Конспект лекций по МатАн

Черепанов Илья

03.02.2025

Оглавление

1 Интегралы **5**

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл 5

1.1.1 Определение 5

1.1.2 Свойства неопределенных интегралов 6

1.1.3 Таблица интегралов 6

1.1.4 Инвариативность формул интегрирования 7

Глава 1

Интегралы

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

1.1.1 Определение

$F(x), f(x)$ – определены на X
$F(x)$ – первообразная для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$
Пример:
x^2 – первообразная для $2x$
$x^2 + 5$ – первоообразная для $2x$

Теорема. *$F_1(x), F_2(x)$ – первообразные для $f(x)$ $\Rightarrow$ $F_1(x) = F_2(x) + C$ $(C = const)$*

Доказательство.

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$
$$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = C$$

$\square$

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ на X – совокупность всех первообразных $f(x)$ на X.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
$$C \in \mathbb{R}$$

1.1.2 Свойства неопределенных интегралов

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2) $\int f(x)dx = f(x) + C$

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

Доказательство.

$$\left(\int kf(x)dx\right)' = kf(x)$$
$$\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x)$$

$\square$

4) $\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

1.1.3 Таблица интегралов

1) $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$

2) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

3) $\int e^x dx = e^x + C$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

7) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

8) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

10) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

11) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

1.1.4 Инвариативность формул интегрирования

Теорема. $u(x)$ *– непрерывна и дифференцируема на* X*.*
$\int f(x)dx = F(x) + C$
Область значений $u(x)$ *совпадает с областью определения* $f(x) \Rightarrow$*.*
$\Rightarrow \int f(u(x))\, u'(x)\, dx = F(u(x)) + C$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Производная левой части:} & f\left(u\left(x\right)\right)u'\left(x\right) \\ \text{Производная правой части:} & F'_u\left(u\right)u'\left(x\right) = f\left(u\left(x\right)\right)u'\left(x\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{равенство верно}$$

□

Метод внесения под знак дифференциала

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C$$

1. $dx = \dfrac{1}{a}d\left(ax+b\right)$

   Примеры:

   1) $\displaystyle\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d2x = \frac{1}{2}\int e^{u}du = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

   2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d3x}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$

   3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-2x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(-2x+1)}{\sqrt[4]{1-2x}} = -\frac{2}{3}\left(1-2x\right)^{\frac{3}{4}} + C$

2. $\dfrac{dx}{x} = d\ln x \ \Big(\ln x\Big)$

   Примеры:

   1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$

   2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2-5\ln x}} = \int \frac{d\ln x}{\sqrt{2-5\ln x}} = -\frac{1}{5}\int \frac{d\left(-5\ln x+2\right)}{\sqrt{2-5\ln x}} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5\ln x} + C$

   3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(3\ln x+2\right)^2} = -\frac{1}{3\left(3\ln x+2\right)} + C$