Конспект лекций по МатАн

Черепанов Илья

03.02.2025

Оглавление

Глава 1

Интегралы

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

1.1.1 Определение

$F(x), f(x)$ – определены на X
$F(x)$ – первообразная для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$
Пример:
x^2 – первообразная для $2x$
$x^2 + 5$ – первоообразная для $2x$

Теорема. $F_1(x), F_2(x)$ *– первообразные для* $f(x) \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + C$ $(C = const)$

Доказательство.

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$
$$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = C$$

$\square$

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ на X – совокупность всех первообразных $f(x)$ на X.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
$$C \in \mathbb{R}$$

1.1.2 Свойства неопределенных интегралов

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2) $\int f(x)dx = f(x) + C$

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

Доказательство.

$$\left(\int kf(x)dx\right)' = kf(x)$$
$$\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x)$$

$\square$

4) $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

1.1.3 Таблица интегралов

1) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

3) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

4) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

6) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

1.1.4 Инвариативность формул интегрирования

Теорема. *$u(x)$ – непрерывна и дифференцируема на X.*
$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$
Область значений $u(x)$ совпадает с областью определения $f(x) \Rightarrow$.
$\displaystyle\Rightarrow \int f\left(u\left(x\right)\right) u'\left(x\right) dx = F\left(u\left(x\right)\right) + C$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Производная левой части:} & f\left(u\left(x\right)\right)u'\left(x\right)\\ \text{Производная правой части:} & F'_u\left(u\right)u'\left(x\right)=f\left(u\left(x\right)\right)u'\left(x\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{равенство верно}$$

□

Метод внесения под знак дифференциала

$$\int f(x)dx=F(x)+c\Rightarrow\int f(u)du=F(u)+C$$

1. $\boxed{dx=\dfrac{d\left(ax+b\right)}{a}}$

   Примеры:

   1) $\displaystyle\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}d2x=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

   2) $\displaystyle\int\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\int\frac{d3x}{3x+1}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+1)}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|+C$

   3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1-2x}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(-2x+1)}{\sqrt[4]{1-2x}}=-\frac{2}{3}\left(1-2x\right)^{\frac{3}{4}}+C$

2. $\boxed{\dfrac{dx}{x}=d\ln x\ \Big(\ln x\Big)}$

   Примеры:

   1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln|\ln x|+C$

   2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{2-5\ln x}}=\int\frac{d\ln x}{\sqrt{2-5\ln x}}=-\frac{1}{5}\int\frac{d\left(-5\ln x+2\right)}{\sqrt{2-5\ln x}}=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5\ln x}+C$

   3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\left(3\ln x+2\right)^{2}}=-\frac{1}{3\left(3\ln x+2\right)}+C$

3. $\boxed{xdx=\dfrac{dx^2}{2}}$

   Примеры:

1) $\displaystyle\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{e^{x^2}}{2} + C$

2) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{2-3x^2}} = -\frac{1}{2\cdot 3}\int \frac{d\left(-3x^2+2\right)}{\sqrt{2-3x^2}} = -\frac{2}{6}\sqrt{2-3x^2} + C$

3) $\displaystyle\int \frac{xdx}{2x^2+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{2x^2+5} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(2x^2+5\right)}{2x^2+5} = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+5\right) + C$

4. $\boxed{e^x dx = de^x}$

Примеры:

1) $\displaystyle\int e^{e^x}e^x dx = \int e^{e^x}de^x = e^{e^x} + C$

2) $\displaystyle\int e^x\sqrt[3]{2e^x-1}dx = \int \sqrt[3]{2e^x-1}d\left(2e^x-1\right) = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(2e^x-1\right)^4} + C$

5. $\boxed{\cos x dx = d\sin x}$ $\boxed{\sin x dx = -d\cos x}$

Примеры:

1) $\displaystyle\int \cos x e^{2\sin x+1}dx = \int e^{2\sin x+1}d\left(2\sin x+1\right) = \frac{1}{2}e^{2\sin x+1} + C$

2) $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1+\cos^2 x} = -\operatorname{arctg}\left(\cos x\right) + C$

6. $\boxed{\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x}$

Примеры:

1) $\displaystyle\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int 2^{\arcsin x}d\arcsin x = \frac{1}{\ln 2}2^{\arcsin x}$

1.1.5 Метод интегрирования по частям

Теорема. $u(x), v(x)$ – *непрерывны и дифференцируемы на* $X \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

удав, увы, в аду

Доказательство.

$$(\text{левая часть})' = \left(\int uv'dx\right)' = uv'$$
$$(\text{правая часть})' = (uv)' - \left(\int vu'dx\right)' = u'v + uv' - u'v = uv'$$

□

При вычислении

$u(x)$ – функция, которая при дифференцировании упрощается

Пример:

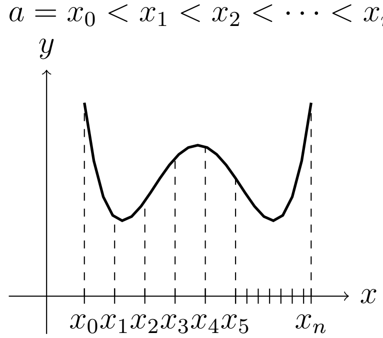
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$
$$u = x; du = dx$$
$$dv = e^x dx; v = \int e^x dx = e^x$$

1.2 Определенный интеграл

1.2.1 Определение интеграла по промежутку $[a; b]$

$f(x)$ – определена на $[a; b]$ и ограничена.

1. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$



2. $\overline{x_i} \in (x_{i-1}; x_i)\,, i = 1, 2, \ldots, n$

3. $f\left(\overline{x_i}\right)$

4. $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)(x_i - x_{i-1})$ – интегральная сумма
   $x_i - x_{i-1} = \Delta i$
   $\lambda = \max \Delta i$

5. $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right) \Delta i$
   Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения промежутка $[a; b]$, ни от выбора точек $\overline{x_i}$, то он называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ по промежутку $[a; b]$

Теорема. $f(x)$ – *кусочно непрерывна на* $[a; b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)dx$

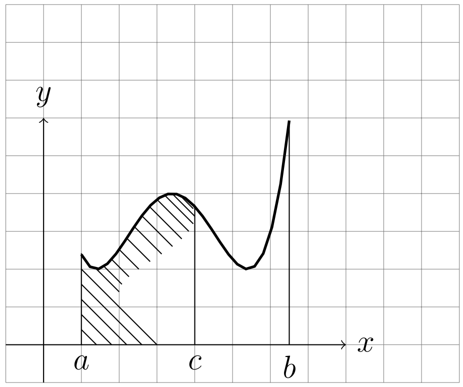
1.2.2 Свойства интеграла по промежутку

1. $\int_a^b 1dx = b - a$

2. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, c \in (a; b)$



y
x
a
c
b