Modelo Parcial 1

Métodos Computacionales 2023

Ejercicio 1. Determinar el o los valores de a para que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a+2 \end{bmatrix} \right\}$ sea linealmente independiente

Ejercicio 2. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ Calcular $A^{-1}B$ sin calcular inversas

Ejercicio 3. Encontrar una base para el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} a+2b+3c \\ 2a+3b+4c \\ 3a+4b+5c \end{bmatrix}$

Ejercicio 4. Las proyecciones respecto de subespacios en R^n se pueden tratar como transformaciones lineales; para ello hay que construir la matriz de proyección asociada a $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ tal que $T(x) = Ax$ es la transformación proyectiva. Si el subespacio S sobre el que se proyecta es un plano normal al vector $\mathbf{n}$, entonces

$$A = I - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}} \tag{1}$$

si en cambio el subespacio S sobre el que se proyecta es una recta generada por el vector $\mathbf{l}$, la matriz A es:

$$A = \frac{\mathbf{l}\mathbf{l}^T}{\mathbf{l}^T\mathbf{l}} \tag{2}$$

(a) Determinar la dimensión de $\mathrm{Nu}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$, $\mathrm{Col}(A^2)$ y $\mathrm{Col}(A^T)$

(b) Hallar la matriz de proyección sobre $S = gen\{(1,1,1)^T\}$ y la proyección del punto $M = (1,2,3)^T$

(c) Hallar la matriz de proyección sobre $S = gen\{(1,1,1)^T, (1,-1,0)^T\}$ y la proyección del punto $M = (1,2,3)^T$

(d) Hallar S, sabiendo que la matriz de proyección es

$$A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \tag{3}$$

0.1. Solución ejercicio 4:

Vamos a resolver el ejercicio solo para el proyector en el plano. Queda el proyector en la recta como tarea.

(a) Intentemos primero entender que es lo que se nos está pidiendo. Un plano se puede definir a partir de dos vectores, como se vio en la teórica, o a partir de un vector "normal". Es decir, dado un vector no nulo $\mathbf{n}$, podemos decir que el plano con este como normal es $S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{n}^t\mathbf{v} = 0\}$. Que dicho en palabras es: el conjunto de todos los vectores que son ortogonales a $\mathbf{n}$.

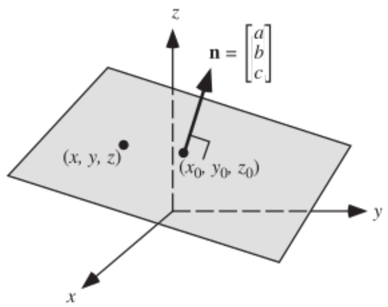

Figura 1: Visualización del plano

Como se puede observar en la figura 1 además de la normal se tiene un punto (x_0, y_0, z_0) que traslada al plano por el espacio. De lo contrario, si describimos al plano solo con un vector normal, este estará centrado en el origen. En este ejercicio tomaremos únicamente en cuenta este ultimo caso.

Entonces, la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con

$$T(x) = (I - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}})x$$

es tal que dado un vector del espacio nos devuelve la "sombra"que este proyecta sobre el plano. Luego, $T(x) \in S$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(I) $\dim(\mathrm{Nu}(T))$: El núcleo de T son los $\mathbf{x}$ tales que $T(\mathbf{x}) = 0$. Pensemos entonces cuáles son los vectores que podrían cumplir con esta propiedad.

Es bastante intuitivo ver en $\mathbb{R}^3$ que todos los vectores van a proyectar una "sombra"sobre el plano, menos aquellos que tengan la misma dirección que el vector normal.

Efectivamente si aplicamos la transformación a $k\mathbf{n}$ con k un escalar,

$$\begin{aligned} T(k\mathbf{n}) &= (I - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}})k\mathbf{n} \\ &= k\mathbf{n} - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}}k\mathbf{n} \\ &= k\mathbf{n} - k\frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{n}}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}} \\ &= k\mathbf{n} - k\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}^T\mathbf{n})}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}} \\ &= k\mathbf{n} - k\mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

Y esto se cumple para todas las dimensiones ya que en ningún momento asumimos que fuese exclusivo para $\mathbb{R}^3$.

Formalizando un poco lo que dijimos anteriormente:

$$(I - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^t}{\mathbf{n}^t\mathbf{n}})\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^t}{\mathbf{n}^t\mathbf{n}}\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{n}\mathbf{n}^t\mathbf{x} = \mathbf{n}^t\mathbf{n}\mathbf{x}$$

Ahora bien, debemos caracterizar esto de que un vector va a tener una ”sombra”sobre el plano. Con esto nos referimos a que toma *alguna* dirección además de la normal. Una forma de escribir esto de forma muy prolija es la siguiente:

Si tomo $B = \{\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}\}$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ [1]. Entonces, si escribimos a $\mathbf{x}$ usando esta base, nos queda

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{n} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{v}_i = \alpha\mathbf{n} + \mathbf{w}$$

donde $\mathbf{n}^t\mathbf{w} = 0$.

$$\mathbf{n}\mathbf{n}^t\mathbf{x} = \mathbf{n}^t\mathbf{n}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{n}\mathbf{n}^t(\alpha\mathbf{n} + \mathbf{w}) = \mathbf{n}^t\mathbf{n}(\alpha\mathbf{n} + \mathbf{w})$$

$$\alpha\mathbf{n}\mathbf{n}^t\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{n}^t\mathbf{w} = \alpha\mathbf{n}^t\mathbf{n}\mathbf{n} + \mathbf{n}^t\mathbf{n}\mathbf{w}$$

Tenemos que $\mathbf{n}\mathbf{n}^t\mathbf{w} = 0$, con lo cual nos queda:

$$\alpha\mathbf{n}\mathbf{n}^t\mathbf{n} = \alpha\mathbf{n}^t\mathbf{n}\mathbf{n} + \mathbf{n}^t\mathbf{n}\mathbf{w}$$

Notemos que $\alpha\mathbf{n}\mathbf{n}^t\mathbf{n} = \alpha\mathbf{n}^t\mathbf{n}\mathbf{n}$, ya que $\mathbf{n}^t\mathbf{n}$ es un número y podemos conmutarlo. Entonces,

$$\mathbf{n}^t\mathbf{n}\mathbf{w} = 0$$

Pero como $\mathbf{n} \neq 0$ (de lo contrario ni siquiera estaríamos definiendo un plano) entonces $\mathbf{n}^t\mathbf{n} \neq 0$ [2]. Por lo tanto el único $\mathbf{w}$ que satisface esta ecuación es $\mathbf{w} = 0$.

Esto significa que los vectores que pertenecen al núcleo de T, escritos en la base que nos armamos antes van a tener la pinta

$$\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

Luego son parte del núcleo todos los vectores que tengan misma dirección que $\mathbf{n}$ y *ninguna* otra, es decir $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Gen}(\{\mathbf{n}\})$. Este espacio tiene dimensión 1.

(II) $\dim(\mathrm{Im}(T))$ Para obtener la dimensión de la imagen de T podemos usar el teorema de la dimensión. Este aparece en la diapo 98 de la clase 4. Si esto no los convence podemos hacer un análisis similar al del item anterior. Sea $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(T)$, entonces

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Como $A\mathbf{x}$ es una proyección en el plano, entonces $\mathbf{n}^t A\mathbf{x} = 0$. Luego, tomando misma base que item

[1] Una base ortogonal es tal que los vectores que la forman son ortogonales entre si, es decir $\mathbf{v_i}^t\mathbf{v_j} = 0$ para $\mathbf{v_i}$ y $\mathbf{v_j}$ vectores distintos que forman a la base

[2] Notar que $\mathbf{n}^t\mathbf{n} = n_1^2 + ... + n_n^2$, y al estar al cuadrado son todos mayores o iguales a 0. Si $\mathbf{n} \neq 0$ entonces al menos alguna de sus coordenadas es positiva.

anterior $A\mathbf{x} = 0\mathbf{n} + \mathbf{w}$, y también $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{n} + \mathbf{l}$ donde $\mathbf{w}$ y $\mathbf{l}$ son combinación lineal de los $\mathbf{v_i}$. Pero entonces, reemplazando en la ecuación de arriba

$$0\mathbf{n} + \mathbf{w} = \alpha\mathbf{n} + \mathbf{l}$$

$$\alpha\mathbf{n} = \mathbf{w} - \mathbf{l}$$

Y esto solo puede ser si $\alpha = 0$ ya que $\mathbf{w} - \mathbf{l}$ es combinación lineal de los $\mathbf{v_i}$ y nunca podrían generar algo con la dirección de $\mathbf{n}$ [3], que son ortogonales a $\mathbf{n}$. Osea que $\mathbf{y} \in Gen(\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}\})$ cuya dimensión es $n-1$

(III) dimCol(A^2)

La clave aca es darse cuenta que el espacio columna es justamente la imagen de la transformación lineal asociada a la matriz A^2. Si buscamos la expresión explicita de A^2, nos podemos dar cuenta que es igual a A.

La interpretación geométrica de esto es que al proyectar un vector al plano, si volvemos a proyectarlo no va a pasar nada ya que ya se encuentra sobre el plano. Entonces es lo mismo aplicar la transformación 1, 2 o infinitas veces.

(IV) dimCol(A^T)

Este es idéntico al anterior.

(b) Por la definición data la matriz correspondiente a la transformación de proyección generada por $S = \text{Gen}\{(1,1,1)^T\}$ es

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(c) Como $dim(S) = 2$ debemos primero encontrar la normal al plano generado por: $S = \text{Gen}\{(1,1,1)^T, (1,-1,0)^T\}$.

Para ello, debemos encontrar un vector $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Esto nos define un sistema con infinitas soluciones. Una solución posible es $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

[3] Es como si quisiéramos generar el vector canónico $\mathbf{e}_1$ combinando linealmente $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ en $\mathbb{R}^3$

Por la definición dada la matriz correspondiente al proyector sobre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente la transformación del punto queda

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(d) Este punto queda de tarea. Pensar en como se hace para hallar S.