极限法——解决几何最优化问题的捷径

长郡中学 金恺

【关键字】最优值 极限 无穷小 微调

【概述】

在平面几何问题中我们经常会遇到一些求极值的问题。在这些问题中，自变量和目标函数可能涉及到坐标、斜率、长度、角度、周长、面积等等一些复杂的量，而且往往自变量还有一些复杂的约束条件，因此直接用函数求极值的方法是行不通或极其复杂的。

这些问题中，变量往往有无穷多种取值方案（比如说点的取值范围可能是整个平面或在某条直线上），所以无法枚举每一种取值方案来找最值，这时往往能够通过**极限法**证明：自变量取某些非特殊情况值时目标函数不可能是最优的——因为这时经过**微调**一个**无穷小量**[1]能够使得目标函数的值变得更优，从而剩下有限种特殊的取值情况可能成为最优解，通过枚举所有特殊情况就能找到目标函数的**最优解**了。[2]

在另一些同类问题中，本来就可以通过枚举有限个取值情况求出最优解，但是枚举的量很大，时间复杂度较高，我们也可尝试通过极限法来大大减少需要枚举的情况，从而降低时间复杂度。

以上就是极限法的大致思想，它的**作用**简而言之就是**化无限为有限，变有限为少量**。

正文

极限法的应用实例非常的多，比如经典的最小矩形覆盖[3]问题，就是通过极限法证明了：最小矩形的某条边必须过两个已知点，从而大大减少了需要枚举的矩形数目。

然而极限法用起来的确有较大的困难，有时候证明起来非常困难，可能情况比较复杂，也可能不知道如何调整，需要用到三角函数之类的比较复杂的数学知识，因此真正掌握它需要扎实的数学功底，极强的观察力以及必要的经验是必不可少的。

下面就来用极限法解决一些典型问题，从实例的分析中一步一步深入地认识极限法的用途和用法。

例题一、巧克力

---

[1] 比如旋转一个无穷小的角度、微移一段无穷小的距离。在本文中，微量这一名词就是指无穷小量：只要改变得足够小（无穷小），就能使点的相对位置、线段的相交情况等不发生改变。

[2] 极限法的本质也就是对目标函数求导，如果导数不为 0 并且自变量不在定义域的边界则不可能为最优值。这正是采用“极限法”来命名的原因。

[3] 平面上有 n 个已知点，求一个面积最小的矩形，使得所有已知点都在矩形的内部。

问题描述：糖果厂有一种凸起的 N（$4 \leqslant N \leqslant 50$）边形巧克力，***Kiddy*** 和 ***Carlson*** 凑钱买了一块，想把它用一刀割成两半。两半的大小必须相等，找出用以分割巧克力的分割线的最短长度。

数学模型：已知 N 个点$(X_i,Y_i)1 \leqslant i \leqslant N$ 构成一凸包 P{已知量}，求一条划分线 L，使得分割线两侧的面积相等{约束条件}，并且使 L 的长度{目标函数}最小。

问题分析：设分割线的两个端点分别为 A、B，A、B 可能在 P 的顶点上也有可能只在 P 的边上{不含端点}。我们分开解决这两种情况：

1、A 在 P 的顶点上（或 B 在 P 的顶点上，此时交换 AB）：

显然可以枚举 P 中的一个顶点作为 A，由分割线两侧面积相等这一约束条件直接确定 B 的位置，如图 1。

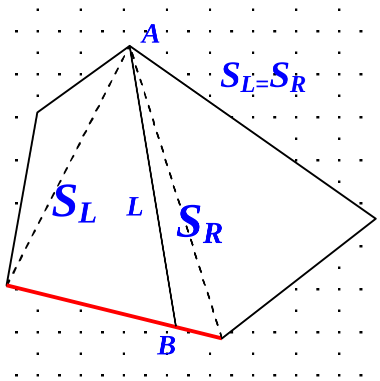

图 1

2、A、B 都在 P 的边上：枚举 A、B 所在的两条边，设这两条边相交于 C，如图 2：

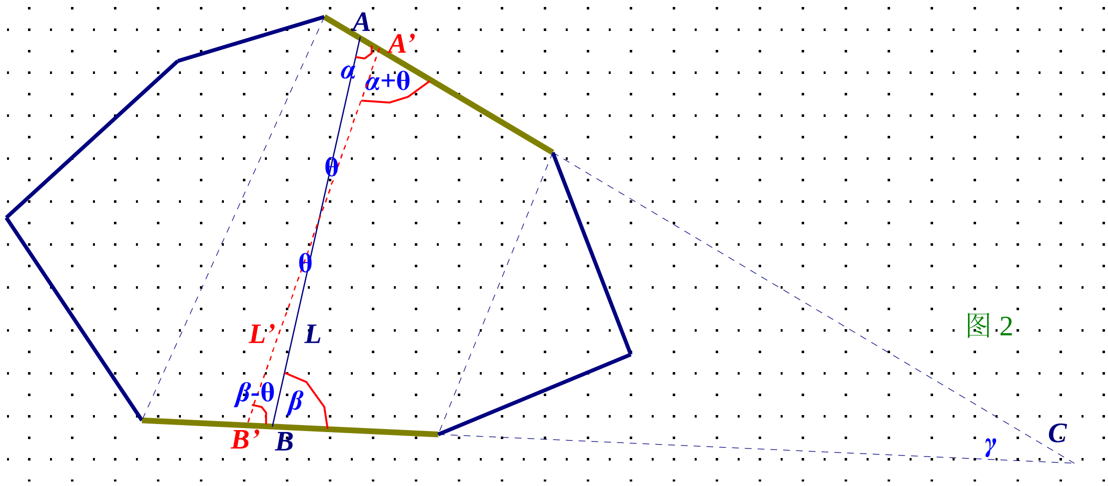

图 2

设∠C=γ，∠CAB=α，∠CBA=β。当 $\alpha \neq \beta$ 时，可以证明：把分割线 L 稍微旋转一个无穷小量 θ 到 L'并保持 L'两边的面积相等，能够使 L'的长度小于 L。证明如下：

不妨设 $\alpha > \beta$，旋转后 L'仍与原来的两边相交（因为仅旋转了一个无穷小量），交点为 A'、B'，∠$CA'B'$=α+θ，∠CBA=β-θ。

在三角形 ABC 中，有正弦定理：$\dfrac{AC}{\sin b} = \dfrac{BC}{\sin a} = \dfrac{L}{\sin g}$

在三角形 $A'B'C$ 中，有正弦定理：$\dfrac{A'C}{\sin(b-q)} = \dfrac{B'C}{\sin(a+q)} = \dfrac{L'}{\sin g}$

由于 L 和 L'都是分割线，所以 $S_{ABC}=S_{A'B'C}$，即

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin g=\frac{1}{2}A'C\cdot B'C\sin g\\
&\Leftrightarrow AC\cdot BC=A'C\cdot B'C\\
&\Leftrightarrow \frac{L\sin b}{\sin g}\frac{L\sin a}{\sin g}=\frac{L'\sin(b-q)}{\sin g}\frac{L'\sin(a+q)}{\sin g}\\
&\Leftrightarrow \frac{L^2}{L'^2}=\frac{\sin(b-q)\sin(a+q)}{\sin b\,\sin a}\\
&=\frac{-\frac{1}{2}\left[\cos(b+a)-\cos(b-a-2q)\right]}{-\frac{1}{2}\left[\cos(b+a)-\cos(b-a)\right]}\\
&=\frac{\cos(b+a)-\cos(b-a-2q)}{\cos(b+a)-\cos(b-a)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\because pi>b>a>0\\
&\therefore pi>b-a>0\\
&\therefore \cos(b-a-2q)>\cos(b-a)\\
&\therefore \frac{\cos(b+a)-\cos(b-a-2q)}{\cos(b+a)-\cos(b-a)}>1
\end{aligned}
$$

所以 $L^2>L'^2$，即 $L'<L$。如果 A、B 所在的两边平行（即 C 在无穷远处），也有相同的结论（如图 3）。

因此若 β>α 时，L 不可能为最短的分割线。同理，当 β<α 时，L 也不可能是最短的。**若 L 是不过 P 的顶点的最短的分割线，那么 L 与 P 的两个夹角必然相等。**

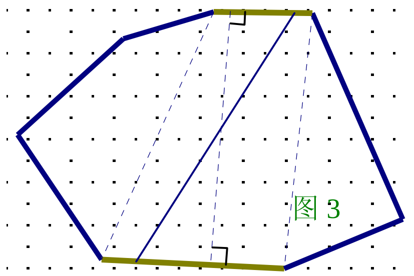

图 3

这就是我们希望得到的，因为枚举 L 两个端点所在的边后，L 的斜率就确定了，再根据 L 的两边面积相等，就可以直接算出 L 的位置。得到了这些结论后，已能够设计出 $O(N^2)$的算法。

小结：通过此题，我们已经初次接触到了极限法，并利用它得到了一个极其简单的结论。使得自变量的取值范围从无穷多条直线减少到了有限条，从而通过简单的穷举法解决。

例题二、太空站 *SPACE* (2003 集训讨论试题之 0039)

问题描述：平面上有 $n(3\leqslant n\leqslant 10000)$个互不重合的点，要求一条直线，使得所有点到这条直线的距离和最小。

数学模型：已知 n 点的坐标分别为：$V_1(x_1,y_1)$, $V_2(x_2,y_2)$,⋯$V_n(x_n,y_n)$。直线 $l(ax+by+c=0(ab\neq 0))$ 的 f 值定义为 $f(l)=\sum_{i=1}^{n}\frac{|ax_i+by_i+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，求 $\min\{f(l)\}$。

试题分析：最容易想到的做法是枚举所有的直线，得到最优值。但平面中的直线有无穷多条，怎样的直线才有可能是我们要找的那一条呢？

⑴可以规定直线 l 经过某一个已知点。因为：若 l 不经过任何一个已知点，则 l 两侧肯定有一侧的点数不少于另一侧，设多的一侧有 a 个点，少的一侧有 b 个点，将 l 往点多的那侧平移一个微量△到 l'，则 $f(l')-f(l)=b\triangle-a\triangle=(b-a)\triangle\leq 0$，故 $f(l')\leq f(l)$。（如图 4）

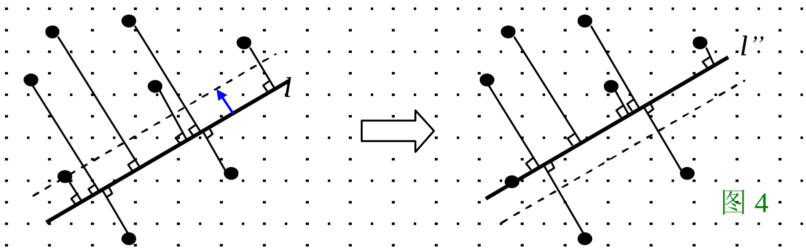

图 4

这样不断的往同一个方向平移，直到遇到第一个已知点，移动到 l''。可知 $f(l'')\leq f(l)$。

⑵可以再规定直线 l 经过两个已知点。原因如下：根据⑴，设 l 过 V_1，而不过其它点（如图 5）：记 L_i 为 V_i 到 V_1 的距离，α_i 为 V_i 到 V_1 的连线与 V_i 到 l 的垂线的夹角。

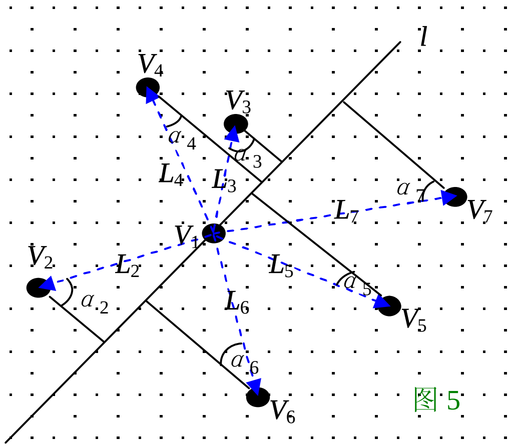

图 5

设直线绕 V_1 逆时针旋转一个**很小的角度** α $(\alpha \to 0^{+})$到 l'，l 顺时针旋转相同的角度 α 到 l''。（如图 6）**只要 α 足够小，就能使旋转过程中不碰到其它已知点。**

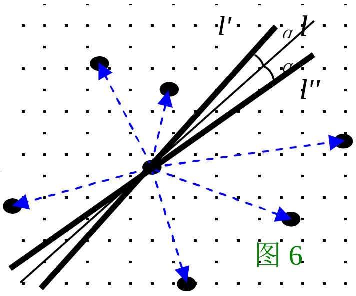

图 6

如果 $\alpha_i=0$，那么不论直线旋转到 l'还是 l''，V_i 到直线的距离都严格减小了。(如图 7) $\alpha_i\neq 0$，则旋转后的夹角分别变为 $\alpha_i+\alpha$，$\alpha_i-\alpha$。由于

$$\cos(\alpha_i-\alpha)+\cos(\alpha_i+\alpha)=2\cos\alpha_i\cos\alpha<2\cos\alpha_i$$

所以

$$L_i\cos(\alpha_i-\alpha)+L_i\cos(\alpha_i+\alpha)=L_i 2\cos\alpha_i\cos\alpha<2L_i\cos\alpha_i$$

将每点所作的改变量相加可以得出：$f(l')+f(l'')<2f(l)$；

而由直线 l 的最优性可以知道：$f(l)\leq f(l'), f(l)\leq f(l'')$，

$f(l')+f(l'')\geq f(l)+f(l)$，矛盾。

因此，可以规定直线 l 必过两个已知点。

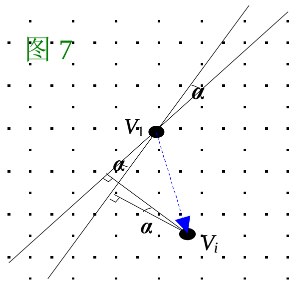

图 7

至此，待枚举的直线就变为了**有限**条，因此我们可以得到一个有效的算法了：

min ← ∞

枚举两个点

①根据两个点确定直线 *h*

②计算直线 *now* ← *f*(*h*)

③若 *now*<*min* 则 *l* ← *h*,*min* ← *now*

通过极限法，我们已经将需考虑的直线从无线条转化为了有限的 n^2 条，从而能够设计出一个有效算法解决本题。此算法的时间复杂度为 $O(n^3)$，需要进一步减少，也就是需要减少枚举无用的直线。

⑶定义 $a(l)$为直线 l 上方（若直线竖直则为右方）的点数；$b(l)$为直线 l 上面的点数；$c(l)$为直线 l 下方（若直线竖直则为左方）的点数。

若 l 是最优的，那么必有 $a(l)+b(l)>c(l)$且 $c(l)+b(l)>a(l)$

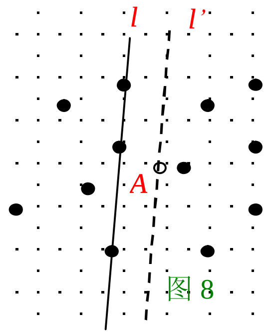

图 8

证明：若 $a(l)+b(l)\leqslant c(l)$且 $c(l)+b(l)\leqslant a(l)$，先把它往点较多（可能相等）的一侧平移一个微量到达 l'（如图 8），显然根据⑴的相同证法有 $f(l')\leqslant f(l)$。由于移动的是一个微量，所以 l'上没有其它已知点，在 l'上任取一点 A，把 A 看成结论⑵中的 V_1，绕 A 微调，用⑵的类似的证明方法有结论：$f(l')$不可能为最优解，因此：$f(l)$也不可能为最优解。

满足结论⑴⑵⑶的直线集合设为 E。可证$|E|$为 n 级，用旋转法方法可以使得从 E 中的一条直线找下一条直线花 $O(n)$的时间复杂度(旋转一周后便能把所有的 E 中的直线找到)，计算一条直线的 f 值也只需 $O(n)$的时间复杂度，所以总的时间复杂度只需 $O(n^2)$。[4]

小结：本题的几个证明过程并不复杂，从本质上说，这三个结论的证明方法都是和极限法紧密相关的：

⑴通过**平移一个微量**证明某一类直线不可能为最优解，将 l 的取值范围从所有平面中的直线降为过一个已知点的直线；

⑵通过**旋转一个微量**证明剩下的直线中的某一类不可能为最优解，从而使自变量 l 的取值范围进一步减少到有限条。

⑶通过先**平移一个微量**再**旋转一个微量**将待考虑的直线条数从 n^2 降到了 n。

从本题可以看到解决平面最优化问题的一般规律：遇到问题后容易产生这样的猜想：即最优解是不是满足某种性质？如果满足，是不是满足更特殊的性质？…… 这样不断地提出猜想并且尝试证明，使得自变量的取值范围不断缩小，直至不能再小或者达到我们满意的地步，剩下的工作就只需通过枚举和计算解决了。

提出的这些猜想有时是正确的、有的存在反例，有的是显然的、有些证明却很难。

怎么形成猜想呢？最简单有效的方法就是通过一些简单的例子寻找一些规律，要靠认真地观察才能得到直觉和灵感。

怎么证明猜想呢？最容易的方法是拿几个例子进行验证，如果有反例，那么猜想失败，需要部分的修改猜想或者提出全新的猜想。

如果找不到反例呢？这并不代表猜想就是正确的。需要进行严密的分析来完整地证明，而极限法正是一个简单、实用的分析工具。

前面两道题比较简单，都直接提出了一种正确地猜想，并且证明的方法也很容易，但平时解决问题常常不是那么一帆风顺，此时应该怎么做呢？让我们来完整的考虑一个较为复杂的实际问题。

例题三、导弹防御系统（自创试题）

问题描述：某国的国界是一个凸多边形，为了防卫，国王打算派工程部队修建 4 座防御塔。战争爆发后敌人可能会偷袭其中的一座防御塔，而一旦遭偷袭、其余 3 座防御塔就会进入临战状态，并且把由它们两两相连构成的三角形区域完全封锁，狡猾的敌人会使封锁的区域面积尽量小，而精明的国王则希望被敌人破坏后启动的这个区域面积尽量大。

[4] 详细的证明和算法请参阅我 2003 年的集训作业—0039 解题报告。

数学模型：

函数 $f(A,B,C,D)=\min\{S_{\triangle ABC}、S_{\triangle ABD}、S_{\triangle ACD}、S_{\triangle BCD}\}$

平面上有一个凸 n 边形 P，请你在 P 的内部（可以在边界）选择 4 个点 $ABCD$，使得 $f(A,B,C,D)$ 最大。

问题分析： 首先，f 函数是求 4 个量中的**最小值**，这很不好处理，究竟 4 个三角形中哪个最小呢？

考虑平面上任意四点 A、B、C、D，它们有下列 3 种排列情况：

1、某三个点成一直线，此时 $f(A,B,C,D)=0$；

2、任意三点都不在同一直线上，但是某个点在另三个点围成的三角形内，不妨设 D 在三角形 ABC 内部，此时 $f(A,B,C,D)=\min\{S_{\triangle ABD},S_{\triangle ACD},S_{\triangle BCD}, S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}\}=\min\{S_{\triangle ABD},S_{\triangle ACD},S_{\triangle BCD}\}$，由于 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$，所以 $f(A,B,C,D)\leqslant S_{\triangle ABC}/3$，又由于 $ABCD$ 任意选取，所以不妨选 D 为 $\triangle ABC$ 的重心，此时 $f(A,B,C,D)= S_{\triangle ABC}/3$。

因此某个点在另三个点构成的三角形内这类情况最大的 f 值，等于 **P 中面积最大的三角形 ABC 的面积的 1/3**{①}。

3、A、B、C、D 是某个凸四边形的四个顶点：

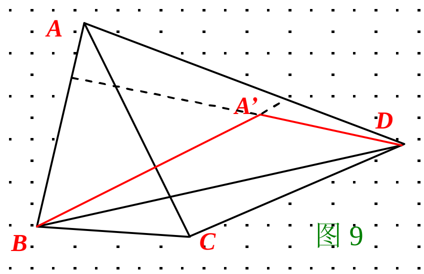

图 9

不妨设 $f(A,B,C,D)=S_{\triangle BCD}$，那么分别过 D、B 作 BC、DC 的平行线交于 A'，则 A' 一定在 $\triangle ABD$ 的内部（或边界）。

证明：如图 9，$S_{\triangle BCA'}=S_{\triangle BCD}\leqslant S_{\triangle BCA}$ è A、B 在 $A'D$ 异侧；$S_{\triangle A'CD}=S_{\triangle BCD}\leqslant S_{\triangle ACD}$ è A、D 在 $A'B$ 异侧，故结论成立)

因此 A' 也在 P 内部，由于**平行四边形 4 个端点的 f 值=这个平行四边形面积的一半**，而 $A'BCD$ 是平行四边形，因此 $f(A',B,C,D)=S_{ABCD}/2=S_{\triangle BCD}=f(A,B,C,D)$，也就是说在可以把 $ABCD$ 调整为 P 内某个平行四边形的顶点而不使 f 值改变。因此 f 值最大的凸四边形的 f 值=面积最大的平行四边形的面积的一半！

因此四个点构成凸四边形这类情况的最大 f 值，等于 **P 中面积最大的平行四边形面积的 1/2**{②}。

经过上面的转化，我们把原来的最小值最大问题转化为了某个特定值最大的问题，新的问题明显比原问题更容易考虑。

先来看①的求解，因为看起来它似乎比②简单一些（实际上要简单得多），首先假设 A、B、C 已经确定，看看它应满足什么样的条件。

***A*、*B*、*C* 可以都取 *P* 的顶点，而不会使面积减少。**（换言之，A、B、C 都是 P 顶点的三角形的面积的最大值=P 内的三角形面积的最大值）证明如下：

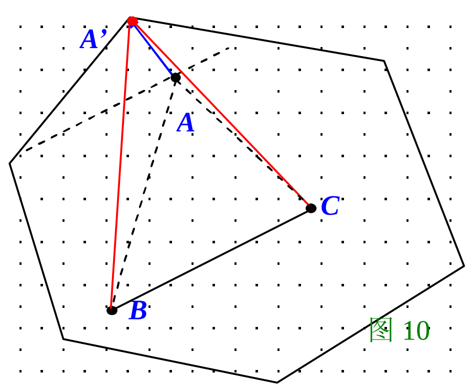

图 10

如图 10，过 A 做 BC 的平行线 l，则在 l 上或 l 的远离 BC 的一侧必然存在 P 一个的顶点 A'。而 A' 到 BC 的距离≥A 到 BC 的距离，所以 $S_{\triangle A'BC}\geqslant S_{\triangle ABC}$。故可以将 A 移至某个顶点而使得面积变大或不变。

可以用 $O(N^3)$ 的算法枚举 P 的 3 个顶点 A、B、C，并求它们构成的三角形的面积的最大值 S，$S/3$ 就是问题①的解。

三角形的情况的确容易，因为可以让 A、B、C

恰好为 *P* 的三个顶点，那么平行四边形是否可以能用同样的方法呢? 这显然是错误的，因为有可能 *P* 的任意 4 个顶点都不构成平行四边形，如果真的 *A*、*B*、*C*、*D* 都是顶点那岂不是无解？[5]。问题②该如何求解呢？

首先还是要考虑缩小 *A*、*B*、*C*、*D* 的取值范围。

一、*A*、*B*、*C*、*D* 都在 *P* 的边界上（不一定是顶点！）。

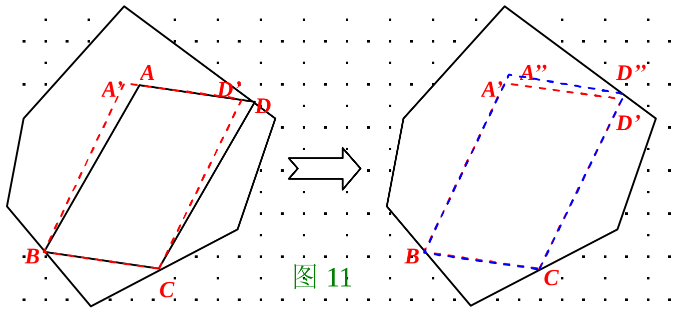

图 11

证明：若 *A*、*B*、*C*、*D* 中某点不在 *P* 的边界上，不妨设为 *A* 点。将 *AD* 沿着 *DA* 方向平移一个**微量**[6]到 *A'D'*（如图 11 左），此时 $S_{A'BCD}=S_{ABCD}$，并且 *A'*、*D'*都不在边界上。再把 *A'D'* 边沿着 *BA'*方向平移一个**微量**[7]到 *A''D''*（如图 11 右），有 $S_{A''BCD}>S_{ABCD}$，因此 *A* 不在边界上时,ABCD 不可能是 P 内面积最大的平行四边形。所以 *ABCD* 的面积最大时，*A*、*B*、*C*、*D* 必然都在 P 的边界上。

二、***A*、*B*、*C*、*D* 之一可以取 *P* 的顶点，而不会使面积减少**。（换言之，*A*、*B*、*C*、*D* 之一是 *P* 的顶点的平行形的面积的最大值=*P* 内的平行四边形面积的最大值）

终于到了极限法该隆重登场的时候了 **J**！不过在证明这个命题之前先要介绍几个新的概念：

若直线 *l* 和 *g* 不平行，点 *E* 不在 *l* 和（或）*g* 上，如果某个点 *B* 处在 *l* 上，另一个点 *D* 处在 *g* 上，并且 *BD* 关于点 *E* 中心对称，那么称**线段 *BD* 为(*l*,*g*,*E*)的平分线。**

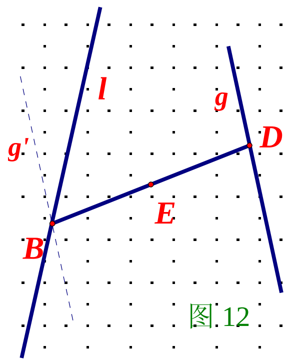

图 12

引理一：*(l,g,E)的平分线是唯一确定的*。证明如下：

如图 12，把 *g* 绕 *E* 旋转 180 度到 *g'*，*g* 和 *g'*关于 *E* 中心对称，设 *l* 和 *g'*相交于 *B*（由于 *l* 和 *g* 相交、*g* 和 *g'*平行，故 *l* 和 g'相交），设 *D* 为 *B* 关于中心 *E* 的对称点。由于 *B* 在 *g'*上所以 *D* 在 *g* 上，又因为 *B* 在 *l* 上，所以 *BD* 是(*l*,g,E)的平分线。另一方面，直线 *l* 与 *g'* 的交点只有一个，很容易知道不存在其它的 *BD* 是（*l*,*g*,*E*）的平分线。

引理二：*若E',E''关于E 中心对称且EE'是微量，BD、B'D'、B''D''分别为(l,g,E)、(l,g,E')、(l,g,E'')的平分线，则B'B''关于B 中心对称，D'D''关于D 中心对称*。证明如下：

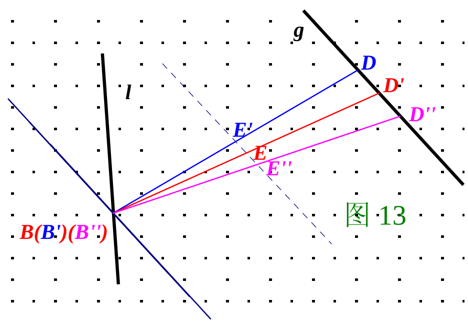

图 13

①*EE'E''*平行于 *g*（如图 13）。则 *B*,*B'*,*B''*重合，所以 *B'B''*关于 *B* 对称,同时由中位线知识容易看出：*DD'*=2*EE'*=2*EE''*=*DD''*,而 *DD'D''*都在 *g* 上，所以 *D'D''*关于 *D* 中心对称。

[5] 如果不转化为平行四边形，而直接枚举 *P* 的顶点做 *A*、*B*、*C*、*D* 计算 *f*(A,B,C,D)也不会是最优的。比如下面这个例子：*N*=6,*P*={(-9.60,0.95)(-7.12 3.15)(-0.74 4.72)(7.33 0.98)(4.26 -2.41)(-6.37 -.152)}。最优解是 26.35，而枚举 4 个顶点算出来的 *f* 的最大值为 19.40。

[6] 小到使 *A'D'*都在 *P* 内部（不包括边界）

[7] 小到使 *A''D''*都在 *P* 内部（不包括边界）

②*EE'E"*平行于 *l*。同理可证。

③*EE'E"*不平行于 *g* 和(或)*l*。由于 *E'E"* 关于 *E* 中心对称，所以 *E'E"=2EE"*。设 $x=H(E",g)$[8],y=(*EE"*在垂直于 *g* 的方向上的距离)：

$H(B",g)=2x$；$H(B,g)=2(x+y)$；

$H(B',g)=2(x+2y)$，

所以 *BB"=BB'*。而 *B*、*B'*、*B"*都在同一直线 *l* 上，故 *B'B"*关于 *B* 对称。

考虑垂直于 *l* 的方向的距离可证 *DD"=DD'*，所以 *D'D"*关于 *D* 对称。

总结①②③得引理二得证。

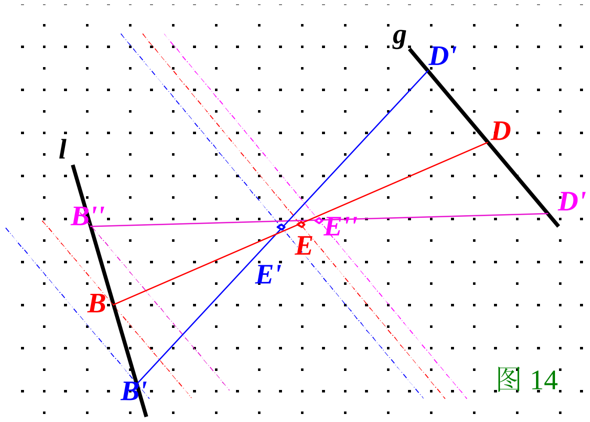

图 14

下面分两种情况来证明 ***A,B,C,D* 中有个点是 *P* 的顶点不会使最大值发生变化：**

<1>*某两个顶点在同一条边上*（不妨设 *A*、*B* 在同一条边上），根据图 15 容易看出，因为存在一个面积不变的平行四边形 A'B'CD，使得某个点在 P 的顶点上。

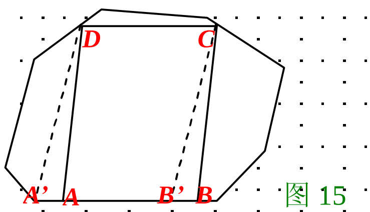

图 15

<2>*任意两个顶点都不在同一条边上*，即 *A*、*B*、*C*、*D* 在 *P* 的 4 条不同的边上，如图 16：设 A 在 ***a*** 上，B 在 ***b*** 上，C 在 ***c*** 上，D 在 ***d*** 上，并且都不是边的端点。***a***、***b***、***c***、***d*** 都是 P 的边。并且设 E 是平行四边形的中心。

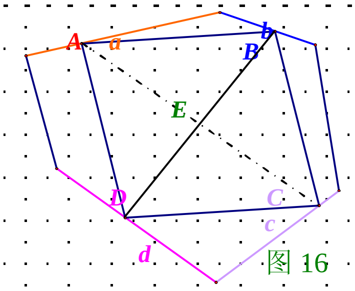

图 16

<2>-I、*a*//*c* 并且 ***b*//*d***。

此时 *E* 的位置是确定的。$S_{ABCD}=4S_{ABE}=2AE*H(B,AC)$保持 *AC* 边不变，调整 *BD*：过 *B* 点做 *AC* 的平行线 ***e***，***b*** 的某个端点 *V* 一定在 ***e*** 的远离 *E* 的一侧或在直线 ***e*** 上，此时把 *B* 往 *V* 方向移动一个微量到 *B'*，同时 *D* 往反方向移动到 *D'*。显然有 $H(B',AC) \geq H(B,AC)$，所以 $S_{AB'CD'}$不会比 S_{ABCD} 小。不断的往同一个方向微移直到 *B* 或 *D* 到达 *P* 的顶点，所以结论成立。

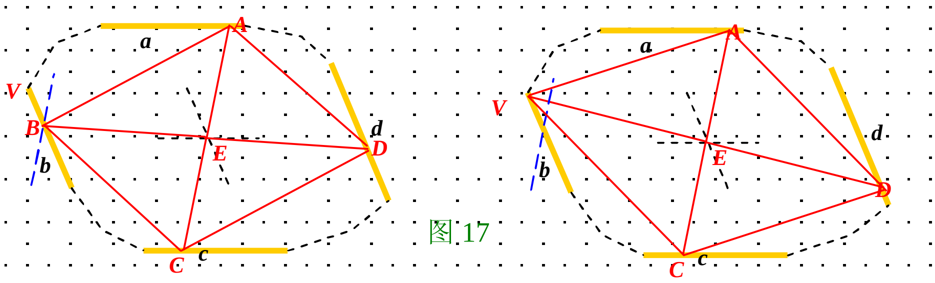

图 17

<2>-II、若 $a \nparallel c$ 或者 $b \nparallel d$ ，情况就要复杂多了。

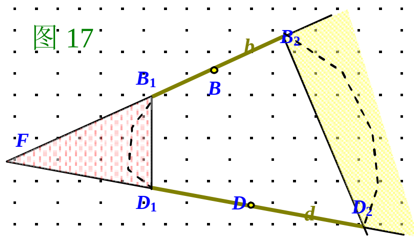

图 17

不妨设 $b \nparallel d$ ，如**图 17** 所示：设 ***bd*** 的延长线交于 *F*，***b*** 的两个端点为 B_1,B_2（B_1 在 *F* 和 B_2 之间），***d*** 的两个端点为 D_1,D_2（D_1 在 *F* 和 D_2 之间），定义红色区域为

[8] *H(V,l)*表示点 *V* 到直线 *l* 的距离

射线 B_2B_1, D_2D_1 与线段 B_1D_1 围成的三角形区域，定义黄色区域为射线 B_1B_2,D_1D_2 与线段 B_2D_2 围成的无限区域。

由于 *A*、*B*、*C*、*D* 都在凸包 *P* 上，所以 *A* 和 *C* 有且仅有一个点（不妨设为 *C*）在红色区域中，另一个（不妨设为 *A*）在图中黄色区域中。接下来证明：固定 *A* 点、调整 *BCD* 使平行四边形的面积增大[9]。

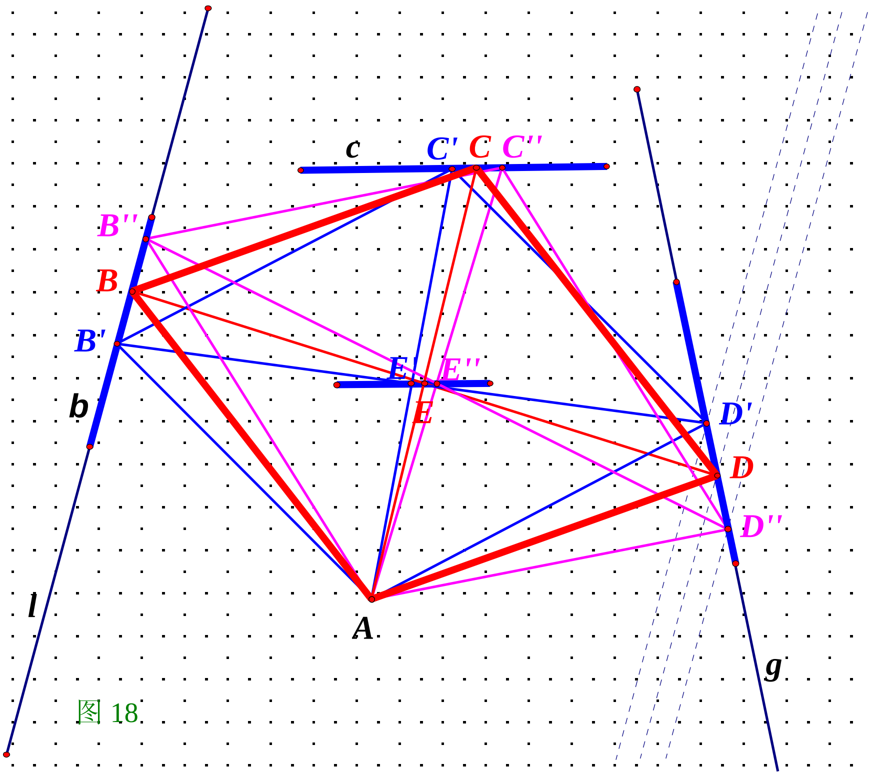

图 18

设 *B* 所在边 ***b*** 所在直线为 *l*,*D* 所在的边所在的直线为 g。在线段 ***c*** 上取两个点 *C'C''* 关于 *C* 对称，并且 *CC'* 的距离趋近于 0，设 *E'*,*E''* 分别为 *AC'*、*AC''* 的中点，设 *B'D'* 和 *B''D''* 分别是(*l*,*g*,*E'*)、(*l*,*g*,*E''*)的平分线。

根据对角线互相平分的四边形是平行四边形得：*AB'C'D'* 和 *AB''C''D''* 都是平行四边形，*E'* 和 *E''* 分别是它们的中心。只要我们能够证明 $S_{AB'C'D'}+S_{AB''C''D''}>2S_{ABCD}$，那么 *AB'C'D'* 和 *AB''C''D''* 中至少有一个面积比 S_{ABCD} 大，也就证明了结论。

而 $S_{ABCD}=4S_{ADE}$；$S_{AB'C'D'}=4S_{AD'E'}$；$S_{AB''C''D''}=4S_{AD''E''}$；因此可以证明等价的结论：$S_{AD'E'}+S_{AD''E''}>2S_{ADE}$。

因为 *E'E''* 关于 *E* 中心对称，由引理二可以知道：*D'D''* 关于 *D* 中心对称。另外，由于 *EE'* 平行于 *g*，而 *g* 与 *c* 相交，因此 *EE'* 与 *DD'* 相交，不妨设它们交于 X，如图 19：

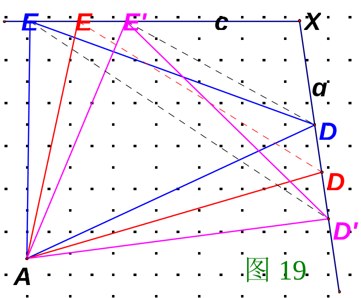

图 19

1、图 19 所示的为 *ADX* 为逆时针顺序时的情况；
2、当 *ADX* 为顺时针方向时，同理可证；
3、当 *D*、*X* 重合时亦可证明（如图 20），方法略。

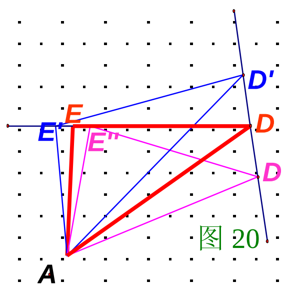

图 20

$S_{AD'E'}+S_{AD''E''}=(S_{AD''XE'}-S_{AD'D''}-S_{D'E'E''}-S_{XE''D'})+(S_{AD''XE'}-S_{AE'E''}-S_{E''D'D''}-S_{XE''D'})$

[9] 若固定 *C* 点，调整 *ABD* 将不能证明后面的结论！

$$=2S_{AD''XE'}-2S_{XE''D'}-S_{AD'D''}-S_{AE'E''}-S_{D'E'E''}-\{S_{E''D'D''}\}$$

$$2S_{ADE}=2(S_{AD''XE'}-S_{ADD''}-S_{AEE'}-S_{D'EE''}-S_{EDD'}-S_{XE''D'})$$

$$=2S_{AD''XE'}-2S_{XE''D'}-S_{AD'D''}-S_{AE'E''}-S_{D'E'E''}-\{S_{ED'D''}\}$$

$S_{AD'E'}+S_{AD''E''}-2S_{ADE}=S_{ED'D''}-S_{E''D'D''}>0$　故　$S_{AD'E'}+S_{AD''E''}>2S_{ADE}$

所以有$S_{AD'E'}>S_{ADE}$或$S_{AD''E''}>S_{ADE}$，因此有$S_{AB'C'D'}>S_{ABCD}$或$S_{AB''C''D''}>S_{ABCD}$，也就是说当*ABCD*在*P*的边界上但都不是*P*的顶点时，*ABCD*的面积肯定不是*P*中平行四边形的面积的最大值。

综合上述证明得：*A*、*B*、*C*、*D*之一可以取*P*的顶点，而不会使面积减少。[10]

小结：结论二比结论一的得到困难了许多，回顾证明的过程：首先我们不得不分了许多种情况来一一证明，好在大多数情况都是较为特殊的，证明较为容易。情况**<2>-II**是一般的，也是最难证的：

证明过程中，先选择**固定*A***点，然后在*C*的两侧取两个距离**无限小**的对称点，最后往两个方向分别调整*ABCD*到*AB'C'D'*和*AB''C''D''*。引理二告诉我们一个简单的性质：*B'B''*、*D'D''*分别关于*B*和*D*对称，利用这一简单的性质用就能得到$S_{AB'C'D'}+S_{AB''C''D''}>2S_{ABCD}$。

<2>-II的证明是个比较复杂的**极限法**，此次调整的量是距离而不是角度，因为很明显调整距离时各个量的改变都容易得到，而如果采用角度，恐怕就会有更为复杂的数学式子了！这说明了观察能力在极限法中的重要作用。

另外，证明中和例题**2**一样采用了是**2次调整做和**，为什么不能直接调整**1**次呢？有两个主要原因：

1、我们并不知道往哪一侧调整后能使目标函数更优（并不是往任意方向调整都会变优的）；
2、（**2**次调整后的目标函数的和）与（原函数的两倍）的差很容易计算，把它们拆成一些三角形的和后大部分的项做差后都被抵消了。

如果只调整**1**次，我们需要计算在什么时候往什么方向调整（而与调整**2**次相比，这是一项额外的工作），而且证明过程也将更为复杂。

2次调整做和方法是极限法证明中经常要用到的手段。

总结了这么多，是不是有些太早了？我们仅仅证明了结论二，但是满足结论二的平行四边形仍然有无穷多个！我们并没有完整地解决原问题。不过，你也许马上就会**猜想：规定*A*、*B*、*C*、*D*中有两个点是*P*的顶点，是不是也不影响最优值**？看起来似乎的确能够利用刚才类似的方法进行证明：首先由结论二可设*A*是*P*的顶点而*B*、*C*、*D*在*P*的边上，由于固定*B*、*C*或*D*时，*A*可能被调整到*P*外，所以我们只能固定*A*，调整*BCD*。但是如果*A*在红色区域中，那么结论二是不成立的。因此有可能*A*、*B*、*C*、*D*中有两个点是*P*的顶点的平行四边形的最大面积<P内平行四边形的最大面积[11]，猜想失败……

---

[10] 下面简单的说明为什么不能固定 *C* 点调整 *ABD*，因为此时 *D''DD'*的相对位置发生了改变，如图 21，此

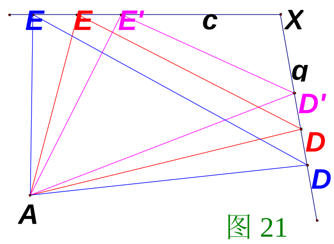

图 21

时 $S_{AE'D'}+S_{AE''D''}$并不是恒大于 $2S_{AED}$ 的。

[11] 实际上，的确存在反例，也就是说此猜想不是无法证明而是错误的。

我们只能用现有的结论二来求最大值。值得庆幸的事，只要利用二次函数的知识就能求出这个最值了！方法如下：

首先，为了使计算简单依次进行如下变换：

a)旋转*P*使得*c*平行于坐标轴*y*；

b)平移*P*使得*A*的横坐标和*c*的横坐标互为相反数（设*A*的坐标为(-*k*,0),*c*方程为*x*=*k*）；

c)以(0,0)为中心缩放*P*使得*A*的坐标为(0,-1)；

旋转和平移将不改变最优值，缩放后最大值变为原来的$\frac{1}{k^2}$，因此只要把求出来的最大面积乘以k^2就是变换之前的答案}，如图22：

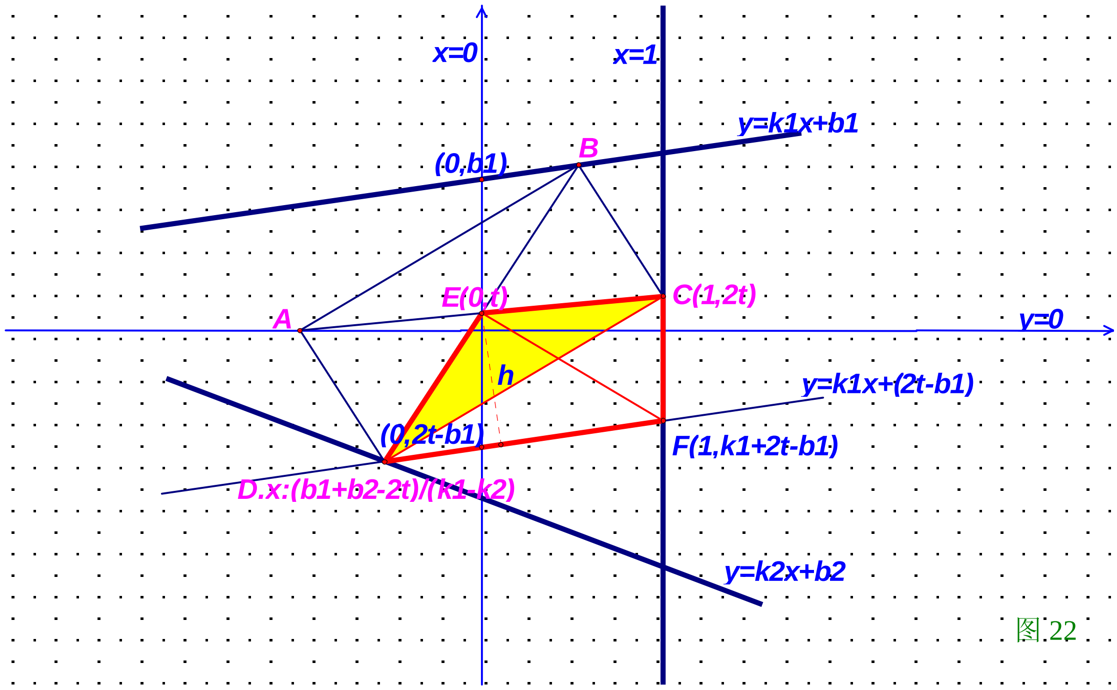

图22

此时*E*是*y*轴上的一个动点，设*E*的坐标为(0,*t*)，则其它点的坐标如图所示。

所以，$S_{ABCD}=4_{DEC}=4(S_{CFDE}-S_{CFD})=4(S_{DFE}+S_{CFE}-S_{CFD})$

$$S_{DFE}=\frac{1}{2}DF\cdot h=\frac{1}{2}\left[(1-D.x)\sqrt{k1^2+1}\right]\frac{\left|k1\times 0-t+(2t-b1)\right|}{\sqrt{k1^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b1+b2-2t}{k1-k2}\right)(b1-t)$$

$$=\frac{(k1-k2+2t-b1-b2)(b1-t)}{2(k1-k2)}$$

$$S_{CFE}-S_{CFD}=\frac{1}{2}CF(1-0)-\frac{1}{2}CF(1-D.x)$$
$$=\frac{1}{2}CF\cdot D.x$$
$$=\frac{1}{2}\left[2t-(k1+2t-b1)\right]\cdot\frac{b1+b2-2t}{k1-k2}$$
$$=\frac{(b1-k1)(b1+b2-2t)}{2(k1-k2)}$$

$$S_{ABCD}=2\frac{(2t+k1-k2-b1-b2)(b1-t)+(b1-k1)(b1+b2-2t)}{k1-k2}$$
$$=2\frac{-2t^2+(5b1+b2-3k1+k2)t+\left(2b1k1-b1k2-2b1b2+k1b2-2b1^2\right)}{k1-k2}$$
$$=2\frac{-2t^2+(k1+k2+b1+b2)t-(k2b1+k1b2)}{k1-k2}$$

恰好是关于t的一元二次方程！由一元二次函数的基本知识可知：要使S_{ABCD}最大，t要不取自定义范围中的端点、要不取对称轴$\frac{k1+k2+b1+b2}{4}$。当t为自定义范围内的端点时，BCD之一是P的顶点，这种情况很好处理；当$t=\frac{k1+k2+b1+b2}{4}$时，C点的坐标为$\left(1,\frac{k1+k2-b1-b2}{2}\right)$，恰好为线段(***cb***交点—***cd***交点)的**中点**！所以我们没有必要作麻烦的旋转、平移和缩放，算出***cb***、***cd***的交点坐标后，C点的坐标可以用中点公式容易的计算出来。

至此已经完整的解决了本题。由于本文主要阐述极限法的应用，所以具体的算法就不给出了，读者已能够根据分析过程自行完成。

【总结】

通过对前面3个例题的仔细分析，相信大家已经逐渐的了解了极限法的含义和用法，并且领略到了它的威力：简明[12]而又实用。可以说，极限法是解决平面最优化问题的捷径。

极限法在证明中需要有比较扎实的平面几何功底，使用起来有一定的难度。

极限法的精髓要靠自己在分析的过程中去领会，灵活的掌握更需要经验的积累。

【感谢】

由衷的感谢栗师和何林同学在我研究例题 2 时给予的帮助。

衷心的感谢向期中老师以及计算机兴趣小组的同学们，阅读我的论文并提供各种宝贵的修改意见和建议。

【参考文献】无。

[12] 分析完成后算法都很简明。