1 集合与其幂集不等势

1.1 幂集

一个集合的所有子集构成的集族称为幂集。

集合A的幂集记作$P(A)$或者2^A

1.2 等势

定义 1 *双射(Bijection)，又称一一映射。*

对于一个映射$f: A \mapsto B$，当且仅当：

对于$\forall b \in B$，存在唯一的$a \in A$满足$f(a) = b$ 时，

我们称其为双射。

定义 2 *在集合A和集合B之间，如果能构建一个双射$f: A \mapsto B$，则称A和B等势。*

1.3 证明：任意集合与该集合的幂集不等势

1.3.1 正式证明

假设集合A与其幂集$P(A)$等势，那么存在一个双射$f: A \mapsto P(A)$。
设$B = \{a | a \in A \quad and \quad a \notin f(a)\}$，由于$B$中所有元素$a$都满足$a \in A$，所以$B$是$A$的子集。

根据幂集的定义："幂集是一个集合所有子集的集族"，所以 B是$P(A)$的一个元素，即$B \in P(A)$。

由我们的假设，双射f使得存在唯一的一个元素 $b \in A$ 满足 $f(b) = B$。

那么现在来看看b是否属于集合B:

假如$b \in B$，b一定必须要集合B的定义：$b \notin f(b)$，而$f(b) = B$，从而推出$b \notin B$，矛盾，所以不成立。

假如$b \notin B$，把前面的推论$B = f(b)$代入,得：$b \notin f(b)$。然而这又使得b满足了B的定义"$b \in A \quad and \; b \notin f(b)$"，从而推出$b \in B$，矛盾，所以不成立。

$b \in B$和$b \notin B$是两个互相矛盾的命题，不能同时为假，否则违反排中律。因此原假设"集合A与其幂集$P(A)$等势"不成立。

证毕

1.3.2 讲故事证明

在数学王国Byteland里面，三拍干部领导班子出了一个点子：在生产队A和超生产队$P(A)$之间开展手拉手结对子活动。