Eclats de vers : Matemat : Géométrie différentielle

chimay

January 6, 2026

Index mathématique
Retour à l'accueil

Table des matières

1 Dépendances

- Chapitre **??** : Les vecteurs
- Chapitre **??** : Les produits scalaires
- Chapitre **??** : Les tenseurs

2 Indices covariants et contravariants

Les indices inférieurs (le i des vecteurs a_i^j par exemple) des tenseurs sont appelés *indices covariants.*

Les indices supérieurs (le j des vecteurs a_i^j par exemple) des tenseurs sont appelés *indices contravariants.*

Ne pas confondre ces *indices supérieurs* contravariants , très utilisés en calcul tensoriel, avec les puissances ! Dans le contexte des tenseurs, une éventuelle puissance d'un scalaire θ_i^j serait notée au besoin par :

$$\left(\theta_j^i\right)^m = \theta_j^i \cdot ... \cdot \theta_j^i$$

3 Coordonnées curvilignes

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$. Les coordonnées curvilignes sont basées sur la notion de position r, exprimée comme une fonction de certains paramètres $x \in \mathbb{R}^n$ que nous appelons « coordonnées » de r :

$$r = \rho(x)$$

où $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nous envisageons également le cas du changement de variable. La position dépend alors d'un autre jeu de coordonnées $y \in \mathbb{R}^n$:

$$r = \sigma(y)$$

où $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nous définissons les vecteurs fondamentaux e_i et e^i au moyen de ces fonctions :

$$\begin{array}{r} e_i(x) = \frac{\partial \rho}{\partial x^i}(x) \\ e^i(y) = \frac{\partial \sigma}{\partial y_i}(y) \end{array}$$

de telle sorte que :

$$dr = \sum_i e_i \; dx^i = \sum_i e^i \; dy_i$$

Nous supposons que $(e_1, ..., e_n)$ et $(e^1, ..., e^n)$ sont des bases de E.

3.1 Courbe

Dans le cas où x et y ne dépendent que d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{dr}{dt} = \sum_i e_i \; \frac{dx^i}{dt} = \sum_i e^i \; \frac{dy_i}{dt}$$

On dit alors que la position r décrit une courbe.

4 Changement de variable

Si les fonctions ρ et σ sont inversibles, on a :

$$\begin{aligned} x = \rho^{-1}(r) = (\rho^{-1} \circ \sigma)(y) = \phi(y) \\ y = \sigma^{-1}(r) = (\sigma^{-1} \circ \rho)(x) = \psi(x) \end{aligned}$$

où nous avons implicitement défini $\phi = \rho^{-1} \circ \sigma$ et $\psi = \sigma^{-1} \circ \rho$. Nous notons $\frac{\partial x^i}{\partial y_j}$ et $\frac{\partial y_i}{\partial x^j}$ les coordonnées des dérivées de ϕ et ψ suivant les bases formées par les e_i et les e^i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y_j} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y_j}\ e_i \\ \frac{\partial \psi}{\partial x^j} = \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial x^j}\ e^i \end{aligned}$$

La composition des dérivées nous donne les relations :

$$\begin{aligned} e_i = \sum_j \frac{\partial r}{\partial y_j}\ \frac{\partial y_j}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x^i}\ e^j \\ e^i = \sum_j \frac{\partial r}{\partial x^j}\ \frac{\partial x^j}{\partial y_i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y_i}\ e_j \end{aligned}$$

qui nous permettent de relier les e_i aux e^j et inversément.

5 Produit scalaire

Les produits intérieurs entre vecteurs de base se notent habituellement :

$$\begin{aligned} g_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle \\ g_i^j = \langle e_i | e^j \rangle \\ g^{ij} = \langle e^i | e^j \rangle \end{aligned}$$

Il est clair d'après les propriétés de symétrie de ce produit que :

$$\begin{aligned} g_{ij} = g_{ji} \\ g^{ij} = g^{ji} \\ g_i^j = g_j^i \end{aligned}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs $a, b \in E$ définis par :

$$\begin{aligned} a = \sum_i a^i\ e_i = \sum_i a_i\ e^i \\ b = \sum_i b^i\ e_i = \sum_i b_i\ e^i \end{aligned}$$

peut s'écrire indifféremment comme :

$$\begin{aligned} \langle a|b \rangle = \sum_{i,j} g_{ij}\ a^i\ b^j \\ \langle a|b \rangle = \sum_{i,j} g^{ij}\ a_i\ b_j \\ \langle a|b \rangle = \sum_{i,j} g_j^i\ a_i\ b^j \\ \langle a|b \rangle = \sum_{i,j} g_i^j\ a^i\ b_j \end{aligned}$$

Et en particulier, la longeur ds d'un changement de position dr vérifie :

$$(ds)^2 = \langle dr|dr \rangle = \sum_{i,j} g_{ij}\ dx^i\ dx^j = \sum_{i,j} g^{ij}\ dy_i\ dy_j$$

De plus, les relations entre les vecteurs e_i et les vecteurs e^i permettent de déduire, en utilisant la linéarité du produit scalaire :

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x^i} \; g_j^k = \sum_{k,l} \frac{\partial y_k}{\partial x^i} \; \frac{\partial y_l}{\partial x^j} \; g^{kl}$$
$$g^{ij} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial y^i} \; g_k^j = \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial y_i} \; \frac{\partial x^l}{\partial y_j} \; g_{kl}$$

6 Dérivées primales d'un vecteur

Nous allons à présent voir comment évolue un vecteur $a \in E$, que l'on note sous la forme :

$$a = \sum_i a^i \; e_i$$

où les coordonnées $a^i \in \mathbb{R}$ tout comme les vecteurs de base e_i dépendent des coordonnées x^i. La règle de dérivation d'un produit nous donne :

$$da = \sum_i da^i \; e_i + \sum_k a^k \; de_k$$

La différentielle da^i s'obtient directement :

$$da^i = \sum_j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \; dx^j$$

On peut suivre la même règle avec de_i :

$$de_k = \sum_j \frac{\partial e_k}{\partial x^j} \; dx^j$$

Les symboles de Christoffel $\begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix}$ sont définis comme les coordonnées de $\frac{\partial e_k}{\partial x^j}$ suivant la base $(e_1, ..., e_n)$:

$$\frac{\partial e_k}{\partial x^j} = \sum_i \begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} \; e_i$$

Notons que comme :

$$\frac{\partial e_k}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial e_j}{\partial x^k}$$

on a la symétrie :

$$\begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$$

On peut évaluer ces symboles si on connait par exemple les valeurs des :

$$\begin{aligned} \left\langle e^i | \frac{\partial e_k}{\partial x^j} \right\rangle &= \sum_m \begin{Bmatrix} m \\ kj \end{Bmatrix} \; \langle e^i | e_m \rangle \\ &= \sum_m \begin{Bmatrix} m \\ kj \end{Bmatrix} \; g_m^i \end{aligned}$$

On a alors, pour chaque choix de k, j un système linéaire à résoudre. Il suffit d'inverser la matrice $G = (g^i_m)_{i,m}$ pour obtenir les valeurs des symboles.

La dérivation d'un vecteur $a \in E$ s'écrit alors :

$$da = \sum_{i,j} e_i \ dx^j \ \left[\frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \sum_k \begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} \ a^k \right]$$

On définit les coordonnées :

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \sum_k \begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} \ a^k$$

Dans le cas où les coordonnées dépendent d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \sum_{i,j} e_i \ \frac{dx^j}{dt} \ \left[\frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \sum_k \begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} \ a^k \right] \\ &= \sum_i e_i \ \left[\frac{da^i}{dt} + \sum_{j,k} \begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} \ a^k \ \frac{dx^j}{dt} \right] \end{aligned}$$

6.1 Dérivée seconde et géodésique

Considérons le cas :

$$a = \frac{dr}{dt} = \sum_i e_i \ \frac{dx^i}{dt}$$

Les coordonnées de a sont clairement $a^i = \frac{dx^i}{dt}$ et la dérivée seconde :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{da}{dt}$$

s'écrit :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \sum_i e_i \ \left[\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j,k} \begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} \ \frac{dx^k}{dt} \ \frac{dx^j}{dt} \right]$$

Les courbes $x^i = x^i(t)$ vérifiant $\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$ sont appelées des géodésiques.

7 Dérivées duales d'un vecteur

Nous allons recommencer le même processus, écrivant cette fois $a \in E$ sous la forme :

$$a = \sum_i a_i \ e^i$$

Les coordonnées $a_i \in \mathbb{R}$ tout comme les vecteurs de base e^i dépendent des coordonnées y_i. En suivant la même méthode que ci-dessus, on obtient :

$$da = \sum_{i,j} e^i \; dy_j \left[\frac{\partial a_i}{\partial y_j} + \sum_k \begin{Bmatrix} kj \\ i \end{Bmatrix} \; a_k \right]$$

où l'on a introduit de nouveaux symboles de Christoffel, définis par :

$$\frac{\partial e^k}{\partial y_j} = \sum_i \begin{Bmatrix} kj \\ i \end{Bmatrix} \; e^i$$

Ces nouveaux symboles présentent la symétrie :

$$\begin{Bmatrix} kj \\ i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} jk \\ i \end{Bmatrix}$$

8 Dérivées d'un tenseur

On étend simplement la notion de dérivée aux tenseurs en appliquant la formule :

$$d(a \otimes b) = da \otimes b + a \otimes db$$

où a et b sont deux tenseurs d'ordre quelconque. Par exemple, pour le tenseur :

$$T = \sum_{i,j} T^i_j \; e_i \otimes e^j$$

on a :

$$dT = \sum_{i,j} \left[dT^i_j \; e_i \otimes e^j + T^i_j \; de_i \otimes e^j + T^i_j \; e_i \otimes de^j \right]$$

qui devient, en introduisant les symboles de Christoffel :

$$dT = \sum_{i,j} e_i \otimes e^j \left[dT^i_j + \sum_{k,m} \begin{Bmatrix} i \\ mk \end{Bmatrix} \; T^m_j \; dx^k + \sum_{k,m} \begin{Bmatrix} mk \\ j \end{Bmatrix} \; T^i_m \; dy_k \right]$$

9 Produit scalaire et symboles de Christoffel

Lorsqu'on différentie les g_{ij}, on obtient :

$$\begin{aligned} dg_{ij} &= \langle de_i | e_j \rangle + \langle e_i | de_j \rangle \\ &= \sum_{k,l} \begin{Bmatrix} k \\ il \end{Bmatrix} \; g_{kj} \; dx^l + \sum_{k,l} \begin{Bmatrix} k \\ jl \end{Bmatrix} \; g_{ik} \; dx^l \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = \sum_k \begin{Bmatrix} k \\ il \end{Bmatrix} \; g_{kj} + \sum_k \begin{Bmatrix} k \\ jl \end{Bmatrix} \; g_{ik}$$

Définissons :

$$\gamma_{ijl} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} k \\ il \end{matrix} \right\} g_{kj}$$

Les propriétés de symétrie des symboles de Christoffel nous montrent que :

$$\gamma_{ijl} = \gamma_{ilj}$$

Et comme (changement de l'indice l en k) :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \gamma_{ijk} + \gamma_{jik}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} &= 2\ \gamma_{jik} \\ &= 2 \sum_l \left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\} g_{li} \end{aligned}$$

AFAIRE : LA FIN DU CHAPITRE EST A DÉBROUILLONNER

10 Bases biorthonormées

10.1 produit scalaire

Nous considérons tout au long de cette section le cas particulier où les bases sont biorthonormées, c'est-à-dire :

$$g_i^j = \boldsymbol{\delta}_i^j$$

On déduit des relations liant les g^{ij}, g_{ij} aux g_i^j que :

$$\begin{array}{c} g_{ik}g^{kj} = \sum_{k,l,m} \frac{\partial y_l}{\partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial y_k} g_k^l g_m^j \\ g_{ik}g^{kj} = \sum_{k,l,m} \frac{\partial y_l}{\partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial y_k} \boldsymbol{\delta}_k^l \boldsymbol{\delta}_m^j \\ g_{ik}g^{kj} = \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y_k} \\ g_{ik}g^{kj} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \boldsymbol{\delta}_i^j \end{array}$$

On aurait de même :

$$g^{ik}g_{kj} = \boldsymbol{\delta}_j^i$$

10.2 Coordonnées

Les coordonnées d'un tenseur de la forme :

$$T = \sum_{i,j,k,l} T_{i...j}^{k...l} e^i \otimes ... \otimes e^j \otimes e_k \otimes ... \otimes e_l$$

où il y a m indices $i...j$ et n indices $k...l$ s'obtiennent facilement en utilisant la contraction double :

$$T_{i...j}^{k...l} = \left\langle e_j \otimes ... \otimes e_i | T | e^l \otimes ... \otimes e^k \right\rangle_{m,n}$$

11 Dérivées des changements de variable

$$\frac{\partial x^i}{\partial y_j} = \left\langle e_i | \frac{\partial \phi}{\partial y_j} \right\rangle$$
$$\frac{\partial y_i}{\partial x^j} = \left\langle e^i | \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right\rangle$$

11.1 Christoffel

Tenant compte de cette identité, l'équation reliant les symboles de Christoffel aux produits scalaires devient :

$$\begin{Bmatrix} m \\ jk \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_i g^{im} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right]$$

11.2 Dérivée d'un vecteur

La relation :

$$d \left\langle e^i | e_j \right\rangle = d\boldsymbol{\delta}_i^j = 0$$

nous conduit à :

$$\left\langle de^i | e_j \right\rangle + \left\langle e^i | de_j \right\rangle = 0$$
$$\sum_{k,l} \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} \left\langle e^l | e_j \right\rangle dy_k + \sum_{k,l} \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} \left\langle e^i | e_l \right\rangle dx^k = 0$$
$$\sum_k \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} dy_k = - \sum_k \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} dx^m$$

Par ailleurs :

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial y_j} dy_j = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j$$

On peut donc réexprimer la dérivée duale comme :

$$da = \sum_{i,j} e^i dx^j \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \sum_k \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} a_k \right]$$

11.3 Gradient

On peut également définir le gradient d'un vecteur par :

$$\nabla a = \sum_{i,j} \nabla_j a^i e_i \otimes e^j$$

de telle sorte que l'on ait :

$$da = \langle \nabla a | dr \rangle = \nabla a \cdot dr$$

11.4 Dérivée d'un tenseur

$$dT = \sum_{i,j,k} e_i \otimes e^j dx^k \left[\frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \sum_m \begin{Bmatrix} i \\ mk \end{Bmatrix} T^m_j - \sum_m \begin{Bmatrix} m \\ jk \end{Bmatrix} T^i_m \right]$$

On définit alors les coordonnées :

$$\nabla_k T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \sum_m \begin{Bmatrix} i \\ mk \end{Bmatrix} T^m_j - \sum_m \begin{Bmatrix} m \\ jk \end{Bmatrix} T^i_m$$

11.5 Tenseur de courbure

Appliquons la formule de dérivation des coordonnées d'un tenseur dans le cas particulier où :

$$T^i_j = \nabla_j a^i$$

On a :

$$\frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 a^i}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_m \begin{Bmatrix} i \\ jm \end{Bmatrix} \frac{\partial a^m}{\partial x^k} + \sum_m \frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} i \\ jm \end{Bmatrix} a^m$$

$$\sum_l \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} T^l_j = \sum_l \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \sum_{l,m} \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ jm \end{Bmatrix} a^m$$

$$-\sum_l \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} T^i_l = -\sum_l \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} \frac{\partial a^i}{\partial x^l} - \sum_{l,m} \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ lm \end{Bmatrix} a^m$$

La somme de tous ces termes vaut $\nabla_k T^i_j = \nabla_k \nabla_j a^i$. En interchangeant les indices j et k, on obtient $\nabla_j \nabla_k a^i$. On en déduit, en utilisant les propriétés de symétrie que :

$$\nabla_k \nabla_j a^i - \nabla_j \nabla_k a^i = \sum_m R^i_{m,kj} a^m$$

où les $R^{\cdots}_{\cdots}$ sont définis par :

$$R^i_{m,kj} = \frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} i \\ jm \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{Bmatrix} i \\ km \end{Bmatrix} + \sum_l \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ jm \end{Bmatrix} - \sum_l \begin{Bmatrix} i \\ jl \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ km \end{Bmatrix}$$

Ce sont les coordonnées du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel.

12 Coordonnées polaires

AFAIRE : CLARIFIER LA FIN DU CHAPITRE

Soit les vecteurs (c_1, c_2) formant une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$:

$$\langle c_i | c_j \rangle = \delta_{ij}$$

et ne dépendant pas de la position :

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_j} = 0$$

Soit le changement de variable vers $y = (R, \theta)$, exprimé par :

$$x_1 = R \cdot \cos(\theta)$$
$$x_2 = R \cdot \sin(\theta)$$

$$r = x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2$$
$$dr = e_R \ dR + e_\theta \ d\theta$$

$$e_R = \tfrac{\partial r}{\partial R} = \cos(\theta) \cdot c_1 + \sin(\theta) \cdot c_2$$
$$e_\theta = \tfrac{\partial r}{\partial \theta} = -R \cdot \sin(\theta) c_1 + R \cdot \cos(\theta) \cdot c_2$$

$$\tfrac{\partial e_R}{\partial R} = 0$$
$$\tfrac{\partial e_R}{\partial \theta} = -\sin(\theta) \cdot c_1 + \cos(\theta) \cdot c_2 = \tfrac{1}{R} \cdot e_\theta$$
$$\tfrac{\partial e_\theta}{\partial R} = -\sin(\theta) \cdot c_1 + \cos(\theta) \cdot c_2 = \tfrac{1}{R} \cdot e_\theta$$
$$\tfrac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -R \cdot \cos(\theta) \cdot c_1 - R \cdot \sin(\theta) \cdot c_2 = -R \cdot e_R$$

$$de_R = \tfrac{\partial e_R}{\partial R} \ dR + \tfrac{\partial e_R}{\partial \theta} \ d\theta = \tfrac{1}{R} \ d\theta \ e_\theta$$
$$de_\theta = \tfrac{\partial e_\theta}{\partial R} \ dR + \tfrac{\partial e_\theta}{\partial \theta} \ d\theta = \tfrac{1}{R} \ dR \ e\theta - R \ d\theta$$

$$a = a^R \cdot e_R + a^\theta \cdot e_\theta$$
$$da = \tfrac{\partial a^R}{\partial R} \cdot e_R \ dR + \left(\tfrac{\partial a^R}{\partial \theta} - R \cdot a^\theta\right) \cdot e_R \ d\theta +$$
$$\left(\tfrac{\partial a^\theta}{\partial R} + \tfrac{a^\theta}{R}\right) \cdot e_\theta \ dR + \left(\tfrac{\partial a^\theta}{\partial \theta} + \tfrac{a^R}{R}\right) \cdot e_\theta \ d\theta$$