Métodos Computacionales

Guía 2 - Ecuaciones Lineales, parte II

Primer Semestre 2025

Ejercicio 1. Resolver el siguiente sistema escribiendo la solución como una traslación de la solución del sistema homogéneo asociado, por una solución particular.

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 - \quad x_3 + \ x_4 = 0 \\ 3x_1 + \ x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 \quad\quad\quad + \ 3x_3 + \ x_4 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales $(2, 0, -1)$ es la única solución del sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - ax_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - bx_3 &= 3 \\ 2x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Se tiene el siguiente sistema lineal en función de $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$(i) \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = y_1 \\ a_3x_1 + a_4x_2 = y_2 \end{cases}$$

Donde $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ es solución al sistema

$$(ii) \begin{cases} b_1y_1 + b_2y_2 = c_1 \\ b_3y_1 + b_4y_2 = c_2 \end{cases}$$

a) Escribir el sistema (ii) únicamente en función de x.

b) ¿Cuál es la matriz asociada a éste?

c) ¿Se llega al mismo resultado planteando los sistemas de forma matricial?

Ejercicio 4. Para cada una de las siguientes matrices, decidir si sus columnas generan $\mathbb{R}^4$.

a) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -5 & 8 \\ -5 & -3 & 4 & -9 \\ 6 & 10 & -2 & 7 \\ -7 & 9 & 2 & 15 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -7 & -4 & 9 \\ 6 & -8 & -7 & 5 \\ 4 & -4 & -9 & -9 \\ -9 & 11 & 16 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 12 & -7 & 11 & -9 & 5 \\ -9 & 4 & -8 & 7 & -3 \\ -6 & 11 & -7 & 3 & -9 \\ 4 & -6 & 10 & -5 & 12 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 8 & 11 & -6 & -7 & 13 \\ -7 & -8 & 5 & 6 & -9 \\ 11 & 7 & -7 & -9 & -6 \\ -3 & 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

Ejercicio 5. Hallar, si es posible, una columna en la matriz del ítem (c) del ejercicio anterior que pueda ser eliminada y que las columnas restantes generen $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 6. Hallar, si es posible, una columna en la matriz del ítem (d) del ejercicio anterior que pueda ser eliminada y que las columnas restantes generen $\mathbb{R}^4$. ¿Es posible eliminar más de una columna?

Ejercicio 7. Considerando los vectores v_1, v_2, v_3 y b en $\mathbb{R}^2$ que se ven en la figura 1. La ecuación

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = b$$

¿Tiene solución? ¿Es única? Usar la figura para explicar sus respuestas.

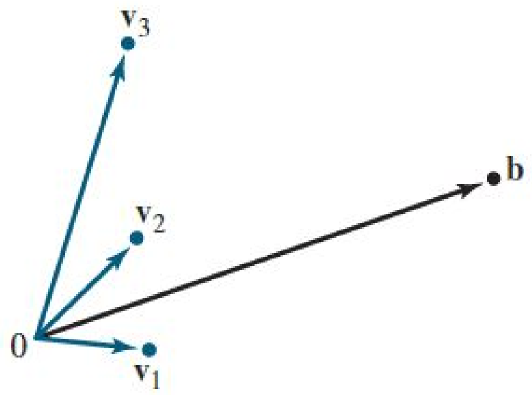

Figura 1: Figura correspondiente al ejercicio 7.

Ejercicio 8. Estudiar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores

a) $\{(-1,1,5),(1,-4,0),(2,-2,4)\}$

b) $\{(5,1,2,3,0)\}$

c) $\{(0,3,1,-1),(0,1,0,1),(1,3,-2,1),(2,1,-1,4)\}$

Ejercicio 9. Determinar los valores reales de k para los cuales cada conjunto de vectores es linealmente independiente.

a) $\{(0,1,-2),(1,-1,k),(1,-3,0)\}$

b) $\{(1,-1,3),(k,k+1,k+4),(k+1,k+1,k)\}$

Ejercicio 10. Sean v y $w \in \mathbb{R}^n$ probar las siguientes afirmaciones e interpretarlas geométricamente (para la interpretación geométrica se sugiere buscar ejemplos en $\mathbb{R}^2$).

1. $\|v-w\| = \|v+w\| \Leftrightarrow v \cdot w = 0$
2. $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \Leftrightarrow v \cdot w = 0$ (Teorema de Pitágoras)

Ejercicio 11. Sean $(1,3,1)$, $(2,2,4)$ y $(2,0,4)$ soluciones de un sistema lineal no homogéneo.

1. Hallar dos vectores v y w no paralelos que sean soluciones del sistema homogéneo asociado.
2. Encontrar cuatro soluciones del sistema no homogéneo, distintas de las dadas.

Ejercicio 12. Encontrar todos los $x \in \mathbb{S}_0$ tales que $Bx = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Donde, $\mathbb{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^4 / Ax = 0\}$,
$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Verificar que la función $T(x) = Ax$ es una transformación lineal.

Ejercicio 14. Dadas dos transformaciones lineales $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

1. Verificar que la función $T_3(x) = T_2(T_1(x))$ también es una transformación lineal.
2. Sea $T_4(x) = T_1(T_2(x))$. ¿Es cierto que $T_3(x) = T_4(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$? ¿De qué depende?

Ejercicio 15. A partir de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, se define la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $T(x) = Ax$. Hallar la imagen de $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ bajo la transformación T.

Ejercicio 16. Hallar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ y } T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 17. En cada caso, considerar la transformación lineal T asociada a la matriz dada, es decir, $T(x) = Ax$, y hallar un vector x tal que su imagen es el vector b.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -5 & -9 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

Ejercicio 18. Sea A una matriz de 4×6. ¿Cuáles son los valores de a y b correspondientes para poder definir la transformación $T : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ como $T(x) = Ax$?

Ejercicio 19. En cada caso hallar todos los vectores $x \in \mathbb{R}^4$ cuya imágen bajo la transformación $x \mapsto Ax$ es el vector nulo.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Ejercicio 20. Graficar los vectores $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ junto con sus imágenes bajo las transformaciones dadas en cada caso, donde $x = [x_1, x_2]$:

a) $T(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

b) $T(x) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

c) $T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

d) $T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 21. Sean $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$, y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T(x) = x_1 v_1 + x_2 v_2$. Hallar la matriz asociada a T, es decir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $T(x) = Ax$.

Ejercicio 22. Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Sean $w_1, w_2, \ldots, w_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores en $\mathbb{R}^m$ tales que $T(v_j) = w_j$ para todo $1 \leq j \leq k$.

a) Mostrar que si los $w_1, w_2, \ldots, w_k$ son linealmente independientes entonces los $v_1, v_2, \ldots, v_k$ también lo son.

b) Mostrar con un contraejemplo que si los $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son linealmente independientes no necesariamente implica que $w_1, w_2, \ldots, w_k$ también lo sean.

Ejercicio 23. Implementar una función en Python que reciba un vector en $\mathbb{R}^2$ y dos parámetros α y β, y que devuelva el vector de entrada escaleado en α unidades en la dirección x y β unidades en la dirección y. Realizar lo mismo para rotaciones a partir de un parámetro ϕ que denote el ángulo de rotación. Graficar las transformaciones sobre de los vectores

$$\{[0,0], [1,0], [0,1], [1,1]\}$$

Ejercicio 24. Determinar el o los valores de a para que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a+2 \end{bmatrix} \right\}$ sea linealmente independiente

Ejercicios opcionales:

Ejercicio 25. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -x_1 + 3x_2, 3x_1 - 2x_2)$$

Hallar $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (-1, 1, -3)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(w) = (-1, 4, 9)$.