Eclats de vers : Matemat : Trigonometrie

chimay

December 31, 2025

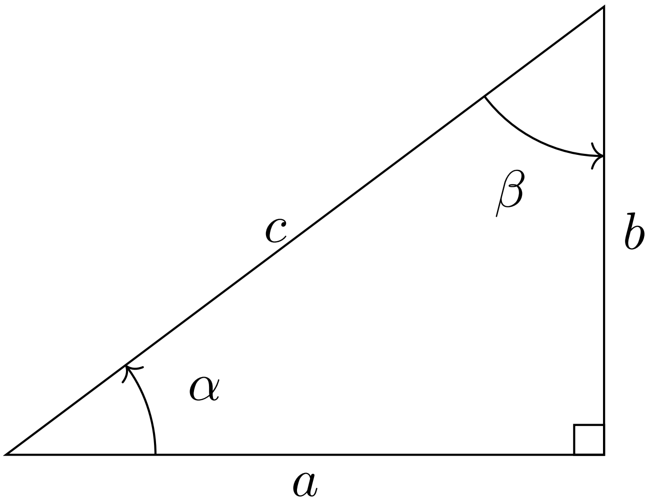
Index mathématique
Retour à l'accueil

Table des matières

1 Triangle rectangle

1.1 Définitions

Soit le triangle rectangle :



On définit la fonction trigonométrique du sinus, notée sin, comme le rapport entre le côté opposé à l'angle avec l'hypothénuse :

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{c}$$

On définit la fonction trigonométrique du cosinus, notée cos, comme le rapport entre le côté adjacent à l'angle avec l'hypothénuse :

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$$

On définit la fonction trigonométrique de tangente, notée tan, comme le rapport entre le côté opposé et le côté adjacent :

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

On a aussi les rapports inversés :

- cosécante :

$$\csc(\alpha) = \frac{c}{b}$$

- sécante :

$$\sec(\alpha) = \frac{c}{a}$$

- cotangente :

$$\cot(\alpha) = \frac{a}{b}$$

1.2 Notations

On note :

$$\sin\alpha = \sin(\alpha)$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha)$$

$$\tan\alpha = \tan(\alpha)$$

$$\csc\alpha = \csc(\alpha)$$

$$\sec\alpha = \sec(\alpha)$$

$$\cot\alpha = \cot(\alpha)$$

1.2.1 Carrés

L'usage veut également que :

$$\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$$

$$\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$$

$$\tan^2\alpha = (\tan\alpha)^2$$

et ainsi de suite. J'évite autant que possible cette notation dans cet ouvrage, car elle n'est pas cohérente avec la notation générale des fonctions qui veut que :

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) \neq [f(x)]^2 = f(x) \cdot f(x)$$

1.3 Corollaires

En multipliant la définition du sinus par c, on obtient :

$$b = c\ \sin\alpha$$

En multipliant la définition du cosinus par c, on obtient :

$$a = c\ \cos\alpha$$

1.4 Inverses multiplicatifs

On remarque que la cosécante est l'inverse du sinus :

$$\csc\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{b/c} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

On remarque que la sécante est l'inverse du cosinus :

$$\sec\alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{a/c} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

On remarque que la cotangente est l'inverse de la tangente :

$$\cot\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{b/a} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

1.5 Angle complémentaire

Comme le triangle est rectangle, on a :

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

ou :

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Le rapport entre le côté adjacent à β et l'hypothénuse nous donne :

$$\cos\beta = \frac{b}{c} = \sin\alpha$$

c'est-à-dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

Le rapport entre le côté opposé à β et l'hypothénuse nous donne :

$$\sin\beta = \frac{a}{c} = \cos\alpha$$

c'est-à-dire :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

Le rapport entre le côté opposé et le côté adjacent à β nous donne :

$$\tan\beta = \frac{a}{b} = \frac{1}{b/a} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

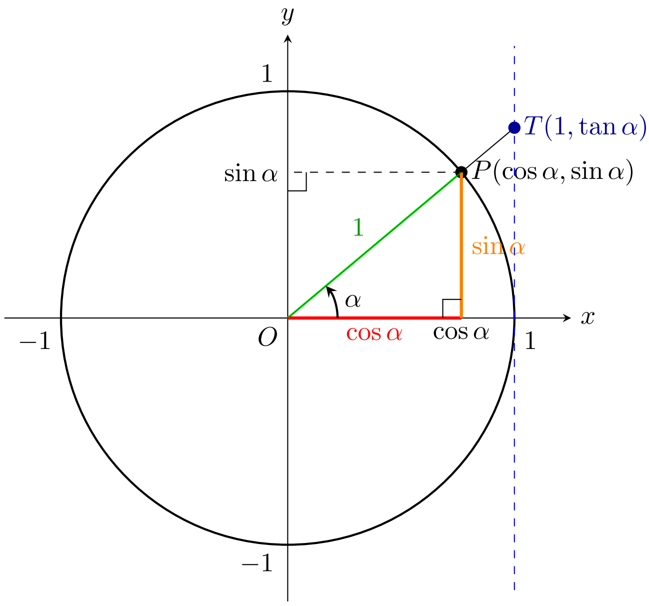
c'est-à-dire :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

2 Cercle trigonométrique

2.1 Premier quadrant

Le cercle trigonométrique permet de généraliser la définition des fonctions trigonometriques au-delà de l'intervalle $[0, \pi/2]$.



Ce cercle est un cercle unitaire, c'est-à-dire de rayon 1, et permet de générer un triangle rectangle dont l'hypothénuse vaut 1 pour chaque angle α. La figure ci-dessus en illustre un exemple. Les deux autres côtés sont alors de longueurs :

$$a = 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$$

$$b = 1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$$

Ces longueurs correspondent aussi aux coordonnées du point P qui valent :

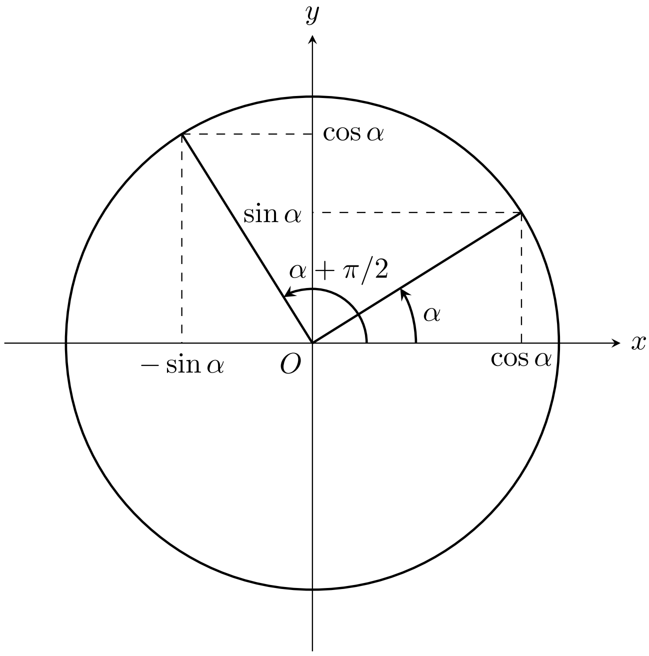
$$(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

dans le système d'axes (O, x, y). Ces coordonnées peuvent varier entre -1 et 1, tout comme les valeurs des fonctions cos et sin.

On en déduit les valeurs des fonctions trigonométriques cos et sin pour n'importe quel angle entre 0 et 2π.

2.2 Deuxième quadrant

Le schéma ci-dessous illustre le cas du deuxième quadrant, c'est-à-dire de l'ntervalle $[\pi/2, \pi]$.



On en déduit que :

$$\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$$

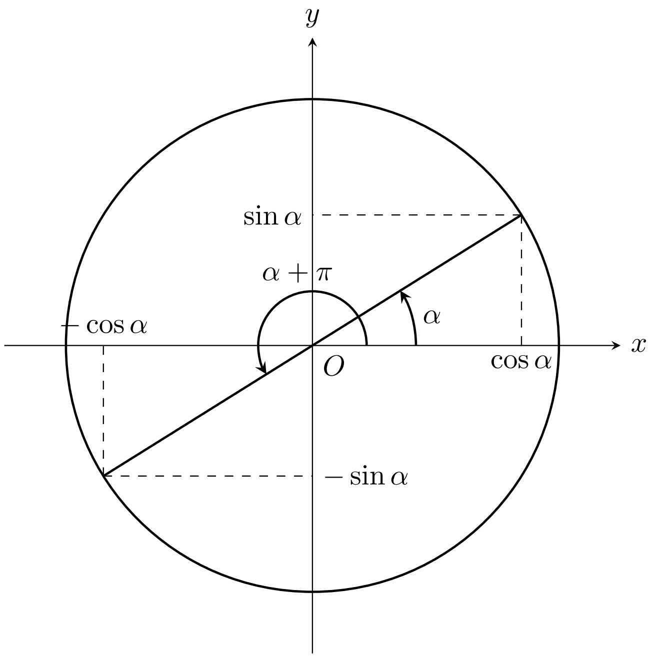
$$\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$$

Pour la tangente, on a :

$$\tan(\alpha + \pi/2) = \frac{\sin(\alpha + \pi/2)}{\cos(\alpha + \pi/2)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{-1}{\sin\alpha/\cos\alpha} = \frac{-1}{\tan\alpha}$$

2.3 Troisième quadrant

Le schéma ci-dessous illustre le cas du troisième quadrant, c'est-à-dire de l'ntervalle $[\pi, 3\pi/2]$.



On en déduit que :

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$$

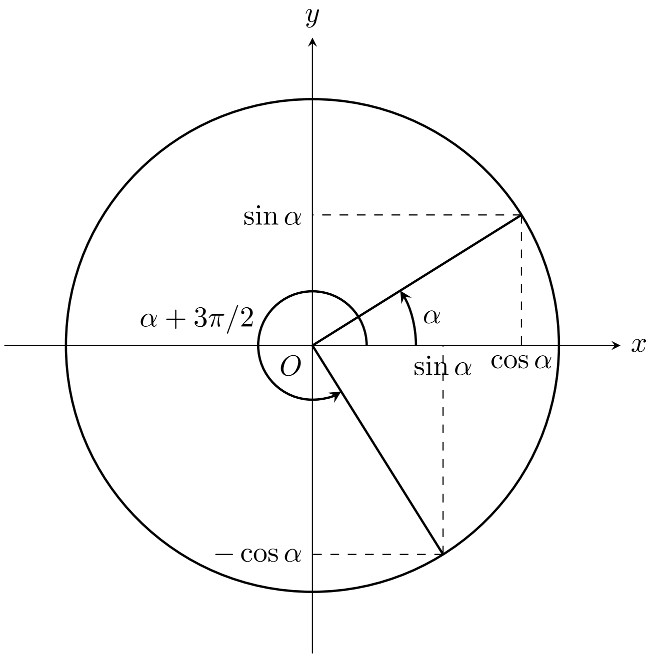
$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha)$$

Pour la tangente, on a :

$$\tan(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

2.4 Quatrième quadrant

Le schéma ci-dessous illustre le cas du quatrième quadrant, c'est-à-dire de l'ntervalle $[3\pi/2, 2\pi]$.



On en déduit que :

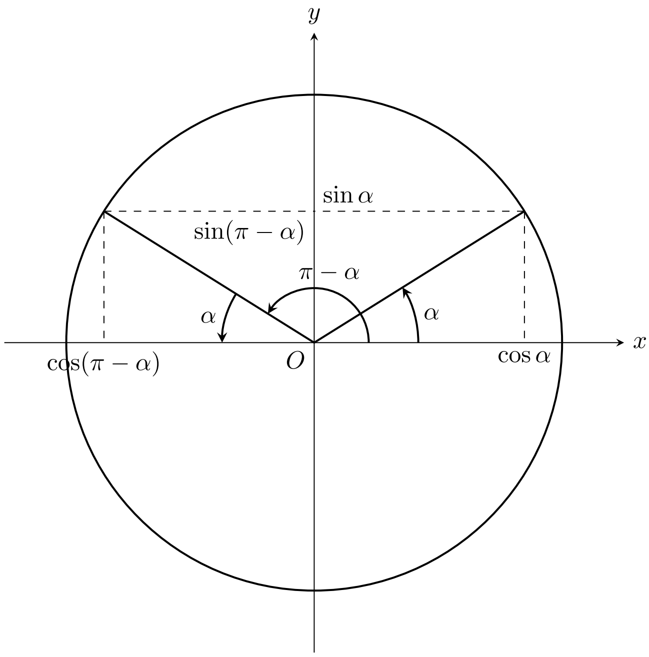
$$\cos(\alpha + 3\pi/2) = \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + 3\pi/2) = -\cos(\alpha)$$

Pour la tangente, on a :

$$\tan(\alpha + 3\pi/2) = \frac{\sin(\alpha + 3\pi/2)}{\cos(\alpha + 3\pi/2)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-1}{\sin\alpha/\cos\alpha} = \frac{-1}{\tan\alpha}$$

2.5 Angle supplémentaire



Le schéma ci-dessus nous montre que :

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

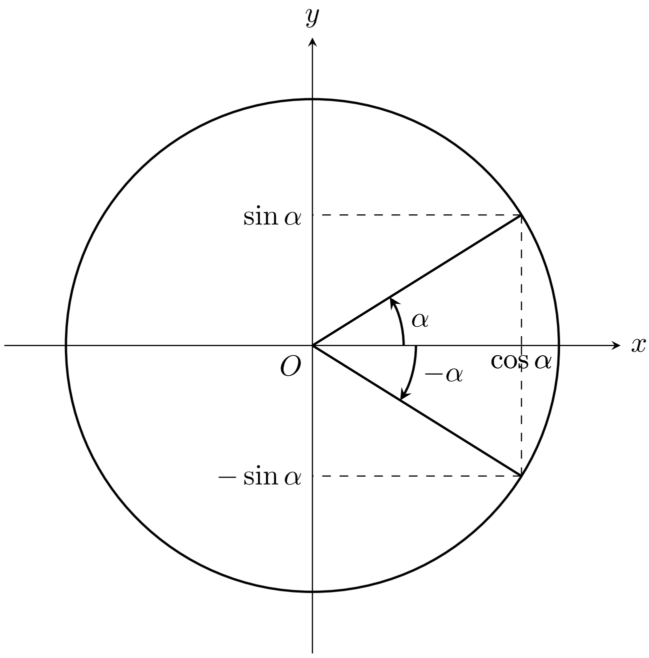
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$

Pour la tangente, on a :

$$\tan(\pi-\alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

2.6 Angles négatifs

Le schéma ci-dessous illustre le cas d'angles négatifs.



On a clairement :

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Pour la tangente, on a :

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

2.7 Généralisation à n'importe quel angle réel

On considère qu'ajouter un nombre entier de tours complets (multiple entier de 2π) ne change rien aux fonctions trigonométriques. On a donc :

$$\cos(\alpha + 2\ \pi\ k) = \cos\alpha$$

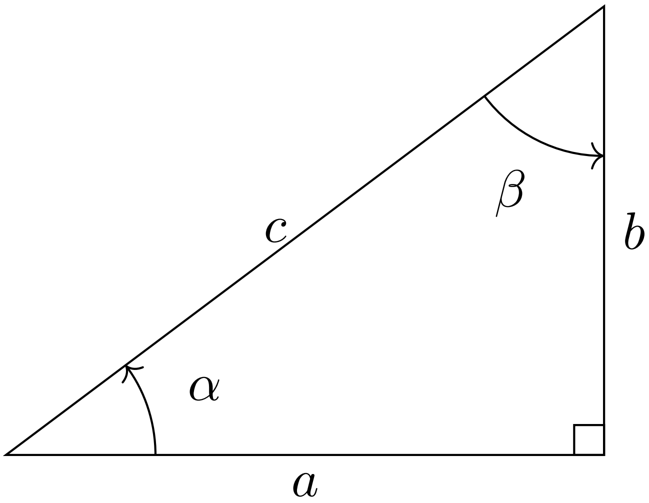
$$\sin(\alpha + 2\ \pi\ k) = \sin\alpha$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ce constat permet de couvrir l'ensemble des angles à amplitude réelle.

3 Relations fondamentales

3.1 Préambule

Soit le triangle rectangle :



3.2 Sinus et cosinus

Le théorème de Pythagore dans notre triangle rectangle nous donne :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Mais comme :

$$a = c\ \cos\alpha$$

$$b = c\ \sin\alpha$$

la première relation devient :

$$c^2\ (\cos\alpha)^2 + c^2\ (\sin\alpha)^2 = c^2$$

On peut mettre c^2 en évidence :

$$c^2\ \left[(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2\right] = c^2$$

puis diviser par c^2 les deux membres, ce qui nous donne la relation fondamentale entre sinus et cosinus :

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

3.3 Tangente

On a :

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b/c}{a/c}$$

Par définition des sinus et cosinus, on a donc :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

3.4 Combinaison

Soit un angle α et :

$$s = \sin\alpha$$

$$c = \cos\alpha$$

$$t = \tan\alpha$$

Les relations fondamentales s'écrivent :

$$s^2 + c^2 = 1$$

et :

$$t = \frac{s}{c}$$

ou encore :

$$t^2 = \frac{s^2}{c^2}$$

Divisons :

$$s^2 + c^2 = 1$$

par c^2. Il vient :

$$\frac{s^2}{c^2} + 1 = \frac{1}{c^2}$$

c'est-à-dire :

$$t^2 + 1 = \frac{1}{c^2}$$

Autrement dit :

$$(\tan\alpha)^2 + 1 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}$$

4 Sinus et cosinus en fonction de la tangente

4.1 Préambule

Soit un angle α. Posons :

$$s = \sin \alpha$$

$$c = \cos \alpha$$

$$t = \tan \alpha$$

Nous allons utiliser les relations fondamentales :

$$t = s/c$$

$$s^2 + c^2 = 1$$

pour obtenir une expression du sinus et du cosinus comme fonction de la tangente uniquement. En prenant le carré de la première équation ci-cessus, on a :

$$t^2 = s^2/c^2$$

Remarquons aussi que la seconde équation peur se réécrire, au choix, comme :

$$s^2 = 1 - c^2$$

$$c^2 = 1 - s^2$$

4.2 Sinus en fonction de la tangente

On a :

$$t^2 = \frac{s^2}{c^2} = \frac{s^2}{1 - s^2}$$

Multiplions par $1 - s^2$:

$$(1 - s^2)\ t^2 = s^2$$

Distribuons :

$$t^2 - s^2\ t^2 = s^2$$

et passons tous les termes en s^2 du même côté :

$$t^2 = s^2 + s^2\ t^2$$

Mettons s^2 en évidence :

$$t^2 = (1 + t^2)\ s^2$$

En isolant s^2, on obtient :

$$s^2 = \frac{t^2}{1+t^2}$$

c'est-à-dire :

$$(\sin\alpha)^2 = \frac{(\tan\alpha)^2}{1+(\tan\alpha)^2}$$

On a donc soit :

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(\tan\alpha)^2}{1+(\tan\alpha)^2}}$$

ou :

$$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{(\tan\alpha)^2}{1+(\tan\alpha)^2}}$$

ce que l'on note sous la forme :

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{(\tan\alpha)^2}{1+(\tan\alpha)^2}}$$

4.3 Cosinus en fonction de la tangente

On a :

$$t^2 = \frac{s^2}{c^2} = \frac{1-c^2}{c^2}$$

Multiplions par c^2 :

$$c^2\ t^2 = 1 - c^2$$

et passons tous les termes en c^2 du même côté :

$$c^2 + c^2\ t^2 = 1$$

Mettons c^2 en évidence :

$$(1+t^2)\ c^2 = 1$$

En isolant c^2, on obtient :

$$c^2 = \frac{1}{1+t^2}$$

c'est-à-dire :

$$(\cos\alpha)^2 = \frac{1}{1+(\tan\alpha)^2}$$

On a donc soit :

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}$$

ou :

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}$$

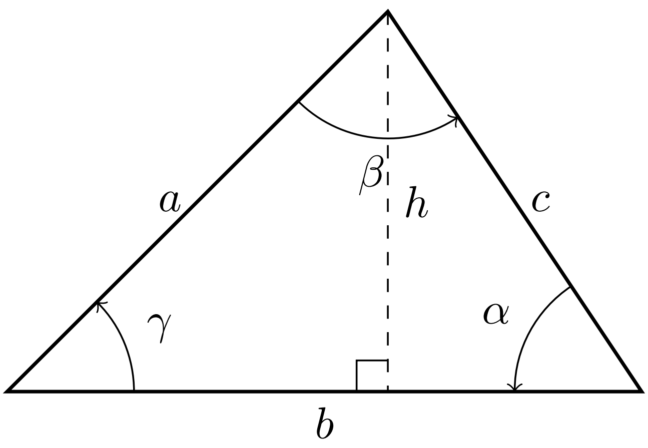
ce que l'on note sous la forme :

$$\cos\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}$$

5 Triangles quelconques

5.1 Loi des sinus

Soit un triangle quelconque. On peut toujours le décomposer en deux triangles rectangles comme suit :



Dans le triangle rectangle de gauche, nous avons :

$$h = a\ \sin\gamma$$

Dans le triangle rectangle de droite, nous avons :

$$h = c\ \sin\alpha$$

On en déduit que :

$$a\ \sin\gamma = c\ \sin\alpha$$

c'est-à-dire :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

On peut aussi tracer la hauteur perpendiculaire au côté c et suivre un raisonnement similaire, qui nous donne :

$$a \ \sin\beta = b \ \sin\alpha$$

c'est-à-dire :

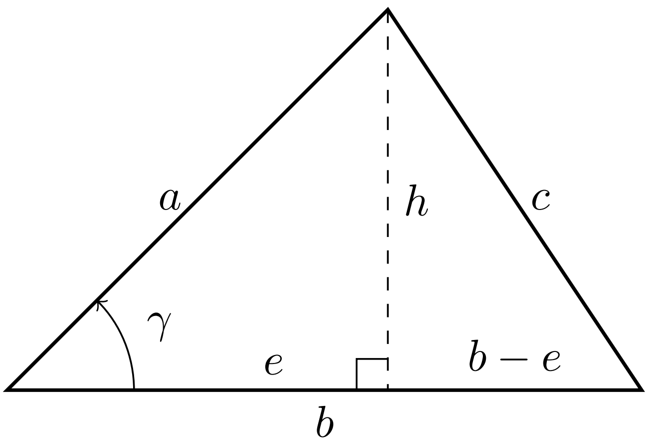
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

On a donc finalement la loi des sinus qui englobe les trois côtés :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

5.2 Loi des cosinus

Soit un triangle quelconque. On peut toujours le décomposer en deux triangles rectangles comme suit :



Dans le triangle rectangle de gauche, nous avons :

$$\begin{aligned} e &= a\cos\gamma \\ h &= a\sin\gamma \end{aligned}$$

Appliquons à présent le théorème de Pythagore au triangle rectangle de droite :

$$c^2 = h^2 + (b-e)^2$$

En tenant compte des relations trigonométriques, cette équation devient :

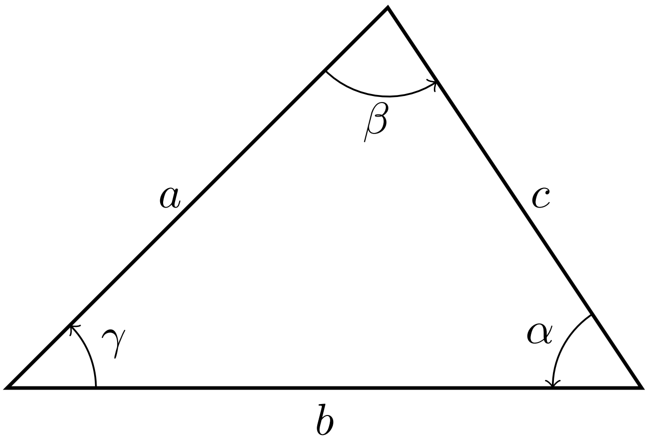
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 \ (\sin\gamma)^2 + (b - a \ \cos\gamma)^2 \\ &= a^2 \ (\sin\gamma)^2 + b^2 - 2 \ a \ b \ \cos\gamma + a^2 \ (\cos\gamma)^2 \\ &= a^2 \left[(\sin\gamma)^2 + (\cos\gamma)^2\right] + b^2 - 2 \ \ a \ b\cos\gamma \end{aligned}$$

Mais comme la somme entre crochets vaut toujours 1, on a finalement :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b\ \cos\gamma$$

Un raisonnement similaire nous donne le même résultat lorsque l'angle γ est obtus.

On peut voir ce résultat comme une généralisation du théorème de Pythagore à un triangle quelconque.



Un raisonnement similaire nous donne un résultat analogue pour les autres côtés :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a\ c\ \cos\beta$$

6 Fonctions trigonométriques inverses

6.1 Arc sinus

Les fonctions trigonométriques ne sont pas directement inversibles. Soit un certain $y \in [-1, 1]$ et la valeur $x \in \mathbb{R}$ solution du problème :

$$\sin(x) = y$$

Comme la fonction sin est périodique de période $2\ \pi$, on a :

$$\sin(x + 2\ k\ \pi) = \sin(x) = y$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble des solutions inclut donc l'ensemble :

$$S = \{x + 2\ \pi\ k : k \in \mathbb{N}\}$$

qui admet une infinité d'éléments. On ne peut donc pas déduire une seule valeur de x à partir d'une valeur de y. Par contre, l'ensemble des solutions ne contient qu'une seule valeur de x dans l'invervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, et on peut définir la fonction arc sinus, notée arcsin, par :

$$\arcsin(y) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y = \sin(x) \\ x \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$$

On note abusivement :

$$\sin^{-1} = \arcsin$$

On utilise aussi la notation sans parenthèse, comme pour les autres fonctions trigonometriques :

$$\arcsin y = \arcsin(y)$$

On a :

$$\sin \arcsin y = \sin x = y$$

pour tout $y \in [-1, 1]$.

6.2 Arc cosinus

Soit un certain $y \in [-1, 1]$ et la valeur $x \in \mathbb{R}$ solution du problème :

$$\cos(x) = y$$

Comme la fonction cos est périodique, on ne peut pas déduire une seule valeur de x à partir d'une valeur de y. Par contre, l'ensemble des solutions ne contient qu'une seule valeur de x dans l'invervalle $[0, \pi]$, et on peut définir la fonction arc cosinus, notée arccos, par :

$$\arccos(y) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y = \cos(x) \\ x \in [0, \pi] \end{cases}$$

On note abusivement :

$$\cos^{-1} = \arccos$$

On utilise aussi la notation sans parenthèse, comme pour les autres fonctions trigonometriques :

$$\arccos y = \arccos(y)$$

On a :

$$\cos \arccos y = \cos x = y$$

pour tout $y \in [-1, 1]$.

6.3 Arc tangente

Soit un certain $y \in \mathbb{R}$ et la valeur $x \in \mathbb{R}$ solution du problème :

$$\tan(x) = y$$

Comme la fonction tan est périodique, on ne peut pas déduire une seule valeur de x à partir d'une valeur de y. Par contre, l'ensemble S ne contient qu'une seule valeur de x dans l'invervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, et on peut définir la fonction arc tangente, notée arctan, par :

$$\arctan(y) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y = \tan(x) \\ x \in]-\pi/2, \pi/2[\end{cases}$$

On note abusivement :

$$\tan^{-1} = \arctan$$

On utilise aussi la notation sans parenthèse, comme pour les autres fonctions trigonometriques :

$$\arctan y = \arctan(y)$$

On a :

$$\tan \arctan y = \tan x = y$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$.