

# MÉTODOS COMPUTACIONALES

## GUÍA 3 - ÁLGEBRA DE MATRICES

### PRIMER SEMESTRE 2025

---

**Ejercicio 1. (Python)** Implementar funciones en Python que reciban un número natural  $n \in \mathbb{N}$  como parámetro y generen matrices aleatorias de cada uno de los siguientes conjuntos:

- $\mathbb{S}_1 = \{A \in [-100, 100]^{n \times n} / a_{ij} = a_{ji}; 1 \leq i, j \leq n\}$  (matrices simétricas)
- $\mathbb{S}_2 = \{A \in [-100, 100]^{n \times n} / a_{ij} + a_{ji} = 1; 1 \leq i < j \leq n\}$
- $\mathbb{S}_3 = \{A \in [-100, 100]^{n \times n} / a_{ij} = -a_{ji}; 1 \leq i < j \leq n\}$  (matrices anti-simétricas)
- $\mathbb{S}_4 = \{A \in [-100, 100]^{n \times n} / \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0\}$  (matrices de traza nula)
- $\mathbb{S}_5 = \{A \in [-100, 100]^{n \times n} / A \text{ tiene alguna fila nula}\}$
- $\mathbb{S}_6 = \{A \in [-100, 100]^{n \times n} / a_{ij} = 0; 1 \leq i < j \leq n\}$  (matrices triangulares superiores)

**Ejercicio 2.** Sean  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$  y  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

- a) Calcular  $AD$  y  $DA$ . Explicar como cambian las filas o columnas de  $A$  cuando es multiplicada por  $D$  a derecha o izquierda. ¿Cómo puede generalizarse este fenómeno para matrices diagonales arbitrarias?
- b) Encontrar una matriz  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  distinta de la matriz identidad o nula, tal que  $AB = BA$ .

**Ejercicio 3.** Sean  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que si  $A + B = \mathbb{I}$ , entonces  $AB = BA$ .

**Ejercicio 4.** Sean  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  matrices diagonales, es decir, matrices cuyas entradas por fuera de la diagonal son ceros. Mostrar que el producto  $AB$  es también una matriz diagonal.

**Ejercicio 5.** Una matriz  $X$  se dice simétrica si  $X = X^T$ . Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Mostrar que  $A^T A$  y  $AA^T$  son ambas matrices simétricas, y especificar las dimensiones de cada una.

**Ejercicio 6.** Una compañía fabrica dos productos,  $B$  y  $C$ .

$$U = \begin{bmatrix} 0,45 & 0,40 \\ 0,25 & 0,30 \\ 0,15 & 0,15 \end{bmatrix}$$

Las columnas de  $U$  representan los productos  $B$  y  $C$ , y las filas representan los costos de materiales, trabajo y gastos generales por unidad respectivamente; por ejemplo, el elemento  $u_{2,2}$  representa el costo de trabajo para la fabricación de una unidad del producto  $C$ . Sean  $\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_4 \in \mathbb{R}^2$  vectores que especifican para cada trimestre del año la cantidad de unidades vendidas de  $B$  y  $C$ . Dar una descripción económica de los datos en la matriz  $UQ$  donde  $Q = [\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{q}_3 \mid \mathbf{q}_4]$ .

**Ejercicio 7.** Para los siguientes ejercicios responder con verdadero o falso justificando la respuesta. Para las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , las sumas y productos indicados están definidos.

- a) Si  $A$  y  $B$  son matrices  $2 \times 2$ , con columnas  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_2$  respectivamente, entonces

$$AB = [\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2]$$

b) Si  $A$  y  $B$  son matrices  $3 \times 3$ , y  $B = [\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{b}_3]$ , entonces

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid A\mathbf{b}_3]$$

c) Cada columna de  $AB$  es una combinación lineal de las columnas de  $B$  usando como pesos los elementos de la columna de  $A$  correspondiente.

d) La segunda fila de  $AB$  es la segunda fila de  $A$  multiplicada a derecha por  $B$ .

e)  $AB + AC = A(B + C)$

f)  $(AB)C = (AC)B$

**Ejercicio 8.** Dadas  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$  hallar sin realizar el producto completo:

a) la tercera fila de  $AB$

b) la tercera columna de  $BA$

c) el coeficiente  $c_{3,2}$  de  $C = BAB$

**Ejercicio 9.** Sean  $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$  y  $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ . Calcular  $u^T v$ ,  $v^T u$ ,  $uv^T$  y  $vu^T$ .

**Ejercicio 10. (Python)** Implementar funciones en Python que reciban números naturales  $n, m \in \mathbb{N}$  como parámetros y devuelvan las siguientes matrices (consultar la documentación de NumPy para los comandos correspondientes)

a) Una matriz  $n \times m$  de ceros.

b) Una matriz  $n \times m$  de unos.

c) La matriz identidad de  $n \times n$ .

d) Una matriz diagonal de  $n \times n$  cuyos elementos sobre la diagonal sean los de un vector  $v \in \mathbb{R}^n$  pasado también como parámetro.

**Ejercicio 11. (Python)** Construir una matriz aleatoria de  $4 \times 4$  y testear si  $(A + I)(A - I) = A^2 - I$ . Una manera de hacerlo es calcular  $(A + I)(A - I) - (A^2 - I)$  y verificar que esta diferencia sea la matriz nula <sup>1</sup>. Testearlo para varias matrices aleatorias diferentes. Luego, testear  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$  de la misma manera para diferentes pares de matrices aleatorias de  $4 \times 4$ .

**Ejercicio 12. (Python)** Calcular  $S^{k^2}$  para  $k = 2, 3, \dots, 6$  donde  $S$  es la siguiente matriz

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 13. (Python)** Describir qué ocurre con la secuencia  $\{A^k\}_{k \rightarrow \infty}$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 5/12 \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>Para esto pueden utilizar la función `allclose` de NumPy.

<sup>2</sup>¡Cuidado! El operador `**` realiza la potencia a nivel elemento, para poder calcular la potencia de matrices utilizar la función `matrix_power` de NumPy

**Ejercicio 14. (Python)** La matriz  $M$  es capaz de detectar un patrón sombreado de  $2 \times 2$  particular, como en los ejemplos vistos en la teórica. Crear un vector  $\mathbf{x}$  no nulo de  $\mathbb{R}^4$  definiendo en cada entrada el valor 0 o 1. Testear si  $\mathbf{x}$  corresponde al patrón correcto calculando  $\mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ . Si  $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$ , entonces  $\mathbf{x}$  es el patrón identificado por  $M$ . Si  $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \neq 0$ , probar con un vector  $\mathbf{x}$  de ceros y unos diferente.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 15.** Una rotación en la pantalla de una computadora a veces se implementa como el producto de dos transformaciones de trasquilado y escalamiento, que pueden acelerar los cálculos para determinar cómo se presenta en realidad una imagen gráfica en términos de píxeles de la pantalla. (La pantalla consiste en filas y columnas de puntos pequeños, llamados *píxeles*). La primera transformación  $A_1$  trasquila verticalmente y después comprime cada columna de píxeles; la segunda transformación  $A_2$  trasquila horizontalmente y después estira cada fila de píxeles.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sec \phi & -\tan \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mostrar que la composición de las dos transformaciones es una rotación en  $\mathbb{R}^2$ .



*Sugerencia:* tener en cuenta las siguientes identidades trigonométricas:

- a)  $\sec(\phi) = \frac{1}{\cos(\phi)}$ .
- b)  $\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}$ .
- c)  $1 - \sin^2(\phi) = \cos^2(\phi)$ .

**Ejercicio 16.** Para los siguientes ejercicios responder con verdadero o falso justificando la respuesta.

- a) Para que una matriz  $B$  sea la inversa de otra matriz  $A$ , deben satisfacerse ambas ecuaciones  $AB = \mathbb{I}$  y  $BA = \mathbb{I}$ .
- b) Si  $A$  y  $B$  de  $n \times n$  son invertibles, entonces  $A^{-1}B^{-1}$  es la inversa de  $AB$ .
- c) Si  $A$  es invertible, entonces la inversa de  $A^{-1}$  es  $A$  misma.
- d) Si  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  y  $ab - cd \neq 0$ , entonces  $A$  es invertible.
- e) Si  $A$  es una matriz invertible de  $n \times n$  entonces el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es consistente para cada  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .
- f) Si  $A$  puede reducirse a la matriz identidad mediante operaciones de fila, entonces  $A$  debe ser invertible.

- g) Si  $A$  es invertible, entonces las operaciones elementales de filas que reducen a  $A$  a la identidad  $\mathbb{I}_n$  también reducen a  $A^{-1}$  a  $\mathbb{I}_n$ .
- h) Una matriz cuadrada con dos columnas idénticas no puede ser invertible.

**Ejercicio 17.** Encontrar las inversas de las siguientes matrices

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

**Ejercicio 18.** Sea  $A = \begin{bmatrix} -25 & -9 & -27 \\ 546 & 180 & 537 \\ 154 & 50 & 149 \end{bmatrix}$ . Encontrar la segunda y tercer columna de  $A^{-1}$  sin calcular la primera.

**Ejercicio 19.** Sea  $A$  una matriz cuadrada que cumple  $A^2 + A + \mathbb{I} = 0$ . Hallar la inversa de  $A$  en función de  $A$ .

**Ejercicio 20.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz diagonal. Hallar la inversa de  $A$ .

**Ejercicio 21. (Python)** El color real que ve un observador en una pantalla está influido por el tipo específico y la cantidad de material fosforescente en la pantalla. De esta manera, cada fabricante de pantallas de computadora debe hacer la conversión entre los datos (R, G, B) y un estándar internacional para color, CIE, que usa tres colores primarios llamados  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . Una conversión típica para el material fosforescente de persistencia breve es

$$\begin{bmatrix} 0,61 & 0,29 & 0,150 \\ 0,32 & 0,59 & 0,063 \\ 0,04 & 0,12 & 0,787 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Un programa de computadora envía un flujo de información acerca del color a la pantalla usando datos del estándar CIE ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ). Encontrar la ecuación que convierte esta información en los datos (R, G, B) que necesita el cañón de electrones de la pantalla.

**Ejercicio 22.** En los siguientes ejercicios asumir que las matrices están particionadas de manera conformada para la multiplicación por bloques. Calcular los siguientes productos:

a)  $\begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ E & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -X & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

**Ejercicio 23.** En los siguientes ejercicios, encontrar fórmulas para  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  en términos de  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Justificar sus cálculos. Si es necesario, suponer el tamaño de una matriz para obtener una fórmula.  
*Sugerencia:* Calcular el producto a la izquierda e igualarlo al lado derecho.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} A & C \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ Z & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ Y & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & Z \\ 0 & 0 \\ B & \mathbb{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 24.** Hallar la inversa de una matriz *triangular superior por bloques* de  $2 \times 2$ , es decir, una matriz de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde  $A_{11}$  es un bloque de  $p \times p$  y  $A_{22}$  es un bloque de  $q \times q$ , y son invertibles (no es necesario asumir que  $A_{12}$  lo es).

**Ejercicio 25.** Hallar la traspuesta de una matriz por bloques conformada por 4 bloques de  $2 \times 2$  cada uno

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 26.** Cuando se lanza una sonda espacial, es necesario hacer algunas correcciones para colocar la nave en una trayectoria exacta. La radio telemetría proporciona un flujo de vectores  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  que arrojan información en diferentes momentos sobre cómo se compara la posición de la sonda con la trayectoria prevista. Sea  $X_k$  la matriz  $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$ . La matriz  $G_k = X_k X_k^T$  se calcula conforme se analizan los datos del radar. Cuando llega  $\mathbf{x}_{k+1}$  se debe calcular un nuevo  $G_{k+1}$ . Como los vectores de datos llegan a alta velocidad, la carga computacional podría ser grande. Pero la multiplicación de matrices particionadas ayuda muchísimo. Calcular las expansiones columna-fila de  $G_k$  y  $G_{k+1}$  y describir lo que se debe calcular para actualizar a  $G_k$  a la forma  $G_{k+1}$ .

**Ejercicio 27. (Python)** Implementar una función para calcular el producto de matrices cuadradas utilizando multiplicación por bloques. La función debe tomar como parámetros dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$ , y un entero  $n$  denominando el *tamaño de bloque*. Luego, calcular  $C = AB$  subdividiendo tanto  $A$  como  $B$  en matrices por bloques del tamaño dado y efectuar las multiplicaciones por bloques. Por último, la función debe retornar la matriz  $C$ .