

梯度、散度和旋度小结

陈斯杰

2015 年 12 月 31 日

摘要

这是一篇关于梯度、散度和旋度的一篇小总结

目录

1 梯度	1
1.1 二元函数情形	1
1.2 三元函数情形	2
1.3 Nabla算子	2
1.4 梯度的场论意义	2

1 梯度

1.1 二元函数情形

定义 1 二元函数的梯度是这样一个向量：其方向是这点的方向导数取最大值的方向，其模就是方向导数的最大值

$$\begin{aligned}\boldsymbol{grad} f(x_0, y_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0, y_0)\boldsymbol{j} \\ &= (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))\end{aligned}$$

1.2 三元函数情形

三元函数与二元函数类似, ∇f 是这样一个向量: 其方向是这点的方向导数取最大值的方向, 其模就是方向导数的最大值

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0) &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k} \\ &= (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), f_z(x_0, y_0))\end{aligned}$$

对于函数等值面 $f(x, y, z) = c$ 上的一点 (x_0, y_0, z_0) , 梯度 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ 的方向就是等值面在这一点法线的方向 \mathbf{n} , 梯度的模 $\|\nabla f(x_0, y_0, z_0)\|$ 就是函数沿着法线方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial n}$

1.3 Nabla算子

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ 称为三维的向量微分算子, 或者Nabla算子

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

1.4 梯度的场论意义

定义 2 建立一个对应关系: 对于空间区域 G 内每个点 M , 都有一个确定的标量 $f(M)$ 与之对应, 则称在 G 中建立了一个数量场。(如温度场、密度场)

定义 3 建立一个对应关系: 对于空间区域 G 内每个点 M , 都有一个确定的向量 $F(M)$ 与之对应, 则称在 G 中建立了一个向量场。(如速度场、力场)

可表示为 $F(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$

若 $F(M) = \nabla f(M)$, 则称 $F(M)$ 为势场, $f(M)$ 为 $F(M)$ 的势函数。

例如引力势 $\frac{m}{r}$ 的梯度 $\mathbf{grad} \frac{m}{r}$ 称为引力场

一孤立点电荷 Q , 在距 Q 为 r 的 A 点电势为 $\phi = k\frac{Q}{r}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} =$$