Métodos Computacionales

Guía 4: Espacios Vectoriales

Primer Semestre 2025

Espacios vectoriales y subespacios

Ejercicio 1. En las siguientes figuras se muestran subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, a los que llamamos H. Suponer que los H incluyen las líneas de frontera. En cada caso, dar una razón específica por la cual H no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, encontrar dos vectores en H cuya suma no esté en H, o un vector en H con un múltiplo escalar que no esté en H.

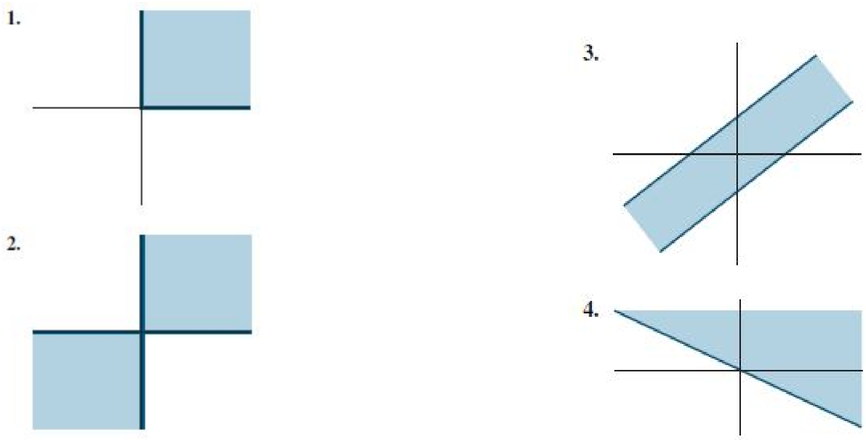


Figura 1: Ejercicio 7

Concluír dibujando un ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que *sí* sea un subespacio.

Ejercicio 2. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$ Determinar si $\mathbf{w}$ está en el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Ejercicio 3. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$. Determinar si $\mathbf{u}$ está en el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Ejercicio 4. Hallar un conjunto de vectores generadores de los siguientes subespacios

a) $S = \{\mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^2 \text{ tales que } 2x_1 - x_2 = 0\}$

b) $S = \{\mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^3 \text{ tales que } x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\}$

Ejercicio 5. Hallar una base y la dimensión de los siguientes subespacios.

a) $\text{Gen}\{(1, 2, 3), (1, -1, 0)\}$

b) $\text{Gen}\{(-1, 1, 2, 1), (2, 2, 3, 1), (5, 9, -1, 0), (0, 12, 2, 1)\}$

c) $S = \{\mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^2 \text{ tales que } 12x_1 - 4x_2 = 0\}$

d) $S = \{\mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^3 \text{ tales que } 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$

Ejercicio 6. Dado $V = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donde:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Llamemos W al conjunto de vectores que contienen todos los vectores de V tales que las primeras dos componentes son iguales a cero.

a) Calcular la dimensión de V.

b) Mostrar que W es un subespacio.
Ayuda: para ver que es un subespacio, hay que mostrar que $\mathbf{0} \in W$, que si $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2 \in W$ entonces $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$ y finalmente que si $\mathbf{w} \in W$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces $k\mathbf{w} \in W$.

c) Encontrar una base para W.

Ejercicio 7. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix}$ y $A = [\,\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3\,]$

a) ¿Cuál es la dimensión de $Col(A)$?

b) ¿Está $\mathbf{w}$ en $Col(A)$? ¿Por qué?

Ejercicio 8. Construir bases para el espacio columna y el espacio nulo de la matriz A. Justificar.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & -1 & 3 \\ -7 & 9 & -4 & 9 & -11 \\ -5 & 7 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -7 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -8 & -8 \\ 4 & 1 & 2 & -8 & -9 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 19 \\ -8 & -5 & 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9. (Python) Determinar si el vector $\mathbf{y}$ está en el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por las columnas de A

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 8 & 7 & -6 \\ -5 & -8 & 3 \\ 2 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10. (Python) Determinar si $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ esta en $Nul(A)$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 11. (Python) Determinar si $\mathbf{w}$ esta en el espacio columna de A, en el espacio nulo de A, o ambos

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -8 & 5 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ 10 & -8 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 12. Sean en $\mathbb{R}^3$ las bases

$$\begin{aligned} B_1 &= \{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]\} \\ B_2 &= \{[0,0,1],[1,0,0],[0,1,0]\} \\ B_3 &= \{[3,1,-2],[0,1,-1],[2,0,0]\} \end{aligned}$$

Hallar las coordenadas con respecto a cada una de las bases de los siguientes vectores:

a) $[7,2,-3]$

b) $[-12,0,1]$

c) Un vector genérico $[x_1,x_2,x_3]$ en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 13. Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Encontrar una base para el espacio columna de A y el espacio nulo de A.

Ejercicio 14. Sean $B = [\,\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2\,]$ y $C = [\,\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2\,]$ bases para $\mathbb{R}^2$. Encontrar la matriz de cambio de coordenadas de B a C y de C a B, con

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Factorización

Ejercicio 15. Encontrar una factorización LU de las siguientes matrices con L triangular inferior y con unos sobre la diagonal.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 10 \\ 9 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 10 & -8 & -9 \\ 15 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 6 & -7 & 2 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & -2 & 9 \\ -2 & -3 & 1 & -4 \\ -1 & 6 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & -6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{bmatrix}$

Ejercicio 16. Sea $A = QR$, donde Q y R son matrices de $n \times n$, R es invertible y triangular superior, y Q tiene la propiedad de que $Q^T Q = \mathbb{I}$. Mostrar que para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única. ¿Qué cálculos con Q y R producirán la solución?

Ejercicio 17. Cuando A es invertible, es posible hallar A^{-1} primero factorizando $A = LU$, invirtiendo L y U, y finalmente calculando $U^{-1}L^{-1}$. Usar este método para calcular la inversa de la siguiente matriz:

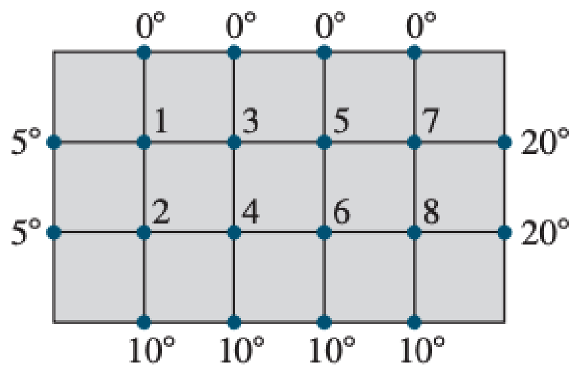
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 18. (Python) Considerar la placa térmica de la figura 1. La solución al problema de flujo de calor en estado estable para la placa de la figura se aproxima al resolver la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde $\mathbf{b} = (5, 15, 0, 10, 0, 10, 20, 30)$ y

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & & & \\ & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & & \\ & & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & \\ & & & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ & & & & -1 & 0 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Las entradas faltantes de A son ceros. Las entradas de A diferentes de cero se encuentran dentro de una banda a lo largo de la diagonal principal. Tales matrices de banda se presentan en diversas aplicaciones, y con frecuencia son extremadamente grandes (con miles de filas y columnas, pero con bandas relativamente angostas.)

Figura 2: Placa térmica



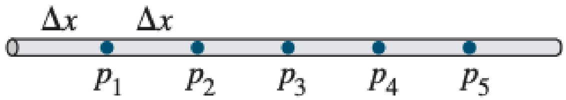
a) Construir una factorización LU de A y observar que ambos factores son matrices de banda (con dos diagonales diferentes de cero abajo o arriba de la diagonal principal). Calcular $LU - A$ para comprobar.

b) Usar la factorización LU para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

c) Obtener A^{-1} y observar que A^{-1} es una matriz densa sin estructura de banda. Cuando A es grande, L y U se pueden almacenar en mucho menos espacio que A^{-1}. Este hecho es otra razón para preferir la factorización LU de A en lugar de A^{-1}.

Ejercicio 19. (Python) La matriz de banda A que se ilustra a continuación puede servir para calcular la conducción inestable de calor en una varilla para la cual las temperaturas en los puntos $p_1, ..., p_4$ cambian con el tiempo.

Figura 3: Varilla térmica



La constante C de la matriz depende de la naturaleza física de la varilla, de la distancia Δx entre los puntos de la varilla, y del tiempo Δt que transcurre entre mediciones sucesivas de temperatura. Suponer que para $k = 0, 1, 2, ...$ un vector t_k en $\mathbb{R}^4$ lista las temperaturas en el tiempo $k\Delta t$. Si ambos extremos de la varilla se mantienen a 0°, entonces los vectores de temperatura satisfacen la ecuación $At_{k+1} = t_k$, $(k = 0, 1, ...)$ donde

$$A = \begin{bmatrix} (1+2C) & -C & & \\ -C & (1+2C) & -C & \\ & -C & (1+2C) & -C \\ & & -C & (1+2C) \end{bmatrix}$$

a) Encontrar la factorización LU de A cuando $C = 1$. Una matriz como A con tres diagonales diferentes de cero se denomina *matriz tridiagonal*. Los factores L y U son matrices bidiagonales.

b) Suponer que $C = 1$ y $t_0 = (10, 15, 15, 10)^T$. Usar la factorización LU de A para encontrar las distribuciones de temperatura t_1, t_2, t_3 y t_4.