

MÉTODOS COMPUTACIONALES

GUÍA 7: ORTOGONALIDAD Y CUADRADOS MÍNIMOS

PRIMER SEMESTRE 2025

Ejercicio 1. En cada caso, encontrar un vector que sea ortogonal a cada uno de los vectores dados

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$

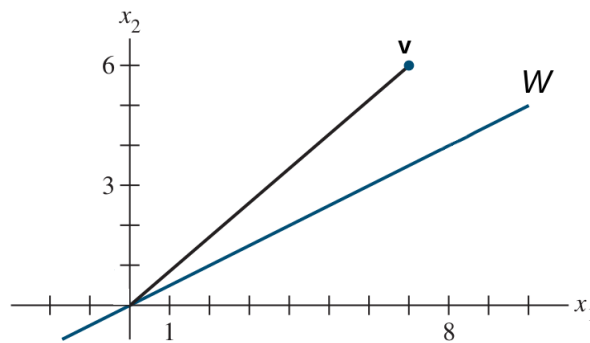
Ejercicio 2. Mostrar que si un vector v es ortogonal a dos vectores x e $y \in \mathbb{R}^n$, entonces es ortogonal a $\alpha x + \beta y$, para cualquier valor de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio anterior, dado W un subespacio de \mathbb{R}^n , ¿qué podemos decir sobre un vector v que es ortogonal a todos los vectores de una base de W ?

Ejercicio 4. Sea W un subespacio de \mathbb{R}^n , mostrar que $W^{\perp 1}$ también es un subespacio.

Ejercicio 5. ¿Es cierto que si dos vectores son linealmente independientes, entonces son ortogonales?

Ejercicio 6. Si tenemos $v \in \mathbb{R}^n$ y W un subespacio de \mathbb{R}^n , llamamos la proyección de v en W al vector $\tilde{w} \in W$ que cumple que $(v - \tilde{w})$ es ortogonal a W . Hallar \tilde{w} y $(v - \tilde{w})$ en el siguiente gráfico:



Ejercicio 7. La fórmula general para hallar la proyección de un vector v en un subespacio W es

$$\tilde{w} = \frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \dots + \frac{v \cdot w_k}{w_k \cdot w_k} w_k$$

Donde $w_1 \dots w_k$ son base ortogonal de W . Mostrar que \tilde{w} efectivamente es la proyección de v en W (es decir que pertenece a W y que cumple la propiedad de proyección). ¿Funcionaría la fórmula si la base no fuese ortogonal? ¿Cómo se simplifica la fórmula si la base es ortonormal?

Ejercicio 8. Si tenemos una matriz A cuyas columnas son ortogonales entre sí, ¿es invertible?

¹El complemento ortogonal es el conjunto de todos los vectores que son ortogonales al subespacio.

Ejercicio 9. Dada una matriz A con columnas a_1, \dots, a_n ortonormales, ¿cuál es la inversa de A ?

$$A = [a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_n]$$

Ejercicio 10. Decimos que una matriz A es ortogonal si $A^{-1} = A^t$. Deducir que si A y B son ortogonales, entonces AB también lo es.

Ejercicio 11. Mostrar que si A es ortogonal, su determinante puede ser únicamente 1 o -1.

Ejercicio 12. Mostrar que $\{u_1, u_2\}$ o $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal para \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 respectivamente, y expresar a x como combinación lineal de los vectores de la base.

a) $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$

b) $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

d) $u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

Ejercicio 13. Encontrar el punto mas cercano a y en el subespacio W generado por $\{v_1, v_2\}$

a) $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 14. Encontrar la mejor aproximación a z con vectores de la forma $c_1v_1 + c_2v_2$

a) $z = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $z = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 15. (Python) Mostrar que las columnas de la matriz A son ortogonales haciendo operaciones de matrices

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \\ 3 & 6 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 16. En cada caso hallar la recta que mejor ajusta a los puntos dados

a) Conjunto de datos:

i. $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2)$

ii. $(1, 0), (2, 2), (3, 7), (4, 9)$

iii. $(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 4)$

iv. $(2, 3), (3, 2), (5, 1), (6, 0)$

b) Si un algoritmo de aprendizaje automático "aprende" la recta que mejor ajusta a los datos en (a)i) ¿qué valor estimará para y cuando $x = 4$? ¿qué valor estimará para y cuando $x = 3$? ¿Cuán cerca esta la predicción del valor en los datos?

c) Si un algoritmo de aprendizaje automático "aprende" la recta que mejor ajusta a los datos en (a)ii) ¿qué valor estimará para y cuando $x = 3$? ¿qué valor estimará para y cuando $x = 4$? ¿Cuán cerca esta la predicción del valor en los datos?

Ejercicio 17. Un experimento arroja el siguiente conjunto de datos (x, y) :

$$(1, 2.5), (2, 4.3), (3, 5.5), (4, 6.1)$$

Describe el modelo que produce el ajuste por cuadrados mínimos usando una función de la forma: $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2$. Tal función podría surgir, por ejemplo, en los ingresos asociados a la venta de x unidades de un producto, cuando la cantidad ofrecida por venta afecta el precio que se fija para el producto.

a) Resolver el sistema utilizando cuadrados mínimos

b) **(Python)** Graficar la curva ajustada por cuadrados mínimos, junto con los datos.

c) Si una máquina aprende la misma curva que se encontró en b, ¿Cuál sería la predicción cuando $x = 6$?

Ejercicio 18. Una curva sencilla que suele ajustar bien los costos variables de una compañía en función del nivel de ventas x , tiene la siguiente forma $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$. (No hay un término constante por que los costos fijos no están incluidos).

a) Resolver el sistema utilizando cuadrados mínimos (modelo lineal)

b) **(Python)** Utilizando cuadrados mínimos hallar la curva con la forma que mejor ajusta los datos:

$$(4, 1.58), (6, 2.08), (8, 2.5), (12, 3.1), (14, 3.4), (16, 3.8), (18, 4.32)$$

(en unidades de millones de pesos). Graficar los datos con la curva hallada.

c) ¿Cuál sería la estimación de los costos si el nivel de ventas fuera, $x = 9$?

Ejercicio 19. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal que preserva longitudes. Esto significa que $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Mostrar que la matriz que representa T es una matriz ortogonal.

b) Mostrar que T también preserva la ortogonalidad, es decir que $T(x) \cdot T(y) = 0$ si $x \cdot y = 0$

Ejercicio 20. (Python) Implementar el método de Gram-Schmidt y calcular una base ortonormal para los siguientes subespacios:

$$a) W = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{b) } W = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 12 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 41 \\ 0 \\ 12 \\ 99 \\ -15 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{c) } W = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Agregar alguna condición para que el método no falle si el conjunto de vectores es linealmente dependiente sin que sea necesario verificarlo de antemano.

Ejercicio 21. (Python) Utilizando el código del ejercicio 20 implementar una función que compute la factorización QR . ¿Qué sucede si las columnas de la matriz no son linealmente independientes?