Chương 4

Thống kê. Ước lượng tham số

TUẦN 11

4.1 Lý thuyết mẫu

Thống kê toán là bộ môn toán học nghiên cứu quy luật của các hiện tượng ngẫu nhiên có tính chất số lớn trên cơ sở thu thập và xử lý số liệu thống kê các kết quả quan sát về những hiện tượng ngẫu nhiên này. Nếu ta thu thập được các số liệu liên quan đến tất cả đối tượng cần nghiên cứu thì ta có thể biết được đối tượng này (phương pháp toàn bộ). Tuy nhiên trong thực tế điều đó không thể thực hiện được vì quy mô của các đối tượng cần nghiên cứu quá lớn hoặc trong quá trình nghiên cứu đối tượng nghiên cứu bị phá hủy. Vì vậy cần lấy mẫu để nghiên cứu.

Mục này giới thiệu về phương pháp lấy mẫu ngẫu nhiên và các thống kê thường gặp của mẫu ngẫu nhiên.

4.1.1 Tổng thể và mẫu

Khái niệm tổng thể

Khi nghiên cứu các vấn đề về kinh tế - xã hội, cũng như nhiều vấn đề thuộc các lĩnh vực vật lý, sinh vật, quân sự ... thường dẫn đến khảo sát một hay nhiều dấu hiệu (định tính hoặc định lượng) thể hiện bằng số lượng trên nhiều phần tử. Tập hợp tất cả các phần tử này gọi là tổng thể hay đám đông (population). Số phần tử trong tổng thể có thể là hữu hạn hoặc vô hạn. Cần nhấn mạnh rằng ta không nghiên cứu trực tiếp bản thân tổng thể mà chỉ nghiên cứu dấu hiệu nào đó của nó.

Ký hiệu N là số phần tử của tổng thể; $\mathcal{X}$ là dấu hiệu cần khảo sát.

Ví dụ 4.1. **(a)** Muốn điều tra thu nhập bình quân của các hộ gia đình ở Hà Nội thì tập hợp cần nghiên cứu là các hộ gia đình ở Hà Nội, dấu hiệu nghiên cứu là thu nhập của từng hộ gia đình (dấu hiệu định lượng).

(b) Một doanh nghiệp muốn nghiên cứu các khách hàng của mình về dấu hiệu định tính có thể là mức độ hài lòng của khách hàng đối với sản phẩm hoặc dịch vụ của doanh nghiệp, còn dấu hiệu định lượng là số lượng sản phẩm của doanh nghiệp mà khách hàng có nhu cầu được đáp ứng.

Một số lý do không thể khảo sát toàn bộ tổng thể

(a) Do quy mô của tập hợp cần nghiên cứu quá lớn nên việc nghiên cứu toàn bộ sẽ đòi hỏi nhiều chi phí về vật chất và thời gian, có thể không kiểm soát được dẫn đến bị chồng chéo hoặc bỏ sót.

(b) Trong nhiều trường hợp không thể nắm được toàn bộ các phần tử của tập hợp cần nghiên cứu, do đó không thể tiến hành toàn bộ được.

(c) Có thể trong quá trình điều tra sẽ phá hủy đối tượng nghiên cứu...

Do đó thay vì khảo sát tổng thể, ta chỉ cần chọn ra một tập nhỏ để khảo sát và đưa ra quyết định.

Khái niệm tập mẫu

Tập mẫu (sample) là tập con của tổng thể và có tính chất tương tự như tổng thể. Số phần tử của tập mẫu được gọi là kích thước mẫu (cỡ mẫu), ký hiệu là n.

Chương 4 và Chương 5 sẽ nghiên cứu tổng thể thông qua mẫu. Nói nghiên cứu tổng thể có nghĩa là nghiên cứu một hoặc một số đặc trưng nào đó của tổng thể. Khi đó, ta không thể đem tất cả các phần tử trong tổng thể ra nghiên cứu mà chỉ lấy một số phần tử trong tổng thể ra nghiên cứu và làm sao qua việc nghiên cứu này có thể kết luận được về một hoặc một số đặc trưng của tổng thể mà ta quan tâm ban đầu.

Một số cách chọn mẫu cơ bản

Một câu hỏi đặt ra là làm sao chọn được tập mẫu có tính chất tương tự như tổng thể để các kết luận của tập mẫu có thể dùng cho tổng thể?

Ta sử dụng một trong những cách chọn mẫu sau:

1. Chọn mẫu ngẫu nhiên có hoàn lại: Lấy ngẫu nhiên một phần tử từ tổng thể và khảo sát nó. Sau đó trả phần tử đó lại tổng thể trước khi lấy một phần tử khác. Tiếp tục như thế n lần ta thu được một mẫu có hoàn lại gồm n phần tử.

2. Chọn mẫu ngẫu nhiên không hoàn lại: Lấy ngẫu nhiên một phần tử từ tổng thể và khảo sát nó rồi để qua một bên, không trả lại tổng thể. Sau đó lấy ngẫu nhiên một phần tử khác, tiếp tục như thế n lần ta thu được một mẫu không hoàn lại gồm n phần tử.

3. Chọn mẫu phân nhóm: Đầu tiên ta chia tập nền thành các nhóm tương đối thuần nhất, từ mỗi nhóm đó chọn ra một mẫu ngẫu nhiên. Tập hợp tất cả mẫu đó cho ta một mẫu phân nhóm. Phương pháp này dùng khi trong tập nền có những sai khác lớn. Hạn chế là phụ thuộc vào việc chia nhóm.

4. Chọn mẫu có suy luận: Dựa trên ý kiến của chuyên gia về đối tượng nghiên cứu để chọn mẫu.

4.1.2 Mẫu ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên và quy luật phân phối gốc

Giả sử ta cần nghiên cứu dấu hiệu $\mathcal{X}$ của tổng thể có $E(\mathcal{X}) = \mu$ và $V(\mathcal{X}) = \sigma^2$ (μ và σ chưa biết). Ta có thể mô hình hóa dấu hiệu $\mathcal{X}$ bằng một biến ngẫu nhiên. Thật vậy, nếu lấy ngẫu nhiên từ tổng thể ra một phần tử và gọi X là giá trị của dấu hiệu $\mathcal{X}$ đo được trên phần tử lấy ra thì X là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất là

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\dots$	$P(X = x_n)$

Như vậy dấu hiệu $\mathcal{X}$ mà ta nghiên cứu được mô hình hóa bởi biến ngẫu nhiên X, còn cơ cấu của tổng thể theo dấu hiệu $\mathcal{X}$ (tập hợp các xác suất) chính là quy luật phân phối xác suất của X.

Biến ngẫu nhiên X được gọi là biến ngẫu nhiên gốc. Quy luật phân phối xác suất của X là quy luật phân phối gốc, đồng thời $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$.

Các đặc trưng của tổng thể

Xét tổng thể về mặt định lượng: tổng thể được đặc trưng bởi dấu hiệu $\mathcal{X}$ được mô hình hóa bởi biến ngẫu nhiên X. Ta có các tham số đặc trưng sau đây:

(a) Trung bình tổng thể: $E(X) = \mu$.

(b) Phương sai tổng thể: $V(X) = \sigma^2$.

(c) Độ lệch chuẩn của tổng thể: $\sigma(X) = \sigma$.

Xét tổng thể về mặt định tính: tổng thể có kích thước N, trong đó có M phần tử có tính chất A. Khi đó $p = \dfrac{M}{N}$ gọi là tỷ lệ tính chất A của tổng thể.

Khái niệm mẫu ngẫu nhiên

Giả sử tiến hành n phép thử độc lập. Gọi X_i là "giá trị của dấu hiệu $\mathcal{X}$ đo lường được trên phần tử thứ i của mẫu" $i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là n biến ngẫu nhiên độc lập có cùng quy luật phân phối xác suất với X.

Định nghĩa 4.1 (Mẫu ngẫu nhiên)**.** Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối xác suất $F_X(x)$. Một mẫu ngẫu nhiên cỡ n được thành lập từ biến ngẫu nhiên X là n biến ngẫu nhiên độc lập có cùng quy luật phân phối xác suất $F_X(x)$ với biến ngẫu nhiên X.

Ký hiệu mẫu ngẫu nhiên: $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Thực hiện một phép thử đối với mẫu ngẫu nhiên W_X tức là thực hiện một phép thử đối với mỗi thành phần X_i của mẫu. Giả sử X_1 nhận giá trị x_1, X_2 nhận giá trị x_2, ..., X_n nhận giá trị x_n ta thu được một mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ví dụ 4.2. Gọi X là "số chấm xuất hiện khi gieo một con xúc xắc". X là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Nếu gieo con xúc xắc 3 lần và gọi X_i là "số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ i", $i = 1, 2, 3$ thì ta có 3 biến ngẫu nhiên độc lập có cùng quy luật phân phối xác suất với X. Vậy ta có một mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, X_3)$ cỡ $n = 3$ được xây dựng từ biến ngẫu nhiên gốc X. Thực hiện một phép thử đối với mẫu ngẫu nhiên này (tức là gieo 3 lần một con xúc xắc). Giả sử lần thứ nhất xuất hiện mặt 6, lần thứ hai xuất hiện mặt 2, lần thứ ba xuất hiện mặt 1 thì ta có một giá trị của mẫu ngẫu nhiên $W_x = (6, 3, 1)$.

4.1.3 Mô tả giá trị của mẫu ngẫu nhiên

Phân loại dữ liệu

Từ tổng thể ta trích ra tập mẫu có n phần tử. Ta có n số liệu.

(a) Dạng liệt kê: Các số liệu thu được được ghi lại thành dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(b) Dạng rút gọn: Số liệu thu được có sự lặp đi lặp lại một số giá trị thì ta có dạng rút gọn sau:

(b1) Dạng tần số: $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

(b2) Dạng tần suất: $(f_k = n_k/n)$

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần suất	f_1	f_2	...	f_k

(c) Dạng khoảng: Dữ liệu thu được nhận giá trị trong (a, b). Ta chia (a, b) thành k miền con bởi các điểm chia: $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k = b$.

(c1) Dạng tần số: $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$

Giá trị	$(a_0 - a_1]$	$(a_1 - a_2]$	...	$(a_{k-1} - a_k]$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

(c2) Dạng tần suất: $(f_k = n_k/n)$

Giá trị	$(a_0, a_1]$	$(a_1, a_2]$	...	$(a_{k-1}, a_k]$
Tần suất	f_1	f_2	...	f_k

Chú ý, thông thường, độ dài các khoảng chia bằng nhau. Khi đó ta có thể chuyển về dạng rút gọn:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

trong đó x_i là điểm đại diện cho $(a_{i-1}, a_i]$ thường được xác định là trung điểm của đoạn đó: $x_i = \dfrac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)$.

Phân phối thực nghiệm

Đặt w_i là tần số tích lũy của x_i và $F_n(x_i)$ là tần suất tích lũy của x_i, ta sẽ có

$$w_i = \sum_{x_j < x_i} n_j; \quad F_n(x_i) = \frac{w_i}{n} = \sum_{x_j < x_i} f_j$$

thì $F_n(x_i)$ là một hàm của x_i và được gọi là hàm phân phối thực nghiệm của mẫu hay hàm phân phối mẫu. Chú ý rằng theo luật số lớn (Định lý Béc-nu-li) $F_n(x)$ hội tụ theo xác suất về $F_X(x) = P(X < x)$, trong đó X là biến ngẫu nhiên gốc cảm sinh ra tổng thể (và cả tập mẫu). Như vậy hàm phân phối mẫu có thể dùng để xấp xỉ luật phân phối của tổng thể.

Biểu diễn dữ liệu

Thông thường ta biểu diễn phân phối tần số, tần suất bằng đồ thị. Có hai dạng biểu diễn đồ thị hay dùng là biểu đồ và đa giác tần số (sinh viên tự đọc).

4.1.4 Đại lượng thống kê và các đặc trưng của mẫu ngẫu nhiên

Để nghiên cứu mẫu ngẫu nhiên gốc X, nếu dừng lại ở mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ thì rõ ràng chưa giải quyết được vấn đề gì, bởi các biến ngẫu nhiên X_i có cùng quy luật phân phối xác suất với X mà ta chưa biết hoàn toàn. Vì vậy ta phải liên kết hay tổng hợp các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lại sao cho biến ngẫu nhiên mới thu được có những tính chất mới, có thể đáp ứng được yêu cầu giải những bài toán khác nhau về biến ngẫu nhiên gốc X.

Định nghĩa thống kê

Định nghĩa 4.2 (Thống kê)**.** Trong thống kê toán việc tổng hợp mẫu $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ được thực hiện dưới dạng hàm của các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ký hiệu

$$\boxed{G = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)} \tag{4.1}$$

ở đây f là một hàm nào đó và G được gọi là một thống kê.

Khi có mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_2)$, ta tính được giá trị cụ thể của G, ký hiệu là $g = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, còn gọi là giá trị quan sát của thống kê.

Nhận xét 4.1. Thống kê G là một hàm của các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nên cũng là một biến ngẫu nhiên. Do đó ta có thể xét các đặc trưng của thống kê này.

Trung bình mẫu ngẫu nhiên

Cho mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Trung bình mẫu của mẫu ngẫu nhiên W_X của biến ngẫu nhiên gốc X được định nghĩa và ký hiệu

$$\boxed{\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} \tag{4.2}$$

Nếu biến ngẫu nhiên gốc có kỳ vọng $E(X) = \mu$, phương sai $V(X) = \sigma^2$ thì theo Tính chất 2.4(c) và Tính chất 2.5(c) của kỳ vọng và phương sai, thống kê $\overline{X}$ có kỳ vọng $E(\overline{X}) = \mu$ và phương sai $V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ nhỏ hơn phương sai của biến ngẫu nhiên gốc n lần, nghĩa là các giá trị có thể có của $\overline{X}$ ổn định quanh kỳ vọng μ hơn các giá trị có thể có của X.

Phương sai mẫu ngẫu nhiên

Phương sai mẫu của mẫu ngẫu nhiên W_X của biến ngẫu nhiên gốc X được ký hiệu và định nghĩa

$$\boxed{\hat{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X})^2} \tag{4.3}$$

Độ lệch chuẩn mẫu ngẫu nhiên được ký hiệu và xác định bởi

$$\boxed{\hat{S} = \sqrt{\hat{S}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} \tag{4.4}$$

Sử dụng Tính chất 2.4(c) của kỳ vọng, ta có

$$E(\hat{S}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Để kỳ vọng của phương sai mẫu ngẫu nhiên trùng với phương sai của biến ngẫu nhiên gốc ta cần một sự hiệu chỉnh. Đó là phương sai hiệu chỉnh mẫu ngẫu nhiên.

Phương sai hiệu chỉnh mẫu ngẫu nhiên

Phương sai hiệu chỉnh mẫu của mẫu ngẫu nhiên W_X của biến ngẫu nhiên gốc X được ký hiệu và định nghĩa

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1}\hat{S}^2} \tag{4.5}$$

Độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu ngẫu nhiên được ký hiệu và xác định bởi

$$\boxed{S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} \tag{4.6}$$

Theo Tính chất 2.4(c) của kỳ vọng ta nhận được

$$E(S^2) = \sigma^2.$$

Tần suất mẫu ngẫu nhiên

Trường hợp cần nghiên cứu một dấu hiệu định tính A nào đó mà mỗi cá thể của tổng thể có thể có hoặc không, giả sử p là tần suất có dấu hiệu A của tổng thể. Nếu cá thể có dấu hiệu A ta cho nhận giá trị 1, trường hợp ngược lại ta cho nhận giá trị 0. Lúc đó dấu hiệu nghiên cứu có thể xem là biến ngẫu nhiên X có phân phối Béc-nu-li tham số p có kỳ vọng $E(X) = p$ và phương sai $V(X) = p(1-p)$.

Lấy mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ trong đó X_1, X_2, $\ldots$ X_n là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối Béc-nu-li với tham số p. Tần số xuất hiện A trong mẫu là

$$m = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Khi đó tần xuất mẫu là một thống kê ký hiệu và xác định bởi

$$\boxed{f = \frac{m}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}} \tag{4.7}$$

Như vậy tần suất mẫu là trung bình mẫu của biến ngẫu nhiên X có phân bố Béc-nu-li tham số p. Ngoài ra theo Tính chất 2.4(c) và Tính chất 2.5(c), ta có

$$\boxed{E(f) = p, \quad V(f) = \frac{p(1-p)}{n}} \tag{4.8}$$

4.1.5 Cách tính giá trị cụ thể của trung bình mẫu và phương sai mẫu

Giả sử ta có mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cỡ n.

(a) Mẫu cho dưới dạng liệt kê. (Tần số của các x_i bằng 1)

(a1) Trung bình mẫu:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{4.9}$$

(a2) Phương sai mẫu:

$$\boxed{\hat{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{4.10}$$

(a3) Phương sai hiệu chỉnh mẫu:

$$\boxed{s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{s}^2} \tag{4.11}$$

(a4) Các độ lệch chuẩn:

$$\boxed{\hat{s} = \sqrt{\hat{s}^2}; \quad s = \sqrt{s^2}} \tag{4.12}$$

Để tính các công thức (4.9)–(4.12), ta lập bảng tính toán

x_i	x_i^2
x_1	x_1^2
x_2	x_2^2
$\ldots$	$\ldots$
x_n	x_n^2
$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$

(b) Mẫu cho ở dạng rút gọn. (Tần số của các x_i là $n_i > 1$, $\sum_{i=1}^k n_i = n$)

(b1) Trung bình mẫu:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i} \tag{4.13}$$

(b2) Phương sai mẫu:

$$\boxed{\hat{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2} \tag{4.14}$$

(b3) Phương sai hiệu chỉnh mẫu:

$$\boxed{s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{s}^2} \tag{4.15}$$

(b4) Các độ lệch chuẩn:

$$\boxed{\hat{s} = \sqrt{\hat{s}^2}; \quad s = \sqrt{s^2}} \tag{4.16}$$

Để tính các công thức (4.13)–(4.16), ta lập bảng tính toán

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
x_1	n_1	$n_1 x_1$	$n_1 x_1^2$
x_2	n_2	$n_2 x_2$	$n_2 x_2^2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	n_k	$n_k x_k$	$n_k x_k^2$
	$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$	$\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$	$\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2$

(c) Phương pháp đổi biến. (Trong trường hợp độ dài các khoảng bằng nhau)

(c1) Trung bình mẫu:

$$\boxed{\overline{x} = x_0 + h\overline{u} = x_0 + \frac{h}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i} \tag{4.17}$$

(c2) Phương sai mẫu:

$$\boxed{\hat{s}^2 = h^2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i\right)^2\right] = h^2 \hat{s}_u^2} \tag{4.18}$$

trong đó

x_i là điểm giữa của khoảng thứ i, $i = 1, 2, \dots, k$;

$u_i = \dfrac{x_i - x_0}{h}$, h là độ dài các khoảng;
$x_0 = x_i$ ứng với n_i lớn nhất.

Để tính các công thức (4.17)–(4.18), ta lập bảng tính toán

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$
x_1	n_1	u_1	$n_1 u_1$	$n_1 u_1^2$
x_2	n_2	u_2	$n_2 u_2$	$n_2 u_2^2$
...	...	...	...	...
x_k	n_k	u_k	$n_k u_k$	$n_k u_k^2$
	$\sum_{i=1}^k n_i = n$		$\sum_{i=1}^k n_i u_i$	$\sum_{i=1}^k n_i u_i^2$

Tính tham số đặc trưng mẫu trên máy tính CASIO FX570VN PLUS

Bước 1 Chuyển đổi máy tính về chương trình thống kê **MODE** $\rightarrow$ **3** $\rightarrow$ **AC**

Bước 2 Bật chức năng cột tần số/tần suất **SHIFT** $\rightarrow$ **MODE** $\rightarrow$ **Mũi tên đi xuống** $\rightarrow$ **4(STAT)** $\rightarrow$ **1(ON)**

Bước 3 Bật chế độ màn hình để nhập dữ liệu, Nhập số liệu **SHIFT** $\rightarrow$ **1** $\rightarrow$ **1(TYPE)** $\rightarrow$ **1(1-VAR)**
Chú ý nhập xong số liệu thì bấm **AC** để thoát.

Bước 4 Xem kết quả:

- Trung bình mẫu ($\overline{x}$): **SHIFT** $\rightarrow$ **1** $\rightarrow$ **4(VAR)** $\rightarrow$ **2**
- Độ lệch tiêu chuẩn mẫu hiệu chỉnh (s): **SHIFT** $\rightarrow$ **1** $\rightarrow$ **4** $\rightarrow$ **4**

Ví dụ 4.3. Ở một địa điểm thu mua vải, kiểm tra một số vải thấy kết quả sau

Số khuyết tật ở mỗi đơn vị	0	1	2	3	4	5	6
Số đơn vị kiểm tra (10m)	8	20	12	40	30	25	15

Hãy tính kỳ vọng mẫu và độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu của mẫu trên.

Lời giải Ví dụ 4.3
Cách 1: Gọi X là số khuyết tật ở mỗi đơn vị. Lập bảng tính toán

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
0	8	0	0
1	20	20	20
2	12	24	48
3	40	120	360
4	30	120	480
5	25	125	625
6	15	90	540
$\sum$	$n = 150$	$\sum_i n_i x_i = 499$	$\sum_i n_i x_i^2 = 2073$

Suy ra $\overline{x} = \dfrac{499}{150} = 3,3267$; $\overline{x^2} = \dfrac{2073}{150} = 13,82$; $\hat{s}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 13,82 - (3,3267)^2 = 2,7531$; $s^2 = \dfrac{150}{149} \times 2,7531 = 2,7715$; $s = \sqrt{2,7715} = 1,6648$.

Cách 2: Sử dụng máy tính CASIO FX570VN PLUS tính được $\overline{x} = 3,3267$; $s = 1,6648$.

4.1.6 Phân phối xác suất của các thống kê trung bình mẫu, phương sai mẫu, tần suất mẫu ngẫu nhiên

Giả sử dấu hiệu nghiên cứu trong tổng thể có thể xem như một biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng $E(X) = \mu$ và phương sai $V(X) = \sigma^2$. Các tham số này có thể đã biết hoặc chưa biết. Từ tổng thể rút ra một mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cỡ n. Các biến ngẫu nhiên thành phần X_i, $i = 1, \ldots, n$, độc lập có cùng quy luật phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ như X.

Chú ý rằng mọi tổ hợp tuyến tính của các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Vì vậy ta có các kết quả sau.

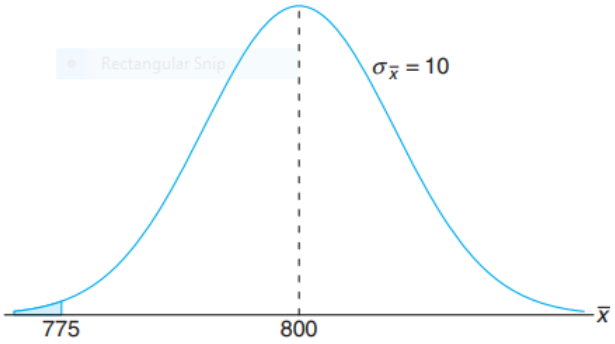
Phân phối của thống kê trung bình mẫu

Thống kê trung bình mẫu $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ có phân phối chuẩn $\mathcal{N}\left(\mu; \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ và do đó thống kê $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$ có phân phối chuẩn tắc (xem Định lý giới hạn trung tâm)

$$\boxed{\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)} \tag{4.19}$$

Ví dụ 4.4. Một công ty điện sản xuất bóng đèn có tuổi thọ là biến ngẫu nhiên phân phối xấp xỉ chuẩn, với tuổi thọ trung bình là 800 giờ và độ lệch chuẩn là 40 giờ. Tìm xác suất để một mẫu ngẫu nhiên gồm 16 bóng đèn sẽ có tuổi thọ trung bình dưới 775 giờ.

Lời giải Ví dụ 4.4 Gọi X là tuổi thọ của bóng đèn. $X \sim \mathcal{N}(800, 40^2)$. Khi đó, tuổi thọ trung bình của mẫu ngẫu nhiên $\overline{X}$ có phân phối xấp xỉ chuẩn với $\mu_{\overline{X}} = 800$ và $\sigma_{\overline{X}} = 40/\sqrt{16} = 10$. Xác suất cần tính là diện tích của vùng bóng mờ trong Hình 4.1.



Hình 4.1: Minh họa của Ví dụ 4.4

Vì $\overline{X} \sim \mathcal{N}(800, 10^2)$, nên

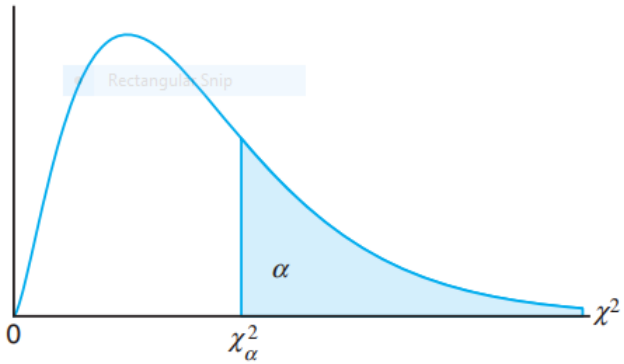
$$P(\overline{X} < 775) = 0,5 + \phi\left(\frac{775 - 800}{10}\right) = 0,5 + \phi(-2.5) = 0,5 - 0,49379 = 0.00621,$$

trong đó $\phi(-2,5) = -0,49379$ tra từ bảng giá trị hàm số Láp-la-xơ (Phụ lục 2).

Phân phối của thống kê phương sai mẫu

Thống kê $\chi^2 = \dfrac{n\hat{S}^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ có phân phối khi bình phương với $n-1$ bậc tự do

$$\boxed{\frac{n\hat{S}^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}} \tag{4.20}$$



Hình 4.2: Phân phối khi bình phương

(sinh viên tự đọc phân phối này).

Phân phối của thống kê $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$ **hoặc** $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}}\sqrt{n-1}$

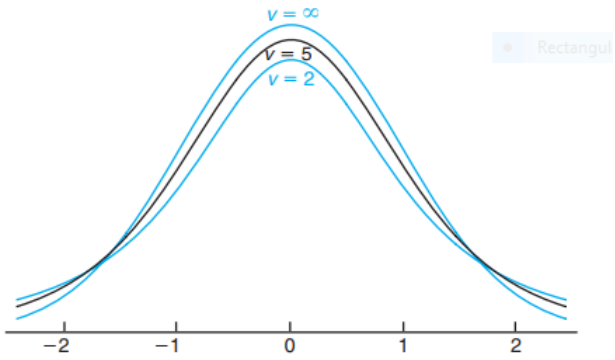
Thống kê $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}}\sqrt{n-1}$ có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.

$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} = \frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}}\sqrt{n-1} \sim \mathcal{T}^{(n-1)}} \tag{4.21}$$

Nhận xét 4.2. **(a)** Phân phối Student (của thống kê $T = T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$) có cùng dạng và tính đối xứng như phân phối chuẩn (của thống kê $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$) nhưng nó phản ánh tính biến đổi của phân phối sâu sắc hơn (do thực tế là giá trị T phụ thuộc vào sự biến động của hai đại lượng $\overline{X}$ và S^2, trong khi U chỉ phụ thuộc vào những thay đổi của $\overline{X}$ từ mẫu này sang mẫu khác).

(b) Phân phối chuẩn không thể dùng để xấp xỉ phân phối khi mẫu có kích thước nhỏ. Trong trường hợp này ta dùng phân phối Student.

(c) Khi bậc tự do n tăng lên ($n \geq 30$) thì phân phối Student tiến nhanh về phân phối chuẩn. Do đó khi $n \geq 30$ ta có thể dùng phân phối chuẩn thay thế cho phân phối Student.



Hình 4.3: Phân phối Student với số bậc tự do $v = 2, 5$ và ∞

Chú ý 4.1. Trong thực hành khi $n \geq 30$ ta có thể không cần đến giả thiết chuẩn của biến ngẫu nhiên gốc, thống kê $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$ xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0,1)$.

Nếu $T \sim \mathcal{T}(n)$ thì $P(T < t_\alpha^{(n)}) = \alpha$. Giá trị $t_\alpha^{(n)}$ được tra từ bảng phân phối Student (Phụ lục 4). Chẳng hạn với $n = 10$, $\alpha = 0,5$ thì $t_{1-\alpha/2}^{(n)} = t_{1-0,025}^{(10)} = t_{0,975}^{(10)} = 2,228$.

Phân phối của thống kê tần suất mẫu

Khi n đủ lớn ($np \geq 5$ và $n(1-p) \geq 5$) thì thống kê $U = \dfrac{f-p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$ có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn tắc

$$\boxed{U = \frac{f-p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)} \tag{4.22}$$

4.2 Ước điểm cho kỳ vọng, phương sai và tỷ lệ

Phương pháp ước lượng điểm chủ trương dùng giá trị quan sát của một thống kê để ước lượng một tham số (véc tơ tham số) nào đó theo các tiêu chuẩn: vững, không chệch, hiệu quả.

4.2.1 Ước lượng điểm

Khái niệm ước lượng điểm

Cho biến ngẫu nhiên gốc X có thể đã biết hoặc chưa biết quy luật phân phối xác suất dạng tổng quát, nhưng chưa biết tham số θ nào đó. Hãy ước lượng θ bằng phương pháp mẫu. Vì θ là một hằng số nên có thể dùng một số nào đó để ước lượng θ. Ước lượng như vậy gọi là ước lượng điểm.

Phương pháp hàm ước lượng

- Giả sử cần ước lượng tham số θ của biến ngẫu nhiên X. Từ X ta lập mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cỡ n. Chọn thống kê $G = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Một trong những cách chọn dạng hàm f là tương ứng thống kê đặc trưng của mẫu ngẫu nhiên với tham số cần ước lượng của biến ngẫu nhiên.

- Tiến hành lập mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tính giá trị cụ thể của G ứng với mẫu này, tức là $g = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Đây là ước lượng điểm của θ.

- Thống kê $G = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là hàm ước lượng của θ.

4.2.2 Các tiêu chuẩn lựa chọn hàm ước lượng

Cùng một mẫu ngẫu nhiên có thể xây dựng nhiều thống kê G khác nhau để ước lượng cho tham số θ. Vì vậy ta cần lựa chọn thống kê tốt nhất để ước lượng cho tham số θ dựa vào các tiêu chuẩn sau.

Ước lượng không chệch (unbiased estimator)

Thống kê G được gọi là ước lượng không chệch của θ nếu

$$\boxed{E(G) = \theta \quad \text{với mọi} \quad \theta} \tag{4.23}$$

Nếu $E(G) \neq \theta$ thì G là ước lượng chệch của θ.

Điều kiện (4.23) của ước lượng không chệch có nghĩa là trung bình các giá trị của G bằng θ. Tuy nhiên, không có nghĩa là mọi giá trị của G đều trùng khít với θ mà từng giá trị của G có thể sai lệch rất lớn so với θ. Vì vậy ta tìm ước lượng không chệch sao cho độ sai lệch trung bình là bé nhất.

Ước lượng hiệu quả (efficient estimator)

Thống kê G được gọi là ước lượng hiệu quả (hay ước lượng phương sai bé nhất) của θ nếu G là ước lượng không chệch của θ và phương sai của G nhỏ hơn bất kỳ phương sai của một hàm ước lượng không chệch nào khác.

Để xét xem ước lượng không chệch G có phải là ước lượng hiệu quả của θ hay không ta cần phải tìm một cận dưới của phương sai của các ước lượng không chệch và so sánh phương sai của G với cận dưới này. Điều này được giải quyết bằng bất đẳng thức Cramer–Rao phát biểu như sau: *Cho mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cỡ n được lấy từ tổng thể có dấu hiệu nghiên cứu được mô hình hóa bởi biến ngẫu nhiên X mà hàm mật độ xác suất (nếu là biến ngẫu nhiên liên tục) hay bảng phân phối xác suất (nếu là biến ngẫu nhiên rời rạc) thỏa mãn một số điều kiện nhất định (thường được thỏa mãn trong thực tế, ít ra là các phân phối xác suất đã xét trong Chương 2) và G là ước lượng không chệch bất kỳ của θ thì*

$$\boxed{V(G) \geq \frac{1}{nE\left(\frac{\partial(\ln f(X,\theta))}{\partial\theta}\right)^2}} \tag{4.24}$$

Ước lượng vững (consistent estimator)

Thống kê G được gọi là ước lượng vững của tham số θ nếu G hội tụ theo xác suất đến θ khi $n \to +\infty$.

4.2.3 Ước lượng điểm cho kỳ vọng, phương sai và xác suất

- Chọn hàm $G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ nếu ước lượng kỳ vọng $E(X) = \mu$. Kỳ vọng mẫu ngẫu nhiên $\overline{X}$ là ước lượng không chệch, hiệu quả và vững của kỳ vọng $E(X) = \mu$ của biến ngẫu nhiên gốc của tổng thể.

- Chọn $G = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = S^2$ nếu ước lượng phương sai $V(X) = \sigma^2$. Phương sai hiệu chỉnh mẫu ngẫu nhiên S^2 là ước lượng không chệch, hiệu quả và vững của phương sai $V(X) = \sigma^2$ của biến ngẫu nhiên gốc của tổng thể.
- Chọn $G = \dfrac{m}{n} = f$ nếu ước lượng cho xác suất p. Tần suất mẫu ngẫu nhiên f là ước lượng không chệch, hiệu quả và vững của xác suất p của tổng thể.

Ví dụ 4.5. Trong đợt vận động bầu cử tổng thống người ta phỏng vấn ngẫu nhiên 1600 cử tri thì được biết 960 người sẽ bỏ phiếu cho ứng cử viên A. Hãy chỉ ra ước lượng điểm cho tỷ lệ phiếu thực mà ứng cử viên A sẽ thu được.

Lời giải Ví dụ 4.5 Ước lượng điểm cần tìm là $f = \dfrac{960}{1600} = 0,6 = 60\%$.

4.2.4 Một số phương pháp tìm ước lượng điểm

(a) Phương pháp hợp lý cực đại (maximum-likelihood estimation)

(b) Phương pháp mô men (moment estimation)

(c) Phương pháp Bayes, phương pháp minimax, phương pháp bootstrap ...

(Sinh viên tự đọc).

TUẦN 12

4.3 Phương pháp ước lượng bằng khoảng tin cậy

Phương pháp ước lượng điểm nói trên có nhược điểm là khi kích thước mẫu bé thì ước lượng điểm có thể sai lệch rất nhiều so với giá trị của tham số cần ước lượng. Mặt khác phương pháp trên cũng không thể đánh giá được khả năng mắc sai lầm khi ước lượng là bao nhiêu. Do đó khi kích thước mẫu bé người ta thường dùng phương pháp ước lượng khoảng tin cậy cho trường hợp một tham số.

Khái niệm ước lượng khoảng

Giả sử chưa biết đặc trưng θ nào đó của biến ngẫu nhiên X. Ước lượng khoảng của θ là chỉ ra một khoảng số (g_1, g_2) nào đó chứa θ, tức là có thể ước lượng $g_1 < \theta < g_2$.

Phương pháp khoảng ước lượng tin cậy

Để ước lượng tham số θ của biến ngẫu nhiên X, từ biến ngẫu nhiên này ta lập mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cỡ n. Chọn thống kê $G(X, \theta)$ sao cho mặc dù chưa biết giá trị của θ, quy luật phân phối xác suất của G vẫn hoàn toàn xác định. Do đó, với xác suất α khá bé ta tìm được $P(G_1 < \theta < G_2) = 1 - \alpha$. Vì α khá bé, nên $\gamma = 1 - \alpha$ khá lớn (thông thường yêu cầu $1 - \alpha = \gamma \geq 0,95$ để có thể áp dụng nguyên lý xác suất lớn cho sự kiện $(G_1 < \theta < G_2)$). Khi đó, sự kiện $(G_1 < \theta < G_2)$ hầu như chắc chắn xảy ra trong một phép thử. Thực hiện một phép thử đối với mẫu ngẫu nhiên W_X ta thu được mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, từ đó tính được các giá trị của G_1, G_2, ký hiệu là g_1, g_2. Như vậy có thể kết luận: với độ tin cậy $1 - \alpha = \gamma$ tham số θ nằm trong khoảng (g_1, g_2).

(a) (G_1, G_2) được gọi là khoảng tin cậy của θ với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$.

(b) $1 - \alpha = \gamma$ được gọi là độ tin cậy của ước lượng.

(c) $I = G_2 - G_1$ được gọi là độ dài khoảng tin cậy.

4.3.1 Khoảng tin cậy của kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn

Bài toán 4.1. Giả sử biến ngẫu nhiên X tuân theo luật phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng $E(X) = \mu$ chưa biết. Hãy ước lượng $E(X)$.

Các bước tiến hành: Từ tổng thể, ta lập mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cỡ n và xét các trường hợp sau.

Trường hợp đã biết phương sai $V(X) = \sigma^2$

Bước 1 Chọn thống kê

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}} \tag{4.25}$$

Theo Mục 4.1.6, thống kê U có phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Chọn cặp số không âm α_1, α_2 thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, tìm các phân vị chuẩn tắc $u_{\alpha_1}, u_{1-\alpha_2}$ sao cho $P(U < u_{\alpha_1}) = \alpha_1$; $P(U < u_{1-\alpha_2}) = 1 - \alpha_2$. Do tính chất của phân phối chuẩn tắc $u_{\alpha_1} = -u_{1-\alpha_1}$, suy ra

$$\begin{aligned} P(-u_{1-\alpha_1} < U < u_{1-\alpha_2}) &= P(u_{\alpha_1} < U < u_{1-\alpha_2}) \\ &= P(U < u_{1-\alpha_2}) - P(U < u_{\alpha_1}) = 1 - \alpha_2 - \alpha_1 = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Như vậy,

$$\begin{aligned} 1 - \alpha = P(-u_{1-\alpha_1} < U < u_{1-\alpha_2}) &= P\left(- u_{1-\alpha_1} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} < u_{1-\alpha_2} \right) \\ = P\left(\overline{X} - u_{1-\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + u_{1-\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Bước 3 Lập mẫu cụ thể $W_X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tính được giá trị cụ thể $\overline{x}$ của $\overline{X}$, khi đó khoảng tin cậy cho μ với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$ là:

$$\boxed{\left(\overline{x} - u_{1-\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{x} + u_{1-\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)} \tag{4.26}$$

Như vậy, với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$ cho trước, có vô số khoảng tin cậy cho μ vì có vô số cặp α_1, α_2 thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Ở đây ta chỉ xét một số trường hợp đặc biệt.

(a) Khoảng tin cậy đối xứng $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2)$

$$\boxed{\left(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)} \tag{4.27}$$

trong đó $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ được xác định từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc (Phụ lục 3) từ hệ thức

$$\boxed{\Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}} \tag{4.28}$$

Sai số của ước lượng: $\varepsilon = u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ được gọi là sai số (độ chính xác) của ước lượng. Với phương sai σ^2 đã biết không đổi và độ tin cậy γ không đổi thì giá trị $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ không đổi, do đó sai số của ước lượng chỉ phụ thuộc vào kích thước mẫu n. Khi n càng lớn thì ε càng bé, do đó khoảng ước lượng càng chính xác.

Tìm kích thước mẫu: Nếu muốn ước lượng kỳ vọng với độ chính xác ε_0 và độ tin cậy γ cho trước, kích thước mẫu cần thiết là số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn:

$$\boxed{n \geq \frac{\sigma^2 u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon_0^2}} \tag{4.29}$$

(b) Khoảng tin cậy trái $(\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0)$:

$$\boxed{\left(-\infty \quad ; \quad \overline{x} + u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \tag{4.30}$$

trong đó $u_{1-\alpha}$ được xác định từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc (Phụ lục 3) từ hệ thức

$$\boxed{\Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha}. \tag{4.31}$$

(c) Khoảng tin cậy phải $(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha)$:

$$\boxed{\left(\overline{x} - u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad +\infty\right)} \tag{4.32}$$

Ví dụ 4.6. Trọng lượng của một loại sản phẩm là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn với độ lệch tiêu chuẩn là 1 gam. Cân thử 25 sản phẩm loại này ta thu được kết quả sau:

Trọng lượng (gam)	18	19	20	21
Số sản phẩm	3	5	15	2

(a) Với độ tin cậy $1 - \alpha = 95\%$, hãy tìm khoảng tin cậy đối xứng của trọng lượng trung bình của loại sản phẩm nói trên.

(b) Không cần tính toán, nếu độ tin cậy 99% thì khoảng ước lượng trung bình sẽ rộng hơn, hẹp hơn hay bằng như trong ý (a)?

(c) Nếu muốn độ chính xác của ước lượng tăng lên gấp đôi, độ tin cậy không đổi thì cần nghiên cứu mẫu có kích thước là bao nhiêu?

Lời giải Ví dụ 4.6

(a) Gọi X là trọng lượng sản phẩm, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với $\sigma = 1$. Trọng lượng trung bình của sản phẩm là $E(X) = \mu$ chưa biết cần ước lượng.

Bước 1: Chọn thống kê $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$. Thống kê $U \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

Bước 2: Áp dụng khoảng tin cậy đối xứng $\left(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Với $\alpha = 0,05$, $\Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{0,05}{2} = 0,975$, tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc (Phụ lục 3) nhận được $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Bước 3: Từ số liệu đã cho ta có $n = 25$, $\sigma = 1$ và tính được $\overline{x} = 19,64$, suy ra khoảng tin cậy đối xứng của $E(X) = \mu$ là $\left(19,64 - 1,96 \times \frac{1}{\sqrt{25}}\ \ 19,64 + 1,96 \times \frac{1}{\sqrt{25}}\right)$ hay $(19,248\ ;\ 20,032)$.

Bước 4: Kết luận, với độ tin cậy 95%, trọng lượng trung bình của loại sản phẩm nói trên từ 19,248 gam đến 20,032 gam.

(b) Nếu độ tin cậy $1 - \alpha$ tăng từ 95% lên 99% thì khoảng ước lượng sẽ rộng hơn khoảng ước lượng xét trong ý (a), do giá trị của $u_{1-\alpha/2}$ tăng từ $1,96$ lên $2,58$.

(c) Theo ý (a), độ chính xác của ước lượng là $\varepsilon = u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,392$. Để độ chính xác tăng lên gấp đôi, tức là $\varepsilon_0 = \frac{0,392}{2} = 0,196$. Theo (4.29) ta cần mẫu có kích thước nhỏ nhất là

$$n = \left\lceil \frac{\sigma^2 u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon_0^2} \right\rceil = \left\lceil \frac{1^2 \times (1,96)^2}{(0,196)^2} \right\rceil \simeq 100.$$

Chú ý 4.2. (a) Chú ý rằng không thể viết $P(19,248 < X < 20,032) = 0,95$ vì độ tin cậy gắn với khoảng tin cậy ngẫu nhiên chứ không gắn với mẫu cụ thể. Hơn nữa vì μ là một hằng số nên nó chỉ có thể thuộc hoặc không thuộc khoảng (19,248; 20,032) nên $(19,248 < \mu < 20,032)$ không phải là sự kiện ngẫu nhiên.

(b) Ta có thể xác định $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ ở ý Ví dụ 4.6(a) từ bảng giá trị hàm Láp-la-xơ (Phụ lục 2) từ hệ thức $\phi(u_{1-\alpha}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

(c) Từ (4.29) ta nhận thấy khi kích thước mẫu tăng và độ tin cậy giữ nguyên thì ε giảm hay ước lượng chính xác hơn; nếu tăng độ tin cậy và giữ nguyên kích thước mẫu, do giá trị phân vị chuẩn tăng nên sai số của ước lượng ε tăng.

Trường hợp chưa biết phương sai, cỡ mẫu $n < 30$

Do σ chưa biết nên ta thay thế bằng S và chọn thống kê

$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}} \tag{4.33}$$

Như đã biết (Mục 4.1.6) thống kê T có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do. Ta có các kết luận sau đây.

(a) Khoảng tin cậy đối xứng

$$\boxed{\left(\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \tag{4.34}$$

Sai số của ước lượng là $\varepsilon = t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}$. Kích thước mẫu được suy từ sai số hay độ chính xác của ước lượng, là số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn:

$$\boxed{n \geq \frac{\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}\right)^2 \times s^2}{\varepsilon^2}} \tag{4.35}$$

(b) Khoảng tin cậy trái

$$\boxed{\left(-\infty \quad ; \quad \overline{x} + t_{1-\alpha}^{(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \tag{4.36}$$

(c) Khoảng tin cậy phải

$$\boxed{\left(\overline{x} - t_{1-\alpha}^{(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \quad +\infty\right)} \tag{4.37}$$

trong đó $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$, $t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ được xác định từ bảng phân phối Student với $n-1$ bậc tự do (Phụ lục 4).

Ví dụ 4.7. Theo dõi mức xăng hao phí (X) cho một loại ô tô đi từ A đến B thu được bảng số liệu sau:

Mức xăng hao phí (lít)	19-19,5	19,5-20,0	20,0-20,5	20,5-21,0
Số lần đi	2	10	8	5

Với độ tin cậy $1-\alpha = 95\%$ hãy tính mức xăng hao phí trung bình tối thiểu khi đi từ A đến B biết X tuân theo luật phân phối chuẩn.

Lời giải Ví dụ 4.7 Gọi X là lượng xăng hao phí của loại ô tô trên đoạn đường AB, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với phương sai σ^2 chưa biết. Mức xăng hao phí trung bình là $E(X) = \mu$ chưa biết, cần ước lượng.

Bước 1: Vì phương sai chưa biết và $n = 25 < 30$, chọn thống kê $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$. Thống kê T có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.

Bước 2: Sử dụng khoảng tin cậy phải cho $E(X) = \mu$:

$$\left(\overline{x} - t_{1-\alpha}^{(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \quad +\infty\right)$$

trong đó $t_{1-\alpha}^{(n-1)} = t_{0,95}^{(24)} = 1,711$ được xác định từ bảng phân phối Student (Phụ lục 4).

Bước 3: Từ số liệu của đầu bài, tính được $n = 25$, $\overline{x} = 20,07$, $s = 0,45$. Suy ra khoảng tin cậy phải của μ là $\left(20,07 - 1,711 \times \dfrac{0,45}{\sqrt{25}} < \mu < +\infty\right)$ hay $(19,92 < \mu < +\infty)$.

Bước 4: Kết luận mức xăng hao phí trung bình tối thiểu khi đi từ A đến B là 19,92 lít với độ tin cậy 95%.

Trường hợp chưa biết phương sai, cỡ mẫu $n \geq 30$

Khi $n \geq 30$ thống kê T trong (4.33) sẽ có phân phối tiệm cận chuẩn tắc $\mathcal{N}(0,1)$. Hay thống kê

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)} \tag{4.38}$$

Do đó,

(a) Khoảng tin cậy đối xứng

$$\boxed{\left(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \tag{4.39}$$

Sai số của ước lượng là $\varepsilon = u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$. Kích thước mẫu được suy từ sai số hay độ chính xác của ước lượng, là số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn:

$$\boxed{n \geq \frac{\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \times s^2}{\varepsilon^2}} \tag{4.40}$$

(b) Khoảng tin cậy trái

$$\boxed{\left(-\infty \quad ; \quad \overline{x} + u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \tag{4.41}$$

(c) Khoảng tin cậy phải

$$\boxed{\left(\overline{x} - u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \quad +\infty\right)} \tag{4.42}$$

Ví dụ 4.8. Để ước lượng trọng lượng trung bình của loại trái cây A tại một vùng, người ta thu hoạch ngẫu nhiên 100 trái cây A của vùng đó và thu được kết quả sau

Trọng lượng (gam)	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52
Số trái	7	13	25	35	15	5

Hãy ước lượng trọng lượng trung bình của loại trái cây A trong vùng bằng khoảng tin cậy đối xứng với độ tin cậy 95%. Cho biết trọng lượng loại trái cây A là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Lời giải Ví dụ 4.8 Gọi X là trọng lượng loại trái cây A, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với phương sai σ^2 chưa biết. Trọng lượng trung bình của loại trái cây A là $E(X) = \mu$ chưa biết, cần ước lượng.

Bước 1: Chọn thống kê $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$. Vì $n = 100 > 30$ nên thống kê $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Bước 2: Khoảng tin cậy đối xứng cho $E(X) = \mu$ là $\left(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$ trong đó, với $\alpha = 0,05$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$ được tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc (Phụ lục 3).

Bước 3: Từ số liệu đã cho tính được $n = 100$, $\overline{x} = 46,06$, $s = 2,48$. Suy ra khoảng tin cậy đối xứng của μ là $\left(46,06 - 1,96 \times \dfrac{2,48}{\sqrt{100}}\ ;\ 46,06 + 1,96 \times \dfrac{2,48}{\sqrt{100}}\right)$ hay $(45,573\ ;\ 46,546)$.

Bước 4: Kết luận, với độ tin cậy 95%, trọng lượng trung bình của loại trái cây A ở vùng trên từ 45,573 gam đến 46,546 gam.

4.3.2 Ước lượng khoảng cho tỷ lệ

Bài toán 4.2. Xác suất xảy ra sự kiện A là p. Do không biết p nên người ta thực hiện n phép thử độc lập, cùng điều kiện, trong đó có m phép thử xảy ra A. Khi đó tần suất xuất hiện A là $f = m/n$ là ước lượng điểm không chệch cho p. Với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$ hãy ước lượng khoảng cho p.

Phương pháp tiến hành

Bước 1 Chọn thống kê $Z = \dfrac{f - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$. Theo Mục 4.1.6, Z có phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0;1)$.

Trong trường hợp n khá lớn ta có thể dùng f để thay thế cho p. Khi đó,

$$\boxed{Z = \frac{f - p}{\sqrt{f(1-f)}}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0;1)} \tag{4.43}$$

Bước 2: Khi có mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ta tính được giá trị cụ thể của f và suy ra khoảng ước lượng cho p với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$ là:

$$\boxed{\left(f - u_{1-\alpha_2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \quad ; \quad f + u_{1-\alpha_1}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right)} \tag{4.44}$$

với $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Các trường hợp ước lượng hay dùng:

(a) Khoảng tin cậy đối xứng

$$\boxed{\left(f - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \quad ; \quad f + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right)} \tag{4.45}$$

Độ chính xác của ước lượng $\varepsilon = u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$. Với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha$ và độ chính xác ε_0 cho trước thì kích thước mẫu cần thiết là số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn:

$$\boxed{n \geq \frac{\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \times f \times (1-f)}{\varepsilon_0^2}} \tag{4.46}$$

(b) Khoảng tin cậy trái

$$\boxed{\left(-\infty \quad ; \quad f + u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right)} \tag{4.47}$$

(c) Khoảng tin cậy phải

$$\boxed{\left(f - u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \quad ; \quad +\infty\right)} \tag{4.48}$$

Chú ý 4.3. (a) Do tỷ lệ chỉ nhận giá trị từ 0 đến 1 nên ta có thể thay giá trị $-\infty$ bằng 0 và $+\infty$ bằng 1 trong khoảng tin cậy trái (phải).

(b) Các khoảng tin cậy trên được xây dựng khi kích thước mẫu n đủ lớn thỏa mãn $nf \geq 5$ và $n(1-f) \geq 5$.

Ví dụ 4.9. Điều tra nhu cầu tiêu dùng loại hàng A trong 100 hộ gia đình ở khu dân cư B thấy 60 hộ gia đình có nhu cầu loại hàng trên. Với độ tin cậy $1-\alpha = 95\%$ hãy tìm khoảng tin cậy đối xứng của tỷ lệ hộ gia đình có nhu cầu loại hàng đó.

Lời giải Ví dụ 4.9 Gọi p là tỷ lệ hộ gia đình ở khu dân cư B có nhu cầu mặt hàng A. Kiểm tra điều kiện $nf = 100 \times 0,6 = 60 > 5$ và $n(1-f) = 100 \times 0,4 = 40 > 5$.

Bước 1: Chọn thống kê $Z = \dfrac{f-p}{\sqrt{f(1-f)}}\sqrt{n}$. Thống kê $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Bước 2: Khoảng tin cậy đối xứng của xác suất p là

$$\left(f - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right)$$

trong đó $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$ được tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc (Phụ lục 3).

Bước 3: Với $n = 100$, $m = 60$, $f = \dfrac{m}{n} = 0,6$, suy ra khoảng tin cậy đối xứng của p là

$$\left(0,6 - 1,96\sqrt{\frac{0,6 \times 0,4}{100}}\ ;\ 0,6 - 1,96\sqrt{\frac{0,6 \times 0,4}{100}}\right) = (0,504\ ;\ 0,696).$$

Bước 4: Kết luận, tỷ lệ hộ gia đình ở khu dân cư B có nhu cầu loại hàng A là từ 50,4% đến 69,6% với độ tin cậy 95%.