Eclats de vers : Matemat : Ensembles

chimay

December 30, 2025

Index mathématique
Retour à l'accueil

Table des matières

1 Dépendances

Vous êtes à la racine.

2 Définition explicite

Les ensembles sont des regroupements d'objets appelés éléments.

Il existe deux méthodes permettant de définir un ensemble. Lorsqu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments distincts, on peut les énumérer :

$$A = \{a, b, c, ..., z\}$$

On dit alors que x appartient à A, et on le note :

$$x \in A$$

si x fait partie de la liste $a, b, c, ..., z$. Dans le cas contraire, x n'appartient pas à A, ce que l'on note par :

$$x \notin A$$

3 Définition implicite

On peut aussi définir un ensemble en demandant que ses éléments respectent certaines conditions. On dit alors que $x \in A$ si x vérifie toutes les conditions nécessaires pour appartenir à l'ensemble A ou que $x \notin A$ si au moins une des conditions n'est pas remplie. Le schéma de ce type de définition s'écrit :

$$A = \{x : \text{ une ou plusieurs conditions sur } x\}$$

Dans ce cas, le nombre d'éléments de l'ensemble peut être fini ou infini.

3.1 Variante

On ajoute souvent une condition sur les éléments de l'ensemble :

$$A = \{x \in \Omega : \text{ conditions sur } x\}$$

Dans ce cas, tout candidat x doit en plus appartenir à l'ensemble Ω s'il veut appartenir à l'ensemble A. Cette définition est donc équivalente à :

$$A = \{x : x \in \Omega, \text{ conditions sur } x\}$$

4 Cardinalité

Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments. On le note :

$$\operatorname{card}(A) = |A| = \#A$$

Exemple :

$$\operatorname{card}(\{1, 2, ..., n\}) = n$$

5 Notations

Le symbole $\exists$ signifie « il existe » et le symbole $\forall$ signifie « pour tout »

6 Ensemble vide

L'ensemble vide $\emptyset = \{\}$ est un cas particulier ne contenant aucun élément :

$$x \notin \emptyset$$

quelle que soit la nature de x.

7 Naturels

L'ensemble des nombres naturels se construit à partir d'un élément « racine » 0, auquel on ajoute indéfiniment des successeurs. Le successeur de 0 est noté 0^+ ou 1. On dit aussi que 0 est le prédécesseur de 1 et on le note $1^- = 0$. Arrivé à l'élément i, on ajoute le successeur de i, noté :

$$j = i^+$$

On dit aussi que i est le prédécesseur de j et on le note :

$$i = j^-$$

On a donc :

$$i^{+-} = j^- = i$$

et :

$$j^{-+} = i^+ = j$$

L'ensemble des objets ainsi crée est appelé l'ensemble des nombres naturels et noté $\mathbb{N}$. En l'exprimant au moyen des symboles usuels, on a dans l'ordre de succession :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$$

7.1 Notation

On note aussi :

$$i + 1 = i^+$$

et :

$$i - 1 = i^-$$

7.2 Element racine

L'élément 0 est le seul naturel à de pas posséder de prédécesseur. On l'appelle pour cette raison l'élément racine de $\mathbb{N}$.

On dit aussi qu'un élément n est nul pour signifier que $n = 0$.

7.3 Ensemble discret ou dénombrable

Tout ensemble de la forme :

$$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$$

est dit discret ou dénombrable.

8 Inclusion

On dit que A est inclus dans B et on note :

$$A \subseteq B$$

si tous les éléments de A appartiennent aussi à B :

$$x \in A \;\Rightarrow\; x \in B$$

On dit alors que A est un sous-ensemble, ou une partie de B.

8.1 Stricte

Il y a inclusion stricte :

$$A \subset B$$

lorsque $A \subseteq B$ et que les deux ensembles ne sont pas égaux, ce que l'on note par :

$$A \neq B$$

9 Egalité

Deux ensembles A et B sont dit égaux et on le note :

$$A = B$$

si tout élément de A appartient aussi à B et si tout élément de B appartient aussi à A :

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; x \in B$$

ce qui revient à dire que l'on a inclusion mutuelle de A et B :

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A$$

9.1 Remarque

Dans le cadre des ensembles, on ne se soucie pas de l'ordre :

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

ni du nombre d'apparitions d'un élément :

$$\{a, a, b\} = \{a, b\}$$

10 Union

L'union de deux ensembles $A \cup B$ est l'ensemble contenant les éléments de A et les éléments de B. Un élément quelconque de $A \cup B$ peut donc appartenir à A, à B ou aux deux ensembles simultanément :

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou/et } x \in B\}$$

10.1 Jargon

Le « ou » mathématique est non exclusif. La proposition a ou b signifie que soit a, soit b, soit (a et b) est vérifié.

11 Intersection

L'intersection $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$$

11.1 Nomenclature

Lorsque l'intersection de deux ensembles est vide, on dit qu'ils sont disjoints.

12 Association

Soit les ensembles A, B, C. On définit :

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Comme les éléments de $A \cup B \cup C$ sont les éléments qui appartiennent à au moins un des ensembles A, B, C, on voit que :

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

On en conclut que :

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

On définit aussi :

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Comme les éléments de $A \cap B \cap C$ sont les éléments qui appartiennent simultanément à A, B, C, on voit que :

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$$

On en conclut que :

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

13 Commutation

On a clairement :

$$\begin{array}{c} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}$$

14 Distribution

Soit les ensembles A, B, C. Lorsque x appartient à la fois à A et à au moins un des deux ensembles B et C, on sait que x appartient à A et B ou qu'il appartient à A et C, et inversément. On a donc :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

On dit que l'intersection se distribue sur l'union. On a également la relation :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

On dit que l'union se distribue sur l'intersection.

15 Différence

La différence $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B :

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

16 Décomposition

Soit les ensembles A, B. Les éléments de A sont de deux types :

- ceux qui appartiennent également à B
- ceux qui n'appartiennent pas à B

On en conclut que :

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

On voit que les deux sous-ensembles de A sont disjoints :

$$(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$$

16.1 Union

Les éléments de $A \cup B$ sont de deux types :

- ceux qui appartiennent seulement à A
- ceux qui appartiennent à B

On en conclut que :

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$

On voit que les deux sous-ensembles de $A \cup B$ sont disjoints :

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset$$

17 Complémentaire

Si $A \subseteq \Omega$, on dit que $C = \Omega \setminus A$ est le complémentaire de A dans Ω, ou simplement que C est le complémentaire de A lorsque l'ensemble Ω est évident d'après le contexte.

17.1 Complémentaire du complémentaire

Soit $A \subseteq \Omega$. Un élément de Ω qui n'appartient pas à $\Omega \setminus A$ appartient à A, et réciproquement. On a donc :

$$\Omega \setminus (\Omega \setminus A) = A$$

17.2 Réciprocité

Soit $A \subseteq \Omega$ et son complémentaire :

$$B = \Omega \setminus A$$

En prenant le complémentaire de cette équation, on obtient :

$$\Omega \setminus B = \Omega \setminus (\Omega \setminus A) = A$$

Soit à présent $B \subseteq \Omega$ et son complémentaire :

$$A = \Omega \setminus B$$

En prenant le complémentaire de cette équation, on obtient :

$$\Omega \setminus A = \Omega \setminus (\Omega \setminus B) = B$$

On en conclut l'équivalence :

$$A = \Omega \setminus B \;\Leftrightarrow\; B = \Omega \setminus A$$

17.3 Complémentaire d'une union

Soit un ensemble Ω et les sous-ensembles $A, B \subseteq \Omega$. Un élément de Ω qui n'appartient pas à $A \cup B$ n'appartient ni à A ni à B. Il appartient donc à $\Omega \setminus A$ et à $\Omega \setminus B$. Inversément, un élément qui appartient à $\Omega \setminus A$ et à $\Omega \setminus B$ n'appartient ni à A ni à B. On a donc :

$$\Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$$

Le complémentaire d'une union est l'intersection des complémentaires.

17.4 Complémentaire d'une intersection

Soit $A, B \in \Omega$. Posons :

$$\begin{aligned} C &= \Omega \setminus A \subseteq \Omega \\ D &= \Omega \setminus B \subseteq \Omega \end{aligned}$$

L'expression du complémentaire de $A \cup B$ devient :

$$\Omega \setminus \big[(\Omega \setminus C) \cup (\Omega \setminus D)\big] = C \cap D$$

En prenant le complémentaire des deux membres par rapport à Ω, on obtient :

$$(\Omega \setminus C) \cup (\Omega \setminus D) = \Omega \setminus (C \cap D)$$

Le complémentaire d'une intersection est l'union des complémentaires.