim xn$

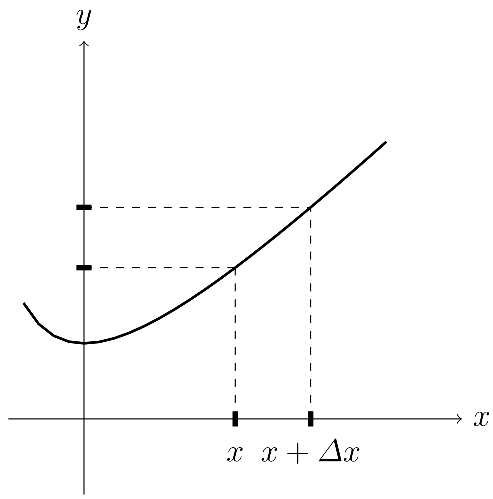
11 Непрерывность функции в точке. Необходимое и достаточное условия непрерывности функции в точке(использующие приращения).

11.1 Непрерывность функции в точке

Функция $y = f(x)$ определена в $U(a)$
$f(x)$ – непрерывна в точке a, если существует предел, и он равен значнию функции в этой точке $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

11.2 Необходимое и достаточное условия непрерывности функции в точке

$\varDelta f(x) = f(x_1) - f(x)$
$x_1 = x + \varDelta x$
$\varDelta x = x_1 - x$
$\lim\limits_{\varDelta x\to 0} \varDelta f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ – непрерывна в точке x



11.3 Свойства непрерывности функции в точке

1. $f(x)$ – непрерывна в точке $x \Rightarrow cf(x)$ – непрерывна в точке x

2. $f(x), g(x)$ – непрерывны в точке $x \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x)+g(x) \\ f(x)\cdot g(x) \end{matrix}\right\}$ – непрерывны в точке x

3. $f(x)$ – непрерывна в точке $x_0, f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists U(x_0)\colon f(x)$ – того же знака, что $f(x_0)$
   Доказательство:
   Пусть $f(x_0) > 0$:

   $$\lim_{x\to x_0} = f(x_0), \text{ т.е. } \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0\colon x \in U_\delta(x_0)$$

   $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

   Выберем $\varepsilon\colon f(x_0) - \varepsilon > 0 \Rightarrow \delta$ – искомое

   ■

4. $f(x), g(x)$ – непрерывны в точке x_0, $g(x) \neq 0\colon$
   $\frac{f(x)}{g(x)}$ – непрерывна в точке x_0

5. $u(x)$ – непрерывна в точке $x_0, u(x_0) = u_0$:
   $f(u)$ – непрерывна в точке $u_0 \Rightarrow f(x) = f(u(x))$ – непрерывна в точке x_0

6. Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

12 Свойства функций, непрерывных в точке. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке(без доказательства)

12.1 Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если $f(x)$ – непрерывна в точке a, то существует $U(a)$, в которой $f(x)$ ограничена.

2. Если $f(x)$ – непрерывна в точке a, $f(a) \neq 0$, то в некоторой $U(a) f(x)$ сохраняет свой знак.

12.2 Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке

$f(x)$ –непрерывна на промежутке $[a; b]$, если:

1) $f(x)$ – непрерывна на $(a; b)$

2) $f(a + 0) = f(a)$

3) $f(b - 0) = f(b)$

1 теорема Вейерштрасса

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она на нем ограничена.

2 теорема Вейерштрасса

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она достигает на нем наибольшее и наименьшее свое значение.

1 теорема Больцано-Коши

$f(x)$ непрерывна на $[a; b]$
$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a; b] \colon f(c) = 0$

3 теорема Больцано-Коши

$f(x)$ непрерывна на $[a; b]$
$f(a) = A, f(b) = B \Rightarrow A \neq B \forall C \in (A; B) \exists c \in (a; b) \colon f(c) = C$

13 Классификация точек разрыва функции.

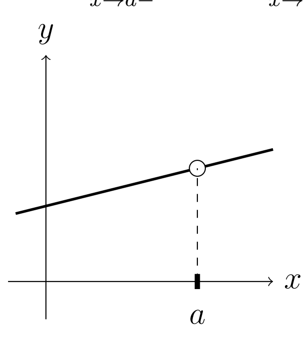
$f(x)$ определена в $U(a)$ или $\mathring{U}(a)$
$x = a$ – точка разрыва функции $f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий:

1) Функция не определена в точке a
2) Функция определена в точке a, но не существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$
3) Функция определена, существуют пределы $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$, но не выполняется условие $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$

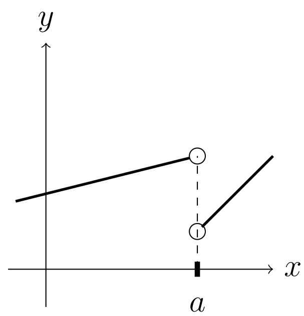
Классификация точек разрыва функции

I. a – точка разрыва I-го рода, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ – конечные

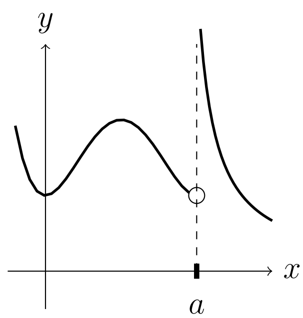
   1) Если $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$, то a – точка устранимого разрыва.



2) Если $\lim\limits_{x\to a-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, то a – точка конечного разрыва.



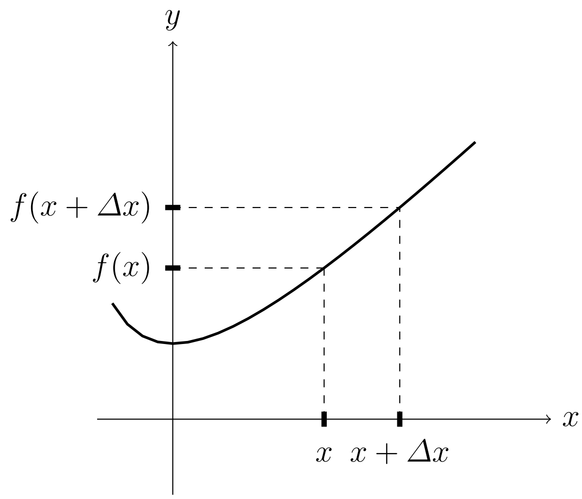
II. a – точка разрыва II-го рода, если хотя бы один из $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ – бесконечный или не существует



14 Определение производной. Примеры нахождения производной с помощью определения.

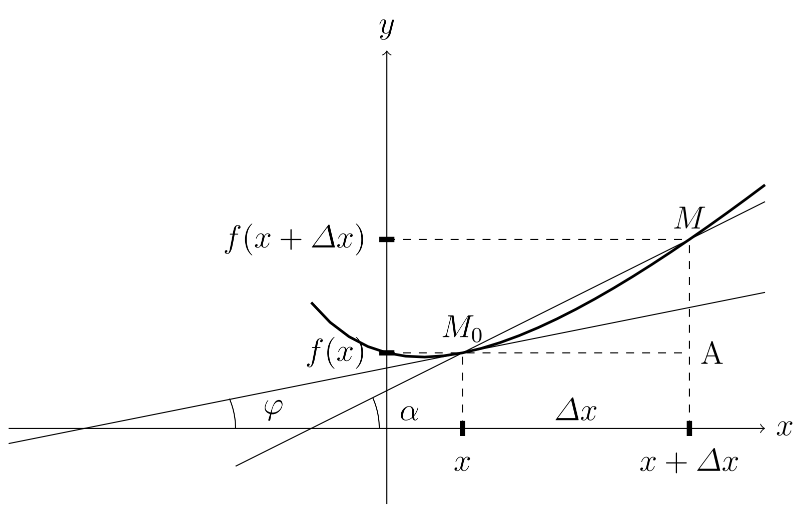
$f(x)$ – определена в $U(x)$
$\varDelta x \colon x + \varDelta x \in U(x)$
$\varDelta f(x) = f(x - \varDelta x) - f(x)$
Предел отношения приращения функции к приращению аргумента называется ***производной***.

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = f'(x) = \frac{df(x)}{d(x)}$$



15 Геометрический и механический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

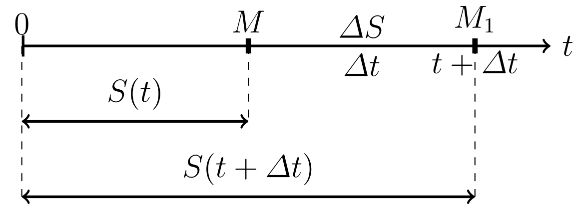
15.1 Геометрический смысл производной



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to a} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{MA}{M_0A} = \operatorname{tg} \alpha$$

При $M \to M_0$: $\alpha \to \varphi \Rightarrow f'(x) = \operatorname{tg}\varphi$

15.2 Механический смысл производной



$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t)$$

15.3 Уравнение касательной к графику функции

$$y_0 = f(x_0)$$
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$$

16 Дифференцируемость функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Непрерывность дифференцируемой функции.

16.1 Дифееренцируемость функции в точке

$f(x)$ – дифференцируема в точке x, если приращение функции $\Delta f(x)$ можно представить в виде:

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

A – число

$\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $\Delta x \to 0$

16.2 Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.

$f(x)$ – дифференцируема в точке $x \Leftrightarrow \exists$ конечная $f'(x)$ *Доказательство:*

$\boxed{\Leftarrow}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$A = \lim f(x) \Leftrightarrow f(x) - A = \alpha(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{\Delta f(x) + \alpha_1(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)\Delta x = \Delta f(x) + \alpha_1(\Delta x)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

$\alpha = -\alpha_1 \Rightarrow f(x)$ – дифференцируема

$\boxed{\Rightarrow}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = A + 0 = A$$

$\blacksquare$

16.3 Непрерывность дифференцируемой функции

$f(x)$ – дифференцируема в точке $x \Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке x

17 Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций.

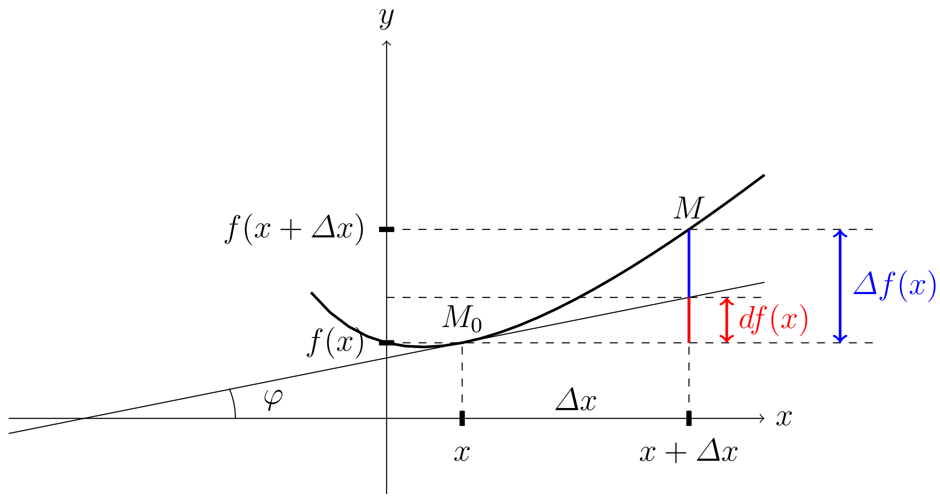
$f'(x)$ – конечная $\Rightarrow \underbrace{f'(x)\Delta x}+\alpha(\Delta x)\Delta x$

$df(x) = f'(x)\Delta x$ – дифференциал функции $f(x)$ в точке x.
$dx = \Delta x$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

17.1 Геометрический смысл дифференциала

$df(x) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$



17.2 Производная суммы

$$u = u(x); v = v(x)$$

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right) \pm \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) = \\
&= u'(x) \pm v'(x)
\end{aligned}$$

17.3 Производная произведения

$$u = u(x); v = v(x)$$

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x)) - (u(x) \cdot v(x))}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x) + \Delta u) \cdot (v(x + \Delta v)) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{u(x)v(x)} + u(x)\Delta v + v(x)\Delta u + \Delta u \Delta v - \cancel{u(x)v(x)}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} \right) = \\
&= u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \cancelto{0}{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\
&= u(x)v'(x) + u'(x)v(x)
\end{aligned}$$

17.4 Производная частного

$u = u(x); v = v(x)$

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{u(x)v(x)} + v(x)\Delta u - \cancel{u(x)v(x)} - u(x)\Delta v}{\Delta x v(x)\left(v(x) + \Delta v\right)} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{\Delta x\left(v^2(x) + \Delta v v(x)\right)} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{u(x)v(x)} + v(x)\Delta u - \cancel{u(x)v(x)} - u(x)\Delta v}{\Delta x v(x)\left(v(x) + \Delta v\right)} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + \Delta v v(x)} = \\
&= \frac{v(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u} = \\
&= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}
\end{aligned}$$

18 Теорема о дифференцируемости сложной функции.

$$\left.\begin{aligned}
&u(x) \text{ – дифференцируема в точке } x \\
&f(u) \text{ – дифференцируема в точке } u = u(x)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(u(x)) \text{ – дифференцируема в точке } x$$

$$\frac{df}{dx} = f'_u\left(u(x)\right) \cdot u'(x)$$

Доказательство:

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= f\left(u+\Delta u\right)-f(u)=f'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\cdot\Delta u \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\cdot\Delta u}{\Delta x}= \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(u)\Delta u}{\Delta x}+\cancelto{0}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta u)\cdot\Delta u}{\Delta x}}= \\
&= f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)u'(x)
\end{aligned}
$$

■

19 Производная обратной функции. Вывод производных обратных тригонометрических функций.

19.1 Производная обратной функции

$y=f(x)$ – монотонна в $U(x)$ и дифференцируема в точке x, $f'(x)\neq 0$
$g(y)$ – обратная для $f(x)$
$\Rightarrow g(y)$ – дифференцируема в точке $y=y(x)$ и

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

Доказательство:

$$
\begin{aligned}
g'(y) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{f(x+\Delta x)-f(x)}= \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}}=\frac{1}{f'(x)}
\end{aligned}
$$

■

19.2 Вывод обратных тригонометрических функций

$$f(x) = \sin x, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$
$$g(x) = \arcsin y$$
$$g'(y) = \frac{1}{cosx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

20 Правило логарифмического дифференцирования. Его применение к нахождению производных функций $f(x) = a^x$, $f(x) = x^a$.

$$y = f'(x)$$
$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

1. $f(x) = a^x$

$$\ln f(x) = x \ln a$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a$$
$$f'(x) = \ln a \cdot f(x) = \ln a \cdot a^x$$

2. $f(x) = x^a$

$$\begin{aligned}
&\ln f(x) = a \ln x \\
&\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a \\
&f'(x) = \frac{a}{x} \cdot x^a \\
&f'(x) = a \cdot x^{a-1}
\end{aligned}$$

21 Производные и дифференциалы высших порядков.

$y = f(x)$

$\exists f'(x)$ – первого порядка

$(f'(x))'$ – производная второго порядка

Обозначение:

$f''(x) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$

$f'''(x) = \dfrac{d^3 f}{dx^3}$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{d^4 f}{dx^4}$

$f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f}{dx^n}$

Дифференциал:

$$df(x) = f'(x)dx$$

2-го порядка :

$$d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)d(x))' dx = f''(x)dx^2$$

3-го порядка :

$$f'''(x)dx^3$$

4-го порядка :

$$f^{(4)}(x)dx^4$$

n-го порядка :

$$f^{(n)}(x)dx^n$$

22 Таблица производных.

1. $x' = 1$
2. $C' = 0$
3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$
4. $(u + v)' = u' + v'$
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
7. $(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

   $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
8. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
10. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
11. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
12. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
13. $(tg u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
14. $(ctg u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
15. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $(arctg u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
18. $(arcctg u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

23 Дифференцирование функций, заданных параметрически (первая и вторая производные). Теорема Ролля, ее геометрический смысл.

23.1 Дифференцирование функций, заданных параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \text{ – дифференцируема, монотонна} \\ y = \psi(t) \text{ – дифференцируема} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\exists \varphi^{-1}(x) \Rightarrow y(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$

Обозначим $g(x) = \varphi^{-1}(x)$

$g(x)$ – обратная для $\varphi(x) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$

$y(x) = \psi(g(x))$

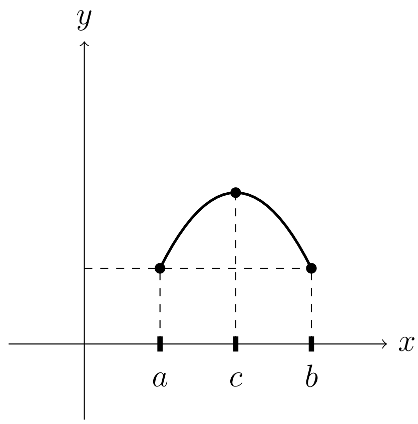
$y'(x) = \psi'(x) \cdot g'(x) = \psi'(t) \cdot \dfrac{1}{\varphi'(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$y''(x) = \dfrac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}$

23.2 Теорема Ролля

$f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$
$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists$ хотя бы одна $c \in (a;b)\colon f'(c) = 0$
Доказательство:

1. $f(x) = const \Rightarrow c$ – $\forall$ точка $\in (a;b)$
2. $f(x) \neq const \Rightarrow$ по Теореме Ферма.



24 Теорема Коши. Формула конечных приращений Лагранжа, ее геометрический смысл.

24.1 Теорема Коши

$f(x), g(x)$ – непрерывны на $[a; b]$, дифференцируемы на $(a; b)$
$g(x) \neq 0, x \in (a; b) \Rightarrow \exists$ хотя бы одна точка $c \in (a; b)$:

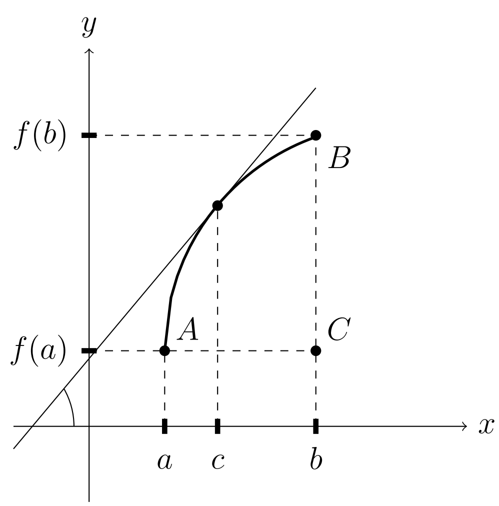
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство:

$F(x) = f(x) - R\left(g(x) - g(a)\right)$
$F(a) = f(a)$
$F(b) = f(b)$
По Теореме Ролля: $\exists c$: $f'(c) = 0$
$F'(c) = f'(c) - R\left(g'(c) - 0\right) = 0$
$\Downarrow$
$R = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$
$\blacksquare$

24.2 Формула конечных приращений Лагранжа

$$a = x$$
$$b = x + \Delta x$$
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c) \cdot \Delta x$$
$$f(b) - f(a) = BC$$
$$b - a = AC$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = \operatorname{tg} \angle BAC$$



25 Правило Лопиталя.

Для неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Теорема 1 $f(x), g(x)$ – дифференцируемы в $U(a)$ и бесконечно малые в точке $a, g(a) \neq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ если } \exists$$

Доказательство:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = (\text{Теорема Коши}) = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема 2 $f(x), g(x)$ – бесконечно большие в точке $a \Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

26 Формула Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа и форме Пеано.

$f(x)$ – определена в $U(x_0)$ и имеет в ней производные до $(n+1)$ порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется $c \in (x_0; x)$:

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Последний член – остаточный.
В форме Лагранжа:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

В форме Пеано:

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, c \in (x; x_0)$$

27 Формулы Тейлора (Маклорена) для функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, , в окрестности точки x = 0.

При $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

1. e^x

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & \qquad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ &\dots & &\dots \\ f^{(n)}(x) &= e^x & f^{(n)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^0}{(n+1)!}$$

2. $\sin x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & \qquad f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos(x) & f''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) & f''(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{0}{2!} - 1\frac{1}{3!} + \frac{0}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

28 Необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) функции y = f (x).

28.1 Необходимое условие

$f(x)$ – дифференцируема на X

$$f(x) \nearrow \Rightarrow f'(x) \geq 0, x \in X$$
$$f(x) \searrow \Rightarrow f'(x) \leq 0, x \in X$$

28.2 Достаточное условие

$$f'(x) > 0, x \in X \Rightarrow f(x) \nearrow$$
$$f'(x) < 0, x \in X \Rightarrow f(x) \searrow$$

29 Определение экстремума функции $y = f(x)$. Необходимое условие экстремума.

$f(x)$ – определена на X
x_0 – max, если $\exists U(x_0)\colon f(x) < f(x_0) \forall x \in U(x_0)$
x_0 – min, если $\exists U(x_0)\colon f(x) > f(x_0) \forall x \in U(x_0)$

$f(x)$ – дифференцируема на $X, x_0 \in X$
x_0 – точка экстремума $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

30 Достаточное условие экстремума, использующее первую производную.

$f(x)$ – дифференцируема на X
x_0 – бесконечно малая точка, определенная на X

$$\left.\begin{matrix} f'(x) > 0 \text{ при } x < x_0 \\ f'(x) < 0 \text{ при } x > x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_0 - \max$$

$$\left.\begin{matrix} f'(x) < 0 \text{ при } x < x_0 \\ f'(x) > 0 \text{ при } x > x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_0 - \min$$

$f'(x) = 0$ или ∞ или $\nexists$ – критическая точка (подозрительная на экстремум)
$f'(x) > 0$ – стационарная точка

31 Достаточное условие экстремума, использующее вторую производную.

$f(x)$ – два раза непрерывна на X, дифференцируема на X
$x = x_0$ – стационарная точка ($f'(x) = 0$)
$\Rightarrow f'' < 0 \Rightarrow x_0 - \max$
$\Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow x_0 - \min$

32 Определение направления выпуклости графика функции $y = f(x)$. Признак выпуклости вверх и выпуклости вниз. Точки перегиба графика функции.

Выпуклая вверх на $X \Leftrightarrow \forall x, x + \Delta x \in X \Rightarrow \Delta y < dy$
Выпуклая вниз на $X \Leftrightarrow \forall x, x + \Delta x \in X \Rightarrow \Delta y > dy$

32.1 Достаточный признак направления выпуклости

$f(x)$– 2 раза дифференцируема на X
$\Rightarrow$ Если $f''(x) > 0$ на $X \Rightarrow$ график выпуклый вниз на X
$\Rightarrow$ Если $f''(x) < 0$ на $X \Rightarrow$ график выпуклый вверх на X
Точки, в которых меняется направление выпуклости – точки перегиба

33 Асимптоты графика функции $y = f(x)$. Правило нахождения вертикальных и невертикальных асимптот.

Асимптота – прямая, к которой приближается график функции (расстояние $\to 0$)

1. Вертикальная асимптота. $x = a$ – вертикальная асимптота, если:

$$\begin{cases} a \text{ – точка бесконечного разрыва} \\ a \text{ – граничная точка области определения, если односторонний предел } = \infty \end{cases}$$

2. Наклонная асимптота

$$y = kx + b$$
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx$$

Если хотя бы один из этих пределов $\nexists$ или ∞, то наклонных асимптот нет.

34 Определение первообразной. Теорема о двух первообразных одной функции.

$F(x), f(x)$ – определена на X
$F(x)$ – первообразная для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$

Теорема $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные для $f(x)$, то $F_1(x) = F_2(x) + c, c - const$

Доказательство:

$$(f_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = c$$

35 Определение неопределенного интеграла и его свойства. Инвариантность формул интегрирования.

36 Метод интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

37 Метод подстановки для неопределенного интеграла.

38 Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

39 Интегрирование дробно-рациональных функций.

40 Интегрирование тригонометрических функций.

41 Использование подстановок , , примеры.