梯度、散度和旋度小结

陈斯杰

2015年12月29日

摘要

这是一篇关于梯度、散度和旋度的一篇小总结

目录

1 梯度

1.1 二元函数情形

定义 1 二元函数的梯度是这样一个向量：其方向是这点的方向导数取最大值的方向，其模就是方向导数的最大值

$$\begin{aligned}\boldsymbol{grad}\, f(x_0, y_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0, y_0)\boldsymbol{j} \\ &= (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))\end{aligned}$$

1.2 三元函数情形

三元函数与二元函数类似，∇f是这样一个向量：其方向是这点的方向导数取最大值的方向，其模就是方向导数的最大值

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0,z_0) &= \nabla f(x_0,y_0,z_0)\\ &= f_x(x_0,y_0,z_0)\mathbf{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\mathbf{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\mathbf{k}\\ &= (f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),,f_z(x_0,y_0))\end{aligned}$$

对于函数等值面$f(x,y,z)=c$上的一点(x_0,y_0,z_0),
梯度 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$的方向就是等值面在这一点的法线的方向n，
梯度的模 $||\nabla f(x_0,y_0,z_0)||$就是函数沿着法线方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial n}$

1.3 Nabla算子

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ 称为三维的向量微分算子，或者Nabla算子

$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$

1.4 梯度的场论意义

定义 2 建立一个对应关系：对于空间区域G内每个点M，都有一个确定的**标量**$f(M)$与之对应，则称在G中建立了一个数量场。*(如温度场、密度场)*

定义 3 建立一个对应关系：对于空间区域G内每个点M，都有一个确定的**向量**$F(M)$与之对应，则称在G中建立了一个向量场。*(如速度场、力场)*

可表示为$F(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$

若$F(M)=\nabla f(M)$,则称$F(M)$为势场，$f(M)$为$F(M)$的势函数。
例如引力势$\frac{m}{r}$的梯度$\mathbf{grad}\frac{m}{r}$称为引力场
一孤立点电荷Q，在距Q为r的A点电势为$\phi=k\frac{Q}{r}$
$\frac{\partial\phi}{\partial r}=$