Una nueva forma de resolver ecuaciones cuadráticas: El método de Po-Shen Loh

Artículo recopilatorio

27 de febrero de 2026

Resumen

En este artículo se presenta una técnica alternativa y elegante para resolver ecuaciones cuadráticas, popularizada por el matemático Po-Shen Loh. Este método simplifica el proceso de encontrar raíces al explotar la relación entre la suma y el producto de las soluciones, evitando la necesidad de memorizar la fórmula cuadrática tradicional en su forma completa. Se discute la motivación detrás del método, su desarrollo paso a paso y se ilustra con varios ejemplos.

1. Introducción

La ecuación cuadrática, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, es uno de los pilares del álgebra elemental. Durante siglos, los estudiantes han aprendido a resolverla mediante factorización, completando el cuadrado, o utilizando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sin embargo, el profesor Po-Shen Loh, de la Universidad Carnegie Mellon, propuso una reconceptualización del problema que conecta de forma más natural con las propiedades de las raíces [1]. Su método, que había permanecido "escondido a plena vista", ofrece un enfoque más intuitivo y, a menudo, más rápido para encontrar las soluciones.

2. El método paso a paso

El método de Po-Shen Loh se basa en dos propiedades fundamentales de las raíces de una ecuación cuadrática, derivadas de los llamados *productos notables* o *identidades de Vieta*.

2.1. La base teórica

Consideremos una ecuación cuadrática en su forma estándar:

$$x^2 + bx + c = 0$$

(Nota: asumimos que el coeficiente principal $a = 1$. Si no es así, dividimos toda la ecuación por a).

Sean r y s las dos raíces (reales o complejas) de la ecuación. Entonces, el polinomio se puede factorizar como:

$$x^2 + bx + c = (x - r)(x - s).$$

Desarrollando el producto:

$$(x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs.$$

Igualando coeficientes con $x^2 + bx + c$, obtenemos las **relaciones de Vieta**:

$$\text{Suma de raíces:} \quad r + s = -b \tag{1}$$

$$\text{Producto de raíces:} \quad r \cdot s = c \tag{2}$$

2.2. La idea clave

La clave del método de Loh es darse cuenta de que la suma de las dos raíces es un número conocido, $-b$. Si la suma es fija, las dos raíces deben estar equidistantes de su promedio.

Definimos la **media** de las raíces como:

$$m = \frac{r + s}{2} = -\frac{b}{2}.$$

Si r y s son diferentes, una estará un cierto valor u por encima de la media, y la otra, u por debajo. Es decir:

$$r = m + u, \quad s = m - u.$$

Ahora utilizamos la segunda relación de Vieta: el producto de las raíces debe ser igual a c.

$$r \cdot s = (m + u)(m - u) = m^2 - u^2 = c.$$

De aquí, podemos despejar u^2:

$$u^2 = m^2 - c.$$

2.3. Obteniendo las soluciones

Una vez que tenemos u^2, calculamos $u = \pm\sqrt{m^2 - c}$. Finalmente, las dos raíces son:

$$r = m + u, \quad s = m - u.$$

En resumen, los pasos son:

1. Si es necesario, dividir la ecuación entre a para obtener la forma $x^2 + bx + c = 0$.
2. Calcular la media de las raíces: $m = -\frac{b}{2}$.
3. Calcular el valor $u^2 = m^2 - c$.
4. Encontrar $u = \sqrt{u^2}$ (tomando la raíz cuadrada principal).
5. Las soluciones son $x = m \pm u$.

3. Ejemplos ilustrativos

A continuación, se muestran algunos ejemplos de aplicación del método.

3.1. Ejemplo 1: Raíces reales y enteras

Resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$.

- Identificamos $b = -5$, $c = 6$.
- La media de las raíces es $m = -\frac{b}{2} = -\frac{(-5)}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.
- Calculamos $u^2 = m^2 - c = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4}$.
- Por lo tanto, $u = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.
- Las raíces son $r = 2{,}5 + 0{,}5 = 3$ y $s = 2{,}5 - 0{,}5 = 2$.

La factorización es $(x-3)(x-2) = 0$, que es correcta.

3.2. Ejemplo 2: Raíces reales con coeficiente $a \neq 1$

Resolver $2x^2 - 8x + 6 = 0$.
Primero, dividimos todo entre 2 para obtener la forma mónica:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Ahora, con $b = -4$, $c = 3$:

- Media: $m = -\frac{(-4)}{2} = 2$.
- $u^2 = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$.
- $u = 1$.
- Raíces: $x = 2 \pm 1 = 3$ y 1.

3.3. Ejemplo 3: Raíces complejas

Resolver $x^2 - 4x + 13 = 0$.

- $b = -4$, $c = 13$.
- Media: $m = -\frac{(-4)}{2} = 2$.
- $u^2 = (2)^2 - 13 = 4 - 13 = -9$.
- $u = \sqrt{-9} = 3i$.
- Raíces: $x = 2 \pm 3i$.

Efectivamente, $(2+3i)(2-3i) = 4 - (3i)^2 = 4 + 9 = 13$ y su suma es 4.

4. Ventajas y conexión con la fórmula general

Este método no es un truco nuevo, sino una forma más elegante de presentar la derivación de la fórmula cuadrática. De hecho, si sustituimos $m = -\frac{b}{2}$ en la expresión final, obtenemos:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

Si reescribimos c como $\frac{4c}{4}$ y combinamos las fracciones:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Que es precisamente la fórmula cuadrática para el caso $a = 1$. Para el caso general $ax^2 + bx + c = 0$, dividir primero por a equivale a aplicar la fórmula completa.

Ventajas del método:

- Es más intuitivo, ya que se basa en la lógica de "encontrar dos números que sumen S y multipliquen P".
- Evita la memorización rutinaria de la fórmula, fomentando la comprensión estructural.
- Es más rápido para ecuaciones con raíces enteras o racionales, ya que a menudo se puede encontrar u mentalmente.

5. Conclusión

El método de Po-Shen Loh para resolver ecuaciones cuadráticas no descubre nuevas matemáticas, sino que revela una perspectiva más profunda y didáctica sobre un tema clásico. Al centrarse en la relación entre la media y la distancia de las raíces, simplifica el proceso algebraico y lo conecta directamente con las relaciones de Vieta. Este enfoque tiene el potencial de cambiar la forma en que se enseña la resolución de cuadráticas en las aulas, haciendo hincapié en la comprensión por encima de la memorización.

Referencias

[1] Loh, P. S. (2019). *A Simple Proof of the Quadratic Formula*. arXiv preprint arXiv:1910.06709. También disponible en su explicación divulgativa en `https://www.poshenloh.com/`