

数学物理方法

排数: _____ 从右到左第: _____

请记住您的座位位置, 这将成为知道考试结果的唯一途径

题 1. (40 points 分)

(a) 垂直纸面有一无限长均匀带电直导线, 电荷的线密度是 η , 在该平面内以导线为 (10)
 原点建立直角坐标系, 求其满足 Laplace 方程的等势能线族_____,
 电场线族_____, 复势 $W(Z) =$ _____

(b) $\sqrt[3]{Z^2 - 4} + \sqrt{Z^2 - 1}$ (Z 是复数) 是_____值函数, 支点为_____ (10)

(c) 利用 $\oint_L \frac{\ln(z+a)}{z} dz$ 求实积分 ($a>1$) $\int_0^\pi \ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1) d\theta =$ _____ (10)

(d) 写出 $e^{z+\frac{1}{z}}$ (z 是复数) 的罗朗展开和其适用范围 (10)

题 2.**(20 points 分)**

(a) 证明洛必达法则对于解析函数而言成立 (10)

(b) 求积分，当 c 为圆心为原点半径为 3 的圆周， z 在复平面上 (10)

$$\oint_c \frac{z^{519}}{z^{520} + 1} dz$$

题 3.

(20 points 分)

讨论 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ 敛散性 (z 为复数)

题 4. (20 points 分)

构造生成函数是一种常见方法，例如构造 $g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$ (t 是复数, x 是实数), 其中

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

如果先证明了

$$g(t, x) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

可以得到

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n g(t, x)}{\partial t^n} \Big|_{t=0} = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

请完善上述证明过程