4.1 Vector Spaces and Subspaces

定義：向量空間（Vector Space）

向量空間（vector space）為一個非空集合 V，遵守以下幾點公理（axiom）：

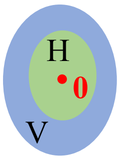
令 **u**、**v**、**w** in V，c、d 是純量（scalar）

1. **u** + **v** 也在 V 中（加法封閉性）
2. **u** + **v** = **v** + **u**
3. (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)
4. 存在零向量 **0** in V，使得 **u** + **0** = **u**
5. 對任何 **u** in V，都存在 **-u** in V，而 **u** + (**-u**) = **0**
6. c**u** 也在 V 中（乘法封閉性）
7. c(**u** + **v**) = c**u** + c**v**
8. (c + d)**u** = c**u** + d**u**
9. c(d**u**) = (cd)**u**
10. 1**u** = **u**

定義：子空間（Subspace）

向量空間（vector space）V 的子空間（subspace）是 V 的子集（subset）H，滿足：

1. V 中的零向量也在 H 中
2. 若 **u**、**v** 在 H 中，則 **u** + **v** 也在 H 中（加法封閉性）
3. 若 **u** 在 H 中且 c 為純量（scalar），則 c**u** 也在 H 中（乘法封閉性）



定理 1：

若 $\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_p}$ 在向量空間（vector space）V 中，則 $Span\{\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_p}\}$ 是 V 的一個子空間（subspace）

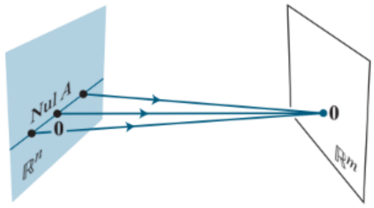
4.2 Null Spaces Column Spaces Row Spaces and Linear Transformations

定義：零空間（Null Space）

一個 m × n 的矩陣 A 的零空間（null space）寫為 $Nul\ A$，是齊次方程式（homogeneous equation）A**x** = **0** 的所有解的集合，寫成集合形式：

$$Nul\ A = \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{x}\ in\ \mathbb{R}^n\ \&\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$ – 隱式（implicit）

如下圖所示：$Nul\ A$ 在定義域（domain）中



定理 2：

一個 m × n 的矩陣 A 的零空間（null space）是 $\mathbb{R}^n$ 的一個子空間，若且唯若（if and only if）由 m 個由 n 個未知數構成的齊次線性方程組（homogeneous linear equation）A**x** = **0** 的解集是 $\mathbb{R}^n$的一個子空間（subspace）

證明：$Nul\ A$ 是 $\mathbb{R}^n$的一個子空間（subspace）

令 A**u** = **0** & A**v** = **0**

1. A(**0**) = **0**
2. A(**u** + **v**) = A**u** + A**v** = **0** + **0** = **0**
3. A(c**u**) = c(A**u**) = c × **0** = **0**

因為滿足 1. 2. 3.，所以 $Nul\ A$ 是 $\mathbb{R}^n$的一個子空間

$Nul\ A$ 的顯式描述（Explicit Description of $Nul\ A$）

解出 A**x** = **0** 的線性組合（linear combination）的向量形成的集合即為 $Nul\ A$ 的顯式描述（explicit description）

Ex. $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ 的解為 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

即為 $x_2\boldsymbol{u}+x_4\boldsymbol{v}+x_5\boldsymbol{w}$
則 $Nul\ A$ 的顯式描述是 $Span\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ 或直接寫為 $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$
<註> $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ 亦為生成 $Nul\ A$ 的線性獨立（linearly independent）集合
=> 是 $Nul\ A$ 的一組基底（basis）

定義：行空間（Column Space）

一個 m × n 的矩陣 A 的行空間（column space）寫為 $Col\ A$，是 A 的行的所有線性組合（linear combination）的集合，若$A=[\boldsymbol{a_1}\quad\cdots\quad\boldsymbol{a_n}]$

$$Col\ A=Span\{\boldsymbol{a_1},\cdots,\boldsymbol{a_n}\}\ -\ \text{顯式（explicit）}$$

$Col\ A$ 在對應域（codomain）中
<補充> $Col\ A=\{\boldsymbol{b}:\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}\ \&\ \boldsymbol{x}\ in\ \mathbb{R}^n\}$ – 隱式（implicit）

定理 3：

一個 m × n 的矩陣 A 的行空間（column space）是 $\mathbb{R}^m$ 的一個子空間（subspace）
<註> 一個 m × n 的矩陣 A 的行空間（column space）等於 $\mathbb{R}^m$，若且唯若（if and only if）A**x** = **b** 對於任何 **b** in $\mathbb{R}^m$ 都有解

列空間（Row Space）

一個 m × n 的矩陣 A 的列空間（row space）寫為 $Row\ A$，是 A 的列的所有線性組合（linear combination）的集合，若$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b_1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b_m}\end{bmatrix}$

$$Row\ A=Span\{\boldsymbol{b_1},\cdots,\boldsymbol{b_m}\}\ -\ \text{顯式（explicit）}$$

<補充> $Row\ A=\{\boldsymbol{b}:\boldsymbol{b}=A^T\boldsymbol{x}\ \&\ \boldsymbol{x}\ in\ \mathbb{R}^n\}$ – 隱式（implicit）
<註> $Row\ A=Col\ A^T$

比較 A 為 m × n 矩陣的 $Nul\ A$ 和 $Col\ A$

$Nul\ A$	$Col\ A$
1. $Nul\ A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空間	1. $Col\ A$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空間
2. $Nul\ A$ 是隱式定義：給定向量 **x** 必須滿足 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (需要解方程式)	2. $Col\ A$ 是顯式定義：給定向量 **b** 是透過 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 形成的 (直接得到答案)
3. $Nul\ A$ 與 A 之間無明顯的直接關係	3. $Col\ A$ 是由 A 中的軸行形成的集合
4. $Nul\ A$ 中的向量 $\boldsymbol{v}$ 滿足 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$	4. $Col\ A$ 中的向量 $\boldsymbol{v}$ 滿足 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ 是一致的（有解）
5. $Nul\ A = \{\mathbf{0}\}$ 若且唯若 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有平凡解	5. $Col\ A = \mathbb{R}^m$ 若且唯若 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 對於任何 $\boldsymbol{b}$ in $\mathbb{R}^m$ 都有解
6. $Nul\ A = \{\mathbf{0}\}$ 若且唯若線性轉換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 是一對一的	6. $Col\ A = \mathbb{R}^m$ 若且唯若線性轉換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 從 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 是滿射

定義：

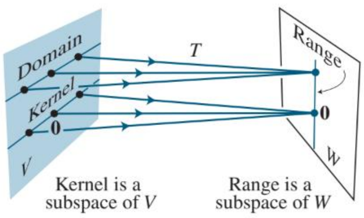
線性變換（linear transformation）T 從向量空間（vector space）V 到向量空間（vector space）W，將 V 中的向量 **x** 轉換為另一個在 W 中的唯一向量 T(**x**)，並滿足：

1. $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}\ in\ V$
2. $T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u}\ in\ V$、$a$ 為純量 (scalar)

線性變換的核與值域（Kernel and Range of a Linear Transformation）

1. 線性變換（linear transformation）T 的核（kernel，或稱零空間 null space）是對於所有滿足 T(**u**) = **0** 的 **u** 形成的集合
2. 線性變換（linear transformation）T 的值域（range）是所有 V 中的向量 **x** 轉換為另一個在 W 中的唯一向量 T(**x**)形成的集合

線性變換（linear transformation）$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$的核（kernel）與值域（range）分別為 A 的零空間（null space，$Nul\ A$）與行空間（column space，$Col\ A$）



4.3 Linearly Independent Sets; Bases

定理 4：

一個包含兩個以上向量的索引集合 $\{\boldsymbol{v_1}, \quad \cdots \quad, \boldsymbol{v_p}\}$ 且 $\boldsymbol{v_1} \neq \boldsymbol{0}$，是線性相依（linearly dependent）若且唯若（if and only if）有某個向量 $\boldsymbol{v_j}$ (j > 1) 是前面的向量 $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{j-1}}$ 的線性組合 (linear combination)

<**註**> 1.7 定理 7

定義：

令 H 是向量空間（vector space）V 的一個子空間（subspace）。如果滿足以下條件，則向量集合 $\mathcal{B}$ in V 是 H 的一個基底（basis）：

1. $\mathcal{B}$ 是線性獨立（linearly independent）集合
2. 由集合 $\mathcal{B}$ 生成（span）的子空間（subspace）與 H 完全相同，即：

$$H = Span\ \mathcal{B}\ (\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \quad \cdots \quad, \boldsymbol{b_p}\})$$
$$= x_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + x_p\boldsymbol{b_p}$$

標準基底（Standard Basis）

令 $S = \{\boldsymbol{e_1}, \quad \cdots \quad, \boldsymbol{e_n}\}$，且 $[\boldsymbol{e_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e_n}]$ 為單位矩陣 I_n ，則 S 就稱為 $\mathbb{R}^n$ 的標準基底（standard basis）

定理 5：生成集定理（The Spanning Set Theorem）

令 $S = \{\boldsymbol{v_1}, \quad \cdots \quad, \boldsymbol{v_p}\}$ 是向量空間（vector space）V 中的一個集合，且讓 $H = Span\{\boldsymbol{v_1}, \quad \cdots \quad, \boldsymbol{v_p}\}$，則：

1. 若集合 S 中有一個向量 $\boldsymbol{v_k}$ 是其他向量的線性組合（linear combination），則將集合 S 中的 $\boldsymbol{v_k}$ 去除後仍可以生成（span）H
2. 若 $H \neq \{\boldsymbol{0}\}$，則 S 中存在某些子集（subset）是 H 的基底（basis）

定理 6：

A 的軸行（pivot column）構成 $Col\ A$ 的基底（basis）

定理 7：

若兩矩陣 A、B 是列等價（row equivalent）的，則 $Row\ A =\ Row\ B$。若 B 是階梯型矩陣（echelon form），則 B 的非零列構成 A、B 的基底（basis）

$Nul\ A$、$Col\ A$、$Row\ A$ 的基底求法

設兩矩陣 A、B 列等價（row equivalent），且 B 為階梯型矩陣（echelon form）

1. A**x** = **0** 的解構成 $Nul\ A$ 的基底（basis）
2. A 的軸行（pivot column）構成 $Col\ A$ 的基底（basis）
3. B 的軸列（pivot row）構成 $Row\ A$ 的基底（basis）

4.4 Coordinate Systems

定理 8：唯一表示定理（The Unique Representation Theorem）

令 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \cdots, \boldsymbol{b_n}\}$ 是向量空間（vector space）V 的一個基底（basis），則對任何 **x** in V 都存在一個唯一的純量集合 $\{\boldsymbol{c_1}, \cdots, \boldsymbol{c_n}\}$，使得：

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + c_n\boldsymbol{b_n}$$

證明：設 x 有另外一組純量集合，使得 $\boldsymbol{x} = d_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + d_n\boldsymbol{b_n}$，則將上式與左式相減可得 $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = (c_1 - d_1)\boldsymbol{b_1} + \cdots + (c_n - d_n)\boldsymbol{b_n}$

$\because$ $\mathcal{B}$ 是線性獨立（linearly independent）的

$\therefore$ $c_i - d_i = 0, \quad 1 \le i \le n$

$\Rightarrow c_i = d_i$, 得證

定義：

已知 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \cdots, \boldsymbol{b_n}\}$ 是向量空間（vector space）V 的一個基底（basis）且 **x** in V，則 **x** 相對於基底（basis）$\mathcal{B}$ 的座標（或稱為 **x** 的 $\mathcal{B}$ 座標，$\mathcal{B} - coordinate\ of\ \boldsymbol{x}$）是以 **x** 的線性組合（linear combination）的權重形成的向量 $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$，即：

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + c_n\boldsymbol{b_n}$$

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

映射（mapping）$\boldsymbol{x} \mapsto [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ 是由基底（basis）$\mathcal{B}$ 決定的座標映射（coordinate mapping）

$\mathbb{R}^n$ 的座標（Coordinate in $\mathbb{R}^n$）

令 $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b_1}, \ \cdots \ ,\boldsymbol{b_n}\}$、$P_{\mathcal{B}}=[\boldsymbol{b_1} \ \cdots \ \boldsymbol{b_n}]$、$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$，則向量方程為 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{b_1}+\cdots+c_n\boldsymbol{b_n}$ 等價於 $\boldsymbol{x}=P_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$。$P_{\mathcal{B}}$ 稱為座標變換矩陣（change-of-coordinates matrix）。

定理 9：

令 $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b_1}, \ \cdots \ ,\boldsymbol{b_n}\}$ 為向量空間（vector space）V 中的一個基底（basis），則座標映射（coordinate mapping）$\boldsymbol{x}\mapsto[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ 是一對一（one-to-one）的線性變換（linear transformation）從 V 滿射（onto）$\mathbb{R}^n$

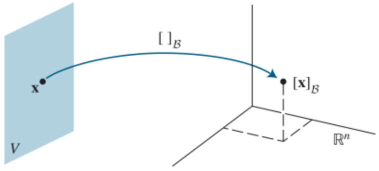


FIGURE 5 The coordinate mapping from V onto $\mathbb{R}^n$.

同構（Isomorphism）

定理 9 中的座標映射（coordinate mapping）是從 V 到 $\mathbb{R}^n$ 的一個同構（isomorphism）例子。同構的特性為：

1. 一對一（one-to-one）
2. 滿射（onto）
3. 線性變換（linear transformation）

4.5 The Dimension of a Vector Space

定理 10：

若向量空間（vector space）V 的基底（basis）$\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b_1}, \ \cdots \ ,\boldsymbol{b_n}\}$，則任何**超過 n 個向量**形成的集合必為線性相依（linearly dependent）

定理 11：

若向量空間（vector space）V 的一個基底（basis）有 n 個向量，則每個基底（basis）都**必須為 n 個向量組成**

<證明> 令 $\mathcal{B}_1$ 為 V 中由 n 個向量形成的基底（basis）、$\mathcal{B}_2$ 為 V 中的其他基底（basis）

∵ $\mathcal{B}_1$是基底（basis）

∴ $\mathcal{B}_1$ 線性獨立（linearly independent）且生成（span）V

∵ $\mathcal{B}_2$ 是基底（basis）而代表必為線性獨立（linearly independent）

∴ 根據定理 10，$\mathcal{B}_2$ 的向量數必 ≤ n　**– (1)**

∵ $\mathcal{B}_2$ 是基底（basis）而代表必能生成（span）V

∵ $\mathcal{B}_2$ 的向量數必 ≥ n　**– (2)**

結合 **(1)**、**(2)** 可知 $\mathcal{B}_2$ 的向量數必為 n

定義：

若向量空間（vector space）V 由一個有限的集合生成（span），則稱為有限維（finite-dimensional），而 V 的維度（dimension）為 $dim\,V$，是 V 的基底（basis）的向量數。

向量空間 **{0}** 的維度（dimension）定義為 0。

若 V 不是由有限的集合生成（span），則稱為無限維（infinite-dimensional）。

定理 12：

令 H 為有限維（finite-dimensional）的向量空間（vector space）V。任何 H 中的線性獨立（linearly independent）集合都可被擴充成 H 的基底（basis）。而 H 也是有限維（finite-dimensional）的且 $dim\,H \leq dim\,V$

定理 13：基底定理（The Basis Theorem）

令 V 為 p 維向量空間（p-dimensional vector space），$p \geq 1$。滿足以下任一點的描述的集合皆可自然而然地成為 V 的基底（basis）。

1. 任何在 V 中的線性獨立（linearly independent）集合，其中集合元素為 p
2. 任何在 V 中能夠生成（span）V 的集合，其中集合元素為 p

<證明> 1. 可由定理 12 得知任何向量空間中的線性獨立集合能擴充為基底，而結合定理 11 說明新的基底維度 ＝ 向量空間維度時即為基底

2. 可由定理 5 知能生成 V 的集合中有子集為基底，而結合定理 11 說明新的基底維度 ＝ 向量空間維度時即為基底

定義：

m × n 的矩陣 A 的秩（rank）為其行空間（column space）的維度（dimension），也等同於軸行（pivot column）。

m × n 的矩陣 A 的零度（nullity）為其零空間（null space）的維度（dimension），也等同於自由變數（free variable）數量。

$$\{basic\ variable\ 數\} + \{free\ variable\ 數\} = \{column\ 數\}$$
$$\{dim(Col\ A)\} + \{dim(Nul\ A)\} = \{column\ 數\}$$

定理 14：秩定理（The Rank Theorem）

m × n 的矩陣 A 的行空間（column space）與零空間（null space）的維度（dimension）滿足方程式：

$$rank\ A + nullity\ A = A 的行數 = n$$
$$rank\ A^T + nullity\ A^T = A^T 的行數 = A 的列數 = m$$
$$(\ rank\ A^T = dim\ (Col\ A^T) = dim\ (Row\ A) = dim\ (Col\ A) = rank\ A\ )$$

定理：可逆矩陣定理-續（The Invertible Matrix Theorem - continue）

以下幾點具有**等價性**（全符合或全不符合，**不存在部分符合**）

A 是 n × n 的方陣（square matrix）

13. A 的行可構成 $\mathbb{R}^n$ 的基底（basis）
14. $Col\ A = \mathbb{R}^n$（A 的行空間等於$\mathbb{R}^n$）
15. $rank\ A = n$
16. $nullity\ A = 0$
17. $Nul\ A = \{\mathbf{0}\}$

2.3 定理 8

<證明> 13. 因為 5. 說明其線性獨立且 8. 說明可以生成 $\mathbb{R}^n$，所以可構成 $\mathbb{R}^n$ 的基底

14. 因為 7. 說明 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^n$ 都有解，所以 $Col\ A = \mathbb{R}^n$

15. 因為 3. 說明 A 有 n 個軸元位置，即 n 個軸行，秩為 n

16. 因為 5. 說明其線性獨立，因此沒有自由變數，則零度為 0

17. 因為 16. 說明零度為 0，所以零空間只存在零向量，即 $Nul\ A = \{\mathbf{0}\}$

定理：可逆矩陣定理（The Invertible Matrix Theorem）

以下幾點具有**等價性**（全符合或全不符合，**不存在部分符合**）

A 是 n × n 的方陣（square matrix）

1. A 是可逆（invertible）矩陣
2. A 的列等價（row equivalent）於 n × n 的單位矩陣

A 可經由初等列運算轉換為 n × n 的單位矩陣

3. A 有 n 個軸元位置（pivot position）
4. A$\mathbf{x}$ = $\mathbf{0}$ 只有平凡解（trivial solution）
5. A 的行構成一個線性獨立（linearly independent）的集合
6. 線性變換（linear transformation）$\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 是一對一（one-to-one）
7. 對於任何 $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^n$，A$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ 都有至少一個解
8. A 的行生成（span）$\mathbb{R}^n$
9. 線性變換（linear transformation）$\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 從 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 是滿射（onto）
10. 有一個 n × n 的矩陣 C，使得 CA = I
11. 有一個 n × n 的矩陣 D，使得 AD = I
12. A^T是可逆（invertible）矩陣
13. A 的行可構成 $\mathbb{R}^n$ 的基底（basis）
14. $Col\ A = \mathbb{R}^n$（A 的行空間等於$\mathbb{R}^n$）
15. $rank\ A = n$
16. $nullity\ A = 0$
17. $Nul\ A = \{\mathbf{0}\}$

曾靖諺 製

中英對照表

英文	中文
Vector space	向量空間
Subspace	子空間
Subset	子集
Zero subspace	零子空間
Null space	零空間
Column space	行空間
Row space	列空間
Implicit	隱含
Explicit	明確
Kernel	核
Basis	基底
Standard basis	標準基底
Coordinate mapping	座標映射
Isomorphism	同構
Dimension	維度
Finite-dimensional	有限維
Infinite-dimensional	無限維
Rank	秩
Nullity	零度