Ghid Metode Numerice

Frumosul colectiv 311CA

June 17, 2022

1 Din ce dăm examenul?

1. Metoda QR cu deplasare explicită pentru matrice simetrice. Descompunerea valorilor singulare
2. Interpolare polinomială
3. Metoda Neville. Metode de interpolare cu funcţii spline cubice
4. Teoria aproximării
5. Transformarea Fourier Rapidă (FFT)
6. Derivare şi integrare numerică. Cuadraturi de bază. Metode Newton-Cotes
7. Extrapolare Richardson. Metoda Romberg. Cuadraturi Gaussiene
8. Ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale - metoda Euler, Taylor, multipas, Runge-Kutta
9. Metoda predictor-corector pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale

2 Ce se dă des la examen?

Notă: valorile dintre paranteze de la începutul exercițiilor reprezintă cat de des au apărut respectivele exerciții în subiectele din anii trecuți.

2.1 Funcţii MATLAB/OCTAVE

- (10) Metoda Euler ODE ✓
- (5) Polinomul Lagrange într-un punct "a", diferit de punctele în care este cunoscută funcţia, eficient din punct de vedere MATLAB; ✓
- (5) Metoda trapezelor compuse ✓(*cateodata se cere să se îmbunătăţească formula şi să aibă eroarea* $O(h^{10})$); ✓
- (2) Metoda Simpson simplă (nu compusă); ✓
- (1) Aproximărea quadratică, în sensul celor mai mici pătrate, pentru o funcţie cunoscută în 4 puncte; ✓
- (1) Aproximărea cubică, în sensul celor mai mici pătrate, pentru o funcţie cunoscută în 3 puncte; ✓
- (1) Runge-Kutta de ordin 4; ✓

2.2 Exerciţii

- (10) Aplicaţi un pas din algoritmul QR cu deplasare pentru o matrice 4x4 (*cateodata nu se specifică dimensiunea*), simetrică şi tridiagonală la alegere, diferită de cele prezentate în cadrul laboratorului sau cursului de MN (elementele de pe sub/supra diagonală sunt nenule şi diferite). (*cateodata: Ce observaţi?*)
- (4) Explicaţi, fără a prezenta formule, Fast Fourier Transformation (FFT). ✓
- (4) Să se calculeze spline-ul natural C2 ce foloseşte funcţii de îmbinare polinoame de grad 3 s_0 şi s_1 pentru funcţia $f(x) : x = [0\ 1\ 2]$, $f = [6\ 4\ 3]$ ✓(dacă se cere spline-ul TENSIONAT, se precizează şi că $f' = [1 \bullet \text{-}1]$).
- (4) Explicaţi grafic quadraturile adaptive ✓(*cateodata se cere si explicaţie grafică şi pentru quadraturile gaussiene*)
- (3) Explicaţi cum se construiesc curbele Bezier pornind de la 4 puncte iniţiale $P_0P_1P_2P_3$ (inclusiv grafic). ✓
- (3) Ce înseamnă aproximare continuă trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate? ✓
- (3) Explicaţi grafic formulele Trapezelor şi Simpson compuse. Explicaţi grafic şi generalizarea acestor formule. ✓
- (3) Ce realizează deplasarea pentru metoda QR? ✓
- (3) Ce formă are matricea coeficienţilor sistemului linear pentru aflarea coeficienţilor spline-urilor de clasă C^2 ce folosesc funcţii de îmbinare polinoame de grad 3? Dar pentru tensionate? (+ Deduceţi sistemul în unul din cazuri / Ce condiţii se impun la spline-uri naturale şi tensionate?). ✓
- (3) Ce înseamnă DVS? Explicaţi detaliat. ✓
- (3) Aproximaţi soluţia ODE $y' = y - t^2 + 1$, $0 \le t \le 2$, $y(0) = 0.5$ prin metoda Euler cu pasul $h = 0.5$. Ce reprezintă o iteraţie pentru acest tip de metode? Aproximaţi y(1.3) prin două moduri. ✓

- (3) Determinaţi c_0, c_1, x_1 a.î. quadratura $\int_0^1 f(x)\,dx = c_0(f(0)+f(x_1)) + c_1 f(x_1)$ să aibă grad maxim de valabilitate. Care este gradul maxim de valabilitate? ✓

- (2) Aflaţi formula gaussiană de integrare $\int_{-1}^0 f(x)\,dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3)$. Ce grad de valabilitate are? ✓

- (2) Determinaţi toate aproximările Pade de grad N=2 pentru funcţia $f(x) = e^{-x}$ ce are aproximarea în serie McLaurin $\sum_{i=1}(-x)^i/i!$ ✓

- (2) Îmbunătăţiţi $N_1(h)$ care aproximează M cu o eroare $O(h)$, ($\sum_{i=1} K_i h^i$) printr-o formulă mai bună, ce are eroarea $O(h^2)$ ($\sum_{i=2} \overline{K_i} h^i$)

- (2) Deduceţi o formulă aproximativă de derivare de 2 ori pentru o funcţie f, pornind de la forma Taylor (dezvoltaţi în serie de polinoame Taylor de grad 3 $f(x_0+h)$ şi $f(x_0-h)$ în punctul x_0 şi ţineţi cont de $\exists c \in (a,b), \frac{f^{(4)}(a)+f^{(4)}(b)}{2} = f^{(4)}(c)$. ✓

- (2) Demonstraţi că $g*$ (cel mai bun aproximant în sensul celor mai mici pătrate al unui element f în subspaţiul G) este unic. Folosiţi propietatea $< f - g*, g >= 0\ \forall g \in G$ ✓

- (2) Cum arată un sistem pentru care determinantul matricei coeficienţilor se numeste determinant GRAM? Ce înseamnă coeficienţi Fourier? Explicaţi (u_i baza şi f funcţia). ✓

- (2) Considerăm funcţia f : [-1, 1] $\rightarrow$ R, $f(x) = x^3 - x^2 + 3x$. **a)** Calculaţi valorile exacte ale polinomului minmax de gradul 1 şi 2 a lui f(x) şi calculaţi în fiecare pas abaterea între f(x) şi polinomul minmax corespunzător; **b)** Să se determine exact şi aproximativ (cu Remes) polinomul minimax de gradul 1 pentru f.

- (1) Determinaţi cel mai mare pas posibil pentru $\log_{10}$ pe [1, 10] a.î. interpolarea cu polinom de grad 2 să aibă acurateţea de 10^{-6}.

- (1) Ce polinoame se folosesc pentru determinarea celui mai bun aproximant uniform de grad n? Explicaţi.

- (1) Prezentaţi polinomul ortogonal definit în mod unic în raport cu ponderea considerată la integrarea gaussiană.

- (1) Ce reprezintă ordinul şi rangul unei metode de tip Runge-Kutta? Arătaţi că metoda Euler <=> RK11.

- (1) Calc. aprox. integrala $\int_0^2 \ln(1+x^2)\,dx$ folosind formula compusă a trapezelor cu n = 4. ✓

- (1) Stabilitatea metodelor cu paşi separaţi folosite la integrarea ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii iniţiale.

- (1) Ce aduc nou iteraţiile pentru metodele ODE? Comparaţi cu iteraţiile metodelor studiate anterior.

- (1) Determinaţi funcţia spline de clasă C^2 ce foloseşte funcţii de îmbinare s_0 polinom de grad 2 şi $s_1 = ax + b + c(1-x)e^x$. Se dau x = [-1 0 1], f = [6 4 3].

- (1) Deduceţi quadratura cu grad maxim de valabilitate $\int_a^b f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$.

- (1) Deduceţi o formulă de derivare de două ori folosind aproximarea Taylor.

- (1) Explicaţi conceptul *în sensul celor mai mici pătrate.* ✓

- (1) La ce se referă clasa unui spline? Ce clasă au spline-urile ce folosesc funcţii de îmbinare polinoame de grad 3? Explicaţi.

- (1) Integrarea Gaussiană

- Ce înseamnă o transformare de asemănare? În cazul general, care este cea simplă structură ce poate fi obţinută prin transformări de asemănare şi cum arată această structură?

- (1) Deduceţi matricea coeficienţilor sistemului de ecuaţii liniare pentru aproximarea în sensul celor mai mici pătrate cu un polinom de grad n.
- (1) Cum se determină polinomul minmax? Explicaţi, evidenţiind 2 metode.
- (1) Îmbunătăţiţi formula $N_1(h)$ (depinde doar de pasul considerat), $1 > h > 0$, care aproximează o valoare M şi are eroare exprimată sub forma $\sum_{i=1} K_i h^{2i}$
- (1) Dacă $N_1(h)$, $1 > h > 0$ este o formulă de aproximare pentru o valoare M, cu eroarea de forma $K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6$, atunci polinomul liniar Lagrange care trece prin punctele $(h^2, N_1(h))$ şi $(h^2/4, N_1(h/2))$ evaluat în 0 este egal cu $N_2(h)$.
- (1) Determinaţi quadratura $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$ a.î formula de integrare să aibă grad maxim de valabilitate.
- (1) Determinaţi 3 aproximări Pade de grad N=3 pentru funcţia $f(x) = e^{-x}$ ce are aproximarea în serie McLaurin $\sum_{i=1}(-x)^i/i!$ ✓
- (1) Consideraţi dată o funcţie dată în 3 puncte. Construiţi o interpolare spline continuă formată din funcţiile de îmbinare $ae^x + b$ şi $c \log x + d$. ✓
- (1) Cum şi ce îmbunătăţescc formulele de integrale gaussiene? (raportat la NC) Explicaţi paradigma punctelor x_i în care funcţia este cunoscută.
- (1) Se consideră polinomul $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n+1} + ... + a_1z + a_0$ şi matricea C = [$-a_{n-1}$ $-a_{n-2}$ ... $-a_1$ a_0; 1 0 ... 0; ...; 0 0 ... 1 0]. Demonstraţi că $det(\lambda I_n - C) = p(\lambda)$.
- (1) De ce putem aproxima o funcţie cunoscută în $n + 1$ puncte printr-un polinom? Ce formă are polinomul unic de grad cel mult n care trece prin toate cele $n + 1$ puncte unde este cunoscută o funcţie şi care o aproximează?
- (1) Calc. aprox. integrala $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ (tineţi cont de $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n})$). ✓
- (1) Să se determine polinomul Cebasev de grad 2 pentru funcţia f : [-5,3] $\to$ R, $f(x) = 2x + 1$
- (1) Fie A o matrice pătratică cu DVS, $A = USV^t$, atunci A^{-1} există $\Leftrightarrow$ S^{-1} există. Determinaţi SVD pentru A^{-1}. ✓

2.3 Exerciţii BONUS

- (7) Prezentaţi la alegere o problemă fizică (reală) şi rezolvaţi-o numeric, utilizand metode studiate pentru examenul final (*hint*: NU Neville).
- (3) Cum sunt generate polinoamele ce stau la baza formei algebrice a curbelor Bezier? Desenaţi o curbă Bezier pornind de la 4 puncte în plan, care **nu** formează un poligon concav sau convex, ci mixt (*cateodata se precizează: Desenaţi curba Bezier pornind de la punctele* $P_0(1, 1)$, $P_1(2, 2)$, $P_2(3, 0)$, $P_3(4, 2)$*; hint: Algoritmul de Casteljau*). ALTĂ VARIANTĂ - pentru desenul curbei, cele 4 puncte să fie necoplanare.

3 Coduri MATLAB

3.1 Polinomul Lagrange într-un punct EFICIENT

```
function rez = LagrangeEficient(x, y, a)
% x - vector ce contine abscisele punctelor cunoscute
% y - vector ce contine ordonatele punctelor cunoscute
% a - punctul de abscisa in care vrem sa aflam valoarea polinomului
% rez - valoarea polinomului in punctul dorit
  U = ones(n) * diag(x) - diag(x) * ones(n) + eye(n);
  V = (a - diag(x)) * ~eye(n) + eye(n);
  rez = prod(V) ./ prod(U) * y;
endfunction
```

3.2 Polinomul Lagrange într-un punct (sau mai multe)

```
function rez = Lagrange(x, y, a)
% x - vector ce contine abscisele punctelor cunoscute
% y - vector ce contine ordonatele punctelor cunoscute
% a - punctul de abscisa in care vrem sa aflam valoarea polinomului
% rez - valoarea polinomului in punctul dorit
  n = length(x);
  prod = ones(n, 1);
  y = y(:)';
  for i = 1 : n
    for j = 1 : n
      if j != i
        prod(i) = prod(i) .* (a - x(j)) ./ (x(i) - x(j));
      endif
    endfor
  endfor
  rez = y * prod;
endfunction
```

3.3 Metoda Euler ODE

```
function w = Euler(a, b, n, alpha, f)
% a - cap tul st ng al intervalului
% b - capatul drept
% n - num rul de puncte
% alpha - condi ia ini ial
% f - func ia de integrat pentru care y'=f(x,y)
% w - vectorul aproxima iilor solu iei

  % se calculeaza pasul
  h = (b - a) / n;
  t = a;

  % se seteaza y(0)
  w = zeros(n + 1, 1);
  w(1) = alpha;

  for i = 1 : n
    w(i+1) = w(i) + h * f(w(i), t);
    t = a + i*h;
  endfor

endfunction
```

3.4 Formula simplă Simpson

```
function I = SimpsonSimpla(a, b, f)
% a, b - capetele intervalului de integrare
% f - functia de integrat
% I - valoarea integralei definite
  I = (b - a) * (f(a) + 4 * f((a+b)/2) + f(b)) / 6;
endfunction
```

3.5 Formula compusă Simpson

```
function I = SimpsonCompusa(n, a, b, f)
% a, b - capetele intervalului de integrare
% n - ordinul metodei
% f - functia de integrat
% I - valoarea integralei definite
  h = (b - a) / (2*n);
  s1 = 0;
  s2 = 0;

  for i = 1 : n
    s1 = s1 + f(a + (2*i-1) * h);
  end

  for i = 1 : n-1
    s2 = s2 + f(a + 2*i*h);
  end

  I = h * (f(a) + f(b) + 4*s1 + 2*s2) / 3;
endfunction
```

3.6 Metoda Runge-Kutta

```
function w = Runge_Kutta4(a, b, n, alpha, f)
% a, b - capetele intervalului
% n - num rul de puncte
% alpha - condi ia ini ial
% f - func ia de integrat pentru care y'=f(x,y)
% w - vectorul aproxima iilor solu iei
  h = (b - a) / n;
  t = a;

  w = zeros(n + 1, 1);
  w(1) = alpha;

  for i = 1 : n
    K1 = h * f(t, w(i));
    K2 = h * f(t + h/2, w(i) + K1/2);
    K3 = h * f(t + h/2, w(i) + K2/2);
    K4 = h * f(t + h,   w(i) + K3);
    w(i + 1) = w(i) + (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4) / 6;
    t = a + i*h;
  endfor
endfunction
```

3.7 Formula compusă a trapezelor + îmbunătăţire

```
function I = trapezoidal(a, b, n, f)
% a, b - capetele intervalului de integrare
% n - ordinul metodei
% f - func ia de integrat
% I - valoare integrala definita
  h = (b - a) / n;
  s = 0;

  for i = 1 : n-1
    s = s + f(a + i*h);
  endfor

  I = h * (f(a) + f(b) + 2*s) / 2;
endfunction
```

```
function S = richardson_ten(f, a, b)
  % metoda trapezelor : O(h^2)
  % ajungem la O(h^10) cu extrapolare richardson / integrare romberg !!

  S = zeros(5, 1);

  % apelam metoda trapezelor compuse
  for i = 1:5
    S(i) = trapezoidal(f, a, b, 2 ^ (i - 1));
  endfor

  for j = 2:5
    len = length(S);
    prev_S = S;
    S = (4^(j-1) * prev_S(2:len) - prev_S(1:len-1)) / (4^(j-1) - 1);
  endfor
endfunction
```

3.8 Aproximarea cubică în sensul cmmp

```
function [a] = cubic_approx(x, y)
  % x este vectorul absciselor punctelor
  % y este vectorul ordonatelor punctelor

  % alocam vector de 9 zerouri - pentru sum(xk ^ i)
  % cu i de la 0 la 8 (inclusiv)
  S = zeros(1, 9);

  for i = 1:9
    S(i) = sum(x .^ (i - 1));
  endfor

  % avem n = 3 ("interpolare" = aproximatie in sensul CMMP
  % cu polinom de grad 3)
  % deci vom avea sistem 4x4

  b = zeros(4, 1);

  % vectorul termenilor liberi, in care vom pune sumele
  for i = 1:4
    b(i) = sum(y .* (x .^ (i - 1)));
  endfor

  % matricea sistemului, in care vom pune sumele
  A = zeros(4);
  for i = 1:4
    for j = 1:4
      A(i,j) = S(i + j - 1);
    endfor
  endfor

  a = A \ b;
endfunction
```

3.9 Aproximarea quadratică în sensul cmmp

```
function [a] = quadratic_approx(x, y)
  % x este vectorul absciselor punctelor
  % y este vectorul ordonatelor punctelor

  % alocam vector de 5 zerouri - pentru sum(xk ^ i)
  % cu i de la 0 la 4 (inclusiv)
  S = zeros(1, 5);

  for i = 1:5
    S(i) = sum(x .^ (i - 1));
  endfor

  % avem n = 2 ("interpolare" in sensul CMMP
  % cu polinom de grad 2)
  % deci vom avea sistem 3x3

  b = zeros(3, 1);

  % vectorul termenilor liberi, in care vom pune sumele
  for i = 1:3
    b(i) = sum(y .* (x .^ (i - 1)));
  endfor

  % matricea sistemului, in care vom pune sumele
  A = zeros(3);
  for i = 1:3
    for j = 1:3
      A(i,j) = S(i + j - 1);
    endfor
  endfor

  a = A \ b;
endfunction
```

4 Elemente de teorie

4.1 DVS - Descompunerea valorilor singulare

Descompunerea valorilor singulare este o factorizare a unei matrice reale sau complexe. În esenţă, algoritmul DVS reprezintă o adaptare a algoritmului QR simetric, care evită calculul efectiv al valorilor proprii ale unei matrice produs de tipul $A^T A$ sau AA^T. Prin factorizarea DVS, matricea A va fi egală cu USV^t, unde U şi V sunt matrici ortogonale, iar S matrice diagonală cu elemente pozitive.
- S conţine valorile singulare ale matricei A;
- V conţine vectori proprii;
- U conţine vectorii proprii normalizaţi (de obicei cu Gram-Schmidt).

4.2 Deplasarea pentru metoda QR

Pentru a grăbi convergenţa, se foloseşte o metodă de deplasare explicită: este aleasă o constantă σ, apropiată de una din valorile proprii ale matricei A. Astfel, factorizarea devine $A^{(i)} - \sigma I = Q^{(i)} R^{(i)}$ iar matricea nouă e definită ca fiind $A^{(i+1)} = R^{(i)} Q^{(i)} + \sigma I$. Cu această modificare, rata convergenţei lui $b_{j+1}^{(i+1)}$ către 0 depinde de raportul $|\frac{\lambda_{i+1}-\sigma}{\lambda_i-\sigma}|$. Acest lucru poate aduce o îmbunătăţire semnificativă asupra convergenţei elementului $a_j^{(i+1)}$ către valoarea proprie corespunzătoare λ_j, în cazul în care σ este mai apropiat de λ_{j+1} decat de λ_j.

4.3 Definirea conceptului ”în sensul celor mai mici pătrate”

Aproximarea în sensul CMMP se realizează pentru o funcţie lineară, dar pentru care, din cauza erorilor de măsurare linearitatea s-a pierdut. Ne aflăm în situaţia în care, daca am interpola aceste date, am fi nevoiţi să suferim consecinţele perturbaţiilor. Dacă am aproxima cumva funcţia pornind de la aceste date şi deci nu am respecta ca aproximaţia obţinută să treacă prin punctele date, am fi avantajaţi.

Ne-ar interesa o linie $a_1 x + a_0$, care să treacă printre punctele date şi care să aproximeze cat mai bine funcţia dată prin acele puncte. Adica am dori ca eroarea exprimată mai jos să fie cat mai mică. De aici vine titulatura de ”în sensul celor mai mici pătrate”.

$$E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10} \left[y_i - (a_1 x_i + a_0) \right]^2$$

4.4 Aproximare continuă trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate

Se referă la alegerea bazei ortogonale ce are $2n+1$ componente:$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) \cos(x) ... \sin(nx) \cos(nx)$ şi funcţia pondere $w(x) = 1$, fapt ce asigură că sistemul GRAM va deveni diagonal, adică uşor de rezolvat.

4.5 FFT (Fast Fourier Transform) - fără formule

Interpolarea unui set de date alcătuit din 2*m puncte, folosind tehnica de calcul directă, necesită efectuarea unui număr mare de operații:

- $(2m)^2$ operații de adunare
- $(2m)^2$ operații de înmulțire

Astfel, eroarea obținută în cazul unui număr mare de puncte este dezavantajoasă. Această problemă își găsește rezolvarea într-o metodă ce poartă numele de ”transformata Fourier rapidă” (Fast Fourier Transform), descrisă de J.W. Cooley și J.W. Tukey. Practic, această abordare determină forma polinomului de interpolare trigonometrică folosind mult mai puține operații:

- $O(m * log_2(m))$ operații de adunare (FFT)

- $O(m * log_2(m))$ operații de înmulțire (FFT)

Eficientizarea procesului se constituie în diferența enormă dintre numărul de operații efectuate, acesta scăzând de la ordinul milioanelor la cel al miilor, pentru un set de date de ordinul miilor. Procesul este posibil prin înlocuirea evaluării directe a constantelor a_k și b_k cu modificarea valorilor coeficienților complecși c_k. Ulterior, a_k și b_k pot fi calculate folosind formula lui Euler:

$$e^{iz} = cos(z) + i * sin(z)$$

4.6 Cum arată un sistem pentru care determinantul matricei coeficienţilor se numeste determinant GRAM? Ce înseamnă coeficienţi Fourier? Explicaţi (u_i baza şi f funcţia).

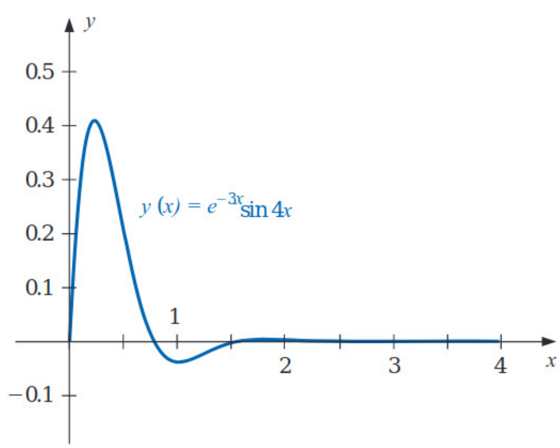
$$\begin{cases} \mathrm{c}_1\cdot < u_1, u_1 > + c_2\cdot < u_2, u_1 > + c_3\cdot < u_3, u_1 > + ... + c_n\cdot < u_n, u_1 > = < f, u_1 > \\ \mathrm{c}_1\cdot < u_1, u_2 > + c_2\cdot < u_2, u_2 > + c_3\cdot < u_3, u_2 > + ... + c_n\cdot < u_n, u_2 > = < f, u_2 > \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{c}_1\cdot < u_1, u_n > + c_2\cdot < u_2, u_n > + c_3\cdot < u_3, u_n > + ... + c_n\cdot < u_n, u_n > = < f, u_n > \end{cases} \tag{1}$$

Sistemul de mai sus rezultă din aproximarea în sensul CMMP, fiind un sistem simetric și rău condiționat, al cărui determinant poartă numele de determinant GRAM. Rezolvarea este anevoioasă și necesită alegerea unor cazuri particulare (diferite baze).

Coeficienții Fourier se reprezintă prin $c_k* = < f, u_k >$, unde u_k este o bază ortonormată.

4.7 Quadraturi adaptive

Formulele obişnuite pentru quadraturi sunt eficiente în cele mai multe dintre situaţii, însă pot fi şi excepţii, atunci cand, pentru o funcţie, avem atât regiuni cu variaţii foarte mici, cât şi regiuni cu variaţii foarte mari, precum în exemplul de mai jos:



Putem observa că pe intervalul [3,4] valoarea integralei se apropie foarte mult de 0; pe intervalul [2,3], la fel, ne aşteptăm la o valoare mică. Totuşi, pe [0,2] avem variaţiuni foarte mari, ceea ce nu ne indică nicio aproximare concretă a integralei pe acea porţiune. Acesta este un exemplu de situaţie în care formulele obişnuite de integrare nu ne sunt de folos. Se constată că, pentru porţiuni cu variaţii mici trebuie sa luăm paşi mai mari, iar pentru variaţii mari trebuie să ne folosim de paşi mai mici. O metodă eficientă pentru această situaţie o constituie predicţia variaţiunilor pentru a adapta fiecare pas după nevoie. Aceste metode se numesc **quadraturi adaptive**.

5 Rezolvări exerciţii

Csd. o fct. dată în 3 pct. Constr. o interpolare spline continuă form. din fct. de îmbinare ae^x+b şi $c\log x+d$

1) luăm 3 pct random

x	$f(x)$
0	-4
1	1
2	10

2) notăm $\begin{cases} S_0(x)=ae^x+b \\ S_1(x)=c\log x+d \end{cases}$

3) scriem condiţiile de interpolare

$$\begin{cases} S_0(x_0)=f(x_0) \\ S_1(x_1)=f(x_1) \\ S_1(x_2)=f(x_2) \end{cases} \iff \begin{cases} a\cdot e^0+b=-4 \\ c\cdot\log 1+d=1 \\ c\log 2+d=10 \end{cases}$$

$$S_0(x_1)=S_1(x_1) \iff ae^1+b=c\log 1+d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-4 \\ d=1 \\ c\log 2+1=10 \\ a\cdot e+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{c=\frac{9}{\log 2}} \\ \boxed{d=1} \\ a+b=-4 \\ ae+b=1 \end{cases}$$

$b=-4-a$

$\Downarrow$

$ae-4-a=1$

$\Downarrow$

$a(e-1)=5$

$\Downarrow$

$\boxed{a=\frac{5}{e-1}} \Rightarrow \boxed{b=-4-\frac{5}{e-1}}$

Figure 1: Interpolare spline

Ce formă are matricea coef. sist. liniar pt. aflarea coef. spline-urilor naturale de clasă C^2 ce folosesc fct. de îmbinare polin. de gr. 3? Dar pt. tensionate? Ce condiții impun spline-urile naturale și tens.?

Matricea coef. e de formă tridiagonală, strict diagonal dominantă.

SPLINE-URI NATURALE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

condiții

$$\begin{cases} S_0''(x_0) = 0 \\ S_{n-1}''(x_n) = 0 \end{cases}$$

SPLINE-URILE TENSIONATE

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & & \\ \vdots & & & \\ & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

singurele diferențe față de spline-uri naturale

condiții: $\begin{cases} S_0'(x_0) = f'(x_0) \\ S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$

CELELALTE COND. PT. SPLINE-URI DE CLASA C^2:

• $n+1$ cond. tip Lagrange

$$\begin{cases} S_i(x_i) = f(x_i) \\ S_{n-1}(x_n) = f(x_n) \end{cases} \quad i = \overline{0:n-1}$$

• $3n-3$ cond. de racordare

$$\begin{cases} S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \\ S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \\ S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}) \end{cases} \quad i = \overline{0:n-2}$$

Figure 2: Condiţii spline-uri

Să se calc. spline-ul NATURAL C^2 ce fol fcții de îmbinare polinoame de grad 3 s_0 și s_1 pt. $f(x)$, unde $x=[0\ 1\ 2]$, $f=[6\ 4\ 3]$ $\Longrightarrow n=2$ (indice maxim)

x_0 x_1

$$\boxed{S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3}$$

1) csd. spline-urile: $\Leftrightarrow a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3$

$$\begin{cases} s_0(x) = a_0 + b_0(x-0) + c_0(x-0)^2 + d_0(x-0)^3 \\ s_1(x) = a_1 + b_1(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3 \end{cases}$$

2) ne folosim de următoarele condiții:

$$\begin{cases} S_0(x_0) = f(x_0) \\ S_0(x_1) = f(x_1) \\ S_1(x_1) = f(x_1) \\ S_1(x_2) = f(x_2) \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \\ S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}) \\ S_0''(x_0) = 0 \\ S_{m-1}''(x_m) = 0 \end{cases}$$

spline natural

3) calcul:

1. $S_0(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f(0) = \boxed{6 = a_0}$
2. $S_0(x_1) = f(x_1) \Leftrightarrow f(1) = 4 = a_0 + b_0 + c_0 + d_0 \Rightarrow \boxed{b_0 + d_0 = -2}$
3. $S_1(x_1) = f(x_1) \Leftrightarrow f(1) = \boxed{4 = a_1}$
4. $S_1(x_2) = f(x_2) \Leftrightarrow f(2) = 3 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \Leftrightarrow \boxed{b_1 + c_1 + d_1 = -1}$
5. $S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \Leftrightarrow b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 \Leftrightarrow \boxed{b_0 + 3d_0 = b_1}$
6. $S_0''(x_1) = S_1''(x_1) \Leftrightarrow 2c_0 + 6d_0 = 2c_1 \Rightarrow \boxed{3d_0 = c_1}$
7. $S_0''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2c_0 = 0 \Rightarrow \boxed{c_0 = 0}$
8. $S_1''(x_2) = 0 \Leftrightarrow 2c_1 + 6d_1 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = -3d_1}$

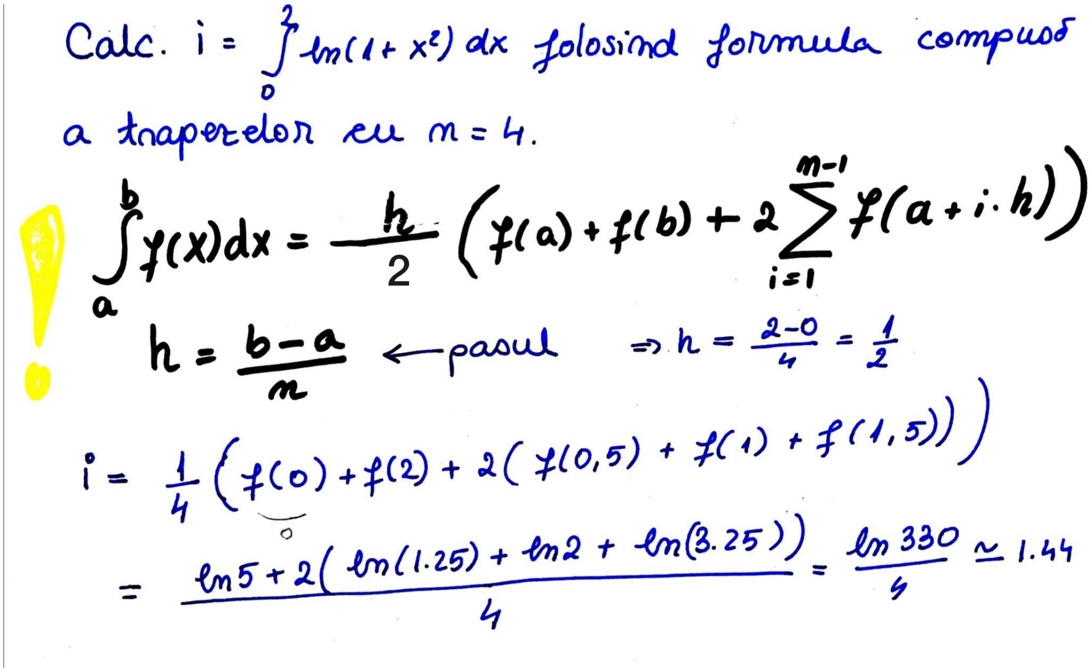
$b_0 = \frac{-9}{4}$, $b_1 = \frac{-3}{2}$

$d_0 = \frac{1}{4}$, $c_1 = \frac{3}{4}$

$d_1 = \frac{-1}{4}$

$$\Rightarrow S(x) = \begin{cases} 6 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{4}x^3 \\ \frac{-9}{4} - \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 \end{cases}$$

Figure 3: Spline natural



Calc. $i = \int_0^2 \ln(1+x^2)\,dx$ folosind formula compusă a trapezelor cu $n = 4$.

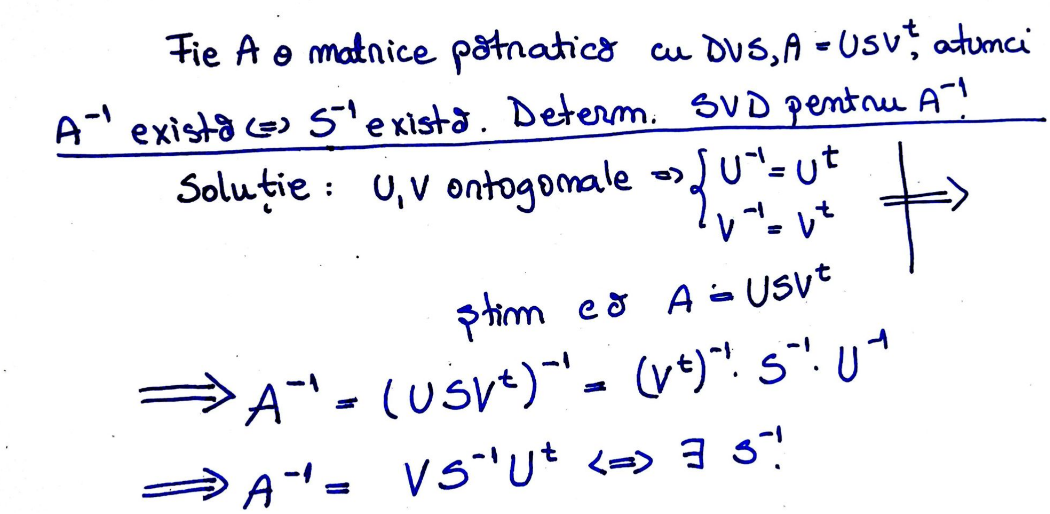
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\cdot h)\right)$$

$h = \frac{b-a}{n}$ ← pasul $\Rightarrow h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

$$i = \frac{1}{4}\left(\underbrace{f(0)}_{0} + f(2) + 2\left(f(0,5) + f(1) + f(1,5)\right)\right)$$

$$= \frac{\ln 5 + 2(\ln(1.25) + \ln 2 + \ln(3.25))}{4} = \frac{\ln 330}{4} \simeq 1.44$$

Figure 4: Trapeze cu n=4



Fie A o matrice pătratică cu DVS, $A = USV^t$, atunci

A^{-1} există $\Leftrightarrow$ S^{-1} există. Determ. SVD pentru A^{-1}!

Soluție: U, V ortogonale $\Rightarrow \begin{cases} U^{-1} = U^t \\ V^{-1} = V^t \end{cases} \Rightarrow$

știm că $A = USV^t$

$$\Longrightarrow A^{-1} = (USV^t)^{-1} = (V^t)^{-1} \cdot S^{-1} \cdot U^{-1}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = V S^{-1} U^t \Leftrightarrow \exists\, S^{-1}!$$

Figure 5: SVD

APROXIMĂRI PADÉ:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_n x^n}{q_0 + q_1 x - q_2 x^2 + \dots + q_m x^m}$$

! gradul aproximării: $N = n + m$

$q_0 = 1$ stabilit.

$$\underbrace{\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots\right)}_{\text{termenii seriei Mclaurin } e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!}}\left(1 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_m x^m\right) = \left(p_0 + \dots + p_n x^n\right)$$

Ex: toate aprox. Padé pt. e^{-x} grad 2

Soluție: $N = 2 = n + m$ ⇒ luăm pe cazuri

I $n = 0, m = 2 \Rightarrow \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots\right)(1 + q_1 x + q_2 x^2) - p_0 = 0$

desf. ()

nu contează!

$$\Longrightarrow 1 + \boxed{q_1 x} + q_2 x^2 \boxed{- x} - q_1 x^2 - q_2 x^3 + \frac{x^2}{2} + \dots - p_0 = 0$$

grupare

$$\Longrightarrow x^0(1 - p_0) + x^1(q_1 - 1) + x^2\left(q_2 - q_1 + \frac{1}{2}\right) + \dots = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 - p_0 = 0 \\ q_1 - 1 = 0 \\ q_2 - q_1 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = 1 \\ q_1 = 1 \\ q_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow r(x) = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

II $n = 1, m = 1 \Rightarrow \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots\right)(1 + q_1 x) - (p_0 + p_1 x) = 0$

$$\Longrightarrow x^0(1 - p_0) + x^1(q_1 - 1 - p_1) + x^2\left(q_1 + \frac{1}{2}\right) + \dots = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 - p_0 = 0 \\ q_1 - 1 - p_1 = 0 \\ -q_1 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 = -\frac{1}{2} \\ q_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow r(x) = \frac{1 - \frac{1}{2}x}{1 + \frac{1}{2}x}$$

III $n = 2, m = 0 \Rightarrow \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots\right) \cdot 1 - (p_0 + p_1 x + p_2 x^2) = 0$

$$\Rightarrow x^0(1 - p_0) + x^1(-1 - p_1) + x^2\left(\frac{1}{2} - p_2\right) + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - p_0 = 0 \\ -1 - p_1 = 0 \\ \frac{1}{2} - p_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 = -1 \\ p_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow r(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

Figure 6: Pade grad 2

Ex: 3 aproximări Padé pt e^{-x} grad 3

Soluție: $N = 3 = n + m$, aleg 3 cazuri $\begin{cases} n=0,\ m=3 & \text{I} \\ n=1,\ m=2 & \text{II} \\ n=2,\ m=1 & \text{III} \end{cases}$

(I) $\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)\left(1 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3\right) - p_0 = 0$

$\Rightarrow x^0(1-p_0) + x^1(q_1 - 1) + x^2\left(q_2 - q_1 + \frac{1}{2}\right) + x^3\left(q_3 - q_2 + q_1 + \frac{1}{6}\right) + \ldots = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - p_0 = 0 \\ q_1 - 1 = 0 \\ q_2 - q_1 + \frac{1}{2} = 0 \\ q_3 - q_2 + q_1 + \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p_0 = 1 \\ q_1 = 1 \\ q_2 = \frac{1}{2} \\ q_3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow r(x) = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}$$

(II) $\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)\left(1 + q_1 x + q_2 x^2\right) - (p_0 + p_1 x) = 0$

$\Rightarrow x^0(1 - p_0) + x^1(q_1 - 1 - p_1) + x^2\left(q_2 - q_1 + \frac{1}{2}\right) + x^3\left(-q_2 + \frac{q_1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - p_0 = 0 \\ q_1 - p_1 - 1 = 0 \\ q_2 - q_1 + \frac{1}{2} = 0 \\ -q_2 + \frac{q_1}{2} - \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 = \frac{-1}{3} \\ q_1 = \frac{2}{3} \\ q_2 = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow r(x) = \frac{1 - \frac{1}{3}x}{1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2}$$

(III) $\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)\left(1 + q_1 x\right) - (p_0 + p_1 x + p_2 x^2) = 0$

$\Rightarrow x^0(1 - p_0) + x^1(q_1 - 1 - p_1) + x^2\left(q_1 + \frac{1}{2} - p_2\right) + x^3\left(\frac{q_1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \ldots = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - p_0 = 0 \\ q_1 - 1 - p_1 = 0 \\ q_1 + \frac{1}{2} - p_2 = 0 \\ \frac{q_1}{2} - \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = 1 \\ q_1 = \frac{1}{3} \\ p_1 = \frac{-2}{3} \\ p_2 = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow r(x) = \frac{1 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}x^2}{1 + \frac{1}{3}x}$$

Figure 7: Pade grad 3

Demonstrați că $g*$ (cel mai bun aproximant în sensul „celor mai mici pătrate" al unui element f în subspațiul G) este unic.

Folosiți proprietatea $\langle f-g*, g\rangle = 0\ (\forall) g \in G$

Soluție:

Pentru început, presupunem că există g_1^* și g_2^* - cei mai buni aproximanți ai lui f. (adică presupunem că acest „$g*$" nu ar fi unic)

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle f-g_1^*, g\rangle = 0 \\ \langle f-g_2^*, g\rangle = 0 \end{cases} (\forall) g \in G \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle f-g_1^*, g\rangle = \langle f-g_2^*, g\rangle \quad (1)$$

Din proprietatea de linearitate a unui produs scalar $\Rightarrow \langle f_1+f_2, f_3\rangle = \langle f_1, f_3\rangle + \langle f_2, f_3\rangle$

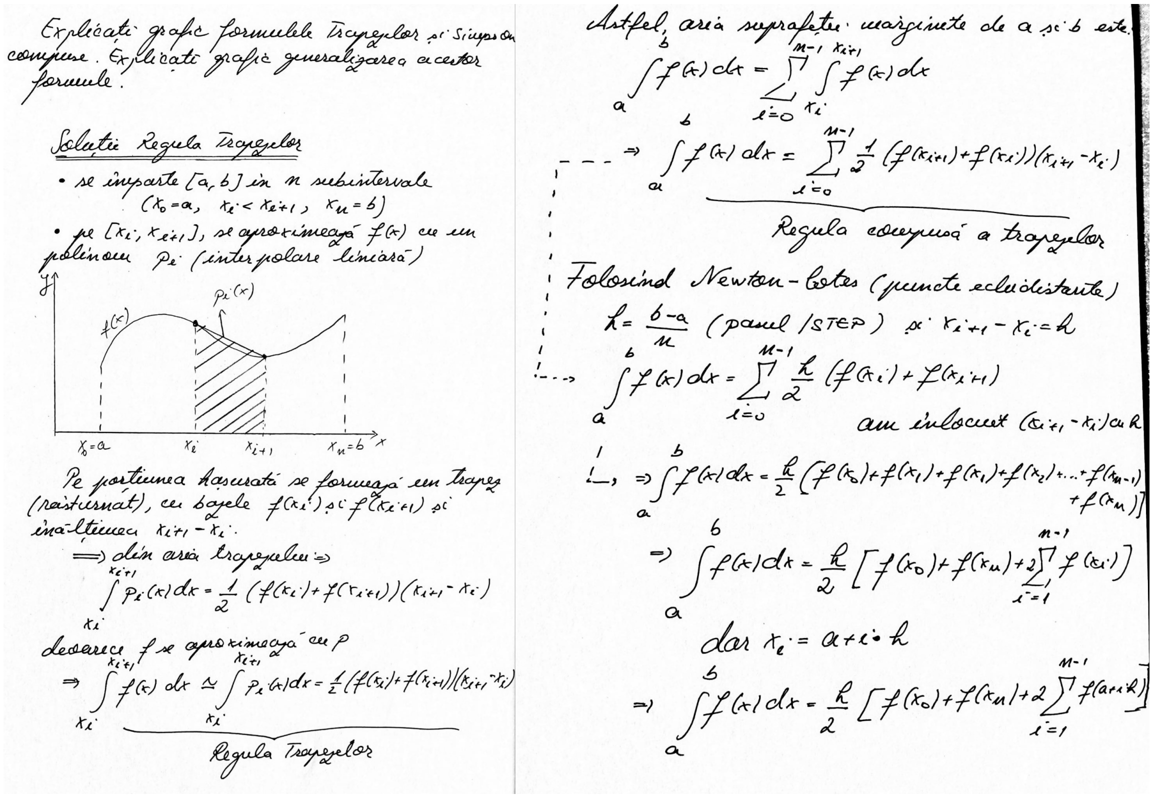
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \cancel{\langle f, g\rangle} - \langle g_1^*, g\rangle = \cancel{\langle f, g\rangle} - \langle g_2^*, g\rangle$$

$$\Rightarrow \langle g_1^*, g\rangle = \langle g_2^*, g\rangle$$

$$\Rightarrow g_1^* = g_2^* \overset{not.}{=\!=} g^*$$

$\Rightarrow g^*$ este unic, din moment ce presupunerea este falsă ($g_1^* = g_2^*$)

Figure 8: Demonstrați că g este unic



Explicați grafic formulele Trapezelor și Simpson compuse. Explicați grafic generalizarea acestor formule.

Soluție Regula Trapezelor

- se împarte $[a,b]$ în n subintervale ($x_0=a$, $x_i<x_{i+1}$, $x_n=b$)
- pe $[x_i, x_{i+1}]$, se aproximează $f(x)$ cu un polinom p_i (interpolare liniară)

Pe porțiunea hașurată se formează un trapez (răsturnat), cu bazele $f(x_i)$ și $f(x_{i+1})$ și înălțimea $x_{i+1}-x_i$.

$\Longrightarrow$ din aria trapezului $\Rightarrow$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_i(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)(x_{i+1}-x_i)$$

deoarece f se aproximează cu p

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_i(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)(x_{i+1}-x_i)}_{\text{Regula Trapezelor}}$$

Astfel, aria suprafeței mărginite de a și b este:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(f(x_{i+1})+f(x_i)\right)(x_{i+1}-x_i)}_{\text{Regula compusă a trapezelor}}$$

Folosind Newton-Cotes (puncte echidistante)

$h=\frac{b-a}{n}$ (pasul/STEP) și $x_{i+1}-x_i=h$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)$$

am înlocuit $(x_{i+1}-x_i)$ cu h

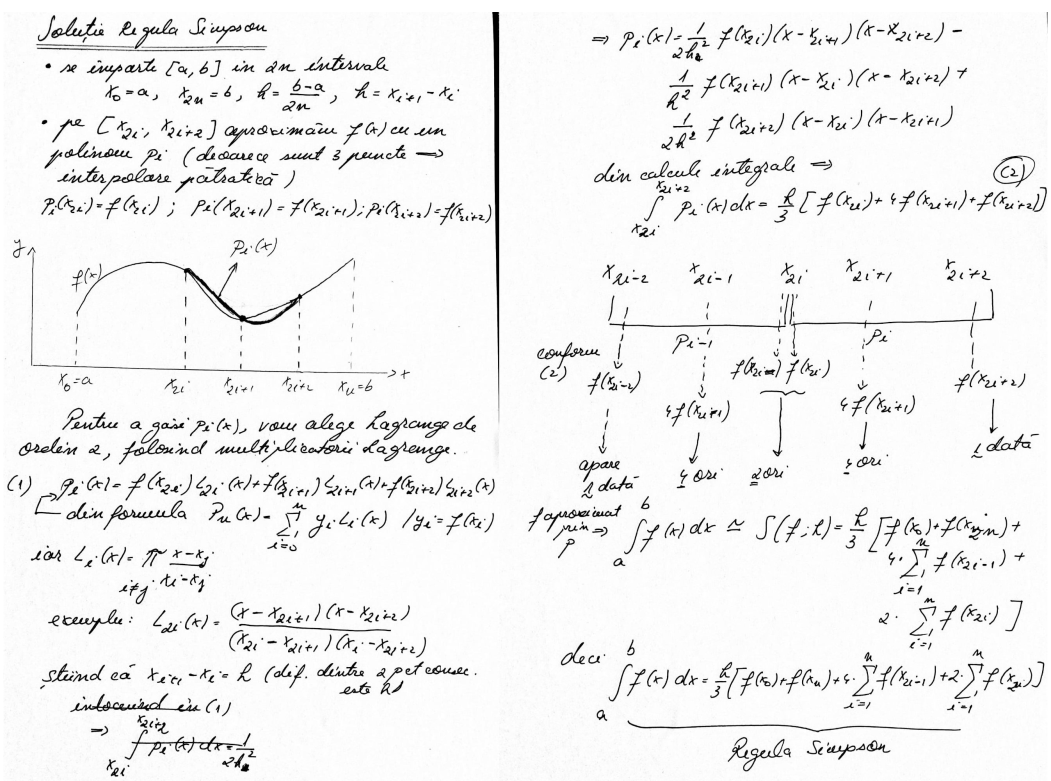
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

dar $x_i = a+i\cdot h$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right]$$

Figure 9: Explicați Regula Trapezelor



Soluție Regula Simpson

- se împarte $[a,b]$ în $2n$ intervale
  $x_0=a$, $x_{2n}=b$, $h=\frac{b-a}{2n}$, $h=x_{i+1}-x_i$
- pe $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ aproximăm $f(x)$ cu un polinom p_i (deoarece sunt 3 puncte $\Longrightarrow$ interpolare pătratică)

$p_i(x_{2i})=f(x_{2i})$; $p_i(x_{2i+1})=f(x_{2i+1})$; $p_i(x_{2i+2})=f(x_{2i+2})$

Pentru a găsi $p_i(x)$, vom alege Lagrange de ordin 2, folosind multiplicatorii Lagrange.

(1) $p_i(x) = f(x_{2i})L_{2i}(x)+f(x_{2i+1})L_{2i+1}(x)+f(x_{2i+2})L_{2i+2}(x)$

din formula $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$ / $y_i=f(x_i)$

iar $L_i(x)=\prod_{i\neq j}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

exemplu: $L_{2i}(x)=\frac{(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2})}{(x_{2i}-x_{2i+1})(x_{2i}-x_{2i+2})}$

știind că $x_{i+1}-x_i=h$ (dif. dintre 2 pct consec. este h)

înlocuind în (1)

$\Rightarrow \cancel{\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p_i(x)\,dx = \frac{1}{2h^2}}$

$$\Rightarrow p_i(x)=\frac{1}{2h^2}f(x_{2i})(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2}) - \frac{1}{h^2}f(x_{2i+1})(x-x_{2i})(x-x_{2i+2}) + \frac{1}{2h^2}f(x_{2i+2})(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})$$

din calcule integrale $\Rightarrow$ (2)

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p_i(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})\right]$$

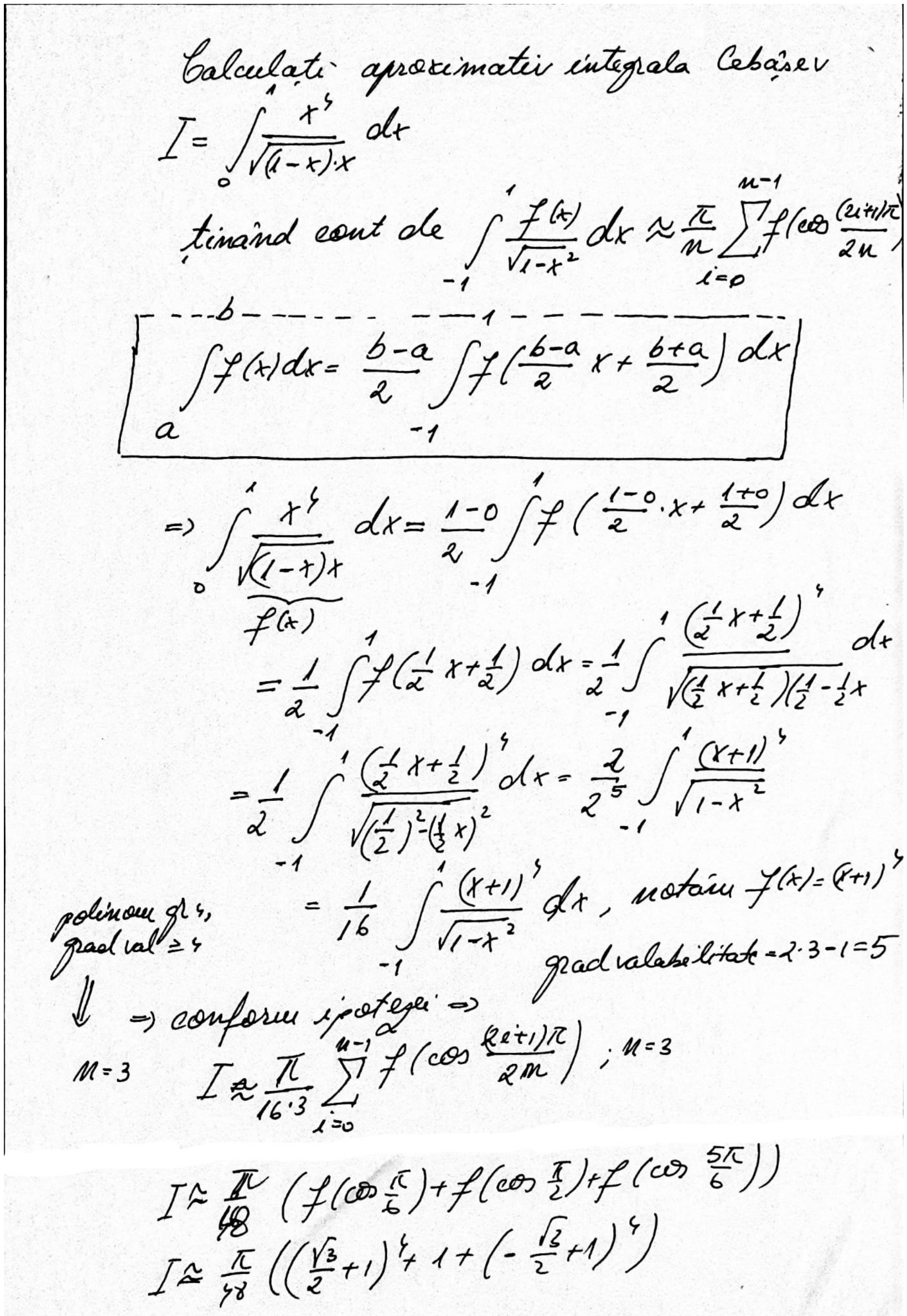
f aproximat prin p $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq S(f;h)=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_{2n})+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i})\right]$$

deci

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_n)+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i})\right]}_{\text{Regula Simpson}}$$

Figure 10: Explicați Regula Simpson



Calculați aproximativ integrala Cebâșev

$$I = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{(1-x)x}}\,dx$$

ținând cont de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \underbrace{\frac{x^4}{\sqrt{(1-x)x}}}_{f(x)}\,dx = \frac{1-0}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1-0}{2}\cdot x + \frac{1+0}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^4}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^4}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^2}}\,dx = \frac{2}{2^5}\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)^4}{\sqrt{1-x^2}}$$

polinom gr 4, grad val ≥ 4

$$= \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \text{ notăm } f(x) = (x+1)^4$$

grad valabilitate $= 2\cdot 3 - 1 = 5$

$\Downarrow$ $\Rightarrow$ conform ipotezei $\Rightarrow$

$n=3$ $\quad I \approx \dfrac{\pi}{16\cdot 3}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)$; $n=3$

$$I \approx \frac{\pi}{48}\left(f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

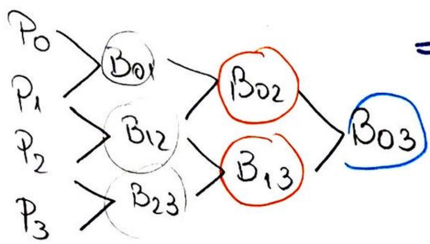
$$I \approx \frac{\pi}{48}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^4 + 1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^4\right)$$

Figure 11: Calcularea aproximativa a integralei folosind Cebâșev

Ex: Explicați cum se construiesc curbele Bézier pornind de la 4 pct. inițiale P_0, P_1, P_2, P_3 + grafic

Sol: Pt. construirea curbelor Bézier se folosește algoritmul de Casteljau, deoarece este o modalitate mult mai eficientă de calcul. Deși este un alg. puțin cam lent, este stabil dpdv. numeric.

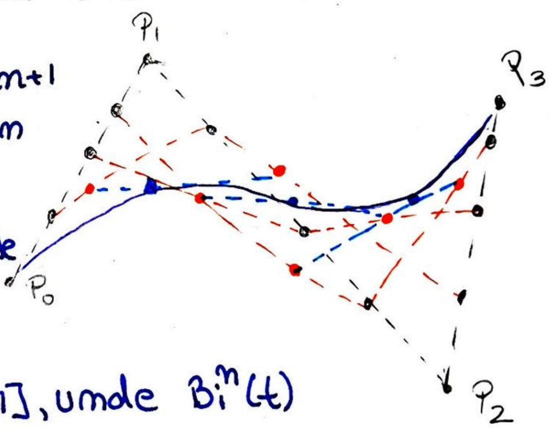
Se folosește următoarea recurență:



$$\Rightarrow \begin{cases} B_{01} = (1-t)P_0 + tP_1 \\ B_{12} = (1-t)P_1 + tP_2 \\ B_{23} = (1-t)P_2 + tP_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{02} = (1-t)B_{01} + tB_{12} = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \\ B_{13} = (1-t)B_{12} + tB_{23} = (1-t)^2 P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2 P_3 \\ B_{03} = (1-t)B_{02} + tB_{13} = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3 \end{cases}$$

Fiind dată o mulțime de $n+1$ pct. (numite pct. de control) în plan sau în spațiu, curba Bézier de grad n det. de aceste pct. are forma parametrică:



$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t), \quad t \in [0,1], \text{ unde } B_i^n(t)$$

se numește polinom Bernstein de grad n definit prin relația: $B_i^n(t) = \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i, \quad i = 0:n$

Figure 12: Cum se construiesc curbele Bezier

Deduceți o formulă aproximativă de derivare de 2 ori pentru o funcție f, pornind de la forma Taylor (dezvoltați în serie de polinoame Taylor de grad 3 $f(x_0+h)$ și $f(x_0-h)$ în punctul x_0 și țineți cont de $(\exists)\, c \in (a,b)$ ai: $f^{(4)}(c) = \frac{f^{(4)}(a)+f^{(4)}(b)}{2}$

Soluție:

F O R M U L A

Seria Taylor $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

în cazul exercițiului actual $\Rightarrow a = x_0$

Se calculează mai întâi $f(x_0+h)$, apoi $f(x_0-h)$

$$\Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}\cdot(x_0+h-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0+h-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0+h-x_0)^3 + \ldots$$

$$\Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) + \ldots$$

analog $f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) + \ldots$

$$\Rightarrow f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + 2\cdot\frac{h^2}{2}f''(x_0) + 2\cdot\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) + \ldots$$

se scriu termenii până la ordinul 4 al derivatei

$$\Rightarrow f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2\left[f(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2} = f(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0)$$

se cere formula aproximativă de derivare de 2 ori

$$\Rightarrow f''(x_0) \doteq \frac{2}{h^2}\left[\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2} - f(x_0) - \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0)\right]$$

$$(1)\quad f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)\right] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_0)$$

fie $a < x_0 < b \Rightarrow x_0 \in (a,b)$

$\overset{\text{ipoteza}}{\Rightarrow} f^{(4)}(x_0) = \frac{f^{(4)}(a)+f^{(4)}(b)}{2}$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)\right] - \frac{h^2}{24}\left[f^{(4)}(a)+f^{(4)}(b)\right]}$$

Figure 13: Deduceti o formula aproximativa de derivare de 2 ori - Taylor

Aflați formula gaussiană de integrare

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3)$$

Ce grad de valabilitate are?

pentru $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f(x_i)$

$\Rightarrow$ gradul de valabilitate este $2 * n - 1$

pentru $n = 3 \Rightarrow$ gradul de valabilitate $= \cancel{p}\ \boxed{5}$

Formula de integrare gaussiană:

$$\int_a^b f(x)\omega(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i)$$

unde $\omega(x)$ = funcția pondere = 1 (pentru polinoame)

Nodurile x_i sunt determinate din condiția de ortogonalitate a polinomului $\pi(x) = \prod_{i=0}^{N}(x - x_i)$ cu un polinom oarecare de grad mai mic decât cel al lui π, în particular x^k.

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b \pi(x)\cdot\omega(x)\cdot x^k dx = 0}_{\text{condiția de ortogonalitate}} \quad ; \quad k = 0 : n-1$$

practic, $\pi(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \underbrace{x^3 + ax^2 + bx + c}_{\text{forma}}$

iar x^k = polinom cu grad mai mic decât gradul lui $\pi \Rightarrow k < 3 \Rightarrow k = \overline{0,2}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} \pi(x)\cdot\omega(x)\cdot x^k dx = \int_{-1}^{0} (x^3 + ax^2 + bx + c)x^k dx = 0$$

I $k = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{0} x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^4}{4} + a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Big|_{-1}^{0} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} + \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = 0 \ \cancel{|\cdot 4} \Rightarrow \quad (1)$$

II $k = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{0} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx\, dx = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^5}{5} + a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{c}{2} = 0 \quad (2)$$

III $k = 2 \Rightarrow \int_{-1}^{0} x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 dx = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^6}{6} + a\frac{x^5}{5} + b\frac{x^4}{4} + c\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6} + \frac{a}{5} - \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{cases} (1): 4a - 6b + 12c - 3 = 0 \\ (2): -3a + 4b - 6c + \frac{12}{5} = 0 \\ (3): \frac{a}{5} - \frac{b}{4} + \frac{c}{3} - \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2};\ b = \frac{3}{5};\ c = \frac{1}{20}$$

$$\pi(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{1}{20}$$

Pentru determinarea coeficienților a_1, a_2, a_3, impunem condiția ca formula de integrare să fie exactă pentru funcțiile $1, x, x^2$.

(! explicație → gradul de valabilitate $= n$ $\Rightarrow$ pentru toate polinoamele de forma x^i, cu $i = \overline{0,n}$ între formula noastră va rezulta aceleași numere (rezultate).

(Biblie pag 230 + lab)

Figure 14: Formula gaussiana de integrare (part 1)

$$\Rightarrow f_0(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{0} dx = a_1\cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\Rightarrow 1 = a_1 + a_2 + a_3 \quad (1)$$

$$f_1(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{0} x\,dx = a_1 f_1(x_1) + a_2 f_1(x_2) + a_3 f_1(x_3)$$

$$a_1 f_1(x_1) + a_2 f_1(x_2) + a_3 f_1(x_3) = -\frac{1}{2}$$

analog $f_2(x) = x^2 \Rightarrow a_1 f_2(x_1) + a_2 f_2(x_2) + a_3 f_2(x_3) = \frac{1}{3}$

unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului $\pi(x)$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{2};\ x_3 = \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{2} - \frac{1}{2}$$

În continuare, se formează următorul sist de ec:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + a_2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right) + a_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ a_1 \cdot \frac{1}{4} + a_2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right)^2 + a_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

calcule plăcute!

Figure 15: Formula gaussiana de integrare (part 2)

Det. c_0, c_1, x_1 a.î. quadratura de mai jos să aibă grad maxim de valabilitate (+precizare):

$$\int_0^1 f(x)\,dx = c_0\big(f(0)+f(x_1)\big) + c_1 f(x_1)$$

TEORIE! CUADRATURI GAUSSIENE: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{m} c_i f(x_i)$

$t = mx + a$, $x = a \Rightarrow t = -1$, $x = b \Rightarrow t = 1$ } schimbare de var. pt. a ajunge la capetele dorite ← dacă e nevoie

- pt. un „m" stabilit ⇒ putem găsi $c_0, x_0, c_1, x_1, \ldots$ a.î. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} c_i f(x_i)$ (A) pt. f polinom de grad cel mult $\boxed{2m-1}$

pt. exercițiul nostru: avem 3 necunoscute, deci ne așteptăm să avem sistem de 3 ec:

- $f(x) = 1 \Rightarrow 1 = 2c_0 + c_1$
- $f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{2} = c_0 x_1 + c_1 x_1 \Rightarrow x_1 \neq 0 \Rightarrow$ putem să împărțim
- $f(x) = x^2 \Rightarrow \frac{1}{3} = c_0 x_1^2 + c_1 x_1^2$

atât face $\int_0^1 f(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_0 + c_1 = \dfrac{1}{2x_1} \\ c_0 + c_1 = \dfrac{1}{3x_1^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 3x_1^2 \\ x_1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{înlocuim}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = c_0 \cdot \frac{2}{3} + c_1 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} c_0 + c_1 = \dfrac{3}{4} \\ 2c_0 + c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{4} \\ c_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(f(0) + f\left(\frac{2}{3}\right)\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{2}{3}\right) \leftarrow \text{REZULTAT}$$

dacă luăm $f(x) = x^3 \Rightarrow \underline{\frac{1}{4}} \neq \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \underline{\frac{2}{9}}$ diferit ⇒ nu merge

⇒ gradul de valabilitate este 2

Figure 16: Determinare c_0, c_1, x_1, quadratură

Aproximați soluția ODE $y' = y - t^2 + 1$, $0 \le t \le 2$, $y(0) = 0,5$, folosind metoda Euler cu pasul 0,5. Ce reprezintă o iterație pentru acest tip de metode? Aproximați $y(1,3)$.

pas = $h = 0,5$

Ideea Metodei Euler:

$$f(t,y) = \frac{dy}{dt}, \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

Metoda în sine este folosită pentru aproximarea unor valori prin intermediul unor „mesh-points" (în intervalul $[a,b]$, $a \le b$). Aceste „mesh-points" sunt puncte echidistante în intervalul dat, în care valorile funcției se calculează iterativ prin metoda dată.

Valoarea funcției în punctul care ne interesează poate fi calculată ulterior prin intermediul interpolării.

$h = \frac{b-a}{n}$, unde n = numărul de intervale

formulele sunt următoarele:

$\omega_0 = \alpha$ → punctul de start (condiția inițială)

$\omega_{i+1} = \omega_i + h f(t_i, \omega_i)$

$\boxed{t = a + i \cdot h}$ cu $i = \overline{0, n-1}$

Pentru problema actuală: $f(t,y) = y - t^2 + 1$:

$0 \rightarrow \omega(0) = y(0) = 0,5$ (condiția inițială)

$0,5 \rightarrow \omega(1) = \omega_0 + h\underbrace{(\omega_0 - 0^2 + 1)}_{= f(\omega_0, t_0)} = 0,5 + 0,5 \cdot 1,5 = 1,25$, căci $t_0 = 0$ și se incrementează cu h la fiecare iterație

$1 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 + h(\omega_1 - (0,5)^2 + 1) = 2,25$

$1,5 \rightarrow \omega_3 = \omega_2 + h(\omega_2 - (1)^2 + 1) = 3,375$

$2 \rightarrow$ în final $\rightarrow y(2) \approx \omega_4 = \omega_3 + h(\omega_3 - (1,5)^2 + 1) = 4,4375$

Astfel, o iterație pentru acest tip de metode reprezintă aflarea unui „mesh-point" $= \omega_i$.

Pentru aproximarea valorii $y(1,3)$ se va folosi metoda Neville pentru interpolări.

Polinomul de interpolare este dat de relația de recurență:

$$0 \le i < j \le n \Rightarrow P_{ij} = \frac{(x - x_j) P_{i,j-1}(x) + (x_i - x) P_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

unde $P_{ii}(x) = f(x_i)$, $i = 0:n$.

avem următoarele valori

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0,5	1,25	2,25	3,375	4,4375

pentru $x = 1,3 \Rightarrow$

$P_{00}(1,3) = f(x_0) = 0,5$ > $P_{01}(1,3) = 2,45$ > $P_{02} = 2,97$ > P_{03} > $P_{04} =$

$P_{11}(1,3) = f(x_1) = 1,25$ > $P_{12}(1,3) = 2,85$ > $P_{13} = 2,4036$ > $P(1,4)$ / P_{14}

$P_{22}(1,3) = f(x_2) = 2,25$ > $P_{23}(1,3) = 2,292$ > $P_{24} = 2,7186$

$P_{33}(1,3) = f(x_3) = 3,375$ > $P_{34}(1,3) = 2,95$

$P_{44}(1,3) = f(x_4) = 4,4375$

Calcule:

$$P_{01}(x) = \frac{(x - x_1) P_{00}(x) + (x_0 - x) P_{11}(x)}{x_0 - x_1}$$

$$\Rightarrow P_{01}(1,3) = \frac{(1,3 - 0,5) \cdot 0,5 - 1,3 \cdot 1,25}{0 - 0,5} = \frac{0,4 - 1,625}{-0,5} = 2,45$$

$$P_{12}(x) = \frac{(x - x_2) P_{11}(x) + (x_1 - x) P_{22}(x)}{x_1 - x_2}$$

$$\Rightarrow P_{12}(1,3) = \frac{0,3 \cdot 1,25 - 0,8 \cdot 2,25}{-0,5} = \frac{0,375 - 1,8}{-0,5} = 2,85$$

Figure 17: Euler ODE y(1.3) (part 1)

$$P_{23}(x) = \frac{(x - x_3) P_{22}(x) + (x_2 - x) P_{33}(x)}{x_2 - x_3}$$

$$P_{23}(1,3) = \frac{-0,2 \cdot 2,25 - 0,3 \cdot 3,375}{-0,5} = \frac{-0,45 - 1,0125}{-0,5} = 2,292$$

$$P_{34}(x) = \frac{(x - x_4) P_{33}(x) + (x_3 - x) P_{44}(x)}{x_3 - x_4}$$

$$P_{23}(1,3) = \frac{-0,7 \cdot 3,375 + 0,2 \cdot 4,4375}{-0,5} = \frac{-2,3625 + 0,8875}{-0,5} = 2,95$$

$$P_{02}(x) = \frac{(x - x_2) P_{01}(x) + (x_0 - x) P_{12}(x)}{x_0 - x_2}$$

$$P_{02}(1,3) = \frac{0,3 \cdot 2,45 + (-1,3) \cdot 2,85}{-1} = 2,97$$

$$P_{13}(x) = \frac{(x - x_3) P_{12}(x) + (x_1 - x) P_{23}(x)}{x_1 - x_3}$$

$$P_{13}(1,3) = \frac{(-0,2) \cdot 2,85 - 0,8 \cdot 2,292}{-1} = 2,4036$$

$$P_{24}(x) = \frac{(x - x_4) P_{23}(x) + (x_2 - x) P_{34}(x)}{x_2 - x_4}$$

$$P_{24}(1,3) = \frac{(0,8) \cdot 2,292 + 0,3 \cdot 2,95}{1} = 2,7186$$

$$P_{03}(x) = \frac{(x - x_3) P_{02}(x) + (x_0 - x) P_{13}(x)}{x_0 - x_3}$$

$$P_{03}(1,3) = \frac{(-0,2) \cdot 2,97 - (1,3) \cdot 2,4036}{-1,5} = 2,47912$$

$$P_{14}(x) = \frac{(x - x_4) P_{13}(x) + (x_1 - x) P_{24}(x)}{x_1 - x_4}$$

$$P_{14}(1,3) = \frac{-0,7 \cdot 2,4036 - 0,8 \cdot 2,7186}{-1,5} = 2,5716$$

Figure 18: Euler ODE y(1.3) (part 2)

Deci:

$$P_{04}(x) = \frac{(x - x_4)\, P_{03}(x) + (x_0 - x)\, P_{14}(x)}{x_0 - x_4}$$

$$P_{04}(1,3) = \frac{-0,7 \cdot 2,47912 - 1,3 \cdot 2,5716}{-2} = 2,539232$$

deci, după ce am parcurs toți pașii:

$$y(1,3) \approx P_{04}(1,3) = 2,539232$$

Figure 19: Euler ODE y(1.3) (part 3)

QR cu deplasare:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinăm val. proprii pentru $E^{(1)}$:

$$\det(E^{(1)} - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda-9)(1-\lambda+9) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -8 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$$

Alegem pentru σ valoarea cea mai apropiată de $a_4^{(1)}$ $\Rightarrow \boxed{\sigma = -8}$

$$A^{(1)} - \sigma_1 \cdot I_4 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} - \sigma_1 \cdot I_4 = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

1.

Figure 20: QR cu deplasare (part 1)

Scriem P_2: $\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\cos\theta_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9+81}} = \frac{9}{\sqrt{90}} = \frac{\sqrt{90}}{10}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{b_2}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}} = \frac{-3}{\sqrt{90}} = -\frac{\sqrt{90}}{30}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{90}}{10} & -\frac{\sqrt{90}}{30} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{90}}{30} & \frac{\sqrt{90}}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{(1)} = P_2^{(1)} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{90}}{10} & -\frac{\sqrt{90}}{30} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{90}}{30} & \frac{\sqrt{90}}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{90} & -\frac{6\sqrt{90}}{10} & \frac{\sqrt{90}}{15} & 0 \\ 0 & \frac{4\sqrt{90}}{5} & -\frac{\sqrt{90}}{5} & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

2.

Figure 21: QR cu deplasare (part 2)

$$P_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\frac{4\sqrt{90}}{5}}{\sqrt{4+\left(\frac{4\sqrt{90}}{5}\right)^2}} \Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{6\sqrt{154}}{77} \approx 0,96 \approx 1$$

$$\sin\theta_2 = \frac{-2}{\sqrt{4+\left(\frac{4\sqrt{90}}{5}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{385}}{77} = -0,25$$

$$P_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,96 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{(1)} = P_3^{(1)} \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,96 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{90} & -\frac{3\sqrt{90}}{} & - \\ & - & - & - \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{90} & -\frac{6\sqrt{90}}{10} & \frac{\sqrt{90}}{15} & 0 \\ 0 & 7,785 & -4,071 & 0,25 \\ 0 & -0,022 & 8,165 & -0,96 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

3

Figure 22: QR cu deplasare (part 3)

$$\Rightarrow A_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 9.486 & -5{,}692 & 0{,}632 & 0 \\ 0 & 7{,}785 & -4{,}071 & 0{,}25 \\ 0 & -0{,}022 & 8.165 & -0{,}96 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P_{34}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_3 & \sin\theta_3 \\ 0 & 0 & -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta_3 = \frac{8.165}{\sqrt{(8.165)^2+81}} \approx \frac{8}{\sqrt{64+81}} \approx 0{,}66$$

$$\sin\theta_3 = \frac{-1}{\sqrt{64+81}} = -0{,}08$$

$$P_{34}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}66 & -0{,}08 \\ 0 & 0 & 0{,}08 & 0{,}66 \end{bmatrix}$$

4.

Figure 23: QR cu deplasare (part 4)

$$A_4^{(1)} = P_{24}^{(1)} A_3^{(1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}66 & -0{,}08 \\ 0 & 0 & 0{,}08 & 0{,}66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix} = R^{(1)}$$

$$\Rightarrow R^{(1)} = P_4^{(1)} \cdot P_3^{(1)} \cdot P_2^{(1)} \cdot A^{(1)} = A_4^{(1)}$$

$$Q^{(1)} = \cancel{P_2^{(1)} P_3} \; P_2^T \cdot P_3^T \cdot P_4^T$$

$$A^{(2)} = R^{(1)} \cdot Q^{(1)} + \sigma_1 I_4$$

5.

Figure 24: QR cu deplasare (part 5)