Eclats de vers : Matemat : Fonctions

chimay

December 30, 2025

Index mathématique
Retour à l'accueil

Table des matières

1 Dépendances

- Chapitre **??** : Les ensembles
- Chapitre **??** : Les relations

2 Définitions

Une fonction f de A vers B associe à chaque $x \in A$ un unique élément $f(x) \in B$. On note $\mathbb{F}(A, B)$ l'ensemble des fonctions f de A vers B. On utilise aussi la notation :

$$f : A \mapsto B$$

pour préciser que $f \in \mathbb{F}(A, B)$ et :

$$f : x \mapsto f(x)$$

pour préciser que f associe à chaque $x \in A$ un certain $f(x) \in B$. On dit que :

- $f(x)$ est la valeur de f en x
- x est l'argument de $f(x)$

Au besoin, on note aussi :

$$f[x] = f(x)$$

ce qui permet de distinguer les délimiteurs de l'argument. Exemple :

$$f[x \cdot (y + z)]$$

2.1 Remarque

La notation $f : A \mapsto B$ signifie que :

- $f(x)$ est défini pour tout $x \in A$
- $f(x) \in B$

Par conséquent, si $C \subseteq A$ et si $B \subseteq D$, la condition $f : A \mapsto B$ implique $f : C \mapsto D$.

2.2 Synonymes

On parle indifféremment de fonction ou d'application.

3 Fonctions discrètes

Dans le cas particulier où $f \in \mathbb{F}(\{1, 2, ..., N\}, B)$, on peut associer à f un nombre $(f_1, f_2, ..., f_N) \in B^N$ par :

$$f_i = f(i)$$

pour tout $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Inversément, à tout $(f_1, f_2, ..., f_N) \in B^N$, on associe une fonction $f : \{1, 2, ..., N\} \mapsto B$ par :

$$f(i) = f_i$$

On voit donc l'équivalence :

$$\mathbb{F}(\{1, 2, ..., N\}, B) \equiv B^N$$

3.1 Notation

Dans le cas discret, si :

$$D = \{1, 2, ..., N\}$$

on a :

$$\mathbb{F}(D, B) \equiv B^N = B^{\mathrm{card}(D)}$$

Ce constat nous inspire la notation :

$$B^D = \mathbb{F}(D, B)$$

On généralise cette notation à des ensembles quelconques A et B, qu'ils soient finis ou infinis :

$$B^A = \mathbb{F}(A, B)$$

4 Relation associée

On peut associer à toute fonction $f : A \mapsto B$ une relation $R \in \mathrm{Rel}(A, B)$ définie par :

$$R = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

On a clairement :

$$R(x) = \{f(x)\}$$

4.1 Relation inverse

Soit $f : A \mapsto B$ associée à la relation $R \in \mathrm{Rel}(A, B)$. La relation inverse $R^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$ est définie par :

$$R^{-1} = \{(f(x), x) \in B \times A : x \in A\}$$

5 Fonction identité

La fonction identité $\mathrm{Id} : A \mapsto A$ est définie par :

$$\mathrm{Id} : x \mapsto \mathrm{Id}(x) = x$$

5.1 Relation

La relation associée à la fonction identité s'écrit :

$$\{(x, \mathrm{Id}(x)) \in A^2 : x \in A\} = \{(x, x) \in A^2 : x \in A\}$$

La fonction identité est donc associée à la relation identité.

6 Image

6.1 Image d'un ensemble

Soit $f : A \mapsto B$. L'image d'un sous-ensemble $X \subseteq A$ par f est l'ensemble des valeurs que prend f en tous les éléments de X :

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

6.2 Image d'une fonction

Soit $f : A \mapsto B$. L'image de f est l'ensemble des valeurs que prend f en tous les éléments de A :

$$\operatorname{im} f = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

6.3 Image inverse

Soit $f : A \mapsto B$. Pour tout $y \in B$, l'image inverse est l'ensemble défini par :

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$$

L'image inverse d'un ensemble $Y \subseteq B$ est définie par :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$$

7 Domaine

Soit un ensemble $A \subseteq \Omega$ et une fonction $f : A \mapsto B$. Le domaine de f est l'ensemble des éléments de $x \in \Omega$ tels que $f(x) \in B$ existe. Autrement dit :

$$\operatorname{dom} f = A$$

8 Composée

Soit les fonctions $f : A \mapsto B$ et $g : B \mapsto C$.

Supposons que les grandeurs $x \in A$, $y \in B$ et $z \in C$ soient reliées par les égalités $y = f(x)$ et $z = g(y)$. On a a alors $z = g(f(x))$. On définit une nouvelle fonction $g \circ f : A \mapsto C$ associée à ce résultat par :

$$g \circ f : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

On nomme $g \circ f$ la composée de f et g. On note aussi :

$$g \circ f(x) = (g \circ f)(x)$$

8.1 Association

Soit aussi $h : C \mapsto D$. On remarque que :

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

On note :

$$h \circ g \circ f = (h \circ (g \circ f)) = ((h \circ g) \circ f)$$

8.2 Neutre

On constate que

$$\mathrm{Id} \circ f = f \circ \mathrm{Id} = f$$

On dit que la fonction identité est neutre pour la composition.

9 Puissance

Soit une fonction $f : A \mapsto A$. La « puissance » d'une fonction est définie au moyen de la composée $\circ$ par :

$$f^0 = \mathrm{Id}$$

$$f^n = f \circ f^{n-1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc en particulier $f^1 = f$ et :

$$f^n = f \circ ... \circ f$$

10 Fonction constante

On associe souvent à tout élément $c \in B$ une fonction constante $\hat{c} : A \mapsto B$ définie par :

$$\hat{c}(x) = c$$

pour tout $x \in A$. On note abusivement :

$$\hat{c} = c$$

11 Egalité

Deux fonctions $f, g : A \mapsto B$ sont égales si et seulement si leurs valeurs sont égales en tout point $x \in A$:

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)$$

12 Produit cartésien

12.1 Domaine dans un produit cartésien

Soit une fonction :

$$f : A^n \mapsto B$$

et un $x \in A^n$ défini par :

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

On note indifféremment :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f\big((x_1, x_2, ..., x_n)\big) = f(x)$$

12.2 Image dans un produit cartésien

Soit une fonction :

$$f : A \mapsto B^n$$

Pour chaque élément $x \in A$, la fonction produit un n-tuple :

$$(y_1, y_2, ..., y_n) = f(x)$$

Les y_i étant dépendant de x, on peut réécrire la relation précédente sous la forme :

$$(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) = f(x)$$

ce qui définit n fonctions $f_1, f_2, ..., f_n$ associée à f. On note alors :

$$f = (f_1, f_2, ...f_n)$$

On dit aussi que f_i est la i^{me} composante de f, et on le note :

$$f_i = \operatorname*{comp}_i f$$

Réciproquement, les n composantes f_i de f la définissent entièrement. C'est d'ailleurs la façon la plus courante pour définir une fonction qui produit des n-tuples.