补例　一射手在 4 次独立射击中，至少命中 1 次的概率为$\frac{80}{81}$，求 4 次独立射击中，该射手恰好命中 1 次的概率。

解　记 X 为 4 次射击的命中次数，$X \sim B(4, p)$。至少命中 1 次的概率为$\frac{80}{81}$，则 4 次都不中的概率为

$$P(X=0)=(1-p)^4=1-\frac{80}{81}=\frac{1}{81} \quad \Rightarrow \quad p=\frac{2}{3}$$

恰好命中 1 次的概率为

$$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$$

补例　某种电子元件的寿命 X（单位：小时）的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x>100\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

现随机抽取 3 只进行寿命测试。求：

（1）最初 150 小时内恰有 1 个元件被烧坏的概率。

（2）最初 150 小时内被烧坏的元件数目的分布。

解　记 Y 为最初 150 小时内被烧坏的元件数目，$Y \sim B(3, p)$，且

$$p=P(X<150)=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx=\frac{1}{3}$$

（1）最初 150 小时内恰有 1 个元件被烧坏的概率为

$$P(Y=1)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

（2）最初 150 小时内被烧坏的元件数目 $Y \sim B(3, p)$。

补例　中国人的身高 $X \sim N(1.70, 0.10^2)$，求：

$$P(X<1.60)，\quad P(X\ge 1.90)，\quad P(1.50\le X<1.80)$$

解　$Y=\frac{X-1.70}{0.10}\sim N(0,1$

$$P(X<1.60)=P(Y=\frac{X-1.70}{0.10}<\frac{1.60-1.70}{0.10})=P(Y<-1)=1-\Phi(1)=0.1587$$

$$P(X\ge 1.90)=P(Y=\frac{X-1.70}{0.10}\ge\frac{1.90-1.70}{0.10})=P(Y\ge 2)=1-\Phi(2)=0.0228$$

$$P(1.50\le X<1.80)=P(\frac{1.50-1.70}{0.10}\le Y=\frac{X-1.70}{0.10}<\frac{1.80-1.70}{0.10})$$

$$=P(-2\le Y<1)=\Phi(1)-(1-\Phi(2))=0.8185$$

补例　已知某种零件的内径（单位：mm）服从正态分布$N(50,0.5^2)$，按规定内径在49mm 到 51mm 之间的为合格品，现随机抽测了 3 只该种零件。求：

（1）零件的合格率。　　　　　（2）3 只零件中，合格品数目的分布。

解　（1）记X为零件的内径，$X\sim N(50,0.5^2)$，零件的合格率为

$$p=P(49\le X\le 51)=P(\frac{49-50}{0.5}\le Y=\frac{X-50}{0.5}<\frac{51-50}{0.5})$$

$$=P(-2\le Y<2)=1-2(1-\Phi(2))=0.9544$$

（2）记Z为 3 只零件中的合格品数目，$Z\sim B(3,p)$。

补例　设C在$(0,5)$上服从均匀分布，求关于x的方程

$$4x^2+4Cx+C+2=0$$

有实根的概率。

解　$C\sim U(0,5$，$C\sim f(x)=\frac{1}{5}$，　$0<x<5$

//二次方程球根公式为$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

方程要有实根，必须$\sqrt{b^2-4ac}>=0$

$$\Delta=16C^2-4\times4\times(C+2)=16(C^2-C-2)\ge 0\quad\Rightarrow\quad C\ge 2\text{或}C\le -1$$

所求概率为

$$P(\ C\ge 2\text{或}C\le -1)=P(C\ge 2)=\int_2^5\ \frac{1}{5}dx=\frac{3}{5}$$

补例　两种工种的月工资 $X\sim N(5000,400^2)$，$Y\sim N(4000,300^2)$，求 $P(X>Y)$。

解　$X-Y\sim N(5000-4000,\ 400^2+300^2)=N(1000,500^2)$

$$P(X>Y)=P(X-Y>0)=P(Z=\frac{(X-Y)-1000}{500}>\frac{0-1000}{500})$$

$$=P(Z>-2)=\Phi(2)=0.9772$$

补例　设 $(X_1,\cdots,X_{16})$ 是取自 $N(\mu,1)$ 的样本，求 $P(\left|X-\mu\right|>1)$ 与 $P(\left|\bar{X}-\mu\right|>1)$。

解　$X\sim N(\mu,1)$，$\dfrac{X-\mu}{\sqrt{1}}=X-\mu\sim N(0,1)$

$$P(\left|X-\mu\right|>1)=1-P(\left|X-\mu\right|\le 1)=1-P(\mu-1\le X\le\mu+1)$$

$$=1-P(-1\le X-\mu\le 1)=1-\left(1-2(1-\Phi(1))\right)=0.3174$$

$$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{1}{16}),\quad \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{16}}}=4(\bar{X}-\mu)\sim N(0,1)$$

$$P(\left|\bar{X}-\mu\right|>1)=1-P(\left|\bar{X}-\mu\right|\le 1)=1-P(\mu-1\le\bar{X}\le\mu+1)$$

$$=1-P(-4\le 4(\bar{X}-\mu)\le 4)=1-\left(1-2(1-\Phi(4))\right)=0$$

补例　从正态总体 $N(\mu,1)$ 中分别抽取容量为 9 与 16 的两个独立样本，求两样本均值之差的绝对值大于 1 的概率。

解　这两个独立样本，可以认为是分别取自于两个总体 X 与 Y，X 与 Y 均服从 $N(\mu,1)$，于是 $\bar{X}\sim N(\mu,\dfrac{1}{9})$，$\bar{Y}\sim N(\mu,\dfrac{1}{16})$。

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu-\mu,\frac{1}{9}+\frac{1}{16})=N(0,\frac{25}{9\cdot 16}),\quad \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{25}{9\cdot 16}}}=2.4(\bar{X}-\bar{Y})\sim N(0,1)$$

$$P(\left|\bar{X}-\bar{Y}\right|>1)=1-P(\left|\bar{X}-\bar{Y}\right|\le 1)=1-P(-1\le\bar{X}-\bar{Y}\le 1)$$

$$=1-P(-2.4\le 2.4(\bar{X}-\bar{Y})\le 2.4)=1-\left(1-2(1-\Phi(2.4))\right)=0.0164$$

补例　设(X_1,X_2,X_3)是取自总体X的样本，则总体均值$\mu=EX$的最有效估计量是__________。

（A）$\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{4}X_3$　　　　（B）$\frac{4}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2-\frac{1}{5}X_3$

（C）$\frac{2}{3}X_1-\frac{1}{3}X_2+\frac{2}{3}X_3$　　　　（D）$\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$

解　答案 A

$EX_i=EX=\mu$，$DX_i=DX=\sigma^2$，对 4 个备选项，计算$E\hat{\mu}$，$D\hat{\mu}$，验证$E\hat{\mu}=\mu$并选择使$D\hat{\mu}$最小的选项。比如 C 选项：

$$E(\frac{2}{3}X_1-\frac{1}{3}X_2+\frac{2}{3}X_3)=(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3})\mu=\mu$$

$$D(\frac{2}{3}X_1-\frac{1}{3}X_2+\frac{2}{3}X_3)=\left((\frac{2}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2\right)\sigma^2=\sigma^2$$

补例　烟草尼古丁含量

抽测某批烟草的尼古丁含量（单位：mg），测得 10 个样品的均值为$\bar{x}=23.6$，样本标准差为$s=4.3$，假定烟草的尼古丁含量服从正态分布，试求出烟草的尼古丁平均含量μ与标准差σ的 95%的置信区间。

解　尼古丁含量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，平均含量μ的置信区间为

$$\left(\bar{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$\bar{x}=23.6$，$s=4.3$，$n=10$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，计算可得

$$\bar{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=23.6\pm2.2622\times\frac{4.3}{\sqrt{10}}=23.6\pm3.076$$

即平均含量μ的 95%置信区间为$(20.524，26.676)$。

标准差σ的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

$s=4.3$，$n=10$，$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.022$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$，计算可得

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}=\sqrt{\frac{9\times 4.3^2}{19.022}}=2.958，\qquad \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}=\sqrt{\frac{9\times 4.3^2}{2.7}}=7.851$$

即标准差σ的 95%置信区间为$\left(2.958，7.851\right)$。

补例　比较 I，II 两种型号步枪子弹的枪口速度

I 型　　$n_1=10$，　$\bar{x}=500\,\text{m/s}$，　$s_1=1.1\,\text{m/s}$

II 型　　$n_2=20$，　$\bar{y}=496\,\text{m/s}$，　$s_2=1.2\,\text{m/s}$

假设枪口速度均服从正态分布，且由生产过程可认为方差相等，求两种型号子弹的枪口平均速度之差的置信度 0.95 的置信区间。

解　$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，枪口平均速度之差$\mu_1-\mu_2$的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right),\qquad S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$n_1=10$，$\bar{x}=500$，$s_1=1.1$，$n_2=20$，$\bar{y}=496$，$s_2=1.2$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(28)=2.0484$，计算可得

$$s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{9\times 1.1^2+19\times 1.2^2}{28}=1.366，\quad s_w=\sqrt{s_w^2}=1.169$$

$$(\bar{x}-\bar{y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot s_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$=(500-496)\pm 2.0484\times 1.169\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}=4\pm 0.927$$

即平均速度之差的置信度 0.95 的置信区间为$\left(3.073，4.927\right)$。

补例　某饮料公司对其所做的报纸广告在两个城市的覆盖率进行了比较。它们从两个城市中分别随机地调查了 1000 个成年人，其中看过该广告的比例分别为 0.18 与 0.14，试求两个城市的广告覆盖率之差的近似 95%的置信区间。

解　广告覆盖率之差 p_1-p_2 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}+\frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}}\right)$$

$n=m=1000$，$\bar{x}=0.18$，$\bar{y}=0.14$，$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$，计算可得

$$(\bar{x}-\bar{y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}+\frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{m}}$$

$$=(0.18-0.14)\pm1.96\times\sqrt{\frac{0.18\times0.82}{1000}+\frac{0.14\times0.86}{1000}}=0.04\pm0.032$$

即广告覆盖率之差的近似 95%的置信区间为$\left(0.008，0.072\right)$。

补例　某医院附近花店随机统计了 100 天的销售额（单位：元），得到日均销售额为 1500 元，样本标准差为 100 元，试给出该花店的日均销售额的近似 95%的置信区间。

解　这是大样本，日均销售额的置信区间为

$$\left(\bar{X}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$n=100$，$\bar{x}=1500$，$s=100$，$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$，计算可得

$$\bar{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=1500\pm1.96\times\frac{100}{\sqrt{100}}=1500\pm19.6$$

即日均销售额的近似 95%的置信区间为$\left(1480.4，1519.6\right)$。

补例　某厂宣称已采取大力措施治理废水污染，根据经验，废水中所含某种有毒物质的浓度 X（单位：mg/kg）服从正态分布 $N(\mu,2.4^2)$。现环保部门抽测了 9 个水样，测得样本的平均值为 17.4，若以往该厂废水中有毒物质浓度的平均值为 18.2，试问：有毒物质的浓度有无显著降低（$\alpha=0.05$）？

解　$H_0:\mu=\mu_0=18.2 \longrightarrow H_1\ \mu:<\mu$

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1$$

拒绝域为 $C: Z < -z_\alpha$

$n=9$，$\bar{x}=17.4$，$\sigma=2.4$，$\alpha=0.05$，$z_\alpha=1.64$，计算可得

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{17.4-18.2}{2.4/\sqrt{9}}=-1.0$$

由于 $z=-1.0>-z_{0.05}=-1.64$，接受 H_0，即认为有毒物质的浓度没有显著降低。

书（三版）例 1（P221）

某种元件的寿命 X（以小时计）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知。现测得 16 只元件的寿命如下：

159，280，101，212，224，379，179，264

222，362，168，250，149，260，485，170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于 225（小时）（$\alpha=0.05$）？

解　$H_0:\mu\le\mu_0=225 \longleftrightarrow H_1\ \mu>\mu$

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

拒绝域为 $C: T>t_\alpha(n-1)$

$n=16$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(15)=1.7531$，计算可得

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=241.5,\quad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=9746.80,\quad s=\sqrt{s^2}=98.7259$$

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{241.5-225}{98.7259/\sqrt{16}}=0.6685$$

由于 $t=0.6685<t_{0.05}(15)=1.7531$，接受 H_0，不能认为平均寿命大于 225 小时。

书例 1（P227）

某厂生产的某种型号的电池，其寿命（以小时计）长期以来服从方差 $\sigma^2=5000$ 的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变。现随机取 26 只

电池，测出其寿命的样本方差$s^2=9200$。问根据这一数据，能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化（$\alpha=0.05$）？

解 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=5000 \longleftrightarrow H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

拒绝域为 $C:\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $C:\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$n=26$，$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，$\chi^2_{0.975}(25)=13.12$，计算可得

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{25\times9200}{5000}=46$$

由于$\chi^2=46>\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，拒绝$H_0$，即认为寿命的波动性有显著变化。

参考书（二版）P203 例 28

市质监局接到投诉后，对某金店进行质量调查。现从其出售的标志 18K 的项链中抽取 9 件进行检测，检测标准为：标准值 18K 且标准差不得超过 0.3K，检测结果如下：

17.3，16.6，17.9，18.2，17.4，16.3，18.5，17.2，18.1

假定项链的含金量服从正态分布，试问检测结果能否认为金店出售的产品存在质量问题（$\alpha=0.01$）？

解 $H_0:\mu=\mu_0=18 \longleftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

拒绝域为 $C:|T|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$n=9$，$\alpha=0.01$，$t_{0.005}(8)=3.3554$，计算可得

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=17.5,\quad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=0.55,\quad s=\sqrt{s^2}=0.742$$

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{17.5-18}{0.742/\sqrt{9}}=-2.022$$

由于$|t|=2.022<t_{0.005}(8)=3.3554$，接受$H_0$，即认为含金量的标准值为 18K。

$$H_0:\sigma^2 \le \sigma_0^2 = 0.3^2 \longleftrightarrow H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

拒绝域为 $C:\chi^2 > \chi_\alpha^2(n-1)$

$n=9$，$\alpha=0.01$，$\chi_{0.01}^2(8)=20.090$，计算可得

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{8\times 0.55}{0.3^2} = 48.89$$

由于 $\chi^2 = 48.89 > \chi_{0.01}^2(8) = 20.090$，拒绝 H_0，即认为标准差超过了 0.3K。

综上，根据检测结果，可以认为金店出售的产品存在质量问题。

参考书 P205 例 30

假设甲、乙两厂生产的灯泡寿命分别服从正态分布 $N(\mu_1,95^2)$，$N(\mu_2,120^2)$。现从两厂产品中分别抽取了 100 只和 75 只，测得灯泡的平均寿命分别为 1120h 和 1360h。试问抽样结果能否认为乙厂生产的灯泡寿命比甲厂的更长（$\alpha=0.05$）？

解　　$H_0:\mu_1=\mu_2 \longleftrightarrow H_1:\mu_1<\mu_2$

$$Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

拒绝域为 $C: Z < -z_\alpha$

$n_1=100$，$n_2=75$，$\bar{x}=1120$，$\bar{y}=1360$，$\sigma_1^2=95^2$，$\sigma_2^2=120^2$，$\alpha=0.05$，$z_{0.05}=1.64$，计算可得

$$z = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1120-1360}{\sqrt{\dfrac{95^2}{100}+\dfrac{120^2}{75}}} = -14.285$$

由于 $z=-14.285 < -z_{0.05} = -1.64$，拒绝 H_0，即认为乙厂生产的灯泡寿命更长。

参考书 P205 例 31　杜鹃鸟“看鸟下蛋”

杜鹃是一种既自私又狡诈的鸟，它总是把自己的蛋下在别的鸟的巢中，让“保姆”替自己抚养后代。现有两种鸟巢中得到的杜鹃鸟蛋共 24 只，其中 9 只来自一种鸟巢，15 只来自另一种鸟巢，测得杜鹃蛋的长度数据（单位：mm）列于下表中：

样本 1	21.2，21.6，21.9，22.0，22.0，22.2，22.8，22.9，23.2	$\bar{x}=22.20$ $s_1^2=0.4225$
样本 2	19.8，20.0，20.3，20.8，20.9，20.9，21.0，21.0，21.0 21.2，21.5，22.0，22.0，22.1，22.3	$\bar{y}=21.12$ $s_2^2=0.5689$

假设两个样本来自同方差的正态总体，试鉴别杜鹃蛋的长度差异是由于随机因素造成的，还是与它们被发现的鸟巢不同有关（$\alpha=0.05$）。

解　　$H_0:\mu_1=\mu_2 \longleftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),\qquad S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

拒绝域为 $C:|T|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$

$n_1=9$，$n_2=15$，$\bar{x}=22.20$，$\bar{y}=21.12$，$s_1^2=0.4225$，$s_2^2=0.5689$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(22)=2.0739$，计算可得

$$s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{8\times0.4225+14\times0.5689}{22}=0.5157,\quad s_w=\sqrt{s_w^2}=0.718$$

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\frac{22.20-21.12}{0.718\times\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{15}}}=3.567$$

由于 $|t|=3.567>t_{0.025}(22)=2.0739$，拒绝 H_0，即认为杜鹃蛋的长度与它们被发现的鸟巢不同有关。

引例 1　某厂生产的一批产品，其出厂标准为：次品率不超过 4%，现抽测 60 件产品，发现有 3 件产品，问这批产品能否出厂（$\alpha=0.05$）？

解　　$H_0:p\le p_0=0.04 \longleftrightarrow H_1:p>$

$$Z=\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}}\sim N(0,1)$$

拒绝域为 $C:Z>z_\alpha$

$n=60$，$\bar{x}=\frac{3}{60}=0.05$，$\alpha=0.05$，$z_{0.05}=1.64$，计算可得

$$z=\frac{\bar{x}-p_0}{\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}}=\frac{0.05-0.04}{\sqrt{\frac{0.05\times0.95}{60}}}=0.3554$$

由于 $z=0.3554<z_{0.05}=1.64$，接受 H_0，即认为这批产品能够出厂。

参考书 P216，29

为研究正常成年男、女血液红细胞数（单位：万/mm^3）的差异，随机抽取了某地正常成年男、女各 156 名，74 名，计算得样本均值分别为 $\bar{x}=465.13$，$\bar{y}=422.16$，样本标准差分别为 $s_1=54.80$，$s_2=49.20$。试检验该地正常成年人的血液红细胞平均数是否与性别有关（$\alpha=0.05$）。

解　这是大样本，检验假设

$$H_0:\mu_1=\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

拒绝域为 $C:|T|>z_{\frac{\alpha}{2}}$

$n_1=156$，$n_2=74$，$\bar{x}=465.13$，$\bar{y}=422.16$，$s_1=54.80$，$s_2=49.20$，$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$，计算可得

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}=\frac{465.13-422.16}{\sqrt{\frac{54.80^2}{156}+\frac{49.20^2}{74}}}=5.961$$

由于 $|t|=5.961>z_{0.025}=1.96$，拒绝 H_0，即认为血液红细胞平均数与性别有关。

完整求解实例：参考书 P262 例 1

加入：方差分析表，F 检验，相关系数

某职工医院用光电比色计检验尿汞时，得尿汞含量 X（单位：mg/l）与消光系数读数 Y 的结果如下：

尿汞含量（x_i）	2　4　6　8　10
消光系数（Y_i）	64　138　205　285　360

假定 Y 与 X 服从一元线性回归模型：$Y = a + bX + \varepsilon$，$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$。

（1）建立 Y 对 X 的经验回归方程，并给出 σ^2 的无偏估计；

（2）给出方差分析表，并检验 Y 与 X 是否存在显著线性相关（$\alpha = 0.05$）；

（2）利用 t 检验法，进行回归方程的显著性检验（$\alpha = 0.05$）；

（3）给出 Y 与 X 的相关系数；

（4）求 $x_0 = 14$ 时，消光系数 Y_0 的点预测与置信度 95%的区间预测。

解　由表中数据，计算可得

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 6, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = 210.4$$

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = 220 - 5\times 6^2 = 40$$

$$l_{YY} = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2 = 275990 - 5\times 210.4^2 = 54649.2$$

$$l_{xY} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y} = 7790 - 5\times 6\times 210.4 = 1478$$

（1）　$$\hat{b} = \frac{l_{xY}}{l_{xx}} = \frac{1478}{40} = 36.95$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{x} = 210.4 - 36.95\times 6 = -11.3$$

Y 对 X 的经验回归方程为

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X = -11.3 + 36.95X$$

σ^2 的无偏估计为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{S_E}{n-2}=\frac{l_{YY}-\hat{b}\,l_{xY}}{n-2}=\frac{54649.2-36.95\times1478}{3}=12.3$$

（2） $S_T=l_{YY}=54649.2$

$$S_E=l_{YY}-\hat{b}\,l_{xY}=37.$$

$$S_R=S_T-S_E=54649.2-37=1\ \ 5$$

方差分析表为

方差来源	平方和	自由度	均方	F 值
回归	54612.1	1	54612.10	4414.8828
误差	37.1	3	12.37	
总和	54649.2	4		

$$H_0:b=0\longleftrightarrow H_1:b\neq0$$

$$F=\frac{MS_R}{MS_E}\sim F(1,n-2)$$

$$C:F>F_\alpha(1,n-2)$$

由于 $F=4414.8828>F_{0.05}(1,3)=10.1$，拒绝 H_0，即认为 Y 与 X 存在显著线性相关。

（2） $H_0:b=0\longleftrightarrow H_1:b\neq0$

$$T=\frac{\hat{b}}{\sqrt{MS_E}}\cdot\sqrt{l_{xx}}\sim t(n-2)$$

$$C:|T|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$$

$$T=\frac{\hat{b}}{\sqrt{MS_E}}\cdot\sqrt{l_{xx}}=\frac{36.95}{\sqrt{12.37}}\cdot\sqrt{40}=66.45$$

由于 $|T|=66.45>t_{0.025}(3)=3.1824$，拒绝 H_0，即认为回归方程是显著的。

（3） Y 与 X 的相关系数为 $r=\dfrac{l_{xY}}{\sqrt{l_{xx}}\sqrt{l_{YY}}}=\dfrac{1478}{\sqrt{40}\sqrt{54649.2}}=0.9997$

（4） 消光系数 Y_0 的点预测

$$\hat{Y}_0 = \hat{a} + \hat{b}x_0 = -11.3 + 36.95 \times 14 = 506$$

区间预测为

$$\left(\hat{Y}_0 \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot \sqrt{MS_E} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{l_{xx}}} \right)$$

$$\hat{Y}_0 \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot \sqrt{MS_E} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{l_{xx}}}$$

$$= 506 \pm 3.1824 \times \sqrt{12.37} \times \sqrt{1 + \frac{1}{5} + \frac{(14-6)^2}{40}} = 506 \pm 18.729$$

置信度 95%的区间预测为为$\left(487.271，524.729\right)$。

补充：对思考题（P70）：4，5，根据数据计算结果，解决类似于例 5.2 中的问题。

4.

$$\begin{array}{lll} Y = & -24.766 & +25.859X \\ & (136.833) & (13.253) \end{array}$$

$R^2 = 0.322$， $F = 3.807$， $MS_E = 4496.387$， $n = 10$

5.

$$\begin{array}{lll} Y = & 404.979 & +0.535X \\ & (57.573) & (0.028) \end{array}$$

$R^2 = 0.973$， $F = 364.854$， $MS_E = 7756.523$， $n = 12$