Votos y Vuelto: Una Mirada desde la Combinatoria

Anish Ashok Samtani Wadhwani

22 de Septiembre de 2025

1. Resumen

Se estudiarán dos problemas de conteo empleando funciones generadoras y sus métodos asociados. El primer problema trata sobre secuencias de votos que terminan en un empate y se relaciona con los números de Catalán, mientras que el segundo es sobre las formas de devolver un vuelto con monedas de distintas denominaciones. Por medio de la resolución, se ilustra la utilidad de las funciones generadoras y las clases de combinatoria para simplificar el análisis.

2. Conteo de votos

2.1. Planteamiento

Una elección entre dos candidatos A y B ha culminado en un empate, obteniendo n votos cada uno. En el recuento de votos, el candidato A tuvo más votos que B en todo momento, menos el inicio y el final del conteo. Queremos saber de cuántas maneras puede ocurrir tal suceso.

2.2. Modelamiento

Representaremos la secuencia de votos contados como cadenas del alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. La letra a corresponde a un voto contado del candidato A, mientras que b del candidato B. Para n votos cada uno, se tienen todas las cadenas de largo $2n$, es decir 2^{2n} posibles palabras.

Bajo las restricciones del problema, queremos encontrar todas las cadenas de largo $2n$ con n a's y n b's, tal que todo prefijo propio, es decir, prefijos que no sean la palabra completa, tenga más a's que b's. De esta manera, al leer la palabra de izquierda a derecha, siempre hay más a's hasta llegar al último carácter en donde se igualan. Denotaremos $\mathcal{P}$ la clase que contiene estas palabras.

Sea $\mathcal{P}_i$, la subclase de todas las palabras pertenecientes a $\mathcal{P}$ con i a's y p_i la recurrencia asociada a la función generatriz de la subclase. Para números pequeños, podemos determinar los elementos de manera directa:

$$\begin{gathered}\mathcal{P}_0 = \{\} \implies p_0 = 0\\ \mathcal{P}_1 = \{ab\} \implies p_1 = 1\\ \mathcal{P}_2 = \{aabb\} \implies p_2 = 1\\ \mathcal{P}_3 = \{aaabbb,\ aababb\} \implies p_3 = 2\\ \mathcal{P}_4 = \{aaaabbbb,\ aabaabbb,\ aabababb,\ aaababbb,\ aaabbabb\} \implies p_4 = 5\end{gathered}$$

2.3. Análisis

Es evidente que toda palabra perteneciente a la clase $\mathcal{P}$ debe empezar con una a para asegurar que todo prefijo propio tenga más a's que b's. De manera similar, la palabra debe terminar con una b dado que el prefijo hasta el penúltimo carácter tiene más a's y termina con tantas a's como b's. De esta manera, toda cadena perteneciente a la clase toma la forma $a \dots b$.

La subcadena faltante resulta ser una concatenación de cadenas pertenecientes a subclases más pequeñas, pues siguen la restricción de cantidad estricta con la a impuesta al inicio. Por ejemplo, podemos representar todas las palabras en $\mathcal{P}_4$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}_4 = \{a\underbrace{aaabbb}_{\in\mathcal{P}_3}b,\ a\underbrace{ab}_{\in\mathcal{P}_3}\underbrace{aabb}_{\in\mathcal{P}_2}b,\ a\underbrace{ab}_{\in\mathcal{P}_1}\underbrace{ab}_{\in\mathcal{P}_1}\underbrace{ab}_{\in\mathcal{P}_1}b,\ a\underbrace{aababb}_{\in\mathcal{P}_3}b,\ a\underbrace{aabb}_{\in\mathcal{P}_2}\underbrace{ab}_{\in\mathcal{P}_1}b\}$$

Bajo esta descripción, podemos modelar la clase $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = a \times (\mathcal{P}^*) \times b \tag{1}$$

2.4. Resolución

Como a y b son la clase atómica de $\mathcal{P}$, serán contados por z, y usando las reglas de composición en 1:

$$P(z) = \frac{z^2}{1 - P(z)}$$

Despejando:

$$P(z)^2 - P(z) + z^2 = 0$$

Resolvemos tomando las soluciones de una ecuación cuadrática, obteniendo dos soluciones:

$$\begin{aligned}P\_(z) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2}\\ P_+(z) &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4z^2}}{2}\end{aligned}$$

Sabemos que $P(0) = 0$, por ende verificamos cuál solución nos es útil:

$$\begin{gathered}P\_(0) = 0\\ P_+(0) = 1\end{gathered}$$

Por lo tanto, obtenemos que:

$$P(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2}$$

En el Apéndice 5.1 se demuestra que se puede simplificar, obteniendo:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} z^{2(k+1)}$$

Que tendrá como relación de recurrencia asociada:

$$P_{2(k+1)} = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

Para $2n$ votos (n para cada candidato), recordando que $k+1 = n$, se tiene que existen

$$P_{2n} = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} = \mathcal{C}_{n-1}$$

maneras de que A esté a la delantera de B para todo momento distinto del inicio y del final, terminando en un empate. Además, notamos que la recurrencia encontrada corresponde a los números de Catalán ($\mathcal{C}_n$) desplazados en 1.

3. Vuelto

3.1. Planteamiento

Queremos determinar de cuántas formas distintas se puede dar un vuelto de \$100 usando monedas de \$100, \$50, \$10, \$5 y \$1. Partiremos, analizando el caso general, es decir, sin límite de monedas y después uno particular donde se dispone de cantidades fijas de cada moneda.

3.2. Caso general

3.2.1. Modelamiento

Consideremos una moneda de valor y. Los montos que puede generar son múltiplos de y: $0, y, 2y, 3y, \ldots$. Modelamos con una función generadora que representa el monto en su exponente y las formas de obtenerlo como coeficiente(por ejemplo, $5y$ requiere exactamente 5 monedas de \$$y$, entonces aporta un término x^{5y}). Esto se modela con la siguiente función generatriz:

$$\begin{aligned} A(x) &= x^{0\cdot y} + x^{1\cdot y} + x^{2\cdot y} + x^{3\cdot y} + \ldots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (x^y)^i \\ &= \frac{1}{1 - x^y} \end{aligned}$$

Dado que el vuelto es una combinación de cierta cantidad de cada moneda, la función generadora total se obtiene multiplicando las funciones de cada denominación:

$$V(x) = \frac{1}{1-x^{100}} \cdot \frac{1}{1-x^{50}} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \cdot \frac{1}{1-x^{5}} \cdot \frac{1}{1-x^{1}}$$

Esto también puede ser modelado directamente con una clase combinatoria formada por una secuencia de cada denominación, obteniendo la misma función.

3.2.2. Resultado

Queremos encontrar las maneras de retornar un vuelto de 100, por ende buscamos el coeficiente que acompaña a x^{100} en $V(x)$, es decir:

$$[x^{100}]V(x)$$

Usando Maple como se indica en el Apéndice 5.2.1 obtenemos el resultado y concluimos que hay 159 maneras de devolver el vuelto de \$100, usando monedas de \$100, \$50, \$10, \$5 y \$1, sin ninguna restricción.

3.3. Caso particular

Bajo nuevas restricciones, supongamos que se disponen de 2 monedas de \$100, 5 de \$50, 9 de \$10, 18 de \$5 y 32 de \$1, mientras que el problema es el mismo, queremos determinar las maneras de devolver un vuelto de \$100 .

3.3.1. Modelamiento

Seguimos la misma idea usada en el caso general, sujeto a la restricción. Para ello, notamos que las funciones generadoras ya no son infinitas, llegan a un monto máximo por denominación, determinado por su cantidad. Por ejemplo, podemos devolver el vuelto usando entre 0 y 9 monedas de \$10, resultando su función generatriz:

$$C(x) = \sum_{i=0}^{9} x^{10\cdot i}$$

Es análogo para cada tipo:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{2} x^{100\cdot i}$$
$$B(x) = \sum_{i=0}^{5} x^{50\cdot i}$$
$$D(x) = \sum_{i=0}^{18} x^{5\cdot i}$$
$$E(x) = \sum_{i=0}^{32} x^{1\cdot i}$$

El vuelto es una combinación de cierta cantidad de cada denominación, por ende obtenemos la función generadora total multiplicando las funciones de cada una:

$$V(x) = (\sum_{i=0}^{2} x^{100\cdot i})\ (\sum_{i=0}^{5} x^{50\cdot i})\ (\sum_{i=0}^{9} x^{10\cdot i})\ (\sum_{i=0}^{18} x^{5\cdot i})\ (\sum_{i=0}^{32} x^{i})$$

3.3.2. Resultado

Análogo al caso general, queremos el coeficiente del término con exponente 100, $[x^{100}]V(x)$. Usamos Maple para expandir el producto.

De la Figura , concluimos que con las restricciones impuestas sobre la cantidad de cada denominación hay maneras 94 de dar un vuelto de \$100.

4. Conclusión

Las soluciones presentadas a los dos problemas de combinatoria permiten visualizar la simplificación impuesta por el uso de clases de combinatoria y funciones generadoras. En el primer problema, relacionado con el recuento de votos, se muestra cómo un planteamiento formal lleva directamente a los números de Catalán, una recurrencia clásica en la combinatoria. En el segundo problema, sobre el vuelto, se ve que la misma técnica permite modelar tanto el caso general como el restringido con cantidades limitadas de monedas.

De esta manera, las clases de combinatoria y funciones generadoras permiten entender la estructura inherente de los conjuntos, facilitando el conteo y formalización del mismo, otorgando un mejor entendimiento de problemas complejos.

5. Apéndice

5.1. Simplificación de $P(z)$

Partimos de la función obtenida $P(z)$:

$$P(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4z^2})$$

Aplicando el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2}(1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4z^2)^n) \\ &= (1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^n\ 2^{2n}\ z^{2n}) \end{aligned}$$

Evaluando la suma en $n = 0$:

$$\begin{aligned} P(z) &= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^n\ 2^{2n}\ z^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^{n+1}\ 2^{2n-1}\ z^{2n} \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable $k + 1 = n$, que cuando $n = 1 \to k = 0$:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k+1}(-1)^k\ 2^{2k+1}\ z^{2(k+1)} \tag{2}$$

Realizando el siguiente manejo algebraico:

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{k+1} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{(k+1)!}\ \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2k-1}{2}) \\ &= \frac{1}{(k+1)!}\frac{1}{2^{k+1}}(-1)^k[1\cdot 3\cdot\dots(2k-1)] \\ &= \frac{1}{(k+1)!}\frac{1}{2^{k+1}}(-1)^k[\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots(2k-1)\cdot 2k}{2^k\ k!}] \\ &= \frac{1}{k+1}\frac{1}{2^{2k+1}}(-1)^k\frac{(2k)!}{(k!)^2} \\ &= \frac{1}{k+1}\frac{1}{2^{2k+1}}(-1)^k\binom{2k}{k} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación 2:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}z^{2(k+1)}$$

5.2. Uso de Maple

El archivo de los cálculos, junto con ser adjuntado, se explica a continuación.

5.2.1. Caso general

Para encontrar el coeficiente del término x^{100}, simplemente definimos $V(x)$ en un documento de trabajo de Maple y obtenemos la serie de esta como se presenta en la Figura 1. De esta manera, obtenemos que $[x^{100}]V(x) = 159$.

$f := i \to \frac{1}{1-x^i};$

$$f := i \mapsto \frac{1}{1-x^i} \tag{1}$$

$V := f(1)\cdot f(5)\cdot f(10)\cdot f(50)\cdot f(100);$

$$V := \frac{1}{(1-x)\,(-x^5+1)\,(-x^{10}+1)\,(-x^{50}+1)\,(-x^{100}+1)} \tag{2}$$

$series(V, x, 101)$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 4x^{10} + 4x^{11} + 4x^{12} + 4x^{13} + 4x^{14} + 6x^{15} + 6x^{16} + 6x^{17} + 6x^{18} + 6x^{19} + 9x^{20} + 9x^{21} + 9x^{22} + 9x^{23} + 9x^{24} + 12x^{25} + 12x^{26} + 12x^{27} + 12x^{28} + 12x^{29} + 16x^{30} + 16x^{31} + 16x^{32} + 16x^{33} + 16x^{34} + 20x^{35} + 20x^{36} + 20x^{37} + 20x^{38} + 20x^{39} + 25x^{40} + 25x^{41} + 25x^{42} + 25x^{43} + 25x^{44} + 30x^{45} + 30x^{46} + 30x^{47} + 30x^{48} + 30x^{49} + 37x^{50} + 37x^{51} + 37x^{52} + 37x^{53} + 37x^{54} + 44x^{55} + 44x^{56} + 44x^{57} + 44x^{58} + 44x^{59} + 53x^{60} + 53x^{61} + 53x^{62} + 53x^{63} + 53x^{64} + 62x^{65} + 62x^{66} + 62x^{67} + 62x^{68} + 62x^{69} + 73x^{70} + 73x^{71} + 73x^{72} + 73x^{73} + 73x^{74} + 84x^{75} + 84x^{76} + 84x^{77} + 84x^{78} + 84x^{79} + 97x^{80} + 97x^{81} + 97x^{82} + 97x^{83} + 97x^{84} + 110x^{85} + 110x^{86} + 110x^{87} + 110x^{88} + 110x^{89} + 125x^{90} + 125x^{91} + 125x^{92} + 125x^{93} + 125x^{94} + 140x^{95} + 140x^{96} + 140x^{97} + 140x^{98} + 140x^{99} + 159x^{100} + O(x^{101}) \tag{3}$$

Figura 1: Documento de Maple

5.2.2. Caso particular

Para determinar el valor del coeficiente buscado, definimos $V(x)$ y usamos la función coeff$(V, x, 100)$ como se muestra en la Figura 2. De esta manera, obtenemos que $[x^{100}]V(x) = 94$.

$A(x) := sum(x^{100\,i}, i = 0..2);\ B(x) := sum(x^{50\,i}, i = 0..5);\ C(x) := sum(x^{10\,i}, i = 0..9);\ \mathrm{D}(x) := sum(x^{5\,i}, i = 0..18);\ E(x) := sum(x^i, i = 0..32);$

$$A := x \mapsto \sum_{i=0}^{2} x^{100\cdot i}$$

$$B := x \mapsto \sum_{i=0}^{5} x^{50\cdot i}$$

$$C := x \mapsto \sum_{i=0}^{9} x^{10\cdot i}$$

$$\mathrm{D}(x) := x^{90} + x^{85} + x^{80} + x^{75} + x^{70} + x^{65} + x^{60} + x^{55} + x^{50} + x^{45} + x^{40} + x^{35} + x^{30} + x^{25} + x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1$$

$$E := x \mapsto \sum_{i=0}^{32} x^i \tag{4}$$

$V := A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)\cdot \mathrm{D}(x)\cdot E(x);$

$$V := (x^{200} + x^{100} + 1)\,(x^{250} + x^{200} + x^{150} + x^{100} + x^{50} + 1)\,(x^{90} + x^{80} + x^{70} + x^{60} + x^{50} + x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1)\,(x^{90} + x^{85} + x^{80} + x^{75} + x^{70} + x^{65} + x^{60} + x^{55} + x^{50} + x^{45} + x^{40} + x^{35} + x^{30} + x^{25} + x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1)\,(x^{32} + x^{31} + x^{30} + x^{29} + x^{28} + x^{27} + x^{26} + x^{25} + x^{24} + x^{23} + x^{22} + x^{21} + x^{20} + x^{19} + x^{18} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \tag{5}$$

$coeff(V, x, 100);$

$$94 \tag{6}$$

Figura 2: Documento de Maple