Chương 5

Kiểm định giả thuyết thống kê

TUẦN 13

Một dạng khác của quy nạp thống kê là kiểm định giả thuyết thống kê. Đây là một phương pháp quan trọng cho phép giải quyết nhiều bài toán trong thực tế. Nội dung của kiểm định giả thuyết thống kê là dựa vào mẫu cụ thể và các quy tắc hay thủ tục quyết định dẫn đến bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết của tổng thể.

5.1 Các khái niệm

Thông thường ta nghiên cứu biến ngẫu nhiên trong trường hợp thông tin không đầy đủ, thể hiện ở nhiều mặt. Cụ thể là:

1. Chưa biết chính xác tham số θ, hoặc quy luật phân phối xác xuất của biến ngẫu nhiên X, nhưng có cơ sở nào đó để nêu lên giả thuyết, chẳng hạn $\theta = \theta_0$ (θ_0 đã biết), hoặc X tuân theo quy luật phân phối chuẩn.

2. Khi nghiên cứu hai hay nhiều biến ngẫu nhiên, một trong những vấn đề cần quan tâm nhất là: các biến ngẫu nhiên này độc lập với nhau hay có sự phụ thuộc tương quan? Hơn nữa, các tham số của chúng có bằng nhau hay không? Những câu hỏi này thường chưa được trả lời khẳng định mà mới chỉ nêu lên như một giả thuyết.

5.1.1 Giả thuyết thống kê

Giả thuyết thống kê là giả thuyết về biến ngẫu nhiên gốc của tổng thể, bao gồm: dạng phân phối xác suất, các đặc trưng tham số của biến ngẫu nhiên gốc hoặc giả thuyết về sự độc lập của các biến ngẫu nhiên gốc.

Giả thuyết thống kê. Kiểm định giả thuyết thống kê

1. Bất kỳ giả thuyết nào nói về tham số, dạng quy luật phân phối xác suất hay tính độc lập của các biến ngẫu nhiên, đều được gọi là giả thuyết thống kê.
2. Việc tìm ra kết luận về tính thừa nhận được hay không thừa nhận được của giả thuyết gọi là kiểm định giả thuyết thống kê.

Trong khuôn khổ của chương trình, ta chỉ đề cập đến giả thuyết về tham số của biến ngẫu nhiên.

Giả thuyết cơ bản. Giả thuyết đối

1. Giả sử cần nghiên cứu tham số θ của biến ngẫu nhiên X và có cơ sở nào đó để nêu lên giả thuyết $\theta = \theta_0$. Giả thuyết này ký hiệu là H_0, còn gọi là giả thuyết cần kiểm định hay giả thuyết cơ bản hay giả thuyết không (null hypothesis).
2. Mệnh đề đối lập với giả thuyết H_0 ký hiệu là H_1, còn gọi là đối thuyết (alternative hypothesis). Dạng tổng quát nhất của H_1 là $\theta \neq \theta_0$. Trong nhiều trường hợp giả thuyết đối được phát biểu cụ thể là $H_1 : \theta > \theta_0$ hoặc $H_1 : \theta < \theta_0$.

Như vậy, giả thuyết cơ bản hay giả thuyết đối thường được phát biểu thành cặp:

Giả thuyết H_0	$\theta = \theta_0$	$\theta = \theta_0$	$\theta = \theta_0$
Đối thuyết H_1	$\theta \neq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$\theta < \theta_0$

Nhiệm vụ của lý thuyết kiểm định giả thuyết thống kê là kiểm tra bằng thực nghiệm, thông qua mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tính đúng sai của giả thuyết H_0.

5.1.2 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ

Quy tắc kiểm định dựa trên hai nguyên lý sau:

1. Nguyên lý xác suất nhỏ: "Nếu một sự kiện có xác rất nhỏ thì trong một phép thử sự kiện đó coi như không xảy ra".
2. Phương pháp phản chứng: "Để bác bỏ A ta giả sử A đúng; nếu A đúng dẫn đến một điều vô lý thì bác bỏ A".

Dựa vào hai nguyên lý này ta đưa ra phương pháp chung để kiểm định một giả thuyết thống kê như sau.
Cơ sở lập luận: Giả sử giả thuyết H_0 đúng. Trên cơ sở đó xây dựng một sự kiện A nào đó, sao cho xác suất xảy ra A bằng α bé đến mức có thể sử dụng nguyên lý xác suất nhỏ, tức là có thể coi A không xảy ra trong phép thử về sự kiện này. Thực hiện một phép thử đối với sự kiện A:

1. Nếu A xảy ra thì bác bỏ giả thuyết H_0;
2. Nếu A không xảy ra thì chưa có cơ sở để bác bỏ H_0.

Các bước tiến hành:

Bước 1 Từ biến ngẫu nhiên X, lập mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cỡ n và chọn thống kê

$$G(X, \theta) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta) \tag{5.1}$$

sao cho nếu H_0 đúng thì quy luật phân phối xác suất của G hoàn toàn xác định. Thống kê G gọi là tiêu chuẩn kiểm định.

Bước 2 Tìm miền W_α sao cho $P(G \in W_\alpha) = \alpha$ (với giả thuyết H_0 đúng), tức là

$$P(G \in W_\alpha | H_0) = \alpha. \tag{5.2}$$

Vì α nhỏ, nên theo nguyên lý xác suất nhỏ có thể coi G không nhận giá trị trong miền W_α đối với một phép thử.

Bước 3 Thực hiện một phép thử đối với mẫu ngẫu nhiên W_X ta thu được mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và tính được giá trị cụ thể của tiêu chuẩn kiểm định G trong (5.1), gọi là giá trị quan sát, ký hiệu là g hay g_{qs}.

Bước 4 Xét xem giá trị quan sát g có thuộc miền W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $g \in W_\alpha$ thì bác bỏ H_0 thừa nhận H_1.

(b) Nếu $g \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ H_0.

Xác suất α gọi là mức ý nghĩa của tiêu chuẩn kiểm định (thông thường yêu cầu $\alpha \leq 0,05$). Miền W_α gọi là miền bác bỏ giả thuyết H_0 với mức ý nghĩa α nếu $P(G \in W_\alpha | H_0 = \alpha)$.

Chú ý 5.1. Cùng mức ý nghĩa α đối với một tiêu chuẩn kiểm định G có thể có vô số miền bác bỏ giả thuyết H_0.

5.1.3 Sai lầm loại I. Sai lầm loại II

Sai lầm loại I: Bác bỏ giả thuyết H_0 trong khi H_0 đúng. Xác suất mắc sai lầm này chính bằng α: $P(G \in W_\alpha | H_0) = \alpha$.

Sai lầm loại 1 phát sinh do kích thước mẫu quá nhỏ, do phương pháp lấy mẫu ...

Sai lầm loại 2: Thừa nhận H_0 trong khi H_0 sai, hay giá trị quan sát g không thuộc miền bác bỏ W_α trong khi H_1 đúng. Xác suất mắc sai lầm loại II là

$$\beta = P(G \notin W_\alpha | H_1) = 1 - P(G \in W_\alpha | H_1). \tag{5.3}$$

Suy ra xác suất bác bỏ giả thuyết H_0 nếu nó sai là $P(G \in W_\alpha | H_1) = 1 - \beta$. Xác suất này gọi là hiệu lực của kiểm định, nó chính là xác suất "không mắc sai lầm loại II".

Các tình huống có thể xảy ra trong kiểm định giả thuyết thống kê được tóm tắt trong bảng dưới đây.

Quyết định \ Thực tế	H_0 đúng	H_0 sai
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I Xác suất bằng α	Quyết định đúng Xác suất bằng $1-\beta$
Không bác bỏ H_0	Quyết định đúng Xác suất bằng $1-\alpha$	Sai lầm loại II Xác suất bằng β

Bảng 5.1: Các tình huống có thể xảy ra trong kiểm định giả thuyết thống kê

Mục tiêu là phải cực tiểu cả hai sai lầm. Tuy nhiên, điều đó là khó thực hiện. Người ta tìm cách cố định sai lầm loại I và cực tiểu sai lầm loại II.

Lựa chọn miền bác bỏ để xác suất mắc sai lầm loại 2 là bé nhất: Khi kiểm định giả thuyết thống kê, nếu mức ý nghĩa α đã chọn, cỡ mẫu n đã xác định, vấn đề còn lại là trong vô số miền bác bỏ, ta chọn miền W_α sao cho xác suất mắc sai lầm loại II là nhỏ nhất hay hiệu lực của kiểm định lớn nhất.

Định lý Neymann–Pearson chỉ ra rằng nhiều bài toán quan trọng trong thực tiễn có thể tìm được miền bác bỏ W_α thỏa mãn yêu cầu trên, nghĩa là

$$\boxed{P(G \in W_\alpha | H_0) = \alpha \quad \text{và} \quad P(G \in W_\alpha | H_1) = 1 - \beta \to \max} \tag{5.4}$$

Trong thực hành, quy tắc được xây dựng dưới đây có miền bác bỏ thỏa mãn tính chất trên.

5.1.4 Thủ tục kiểm định giả thuyết thống kê

Qua nội dung trình bày ở trên ta có thể xây dựng một thủ tục kiểm định giả thuyết thống kê bao gồm:

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1.
2. Từ tổng thể nghiên cứu lập mẫu ngẫu nhiên kích thước n. Chọn tiêu chuẩn kiểm định G và xác định quy luật phân phối xác suất của G với điều kiện giả thuyết H_0 đúng.
3. Với mức ý nghĩa α, xác định miền bác bỏ giả thuyết H_0 (ký hiệu là W_α) tốt nhất tùy thuộc vào đối thuyết H_1.
4. Từ mẫu cụ thể tính giá trị quan sát g_{qs} của tiêu chuẩn kiểm định.
5. So sánh giá trị quan sát g_{qs} của tiêu chuẩn kiểm định với miền bác bỏ W_α và kết luận.

5.2 Kiểm định giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn

Bài toán 5.1. Giả sử biến ngẫu nhiên gốc X trong tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, trong đó $E(X) = \mu$ chưa biết nhưng có cơ sở để nêu lên giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$ với μ_0 là tham số đã biết. Hãy kiểm định giả thuyết này với các thuyết đối $H_1 : \mu \neq \mu_0$ hoặc $\mu > \mu_0$ hoặc $\mu < \mu_0$.

Tiêu chuẩn kiểm định và miền bác bỏ giả thuyết H_0 phụ thuộc các trường hợp sau.

5.2.1 Trường hợp đã biết phương sai

Giả sử phương sai σ^2 của biến ngẫu nhiên gốc X trong tổng thể có phân bố chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ đã biết. Từ tổng thể rút ra một mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ kích thước n.

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}} \tag{5.5}$$

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}} \tag{5.6}$$

Theo (4.19) thống kê U có phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0; 1)$.

Bước 2 Xây dựng miền bác bỏ W_α phụ thuộc vào thuyết đối H_1.

(a) $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ **(bài toán kiểm định hai phía).** Với mức ý nghĩa α cho trước, giả thuyết H_0 bị bác bỏ nếu $P\left\{|U| > u_{1-\alpha/2} \middle| (\mu = \mu_0)\right\} = \alpha$, trong đó $u_{1-\alpha/2}$ được xác định từ hệ thức $\Phi(u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. Do đó, miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty).$$

(b) $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ **(bài toán kiểm định một phía).** Với mức ý nghĩa α cho trước, ta tìm giá trị $u_{1-\alpha}$ sao cho $P\left\{U > u_{1-\alpha} \middle| (\mu = \mu_0)\right\} = \alpha$ từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc (Phụ lục 3) và xác định được miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty).$$

(c) $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ **(bài toán kiểm định một phía).** Với mức ý nghĩa α cho trước, ta tìm giá trị $u_{1-\alpha}$ sao cho $P\left\{U < -u_{1-\alpha} \middle| (\mu = \mu_0)\right\} = \alpha$ và xác định được miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha}).$$

Tóm lại, miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xác định như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được xác định từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Lập mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, .., x_n)$, tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}} \tag{5.7}$$

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.1. Một hãng bảo hiểm thông báo rằng số tiền trung bình hãng chi trả cho khách hàng bị tai nạn ô tô là 8500 USD. Để kiểm tra lại, người ta kiểm tra ngẫu nhiên hồ sơ chi trả của 25 khách hàng thì thấy số tiền trung bình chi trả là 8900 USD. Giả sử số tiền chi trả tuân theo luật phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 2600 USD. Hãy kiểm định lại thông báo của hãng bảo hiểm trên với mức ý nghĩa 5%.

Lời giải Ví dụ 5.1 Gọi X là số tiền hãng bảo hiểm chi trả cho khách hàng. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với $\sigma = 2600$. Số tiền trung bình hãng chi trả cho khách hàng là $E(X) = \mu$ chưa biết. Đây là bài toán kiểm định giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn trường hợp đã biết phương sai.

Bước 1: Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$, đối thuyết $H_1 : \mu \neq \mu_0$ với $\mu_0 = 8500$.

Bước 2: Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Bước 3: Với $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$, tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc (Phụ lục 3). Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty) = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; +\infty).$$

Bước 4: Từ số liệu của đầu bài ta có $n = 25$, $\mu_0 = 8500$, $\overline{x} = 8900$, $\sigma = 2600$ suy ra giá trị quan sát

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{8900 - 8500}{2600}\sqrt{25} \simeq 0,77.$$

Bước 5: Vì $u_{qs} = 0,77 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0. Tức là chưa có cơ sở để bác bỏ thông báo của hãng bảo hiểm với mức ý nghĩa 5%.

Ví dụ 5.2. Nếu máy móc hoạt động bình thường thì trọng lượng sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với trọng lượng trung bình $\mu_0 = 100$ gam, độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 2$ gam. Qua một thời gian sản xuất người ta nghi ngờ trọng lượng sản phẩm có xu hướng tăng lên, cân thử 100 sản phẩm thì trọng lượng trung bình của chúng là 100,4 gam. Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ hãy kết luận về điều nghi ngờ trên.

Lời giải Ví dụ 5.2 Gọi X là trọng lượng sản phẩm thì $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với $\sigma = 2$. Đây là bài toán kiểm định giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn trường hợp đã biết phương sai.

Bước 1: Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$, đối thuyết $H_1 : \mu > \mu_0$ với $\mu_0 = 100$.

Bước 2: Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Bước 3: Với $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,65$, được tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc (Phụ lục 3). Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là $W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (1,65; +\infty)$.

Bước 4: Từ số liệu đầu bài với $n = 100$, $\mu_0 = 100$, $\sigma = 2$, $\overline{x} = 100,4$ suy ra giá trị quan sát

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{100,4 - 100}{2}\sqrt{100} = 2.$$

Bước 5: Vì $u_{qs} = 2 \in W_\alpha$ nên bác bỏ giả thuyết H_0. Tức là điều nghi ngờ nói trên là có cơ sở với mức ý nghĩa 5%.

5.2.2 Trường hợp chưa biết phương sai, kích thước mẫu $n < 30$

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}} \tag{5.8}$$

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì

$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}} \tag{5.9}$$

Theo (4.21), T có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.

Bước 2 Miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xây dựng phụ thuộc vào thuyết đối H_1 như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\Big(-\infty; -t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}\Big) \cup \Big(t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}; +\infty\Big)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\Big(t_{1-\alpha}^{(n-1)}; +\infty\Big)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\Big(-\infty; -t_{1-\alpha}^{(n-1)}\Big)$

trong đó $t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}$ và $t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ được xác định từ bảng phân phối Student (Phụ lục 4).

Bước 3 Lập mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, .., x_n)$, tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{t_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}} \tag{5.10}$$

Bước 4 Xét xem t_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $t_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $t_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.3. Một công ty sản xuất hạt giống tuyên bố rằng một loại giống mới của họ có năng suất trung bình là 21,5 tạ/ha. Gieo thử hạt giống mới này tại 16 vườn thí nghiệm và thu được kết quả:

$$19,2; 18,7; 22,4; 20,3; 16,8; 25,1; 17,0; 15,8; 21,0; 18,6; 23,7; 24,1; 23,4; 19,8; 21,7; 18,9.$$

Dựa vào kết quả này hãy xác nhận xem quảng cáo của công ty có đúng không với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$. Biết rằng năng suất giống cây trồng là một biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Lời giải Ví dụ 5.3 Gọi X là năng suất giống cây trồng. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Đây là bài toán kiểm định giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn trường hợp chưa biết phương sai, mẫu cỡ $n = 16 < 30$.

Bước 1: Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$, đối thuyết $H_1 : \mu \neq \mu_0$ với $\mu_0 = 21,5$.

Bước 2: Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. $T \sim \mathcal{T}^{(n-1)}$.

Bước 3: Với $\alpha = 0,05$ tra bảng phân phối Student được $t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} = t_{0,975}^{(15)} = 2,131$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = \Big(-\infty; -t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}\Big) \cup \Big(t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}; +\infty\Big) = (-\infty; -2,131) \cup (2,131; +\infty).$$

Bước 4: Từ số liệu đầu bài tính được $n = 16$, $\overline{x} = 20,406$, $s = 3,038$ với $\mu_0 = 21,5$ suy ra giá trị quan sát

$$t_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{20,406 - 21,5}{3,038}\sqrt{16} = -1,44.$$

Bước 5: Vì $t_{qs} = -1,44 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là với số liệu này có thể chấp nhận lời quảng cáo của công ty với mức ý nghĩa 5%.

5.2.3 Trường hợp chưa biết phương sai, cỡ mẫu $n \geq 30$

Chú ý 5.2. Như đã biết phân phối Student xấp xỉ phân phối chuẩn khi n khá lớn. Trong thực tế khi $n \geq 30$ coi T có phân phối chuẩn.

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}} \tag{5.11}$$

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}} \tag{5.12}$$

Như đã biết $U \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Xây dựng miền bác bỏ giả thuyết H_0 phụ thuộc vào thuyết đối H_1:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được xác định từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Lập mẫu cụ thể $W_x = (x_1, \ldots, x_n)$, tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}} \tag{5.13}$$

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.4. Một công ty có một hệ thống máy tính có thể xử lý 1200 hóa đơn trong một giờ. Công ty mới nhập một hệ thống máy tính mới. Hệ thống này khi chạy kiểm tra trong 40 giờ cho thấy số hóa đơn được xử lý trung bình trong một giờ là 1260 với độ lệch chuẩn hiệu chỉnh 215. Với mức ý nghĩa 5% hãy nhận định xem hệ thống mới có tốt hơn hệ thống cũ hay không?

Lời giải Ví dụ 5.4 Gọi X là số hóa đơn mà hệ thống máy tính mới xử lý được trong vòng một giờ. Ta thấy $E(X) = \mu$ là số hóa đơn trung bình mà hệ thống máy tính mới xử lý được trong một giờ chưa biết. Đây là bài toán kiểm định giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn trường hợp chưa biết phương sai mẫu cỡ $n = 40 > 30$.

Bước 1: Kiểm tra giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$, đối thuyết $H_1 : \mu > \mu_0$ với $\mu_0 = 1200$.

Bước 2: Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Bước 3: Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,65$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là $W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (1,65; +\infty)$.

Bước 4: Từ số liệu đầu bài ta có $\mu_0 = 1200$, $n = 40$, $\overline{x} = 1250$, $s = 215$ suy ra giá trị quan sát

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{1260 - 1200}{215}\sqrt{40} = 1,76.$$

Bước 5: Vì $u_{qs} = 1,76 \in W_\alpha$ nên bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là với số liệu này có thể coi hệ thống máy mới tốt hơn hệ thống máy cũ với mức ý nghĩa 5%.

Nhận xét 5.1. Nếu tổng thể của biến ngẫu nhiên X không tuân theo quy luật phân phối chuẩn thì ta có thể tiến hành chọn mẫu có kích thước lớn $n \geq 30$, khi đó ta có thể tiến hành kiểm định tương tự như tiến hành kiểm định đối với biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Do đó, trong nhiều trường hợp người ta có thể bỏ qua giả thiết chuẩn của biến ngẫu nhiên gốc X (khi mẫu kích thước lớn).

Do đó,

(a) Nếu kích thước mẫu $n < 30$ thì ta phải có điều kiện $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(b) Nếu $n \geq 30$ ta có thể bỏ qua giả thiết chuẩn của biến ngẫu nhiên gốc X.

TUẦN 14

5.3 Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ hay xác suất

5.3.1 Bài toán

Bài toán 5.2. Giả sử ta quan tâm đến một đặc trưng A nào đó mà mỗi cá thể của tổng thể có thể có tính chất này hoặc không. Gọi p là tần suất có đặc trưng A của tổng thể (p cũng là xác suất cá thể có đặc trưng A của tổng thể). Dấu hiệu nghiên cứu này là một biến ngẫu nhiên X tuân theo luật phân phối Béc-nu-li với kỳ vọng bằng p. Nếu p chưa biết, nhưng có cơ sở để nêu lên giả thuyết

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{với} \quad p_0 \text{ là tỷ lệ đã biết.}$$

Hãy kiểm định giả thuyết này với thuyết đối

$$H_1 : p \neq p_0 \quad \text{hoặc} \quad p > p_0 \quad \text{hoặc} \quad p < p_0.$$

Do không biết p nên người ta thực hiện n phép thử độc lập, cùng điều kiện, trong đó có m phép thử xảy ra A. Tần suất mẫu $f = {}^m/_n$ là ước lượng điểm không chệch cho p. Ta có f có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn với kỳ vọng $E(f) = p$ và phương sai $V(f) = \dfrac{p(1-p)}{n}$. Từ đó bài toán kiểm định giả thuyết về tỷ lệ không có khác biệt căn bản so với bài toán kiểm định giả thuyết về kỳ vọng.

5.3.2 Các bước tiến hành

Bước 1 Với giả thuyết H_0 đúng xét thống kê

$$\boxed{U = \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}} \tag{5.14}$$

Theo (4.22) khi n đủ lớn thống kê (5.14) xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0;1)$. Trong thực tế khi $np_0 \geq 5$ và $n(1-p_0) \geq 5$ thì có thể xem thống kê U trong (5.14) tuân theo luật phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Xây dựng miền bác bỏ giả thuyết H_0 phụ thuộc vào thuyết đối H_1 như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$
$p = p_0$	$p > p_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$p = p_0$	$p < p_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được xác định từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Lập mẫu cụ thể, tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{u_{qs} = \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}, \quad f = \frac{m}{n}} \tag{5.15}$$

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.5. Một công ty A sản xuất bánh kẹo tuyên bố rằng $\frac{1}{2}$ số trẻ em thích ăn bánh kẹo của công ty. Trong một mẫu gồm 100 trẻ em được hỏi, có 47 em tỏ ra thích ăn bánh của công ty. Với mức ý nghĩa 5%, số liệu trên có chứng tỏ là tuyên bố của công ty là đúng hay không?

Lời giải Ví dụ 5.5 Gọi p là tỷ lệ trẻ em thích bánh của công ty. Đây là bài toán kiểm định giả thuyết về tỷ lệ của tổng thể.

Bước 1: Đặt giả thuyết $H_0 : p = p_0$, đối thuyết $H_1 : p \neq p_0$ với $p_0 = 0,5$.

Bước 2: Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$ nếu giả thuyết H_0 đúng.

Vì $np_0 = n(1-p_0) = 100 \times 0,5 = 50$ khá lớn nên $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Bước 3: Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty) = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; +\infty).$$

Bước 4: Từ số liệu đã cho ta có $n = 100$, $m = 47$ tính được $f = \dfrac{m}{n} = \dfrac{47}{100} = 0,47$, với $p_0 = 0,5$ suy ra giá trị quan sát

$$u_{qs} = \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0 \times (1-p_0)}}\sqrt{n} = \frac{0,47 - 0,5}{\sqrt{0,5 \times 0,5}}\sqrt{100} = -0,6.$$

Bước 5: Vì $u_{qs} = -0,6 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0 hay tuyên bố của công ty là có cơ sở với mức ý nghĩa 5%.

TÓM TẮT về tiêu chuẩn kiểm định và miền bác bỏ giả thuyết H_0:

Trường hợp	Tiêu chuẩn kiểm định nếu H_0 đúng	H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
σ^2 đã biết	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$
			$\mu > \mu_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
			$\mu < \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$
σ^2 chưa biết $n < 30$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left(-\infty; -t^{(n-1)}_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(t^{(n-1)}_{1-\alpha/2}; +\infty\right)$
			$\mu > \mu_0$	$\left(t^{(n-1)}_{1-\alpha}; +\infty\right)$
			$\mu < \mu_0$	$\left(-\infty; -t^{(n-1)}_{1-\alpha}\right)$
σ^2 chưa biết $n \geq 30$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$
			$\mu > \mu_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
			$\mu < \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$
$np_0 \geq 5$ $n(1-p_0) \geq 5$	$U = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$	$p = p_0$	$p \neq p_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$
			$p > p_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
			$p < p_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

5.4 So sánh hai kỳ vọng của hai biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn

Bài toán 5.3. Cho hai biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Bài toán đặt ra là cần so sánh giá trị kỳ vọng μ_1 với μ_2:

Giả thuyết H_0	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 = \mu_2$
Đối thuyết H_1	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$

5.4.1 Trường hợp phương sai σ_1^2, σ_2^2 đã biết

Từ tổng thể rút ra hai mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_{n_1})$, $W_Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2})$.

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}} \tag{5.16}$$

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì $\mu_1 - \mu_2 = 0$ và

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}} \tag{5.17}$$

Như đã biết $U \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xác định phụ thuộc vào thuyết đối H_1 như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được xác định từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Từ mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$, $W_y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$, ta tính được giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{u_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}} \tag{5.18}$$

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận:

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

5.4.2 Trường hợp phương sai σ_1^2, σ_2^2 chưa biết, cỡ mẫu $n_1 < 30, n_2 < 30$

Giả sử $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}} \tag{5.19}$$

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì

$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}} \tag{5.20}$$

Nếu giả thiết hai biến ngẫu nhiên gốc có phương sai giống nhau thì thống kê T trong (5.20) có phân phối Student với $n_1 + n_2 - 2$ bậc tự do, $T \sim \mathcal{T}^{(n_1+n_2-2)}$.

Bước 2 Miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xác định phụ thuộc vào thuyết đối H_1 như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\Big(-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\Big) \cup \Big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}; +\infty\Big)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\Big(t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}; +\infty\Big)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\Big(-\infty; -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}\Big)$

trong đó $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ và $t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$ được xác định từ bảng phân phối Student (Phụ lục 4).

Bước 3 Từ mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$, $W_y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$, ta tính được giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{t_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}} \tag{5.21}$$

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận:

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(a) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Chú ý 5.3. Trường hợp mẫu cặp (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ ta có thể thiết lập hiệu $z_i = x_i - y_i$ và đưa về bài toán kiểm định giả thuyết $H_0 : E(Z) = 0$, $(Z = X - Y)$, đối thuyết $H_1 : E(Z) \neq 0$ hoặc $H_1 : E(Z) > 0$ hoặc $H_1 : E(Z) < 0$.

Ví dụ 5.6. Để so sánh hai chế độ bón phân cho một loại cây trồng A, trên 8 mảnh ruộng người ta chia mỗi mảnh thành hai nửa: nửa thứ nhất áp dụng phương pháp bón phân I, nửa thứ hai theo phương pháp bón phân II (với các chế độ chăm sóc khác nhau). Sau khi thu hoạch ta được số liệu về năng suất loại cây trồng A như sau:

Mảnh	1	2	3	4	5	6	7	8
Năng suất nửa thứ nhất	5	20	16	22	24	14	18	20
Năng suất nửa thứ hai	15	22	14	25	29	16	20	24

Đánh giá xem hai chế độ bón phân có giống nhau không với mức ý nghĩa 1%. Biết rằng năng suất loại cây trồng A (sau hai phương pháp bón phân) có phân phối chuẩn và có cùng phương sai.

Lời giải Ví dụ 5.6

Cách 1: Gọi X, Y lần lượt là năng suất loại cây trồng A ở nửa thứ nhất, thứ hai (sử dụng hai phương pháp bón phân tương ứng). Ta có $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Đây là bài toán so sánh hai kỳ vọng của hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn trường hợp chưa biết phương sai, mẫu cỡ $n_1 = n_2 = 8 < 30$ và $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Bước 1: Đặt giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, đối thuyết $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Bước 2: Chọn tiêu chuẩn kiểm định $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ nếu H_0 đúng.

Vì X và Y có cùng phương sai, nên $T \sim \mathcal{T}^{(n_1+n_2-2)}$.

Bước 3: Với $\alpha = 0,05$ tra bảng phân phối Student được $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} = t_{0,995}^{(14)} = 2,977$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = \left(-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}; +\infty\right) = (-\infty; -2,977) \cup (2,977; +\infty).$$

Bước 4: Từ số liệu đã cho tính được $n_1 = n_2 = 8$, $\overline{x} = 17,375$, $s_1^2 = 35,125$, $\overline{y} = 20,625$, $s_2^2 = 28,5535$ suy ra giá trị quan sát

$$t_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = \frac{-3,25}{2,6391} = -1,2314.$$

Bước 5: Vì $t_{qs} = -1,2314 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0, hay có thể xem hai phương pháp bón phân cho kết quả như nhau với mức ý nghĩa 1%.

Cách 2: Đặt $Z = X - Y$, thiết lập hiệu $z_i = x_i - y_i$, $i = 1, \ldots, 8$ với

x_i	5	20	16	22	24	14	18	20
y_i	15	22	14	25	29	16	20	24
z_i	-10	-2	2	-3	-4	-2	-2	-2

Ta đưa về bài toán kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu_Z = 0$, đối thuyết $H_1 : \mu_Z \neq 0$, $\mu_Z = E(Z)$.

5.4.3 Trường hợp phương sai σ_1^2, σ_2^2 chưa biết, cỡ mẫu $n_1 \geq 30, n_2 \geq 30$

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}} \tag{5.22}$$

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì $\mu_1 - \mu_2 = 0$ và

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}} \tag{5.23}$$

Như đã biết $U \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xác định cho ba trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được xác định từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Từ mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$, $W_y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$, ta tính được giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{u_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}} \tag{5.24}$$

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.7. Hai máy tự động dùng để cắt những thanh kim loại do cùng một kỹ thuật viên phụ trách và căn chỉnh. Từ mỗi máy lấy ra 31 thanh kim loại để kiểm tra và thu được kết quả sau:

Máy 1: Trung bình mẫu là 12 cm, độ lệch chuẩn hiệu chỉnh là 1,2 cm.

Máy 2: Trung bình mẫu là 12,3 cm, độ lệch hiệu chỉnh là 1,4 cm.

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$ có thể cho rằng chiều dài của các thanh kim loại do máy 2 sản xuất khác chiều dài do máy 1 sản xuất hay không. Biết chiều dài thanh kim loại do các máy sản xuất có phân phối chuẩn.

Lời giải Ví dụ 5.7 Gọi X, Y lần lượt là chiều dài các thanh kim loại do máy 1, 2 sản xuất. Khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Đây là bài toán so sánh hai kỳ vọng của hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn trường hợp chưa biết phương sai, mẫu cỡ $n_1 = n_2 = 31 > 30$.

Bước 1: Đặt giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, đối thuyết $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Bước 2: Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Bước 3: Với $\alpha = 0,01$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,995} = 2,58$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty) = (-\infty; -2,58) \cup (2,58; +\infty).$$

Bước 4: Từ số liệu đã cho ta có $n_1 = n_2 = 31$, $\overline{x} = 12$, $s_1 = 1,2$, $\overline{y} = 12,3$, $s_2 = 1,4$, suy ra giá trị quan sát

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{12 - 12,3}{\sqrt{\dfrac{1,44}{31} + \dfrac{1,94}{31}}} = -0,9085.$$

Bước 5: Vì $u_{qs} = -0,9085 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0, hay có thể xem chiều dài các thanh kim loại do hai nhà máy sản xuất là như nhau với mức ý nghĩa 1%.

Chú ý 5.4. (a) Nếu cỡ mẫu n_1, n_2 nhỏ thì ta phải thêm giả thuyết biến ngẫu nhiên gốc tuân theo phân phối chuẩn; nếu n_1 và n_2 khá lớn ta có thể bỏ giả thiết chuẩn của đầu bài.

(b) Hai đối thuyết $\mu_1 > \mu_2$ và $\mu_1 < \mu_2$ dễ dàng chuyển đổi cho nhau bằng cách thay đổi thứ tự của hai mẫu.

5.5 So sánh hai tỷ lệ

5.5.1 Bài toán

Bài toán 5.4. Giả sử p_1, p_2 tương ứng là tỷ lệ các phần tử mang dấu hiệu A nào đó của tổng thể thứ nhất và tổng thể thứ hai. Mẫu của tổng thể thứ nhất: Thực hiện n_1 phép thử độc lập cùng điều kiện, có m_1 phép thử xảy ra sự kiện A. Mẫu của tổng thể thứ hai: Thực hiện n_2 phép thử độc lập cùng điều kiện, có m_2 phép thử xảy ra sự kiện A. Hãy so sánh p_1 với p_2.
Cặp giả thuyết đặt ra là:

Giả thuyết H_0	$p_1 = p_2$	$p_1 = p_2$	$p_1 = p_2$
Đối thuyết H_1	$p_1 \neq p_2$	$p_1 > p_2$	$p_1 < p_2$

5.5.2 Các bước tiến hành

Đặt

$$\overline{f} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}. \tag{5.25}$$

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{U = \frac{(f_1 - f_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}} \tag{5.26}$$

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì $p_1 = p_2$ và

$$\boxed{U = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}} \tag{5.27}$$

Ta có $U \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xác định phụ thuộc vào thuyết đối H_1 như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$p_1 = p_2$	$p_1 > p_2$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$p_1 = p_2$	$p_1 < p_2$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được xác định từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Từ mẫu thu thập, ta tính được giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{u_{qs} = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}} \tag{5.28}$$

với $f_1 = \dfrac{m_1}{n_1}$, $f_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$, $\overline{f} = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{n_1.f_1 + n_2.f_2}{n_1 + n_2}$.

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.8. Từ kho đồ hộp thứ nhất lấy ngẫu nhiên 1000 hộp để kiểm tra thấy có 20 hộp bị hỏng. Từ kho đồ hộp thứ hai lấy ngẫu nhiên 900 hộp kiểm tra thấy 30 hộp bị hỏng. Hỏi chất lượng bảo quản của 2 kho có thực sự giống nhau hay không với mức ý nghĩa 5%.

Lời giải Ví dụ 5.8 Gọi p_1, p_2 lần lượt là tỷ lệ hộp hỏng ở kho đồ hộp thứ nhất và thứ hai tương ứng. Đây là bài toán so sánh hai tỷ lệ.

Bước 1: Đặt giả thuyết $H_0 : p_1 = p_2$, đối thuyết $H_1 : p_1 \neq p_2$.

Bước 2: Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. Ta thấy $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Bước 3: Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha/2} = 1,96$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty) = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; +\infty).$$

Bước 4: Theo đầu bài $n_1 = 1000$, $n_2 = 900$, $m_1 = 20$, $m_2 = 30$, $f_1 = \dfrac{2}{100}$, $f_2 = \dfrac{3}{90}$, $\overline{f} = \dfrac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{20+30}{1900} = \dfrac{5}{190}$, suy ra

$$u_{qs} = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = -1,8129.$$

Bước 5: Kết luận: Vì $u_{qs} = -1,8129 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là có thể xem chất lượng bảo quản của hai kho hàng là như nhau với mức ý nghĩa 5%.

Ví dụ 5.9. Một bệnh viện điều trị loại bệnh A theo hai phương pháp. Sau một thời gian thấy kết quả như sau:

Trong 102 bệnh nhân điều trị phương pháp I có 82 bệnh nhân khỏi bệnh.

Trong 98 bệnh nhân điều trị phương pháp II có 69 bệnh nhân khỏi bệnh.

Hỏi có phải phương pháp I điều trị tốt hơn phương pháp II hai hay không với mức ý nghĩa 5%.

Lời giải Ví dụ 5.9 Gọi p_1, p_2 lần lượt là tỷ lệ bệnh nhân khỏi bệnh khi điều trị bằng phương pháp I và II tương ứng. Đây là bài toán so sánh hai tỷ lệ.

Bước 1: Đặt giả thuyết $H_0 : p_1 = p_2$, đối thuyết $H_1 : p_1 > p_2$.

Bước 2: Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. Ta thấy $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Bước 3: Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha} = 1,65$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là $W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (1,65; +\infty)$.

Bước 4: Theo đầu bài $n_1 = 102$, $n_2 = 98$, $m_1 = 82$, $m_2 = 69$,
$f_1 = \dfrac{82}{102}, f_2 = \dfrac{69}{98}, \overline{f} = \dfrac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{82 + 69}{102 + 98} = \dfrac{151}{200}$, suy ra

$$u_{qs} = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = 1,641.$$

Bước 5: Vì $u_{qs} = 1,641 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là chưa thể xem phương pháp I điều trị tốt hơn phương pháp II với mức ý nghĩa 5%.

Ví dụ 5.10 (Đề thi cuối kỳ 20191)**.** Để điều tra doanh thu của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B, người ta khảo sát 100 gia đình kinh doanh loại mặt hàng này trong một tháng của năm 2019 thu được bảng số liệu

Doanh thu (triệu VNĐ)	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Số gia đình	4	9	17	25	20	10	8	4	3

(a) Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng doanh thu trung bình/tháng của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B.

(b) Một tài liệu thống kê cho biết doanh thu trung bình/tháng của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B là 40 triệu VNĐ. Hãy cho kết luận về tài liệu nói trên với mức ý nghĩa 5%.

(c) Điều tra doanh thu của 200 gia đình kinh doanh loại mặt hàng A ở địa phương C người ta tính được doanh thu trung bình/tháng là 43 triệu VNĐ và độ lệch tiêu chuẩn mẫu hiệu chỉnh là 8,912 triệu VNĐ. Doanh thu trung bình loại mặt hàng A ở địa phương C và B (với số liệu ở Câu 4) có như nhau hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 1%.

Lời giải Ví dụ 5.10

(a) Gọi X(triệu VNĐ/tháng) là biến ngẫu nhiên chỉ doanh thu của các gia đình kinh doanh mặt hàng A của địa phương B. Ký hiệu $E(X) = \mu_X$. Đây là bài toán ước lượng khoảng của kỳ vọng trường hợp chưa biết phương sai, mẫu cỡ $n = 100 > 30$.

Chọn thống kê $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{S_X}\sqrt{n}$. Thống kê $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Áp dụng khoảng tin cậy đối xứng $\left(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s_X}{\sqrt{n}}\,;\, \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s_X}{\sqrt{n}}\right)$.

Với $\gamma = 95\%$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$. Từ bảng số liệu tính được $n = 100$, $\overline{x} = 42,4$, $s_{\mathcal{X}} = 9,2245$, suy ra khoảng tin cậy cần tìm $(40,592\,;\,44,208)$.

Vậy doanh thu trung bình của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tài địa phương B là từ 40,592 triệu đồng/tháng đến 44,208 triệu đồng/tháng với độ tin cậy 95%.

(b) Đây là bài toán kiểm định giả thuyết của kỳ vọng trường hợp chưa biết phương sai, mẫu cỡ $n = 100 > 30$.

Kiểm định cặp giả thuyết $H_0 : \mu_X = \mu_0$, $H_1 : \mu_X \neq \mu_0$, $\mu_0 = 40$.

Chọn thống kê $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S_X}\sqrt{n}$. Thống kê $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Với $\alpha = 5\%$, miền bác bỏ H_0 là $W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2;+\infty}) = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; +\infty)$.

Từ bảng số liệu tính được $n = 100$, $\overline{x} = 42,4$, $s_{\mathcal{X}} = 9,2245$, suy ra giá trị quan sát $u_{qs} = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_X}\sqrt{n} = \dfrac{42,4 - 40,0}{9,2245} \times 10 \simeq 2,6018$.

Vì $u_{qs} = 2,6018 \in W_\alpha$ nên bác bỏ H_0, chấp nhận H_1, nghĩa là tài liệu thống kê chưa có cơ sở với mức ý nghĩa 5%.

(c) Gọi Y(triệu đồng/tháng) là biến ngẫu nhiên chỉ doanh thu của các gia đình ở địa phương C. Ký hiệu $E(Y) = \mu_Y$. Đây là bài toán so sánh hai giá trị trung bình của hai tổng thể trường hợp chưa biết phương sai, mẫu cỡ $n = 100 > 30$ và $m = 200 > 30$.

Kiểm định cặp giả thuyết $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$.

Chọn thống kê $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$. Thống kê $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ khi H_0 đúng.

Với $\alpha = 5\%$, miền bác bỏ H_0 là $W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2;+\infty}) = (-\infty; -2,575) \cup (2,575; +\infty)$.

Từ bảng số liệu tính được $n = 100$, $\overline{x} = 42,4$, $s_{\mathcal{X}} = 9,2245$, $m = 200$, $\overline{y} = 43$, $s_{\mathcal{Y}} = 8,912$ suy ra giá trị quan sát $u_{qs} = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}} \simeq -0,5371$.

Vì $u_{qs} = -0,5371 \notin W_\alpha$ nên chấp nhận H_0, nghĩa là doanh thu trung bình mặt hàng A ở địa phương C và B là như nhau mức ý nghĩa 5%.

Ôn tập

<u>TUẦN 15</u>

Giới thiệu phần mềm xử lý số liệu thống kê thông dụng

Giới thiệu

Ứng dụng giải bài toán ước lượng tham số

Ứng dụng giải bài toán kiểm định giả thuyết

Ôn tập