数学物理方法期中自测答案

阿尔托莉雅

题 1. (40 分)

(a) 无限长带电直导线 (10 分)

利用电磁学有:
$E=\frac{\eta}{2\pi r}$
电场强度 E: $\frac{y}{x}=C_0$
积分后势能 V:$ln\sqrt{x^2+y^2}=C_1$
简单来说就是圆和直线但是这样的好处后面可见
考虑 $F(ln\sqrt{x^2+y^2})=C$ 代入 Laplace 方程后不难得到
$\frac{F''(ln\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}=C$
即 $F(ln\sqrt{x^2+y^2})=C'ln\sqrt{x^2+y^2}=C$
利用解析函数条件解得虚部 $arctan\frac{y}{x}=C$
即 $ln\sqrt{x^2+y^2}+iarctan\frac{y}{x}$(这里可以任意取倍数题目中的数据 η 只是为了方便计算)
显然复势为 lnZ

(b) 多值函数与支点 (10 分)

函数为 $f(z)=\sqrt[3]{z^2-4}+\sqrt{z^2-1}$。

- 第一个函数 $\sqrt[3]{z^2-4}$ 有两个支点 $z=\pm2$, 是一个 3 值函数。
- 第二个函数 $\sqrt{z^2-1}$ 有两个支点 $z=\pm1$, 是一个 2 值函数。
- 整个函数 $f(z)$ 的值的个数是 3 和 2 的最小公倍数, 即 6。

最后讨论一下 ∞ 时是不是支点，取 $\frac{1}{t}=z$ 后旋转一周发现第二个函数值发生变化。所以, 该函数是 **6** 值函数, 支点为 $z=\pm1,\pm2,\infty$。

(c) 利用复积分求实积分 (10 分)

待求积分为 $I = \int_0^{\pi} \ln(a^2+2a\cos\theta+1)d\theta$。注意到被积函数是偶函数, 所以 $\int_0^{2\pi} \ln(a^2+2a\cos\theta+1)d\theta = 2I$。利用 $|z|=1$ 时的复积分求柯西积分积分可得

$$\oint_{|z|=1} \frac{ln(z+a)}{z}dz = z\pi ilna$$

注意到代入 $z = e^{i\theta}$ 后有

$$\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2}ln(a^2+2acos\theta+1) + i\frac{sin\theta}{cos\theta+a})id\theta$$

可得:

$$I = 2\pi \ln a$$

(d) 罗朗展开 (10 分)

函数为 $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}}$。我们分别对两部分进行泰勒展开:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \infty)$$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!z^m} \quad (|z| > 0)$$

将两者相乘, 得到罗朗级数:

$$e^{z+\frac{1}{z}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{-m}}{m!}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

其中系数 c_k 是 z^k 的所有项系数之和。令 $n-m=k$, 则 $n=m+k$。

$$c_k = \sum_{m=\max(0,-k)}^{\infty} \frac{1}{m!(m+k)!}$$

罗朗展开式:

$$e^{z+\frac{1}{z}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=\max(0,-k)}^{\infty} \frac{1}{m!(m+k)!}\right) z^k$$

适用范围: 两个级数都收敛的区域, 即 $0 < |z| < \infty$。

题 2. (20 分)

(a) 证明洛必达法则 (10 分)

取极限、泰勒等都可以，合理即可

(b) 计算围道积分 (10 分)

计算积分 $I = \oint_{|z|=3} \frac{z^{519}}{z^{520}+1} dz$。被积函数的极点由分母 $z^{520}+1=0$ 决定, 即 $z^{520} = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)}$。极点为 $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{520}}$, 其中 $k = 0, 1, 2, \ldots, 519$。所有极点的模均为 $|z_k| = 1$, 因此全部 520 个极点都位于积分围道 $|z| = 3$ 的内部。根据留数定理, $I = 2\pi i \sum_{k=0}^{519} \mathrm{Res}(f, z_k)$。令 $P(z) = z^{519}$ 和 $Q(z) = z^{520}+1$。所有极点都是一阶单极点。由洛必达法则可以得到公式 $\mathrm{Res}(z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}$ 。$Q'(z) = 520z^{519}$。

$$\mathrm{Res}(z_k) = \frac{z_k^{519}}{520 z_k^{519}} = \frac{1}{520}$$

每个极点的留数都相同。留数总和为:

$$\sum_{k=0}^{519} \mathrm{Res}(f, z_k) = 520 \times \frac{1}{520} = 1$$

所以, 积分的值为:

$$I = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$$

题 3. 讨论敛散性 (20 分)

讨论幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ 的敛散性。使用比值审敛法求收敛半径 R:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1/k}{1/(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

因此,

- 当 $|z| < 1$ 时, 级数绝对收敛。
- 当 $|z| > 1$ 时, 级数发散。

接下来讨论收敛圆周 $|z| = 1$ 上的情况。令 $z = e^{i\theta}$。

- **当 $z = 1$ $(\theta = 0)$ 时**: 级数变为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$。这是调和级数, 发散。
- **当 $z \neq 1$ $(|z| = 1)$ 时**: 级数变为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k}$。我们使用狄利克雷审敛法。令 $a_k = e^{ik\theta}$ 和 $b_k = \frac{1}{k}$。

    1. 序列 $\{b_k\}$ 单调递减趋于 0。
    2. a_k 的部分和 $S_N = \sum_{k=1}^{N} e^{ik\theta}$ 有界, 因为:

    $$|S_N| = |e^{i\theta} \frac{1 - e^{iN\theta}}{1 - e^{i\theta}}| \leq \frac{|e^{i\theta}|(|1| + |e^{iN\theta}|)}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

    由于 $z \neq 1$, 分母不为零, 故部分和有界。

根据狄利克雷判别法, 级数收敛。这是一种条件收敛, 因为各项绝对值之和 $\sum \frac{1}{k}$ 发散。

结论:

- **绝对收敛**于开圆盘 $|z| < 1$。
- **条件收敛**于单位圆周上除去点 $z = 1$ 的所有点, 即 $|z| = 1, z \neq 1$。
- **发散**于 $|z| > 1$ 以及点 $z = 1$。

题 4. 完善证明过程 (20 分)

目标: 证明拉盖尔多项式的罗德里格斯公式 $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ 与生成函数 $g(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$ 是等价的。

证明: 我们从罗德里格斯公式出发, 代入生成函数的级数定义中, 推导出其闭合形式。

1. 将 $L_n(x)$ 的罗德里格斯公式代入 $g(t,x)$ 的定义式:

$$g(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \right] t^n$$

2. 利用柯西导数公式 $\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$, 其中 $f(z) = z^n e^{-z}$, C 是包围 x 的简单闭合围道:

$$g(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^x t^n}{n!} \left[\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{z^n e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} dz \right] = \frac{e^x}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_C \frac{e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} (tz)^n dz$$

3. 交换求和与积分的顺序 (在收敛域内是允许的):

$$g(t,x) = \frac{e^x}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z}}{z-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{tz}{z-x} \right)^n dz$$

4. 对括号内的几何级数求和, 要求 $|\frac{tz}{z-x}| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{tz}{z-x} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{tz}{z-x}} = \frac{z-x}{z-x-tz} = \frac{z-x}{z(1-t)-x}$$

5. 将求和结果代回积分式:

$$g(t,x) = \frac{e^x}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z}}{z-x} \cdot \frac{z-x}{z(1-t)-x} dz = \frac{e^x}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z}}{z(1-t)-x} dz$$

6. 这是一个关于 z 的围道积分。被积函数在围道 C 内有唯一的一阶极点 $z_0 = \frac{x}{1-t}$。根据留数定理:

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{z(1-t)-x} dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\,(f, z_0)$$

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{e^{-z}}{(z-z_0)(1-t)} = \frac{e^{-z_0}}{1-t} = \frac{e^{-x/(1-t)}}{1-t}$$

7. 将留数结果代回, 得到 $g(t, x)$ 的表达式:

$$g(t, x) = \frac{e^x}{2\pi i} \cdot \left(2\pi i \cdot \frac{e^{-x/(1-t)}}{1-t} \right) = e^x \frac{e^{-x/(1-t)}}{1-t}$$

8. 化简指数项:

$$e^{x - \frac{x}{1-t}} = e^{\frac{x(1-t)-x}{1-t}} = e^{\frac{-xt}{1-t}}$$

9. 最终得到生成函数的闭合形式:

$$g(t, x) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

这就证明了从罗德里格斯公式出发可以推导出生成函数。反之, 对生成函数做泰勒展开, 其 t^n 项的系数 $\frac{1}{n!} \frac{\partial^n g(t,x)}{\partial t^n}|_{t=0}$ 也必然等于 $L_n(x)$ 的罗德里格斯公式。证毕。