

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES DE MODELOS OBTIDOS ATRAVÉS DE IDENTIFICAÇÃO

As principais aplicações dos modelos obtidos por identificação são simulação e predição (normalmente usada para controle). Ao longo deste capítulo, assume-se que a descrição dos sistemas seja feita através de equações na seguinte forma:

$$y(t) = G(q) \cdot u(t) + v(t) = G(q) \cdot u(t) + H(q) \cdot e(t) \quad (5.1)$$

5.1 SIMULAÇÃO

O uso mais básico de um modelo é simular a resposta do sistema a vários cenários de entrada. Isto significa que uma sequência de entrada $\{u(t)\}$, $t = 1, 2, \dots, N$, selecionada pelo usuário, seja aplicada a (5.2) para calcular a saída sem perturbação:

$$y(t) = G(q) \cdot u(t) \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (5.2)$$

Essa é a saída que o sistema produziria se não houvesse perturbações. Para avaliar a influência das perturbações, um gerador de números aleatórios no computador pode ser usado para produzir uma sequência de números $\{e(t)\}$, $t = 1, 2, \dots, N$, que pode ser considerada uma realização de um processo estocástico com ruído branco com variância σ^2 . A perturbação é então calculada como:

$$v(t) = H(q) \cdot e(t)$$

Gerando-se $y(t)$ por meio de (5.1), pode-se ter uma ideia da resposta do sistema a $\{u(t)\}$. Essa forma de empregar o modelo (5.1), ao invés de trabalhar diretamente no processo real para avaliar seu comportamento sob diversas condições, tornou-se amplamente usada na prática da engenharia de todas as áreas e, sem dúvida, reflete o uso mais comum dos modelos matemáticos (LJUNG, 1999). Exemplos típicos deste tipo de aplicação, muito embora com modelos muito mais complexos que o apresentado na Equação (5.1), são o uso de simuladores de voo, de simuladores de treinamento em plantas nucleares ou de simuladores de processos em plantas químicas ou petroquímicas.

Na Subseção 4.2.1 encontram-se diversos exemplos de simulação de um modelo.

5.2 PREDIÇÃO

Em muitas aplicações, o modelo obtido por identificação é usado para predição. Este caso normalmente ocorre quando o modelo vai ser usado como base para a síntese de sistemas de controle. Os sistemas são, em sua maioria, estocásticos, o que significa que a saída no instante t não pode ser determinada exatamente a partir dos dados disponíveis no instante $t-1$. É assim importante saber no instante $t-1$, o que a saída do processo provavelmente será no instante t , de forma a realizar uma ação apropriada de controle, isto é, determinar a entrada $u(t-1)$ (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Discute-se, a seguir, como valores futuros de $y(t)$ podem ser previstos, a partir de valores conhecidos de u e y até o instante $t-1$. No entanto, antes disso, apresentam-se alguns conceitos relativos à regressão linear.

5.2.1 Regressão linear

A teoria estatística da regressão se refere à predição de uma variável y com base em informações fornecidas por outras variáveis medidas $\varphi_1, \dots, \varphi_d$. Neste caso, y é a variável dependente e φ_i (os regressores) são as variáveis independentes, sendo que y é a saída de um sistema em um dado instante e φ_i contém informações acerca do passado.

A **regressão linear** é o tipo mais simples de modelo paramétrico. A estrutura de modelo correspondente é dada por (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$y(t) = \varphi^T(t) \theta \quad (5.3)$$

onde $y(t)$ é a quantidade mensurável e é chamada de variável regredida; $\varphi(t)$ é um vetor n -dimensional de quantidades conhecidas, denominado **vetor de regressão**, cujos elementos são chamados de variáveis de regressão ou regressores e θ é um vetor n -dimensional de parâmetros desconhecidos, intitulado de **vetor de parâmetros**. A variável t assume valores inteiros.

A importância da regressão linear é que métodos de estimação poderosos e simples possam ser aplicados para a determinação de θ . Seja:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_d \end{bmatrix}$$

O problema é encontrar uma função dos regressores $f(\varphi)$ tal que a diferença $y - f(\varphi)$ se torne pequena, isto é, de modo que $\hat{y} = f(\varphi)$ seja uma boa predição de y . Se y e φ são descritos em um quadro estocástico, pode-se, por exemplo, querer minimizar (LJUNG, 1999):

$$E[y - f(\varphi)]^2$$

Sabe-se que a função f que minimiza esta expressão é a expectância condicional de y , dados $\varphi_1, \dots, \varphi_d$:

$$f(\varphi) = E[y / \varphi]$$

Esta é também conhecida como função regressão ou regressão de y em φ . Com propriedades desconhecidas das variáveis y e φ , não é possível determinar a função regressão $f(\varphi)$ *a priori*. Ela deve ser estimada a partir de dados e deve, portanto, ser adequadamente parametrizada. O caso especial em que essa parametrização seja linear é intitulado **regressão linear**. Está se tentando então ajustar y a uma combinação linear de φ_i (LJUNG, 1999):

$$f(\varphi) = \theta_1 \cdot \varphi_1 + \theta_2 \cdot \varphi_2 + \dots + \theta_d \cdot \varphi_d$$

Com o vetor:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_d \end{bmatrix}$$

pode-se escrever:

$$f(\varphi) = \varphi^T \theta$$

É possível estender o modelo (5.3) para o caso multivariável, tendo-se então:

$$\mathbf{y}(t) = \Phi^T(t) \theta$$

onde $\mathbf{y}(t)$ é um vetor p -dimensional; $\Phi(t)$ é uma matriz $p \times n$ e θ é um vetor n -dimensional.

Um exemplo de aplicação deste tipo de representação é dado a seguir: suponha um modelo fornecido através de uma função-peso troncada. Tal modelo é dado por (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$y(t) = g_0 \cdot u(t) \cdot T + g_1 \cdot u(t-1) \cdot T + \dots + g_{M-1} \cdot u(t-M+1) \cdot T$$

O sinal de entrada $u(t)$ é registrado durante o experimento e é considerado conhecido. Neste caso:

$$\varphi^T(t) = [u(t) \ u(t-1) \ \dots \ u(t-M+1)]$$

$$\theta = [g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{M-1}]^T$$

Este tipo de modelo frequentemente requer muitos parâmetros para gerar uma descrição precisa da dinâmica, sendo que M tipicamente é da ordem de 20 a 50, chegando, em certas aplicações, a valores de centenas ou milhares.

A característica marcante do modelo de regressão linear:

$$f(\varphi) = \theta_1 \cdot \varphi_1 + \theta_2 \cdot \varphi_2 + \dots + \theta_d \cdot \varphi_d$$

é que a função regressão é parametrizada linearmente em θ .

Frequentemente deve-se considerar parametrizações mais gerais da função regressão:

$$f(\varphi, \theta)$$

Obtém-se assim uma **regressão não linear**:

$$y(t) = f(\varphi(t), \theta)$$

5.2.2 Predição de y um passo à frente

Suponha que o modelo obtido seja:

$$y(t) = \varphi^T(t-1) \hat{\theta} + \varepsilon(t)$$

O vetor de regressores φ é composto por termos até o instante $(t-1)$. Uma forma de se fazer uma predição é, no instante $(t-1)$, montar o vetor de regressores φ com observações extraídas do conjunto de dados e calcular:

$$\hat{y}(t) = \varphi^T(t-1) \hat{\theta}$$

O valor predito para o instante seguinte t é $\hat{y}(t)$, sendo esta predição intitulada de um passo à frente, sendo que $\varphi^T(t-1) \hat{\theta}$ é o preditor um passo à frente.

O erro de predição é dado por:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (5.4)$$

que, por definição, é o resíduo no instante t . Se for lembrado que os algoritmos de estimação de parâmetros normalmente minimizam o somatório do quadrado dos resíduos, torna-se evidente que, graças a tais algoritmos, para um determinado conjunto de regressores definidos $\varphi^T(t-1)$, os erros de predição um passo à frente serão sempre os menores possíveis. Consequentemente, predições um passo à frente não são um bom teste para validar modelos, uma vez que modelos ruins normalmente apresentam boas predições um passo à frente (AGUIRRE, 2015). Este fato é bastante intuitivo, pois caso se disponha do valor da saída do processo até o instante $(t-1)$, a predição do valor dessa saída no instante t , mesmo com um modelo inadequado, não será ruim.

Considere a Descrição (5.1) e assuma que $y(s)$ e $u(s)$ sejam conhecidos para $s \leq t-1$. Como:

$$v(s) = y(s) - G(q) \cdot u(s)$$

isto significa que $v(s)$ também seja conhecido para $s \leq t-1$. Deseja-se prever o valor:

$$y(t) = G(q) \cdot u(t) + v(t) \quad (5.5)$$

com base nessa informação. A expectância condicional de $y(t)$, dada a informação em questão, é (LJUNG, 1999):

$$\hat{y}(t/t-1) = G(q) \cdot u(t) + \hat{v}(t/t-1) \quad (5.6)$$

Suponha que se tenha observado $v(s)$ para $s \leq t-1$ e que se deseje prever o valor de $v(t)$, baseado nessas observações. Uma vez que se assumiu na Subseção 2.2.3 que $h(0)=1$, reescreve-se a Equação (2.21) considerando-se esta hipótese:

$$v(t) = H(q) \cdot e(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) \cdot e(t-j) = e(t) + \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \cdot e(t-j) \quad (5.7)$$

Conforme se assumiu na Subseção 2.2.3, para (5.7) ter significado, assume-se que $H(q)$ seja estável, isto é:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |h(j)| < \infty$$

O conhecimento de $v(s)$ para $s \leq t-1$ implica no conhecimento de $e(s)$ para $s \leq t-1$, pois uma propriedade essencial da Equação (2.22) imposta aqui, é que o modelo do ruído seja inversível, isto é, assume-se que o filtro $H(q)$ seja inversível. Portanto, se $v(s)$ para $s \leq t$ é conhecido, então pode-se computar $e(t)$ como:

$$e(t) = \tilde{H}(q) \cdot v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{h}(j) \cdot v(t-j) \quad \text{com} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{h}(j)| < \infty$$

O filtro $\tilde{H}(q)$ é dado por (LJUNG, 1999):

$$\tilde{H}(q) = H^{-1}(q) = \frac{1}{H(q)}$$

pois, de (2.23):

$$H(q) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) q^{-j} \quad \therefore \frac{1}{H(q)} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{h}(j) q^{-j}$$

Define-se o filtro $H^{-1}(q)$ por:

$$H^{-1}(q) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{h}(j) q^{-j}$$

O último termo de (5.7) é portanto conhecido no instante $t-1$. Denotando-o por $m(t-1)$:

$$m(t-1) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \cdot e(t-j)$$

Irá se trabalhar com o valor médio da distribuição em questão, a expectância condicional de $v(t)$ denotada por $\hat{v}(t/t-1)$, que corresponde à predição de v um passo à frente. Como a variável $e(t)$ tem média nula:

$$\hat{v}(t/t-1) = E(v(t)/v(t-1)) = m(t-1) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \cdot e(t-j) \quad (5.8)$$

Buscando-se uma expressão mais conveniente para a Equação (5.8), lembrando que se assumiu que $h(0)=1$:

$$\begin{aligned}\hat{v}(t/t-1) &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} h(j) \cdot q^{-j} \right] e(t) = [H(q) - 1] e(t) = \frac{H(q) - 1}{H(q)} v(t) = [1 - H^{-1}(q)] v(t) = \\ &= \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{h}(j) q^{-j} \right) v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} -\tilde{h}(j) \cdot v(t-j) \quad (5.9)\end{aligned}$$

Aplicando-se $H(q)$ a ambos os lados de (5.9), resulta a seguinte expressão:

$$H(q) \hat{v}(t/t-1) = [H(q) - 1] \cdot v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) \cdot v(t-j)$$

Substituindo-se (5.5) e (5.9) em (5.6), resulta:

$$\hat{y}(t/t-1) = G(q) \cdot u(t) + [1 - H^{-1}(q)] v(t) = G(q) \cdot u(t) + [1 - H^{-1}(q)] [y(t) - G(q) \cdot u(t)]$$

Tem-se então que a predição de y um passo à frente, isto é, a melhor estimativa de $y(t)$ dados $u(s)$ e $y(s)$, sendo $s \leq t-1$, denotada por $\hat{y}(t/t-1)$, é dada por:

$$\hat{y}(t/t-1) = H^{-1}(q) \cdot G(q) \cdot u(t) + [1 - H^{-1}(q)] y(t) \quad (5.10)$$

ou

$$H(q) \hat{y}(t/t-1) = G(q) \cdot u(t) + [H(q) - 1] y(t)$$

Nota-se aqui que se está prevendo $\hat{y}(t/t-1)$ com $y(t-1)$, pois o termo $[1 - H^{-1}(q)]$ implica que $y(t)$ esteja sendo descartado, pois o primeiro termo de $H^{-1}(q)$ é unitário. A título de exemplo, tomam-se as três funções de transferência dadas na Subseção 4.2.2.

Seja inicialmente H_1 . Tem-se que:

$$[1 - H_1^{-1}(q)] y(t) = (1 - 1 + 0,9512 \cdot q^{-1}) y(t) = 0,9512 \cdot y(t-1)$$

Portanto, percebe-se na Expressão (5.10) que se toma apenas o termo $y(t-1)$ para estimar $\hat{y}(t/t-1)$. Caso se considere H_2 , resulta:

$$1 - H_2^{-1}(q) = 1 - \frac{1 - 0,9512 \cdot q^{-1}}{1 + 0,5 \cdot q^{-1}} = \frac{1,4512 \cdot q^{-1}}{1 + 0,5 \cdot q^{-1}}$$

Caso se desconsidere o termo $H^{-1}(q) \cdot G(q) \cdot u(t)$ em (5.10), tem-se que:

$$\hat{y}(t/t-1) = [1 - H_2^{-1}(q)] y(t) = \frac{1,4512 \cdot q^{-1}}{1 + 0,5 \cdot q^{-1}} y(t)$$

$$(1 + 0,5 \cdot q^{-1}) \cdot \hat{y}(t/t-1) = 1,4512 \cdot q^{-1} \cdot y(t)$$

Percebe-se novamente que o termo empregado na estimação de $\hat{y}(t/t-1)$ é $y(t-1)$. Por fim, como $H_3 = 1$, percebe-se que, neste caso, sequer se empregam valores passados de $y(t)$ para estimar $\hat{y}(t/t-1)$.

Um ponto fundamental que deve ser observado é que na predição um passo à frente, a estimativa $\hat{y}(t)$ não é usada para obter a predição um passo à frente seguinte, isto é, $\hat{y}(t+1)$. Para se obter a predição um passo à frente e gerar a saída no instante $(t+1)$, tomam-se observações do conjunto de dados até o instante t , ou seja:

$$\hat{y}(t+1) = \varphi^T(t) \hat{\theta}$$

O que se assume é que para se realizar a predição um passo à frente $\hat{y}(t)$, o vetor de regressores seja montado com valores efetivamente presentes no conjunto de dados até o instante $(t-1)$, isto é para estimar $\hat{y}(t)$ não se emprega $\hat{y}(t-1)$ mas sim $y(t-1)$.

Uma forma genérica de se escrever um preditor é:

$$\hat{y}(t/t-1) = L_1(q) \cdot u(t) + L_2(q) \cdot y(t) \quad (5.11)$$

onde: $L_1(q) = H^{-1}(q) \cdot G(q)$ e $L_2(q) = [1 - H^{-1}(q)]$

5.2.2.1 Erro de predição do preditor um passo à frente

A partir de (5.4) e (5.10) verifica-se que o erro de predição um passo à frente $\varepsilon(t)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= y(t) - \hat{y}(t/t-1) = y(t) - H^{-1}(q) \cdot G(q) \cdot u(t) - [1 - H^{-1}(q)] \cdot y(t) = \\ &= -H^{-1}(q) \cdot G(q) \cdot u(t) + H^{-1}(q) \cdot y(t) = H^{-1}(q) [y(t) - G(q) \cdot u(t)] = H^{-1}(q) \cdot v(t) = e(t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

A variável $e(t)$ assim representa aquela parte da saída $y(t)$ que não pode ser predita a partir de dados passados. Por essa razão, ela é também chamada de **inovação** no tempo t (LJUNG, 1999).

Um exemplo simples é dado pelo processo auto-regressivo $\{y(t)\}$ dado por (ÅSTRÖM, 1970):

$$\hat{y}(t+1) = a \cdot y(t) + e(t) \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots$$

onde $y(t_0) = 1$, $|a| < 1$ e $\{e(t), t = t_0, t_0 + 1, \dots\}$ é uma sequência de variáveis estocásticas independentes normais $(0, \sigma)$ (ruído branco de tempo discreto). Assume-se também que $e(t)$ seja independente de $y(t)$ para todo t .

Considere, por exemplo, que se deseje prever $\hat{y}(t+1)$ baseado em observações de $y(t)$. Parece razoável prever o valor de $\hat{y}(t+1)$ por $a \cdot y(t)$. O erro de predição é então igual a $e(t)$, isto é, uma variável estocástica com média nula e variância σ^2 .

5.2.2.2 Condições iniciais desconhecidas

A Equação (5.10) corresponde a uma notação reduzida para expansões. Por exemplo, seja $\{f(j)\}$ definida por:

$$\frac{G(q)}{H(q)} = \sum_{j=1}^{\infty} f(j) q^{-j}$$

Esta expansão existe para $|q| \geq 1$ se $H(q)$ não tem zeros e $G(q)$ não tem polos em $|q| \geq 1$. Então (5.10) pode ser reescrita como:

$$\hat{y}(t/t-1) = \sum_{j=1}^{\infty} f(j) \cdot u(t-j) + \sum_{j=1}^{\infty} -\tilde{h}(j) \cdot y(t-j) \quad (5.13)$$

Até aqui se assumiu que o registro completo de dados no tempo $-\infty$ a $(t-1)$ seja

disponível. Nas Expressões (5.10) e (5.13) todos esses dados aparecem explicitamente. Na prática, no entanto, é comum dispor-se apenas dos dados no intervalo $[0, t-1]$. A tarefa mais simples seria substituir os dados desconhecidos por zero, por exemplo em (5.13):

$$\hat{y}(t/t-1) \cong \sum_{j=1}^t f(j) \cdot u(t-j) + \sum_{j=1}^t -\tilde{h}(j) \cdot y(t-j) \quad (5.14)$$

Percebe-se que (5.14) é somente uma aproximação da expectância condicional real de $y(t)$, supondo os dados disponíveis apenas na faixa $[0, t-1]$. A predição exata envolve coeficientes de filtro variantes no tempo e pode ser computada usando o filtro de Kalman. Para a maioria dos propósitos práticos, no entanto, (5.14) fornece uma solução satisfatória. A razão é que os coeficientes $\{f(j)\}$ e $\{\tilde{h}(j)\}$ tipicamente decaem exponencialmente com j .

5.2.3 Predição k passos à frente de y

Suponha que se tenha observado $v(s)$ para $s \leq t$ e que se deseje prever $v(t+k)$. Tem-se que (LJUNG, 1999):

$$v(t+k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) \cdot e(t+k-i) = \sum_{i=0}^{k-1} h(i) \cdot e(t+k-i) + \sum_{i=k}^{\infty} h(i) \cdot e(t+k-i) \quad (5.15)$$

Definindo-se:

$$\bar{H}_k(q) = \sum_{i=0}^{k-1} h(i) q^{-i} \quad \text{e} \quad \tilde{H}_k(q) = \sum_{i=k}^{\infty} h(i) q^{-i+k} \quad (5.16)$$

O segundo somatório de (5.15) é conhecida no instante t , enquanto o primeiro somatório é independente do que tenha acontecido até o instante t e possui média nula. A média condicional de $v(t+k)$, dado $v_{-\infty}^t$ é então dada por:

$$\hat{v}(t+k/t) = \sum_{i=k}^{\infty} h(i) \cdot e(t+k-i) = \tilde{H}_k(q) \cdot e(t) = \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot v(t) \quad (5.17)$$

Esta expressão é o preditor k passos à frente de v . Suponha agora que se tenha disponível os valores medidos $y_{-\infty}^t$, que se conheça $u_{-\infty}^{t+k-1}$ e que se deseje prever $y(t+k)$. Tem-se então, como em (5.1):

$$y(t+k) = G(q) \cdot u(t+k) + v(t+k)$$

que resulta em:

$$\hat{y}(t+k/y_{-\infty}^t, u_{-\infty}^{t+k-1}) = \hat{y}(t+k/t) = G(q) u(t+k) + \hat{v}(t+k/t)$$

Substituindo-se (5.17) nesta expressão:

$$\hat{y}(t+k/t) = G(q) \cdot u(t+k) + \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot v(t)$$

Substituindo-se (5.1), resulta em:

$$\hat{y}(t+k/t) = G(q) \cdot u(t+k) + \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) [y(t) - G(q) \cdot u(t)] \quad (5.18)$$

Fazendo-se:

$$W_k(q) = 1 - q^{-k} \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) = [H(q) - q^{-k} \tilde{H}_k(q)] H^{-1}(q) \quad (5.19)$$

Substituindo-se (5.16):

$$W_k(q) = \bar{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \quad (5.20)$$

De (5.18):

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+k/t) &= G(q) \cdot u(t+k) + \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot y(t) - \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot G(q) \cdot u(t) = \\ &= G(q) \cdot u(t+k) - \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot G(q) q^{-k} \cdot u(t+k) + \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot y(t) = \\ &= [1 - q^{-k} \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q)] G(q) \cdot u(t+k) + \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot y(t) \end{aligned}$$

Substituindo-se a primeira igualdade de (5.19):

$$\hat{y}(t+k/t) = W_k(q) \cdot G(q) \cdot u(t+k) + \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot y(t) \quad (5.21)$$

Deslocando-se esta expressão no tempo:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t/t-k) &= q^{-k} [W_k(q) \cdot G(q) \cdot u(t+k) + \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot y(t)] = \\ &= W_k(q) \cdot G(q) \cdot u(t) + q^{-k} \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot y(t) \end{aligned}$$

Substituindo-se a primeira igualdade em (5.19) (LJUNG, 1999):

$$\hat{y}(t/t-k) = W_k(q) \cdot G(q) \cdot u(t) + [1 - W_k(q)] y(t) \quad (5.22)$$

A Expressão (5.22), em conjunto com (5.16) e (5.20), define o preditor k passos à frente de y . No caso da predição k passos à frente, para se simular um modelo reutilizam-se predições passadas para compor o vetor de regressores, a fim de continuar fazendo novas predições. Para ilustrar essa ideia, considere que o modelo a ser simulado tenha o seguinte vetor de regressores:

$$\varphi^T(t-1) = [y(t-1) \ y(t-2) \ u(t-1) \ u(t-2)]$$

Considera-se agora que, para se realizar as simulações, trabalhe-se com um preditor k passos à frente. Para mostrar como esse tipo de preditor funciona, considere o modelo com o vetor de regressores dado anteriormente e suponha que se deseje calcular as predições três passos à frente. Tem-se então que para efetuar a simulação, é preciso inicializar o modelo com valores medidos. Seja $y(1)$ e $y(2)$ os dois primeiros valores do conjunto de dados de validação, juntamente com as entradas $u(1)$ e $u(2)$. Tem-se que:

$$\hat{y}_1(3) = [y(2) \ y(1) \ u(2) \ u(1)] \hat{\theta}$$

$$\hat{y}_2(4) = [\hat{y}_1(3) \ y(2) \ u(3) \ u(2)] \hat{\theta}$$

$$\hat{y}_3(5) = [\hat{y}_2(4) \ \hat{y}_1(3) \ u(4) \ u(3)] \hat{\theta}$$

sendo que $\hat{y}_1(3)$ é a predição um passo à frente, $\hat{y}_2(4)$ é a predição dois passos à frente e $\hat{y}_3(5)$ é a predição três passos à frente, conforme indicado pelos sub-índices. Para que $\hat{y}(6)$ também seja uma predição três passos à frente, tem-se que (AGUIRRE, 2015):

$$\hat{y}_1(4) = [y(3) \ y(2) \ u(3) \ u(2)] \hat{\theta}$$

$$\hat{y}_2(5) = [\hat{y}_1(4) \ y(3) \ u(4) \ u(3)] \hat{\theta}$$

$$\hat{y}_3(6) = [\hat{y}_2(5) \ \hat{y}_1(4) \ u(5) \ u(4)] \hat{\theta}$$

Assim, as predições três passos à frente correspondem a $\hat{y}_3(5)$, $\hat{y}_3(6)$, $\hat{y}_3(7)$...

5.2.3.1 Erro de predição do preditor k passos à frente

O erro de predição do preditor k passos à frente é dado por:

$$e_k(t+k) = y(t+k) - \hat{y}(t+k/t)$$

Substituindo-se (5.21):

$$\begin{aligned} e_k(t+k) &= y(t+k) - W_k(q) \cdot G(q) \cdot u(t+k) - \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot y(t) = \\ &= q^k y(t) - W_k(q) \cdot G(q) \cdot u(t+k) - \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \cdot y(t) = \\ &= -W_k(q) \cdot G(q) \cdot u(t+k) + \left[q^k - \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \right] y(t) = \\ &= -W_k(q) \cdot G(q) \cdot u(t+k) + \left[1 - q^{-k} \tilde{H}_k(q) \cdot H^{-1}(q) \right] y(t+k) \end{aligned}$$

Substituindo-se a primeira igualdade em (5.19):

$$e_k(t+k) = -W_k(q) \cdot G(q) \cdot u(t+k) + W_k(q) \cdot y(t+k) = W_k(q) [y(t+k) - G(q) \cdot u(t+k)]$$

Substituindo-se (5.1):

$$e_k(t+k) = W_k(q) \cdot H(q) \cdot e(t+k)$$

Substituindo-se (5.20):

$$e_k(t+k) = \bar{H}_k(q) \cdot e(t+k) \quad (5.23)$$

5.2.4 Predição de y infinitos passos à frente

Este tipo de predição não é normalmente usado para controle, no entanto é muito usado para validar modelos, como é melhor explicado no Capítulo 13. A predição infinitos passos à frente também é denominada de simulação livre ou de simulação pura. Para efetuar este tipo de simulação, assim como foi feito com o preditor k passos à frente, é preciso inicializar o modelo com valores medidos. Chamando $y(1)$ e $y(2)$ os dois primeiros valores do conjunto de dados de validação, juntamente com as entradas $u(1)$ e $u(2)$, tem-se que:

$$\hat{y}(3) = [y(2) \ y(1) \ u(2) \ u(1)] \hat{\theta}$$

Para seguir em frente, toma-se a predição $\hat{y}(3)$:

$$\hat{y}(4) = [\hat{y}(3) \ y(2) \ u(3) \ u(2)] \hat{\theta}$$

$$\hat{y}(5) = [\hat{y}(4) \ \hat{y}(3) \ u(4) \ u(3)] \hat{\theta}$$

$$\hat{y}(6) = [\hat{y}(5) \ \hat{y}(4) \ u(5) \ u(4)] \hat{\theta}$$

\vdots

O caso quando $k \rightarrow \infty$ corresponde ao uso somente de saídas estimadas passadas, isto é, uma simulação pura. Evidentemente, o preditor um passo à frente e o preditor livre são dois casos extremos.

Uma aplicação prática do preditor infinitos passos à frente é quando se utilizam sensores ou analisadores virtuais (*soft sensors*), em que um modelo é usado para estimar a saída $\hat{y}(t)$, sem, no entanto, se dispor de valores medidos da mesma, pois não há um *hard sensor* disponível, de modo que os valores disponíveis da saída sejam sempre estimados. Neste caso, dispõe-se apenas das medidas dos sinais de entrada. Tem-se então que:

$$\hat{y}(t/t-k) = [\hat{y}(t-1) \ \hat{y}(t-2) \ \hat{y}(t-3) \ \dots \ u(t-1) \ u(t-2) \ u(t-3)] \hat{\theta}$$

Neste caso, a entrada u é conhecida até $u(t-1)$. Outra aplicação possível do preditor é no controle preditivo multivariável (MPC). Neste caso, tem-se que:

$$\hat{y}(t+k/t) = [\hat{y}(t+k-1) \ \hat{y}(t+k-2) \ \hat{y}(t+k-3) \ \dots \ u(t+k-1) \ u(t+k-2) \ u(t+k-3)] \hat{\theta}$$

sendo que as entradas $u(t+k-1)$, $u(t+k-2)$, $u(t+k-3) \dots$ ainda não ocorreram no sistema real, mas estão sendo geradas pelo controlador, para verificar o que ocorreria com a saída, caso o controlador as gerasse no futuro.

5.2.5 Exemplo de aplicação de predição

Emprega-se aqui como planta o mesmo modelo da Subseção 4.2.1, excitado pela onda quadrada vista na Figura 4.4. A ideia é mostrar como funciona a predição de 1, 10, 100 e infinitos passos à frente. Para tal, o modelo ARMAX da Subseção 4.2.1 é usado:

$$y(t) = \frac{0,1463 \ q^{-5}}{1 - 0,9512 \ q^{-1}} u(t) + \frac{1 + 0,5 \ q^{-1}}{1 - 0,9512 \ q^{-1}} e(t) = G(q) \cdot u(t) + H_2(q) \cdot e(t)$$

$$A(q) = 1 - 0,9512 \cdot q^{-1} \quad B(q) = 0,1463 \cdot q^{-5} \quad C(q) = 1 + 0,5 \cdot q^{-1} \quad (5.24)$$

São feitos dois conjuntos de testes. No primeiro se adota a representação exata do modelo, mostrada em (5.24). No segundo conjunto de testes se usa uma representação aproximada da estrutura ARMAX original, dada por:

$$A(q) = 1 - 0,9387 \cdot q^{-1} \quad B(q) = 0,1503 \cdot q^{-5} \quad C(q) = 1 + 0,45 \cdot q^{-1} \quad (5.25)$$

5.2.5.1 Aplicação de predição um passo à frente com modelo exato da planta

Apresenta-se, inicialmente, o diagrama de blocos em Simulink para executar a predição um passo à frente, considerando a relação (5.10). Os dados de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ usados na Figura 5.1 são os mesmos utilizados na Subseção 4.2.1 para o caso sem perturbação e na Subseção 4.2.2 para o caso com perturbação, considerando que se empregue o modelo ARMA para a perturbação, correspondente ao sistema S_2 .

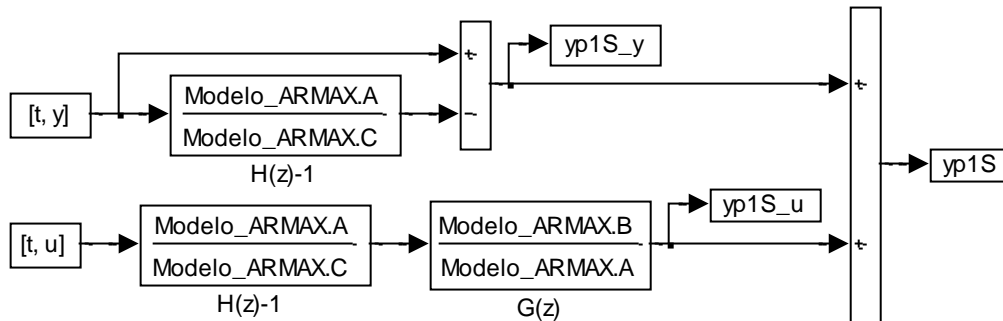


Fig. 5.1 Modelo de preditor um passo à frente segundo relação (5.10).

Apresenta-se, a seguir, o programa em Matlab para executar a predição um passo à frente, considerando que os dados do processo sejam ou não afetados por perturbações.

O mesmo resultado da predição realizada pelo procedimento da Figura 5.1 em Simulink, pode ser obtido caso se empregue o comando *predict* do Matlab.

```
% CASO COM MODELO IDENTIFICADO PERFEITO

tsim = 250;      % [s] Duração da simulação para coleta dos dados
T = 0.5;        % [s] Período de amostragem
A = [1 -0.9512];
B = [0 0 0 0 0 0.1463];
C = [1 0.5];
Modelo_ARMAX = idpoly(A,B,C,[],[],T);
G_ARMAX = filt(Modelo_ARMAX.B,Modelo_ARMAX.A,T);
H_ARMAX = filt(Modelo_ARMAX.C,Modelo_ARMAX.A,T);
% Predição um passo à frente estimada de diferentes maneiras
k = 1;          % [adim.] Número de passos da predição à frente
% Geração dos dados de entrada e saída - caso sem perturbação
Modelo_1a_ordem_subsecao_4_2_1;
sim('Modelo_1a_ordem_subsecao_4_2_1');      % Gera a saída do modelo isenta de ruído
z = iddata(y,u,T);
% Predição um passo à frente pela relação (5.10) empregando o Matlab
H_1 = filt(H_ARMAX.den{1},H_ARMAX.num{1},T);
H_1G = series(H_1,G_ARMAX);
H_11 = 1 - H_1;
yp1 = filter(H_1G.num{1},H_1G.den{1},u) + filter(H_11.num{1},H_11.den{1},y);
% Predição um passo à frente pela relação (5.10) empregando o Simulink (conforme Figura 5.1)
Predicao_1_passo_frente_subsecao_5_2_5;
sim('Predicao_1_passo_frente_subsecao_5_2_5');
% Predição um passo à frente pelo comando predict do Matlab
yp1p = predict(Modelo_ARMAX,z,k,'InitialState','zero');
figure(1)
plot(t,y,'k',t,yp1,'k--',t,yp1S,'k-.',t,yp1p.OutputData,'k:')
xlabel('Tempo t (s)'); ylabel('Saída y');
axis([0 250 -3.08 3.08]);
set(gca,'XTick',0:25:250,'YTick',-3:0.5:3);
ll = legend('Saída da planta','Saída predita pela relação (5.10) em Matlab','Saída predita pela relação
(5.10) em Simulink','Saída predita pelo comando predict');
set(ll,'FontSize',8)
```

Na Figura 5.2 vê-se a predição quando a planta não é afetada por perturbações nem por ruído de medição. Como se vê, as quatro saídas são idênticas, pois o modelo sendo usado é perfeito e não há perturbações nem ruído de medição na planta.

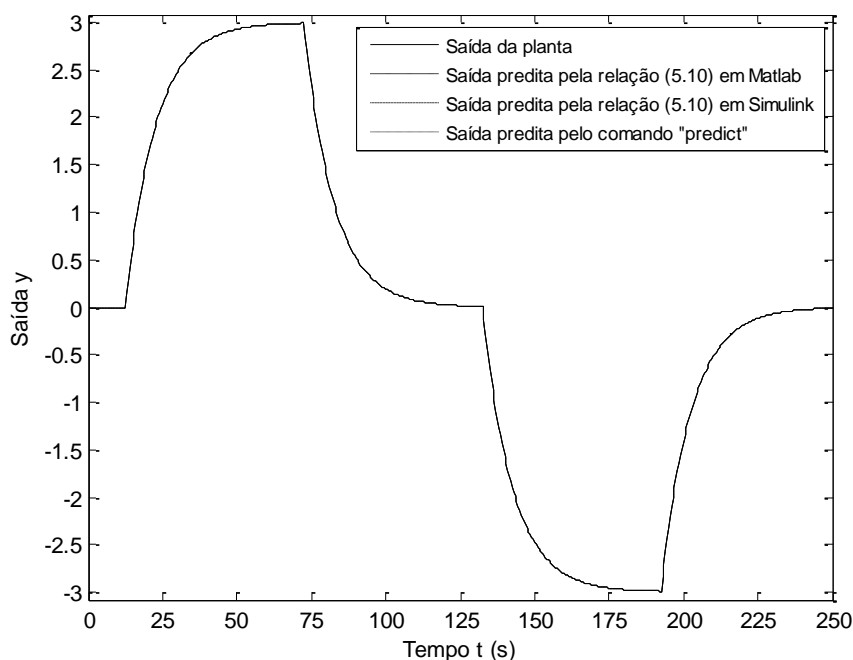


Fig. 5.2 Resposta do preditor um passo à frente e da saída da planta isenta de perturbações e de ruído de medição.

Na Figura 5.3 vê-se uma ampliação da resposta do preditor um passo à frente da Figura 5.2 entre os instantes $t = 12$ s e $t = 15$ s, bem como as suas 2 componentes, uma gerada pelo sinal de entrada $u(t)$ e a outra pelo sinal de saída $y(t)$, ambas vistas na Figura 5.1 ($yp1S_u$ e $yp1S_y$, respectivamente). A Figura 5.3 indica que o sinal de saída relativo ao termo $y(t)$ está atrasado de um intervalo de amostragem (0,5 s), como esperado.

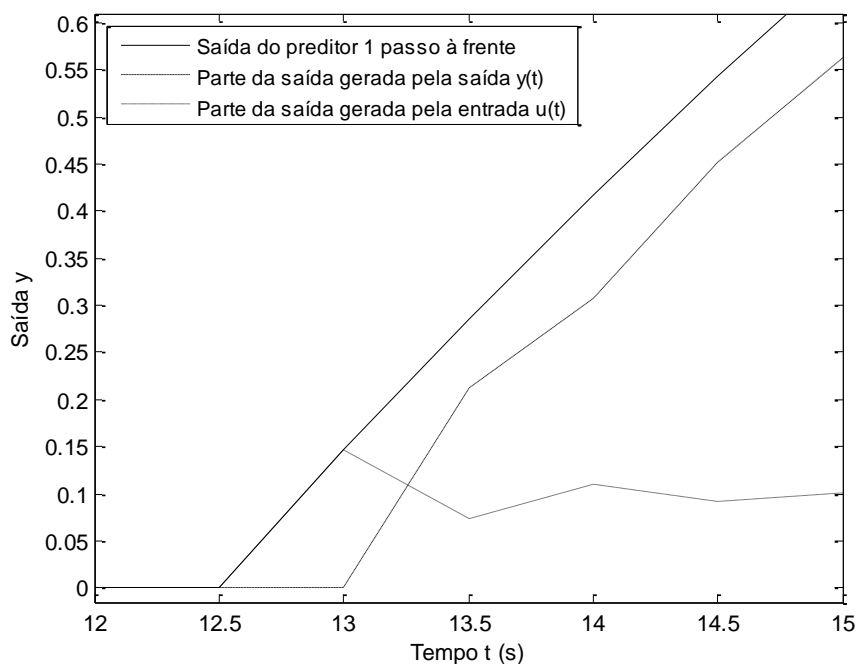


Fig. 5.3 Resposta parcial do preditor um passo à frente e de suas duas componentes.

A Figura 5.4 mostra a saída da planta e do preditor um passo à frente quando há perturbações de baixa intensidade (variância de 0,001) afetando o processo. A predição um passo à frente gera uma saída que é muito parecida com a da planta.

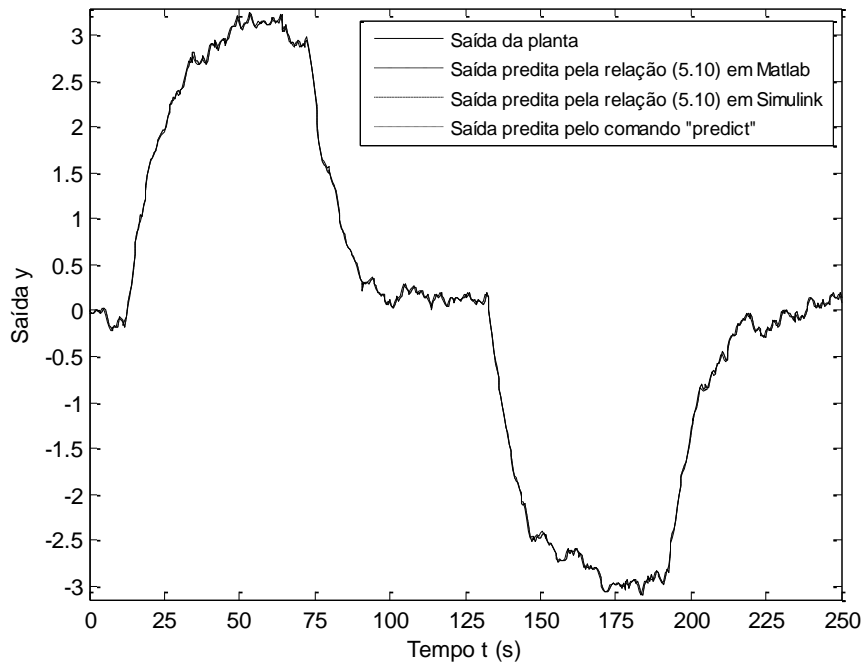


Fig. 5.4 Resposta do preditor um passo à frente com saída da planta afetada por perturbações de baixa intensidade.

Para ver isto melhor, a Figura 5.5 é a ampliação de um trecho da Figura 5.4.

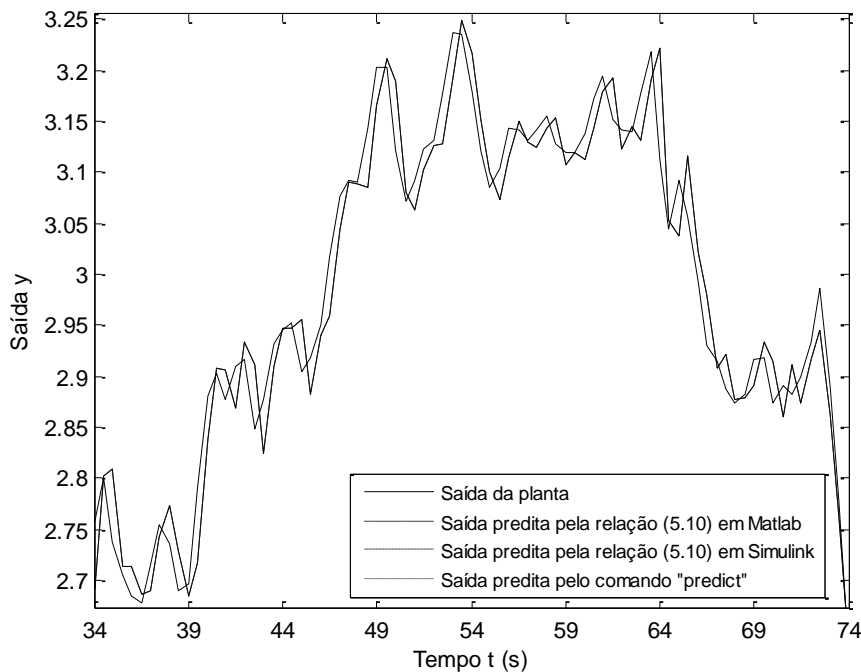


Fig. 5.5 Ampliação da resposta do preditor um passo à frente e da saída da planta afetada por perturbações de baixa intensidade.

A Figura 5.5 indica que a saída predita segue de perto a saída da planta, mas atrasada de um intervalo de amostragem T (0,5 segundos). Este efeito não é inesperado, pois o preditor um passo à frente estima a saída $y(t+1/t)$ e, assim, uma boa estimativa é prever como a próxima saída, o último valor medido do processo. Nota-se também que os valores preditos pelo comando *predict* do Matlab e pela Equação (5.10) são idênticos. A

Figura 5.6 exibe a resposta do preditor 1 passo à frente quando a planta é afetada por perturbações de alta intensidade (variância de 0,1).

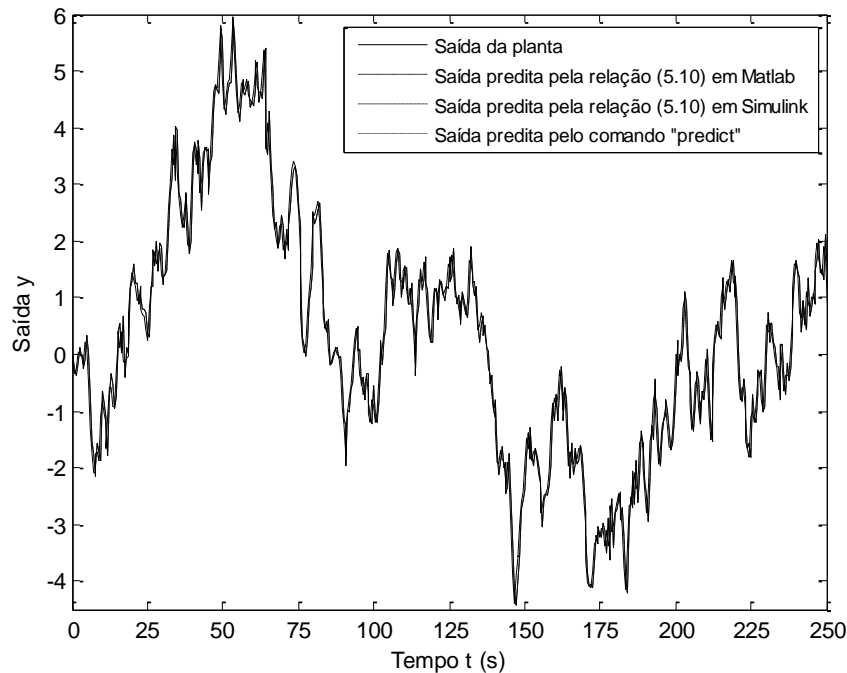


Fig. 5.6 Resposta do preditor um passo à frente com saída da planta afetada por perturbações de alta intensidade.

As curvas na Figura 5.6 são próximas. Na Figura 5.7 amplia-se a Figura 5.6.

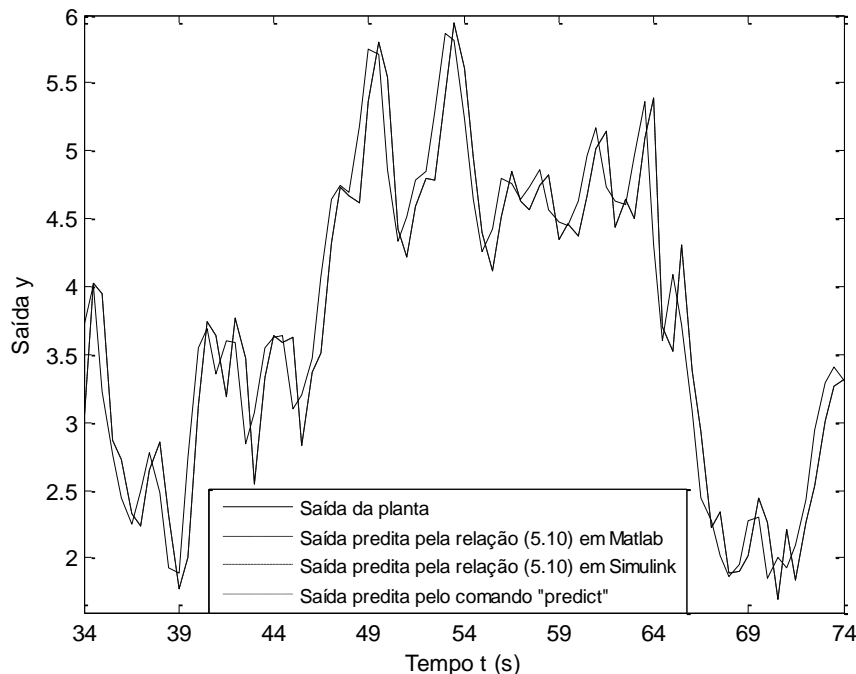


Fig. 5.7 Ampliação da resposta do preditor um passo à frente e da saída da planta afetada por perturbações de alta intensidade.

Comparando-se a Figura 5.7 com a Figura 5.5, percebe-se que há um maior afastamento entre a resposta da planta e do preditor um passo à frente. Nota-se ainda que os resultados do cálculo da previsão pela Relação (5.10) e pelo comando *predict* são idênticos.

5.2.5.2 Aplicação de predição k passos à frente com modelo exato do processo

Considere o modelo ARMAX do item anterior. A proposta aqui é empregar a Expressão (5.22) para realizar a predição k passos à frente desse modelo e compará-la com a predição realizada pelo comando *predict* do Matlab.

```
% CASO COM MODELO IDENTIFICADO PERFEITO
tsim = 250;      % [s] Duração da simulação para coleta dos dados
T = 0.5;        % [s] Período de amostragem
A = [1 -0.9512];
B = [0 0 0 0 0 0.1463];
C = [1 0.5];
Modelo_ARMAX = idpoly(A,B,C,[],[],T);
G_ARMAX = filt(Modelo_ARMAX.B,Modelo_ARMAX.A,T);
H_ARMAX = filt(Modelo_ARMAX.C,Modelo_ARMAX.A,T);
% Geração dos dados de entrada e saída - caso sem perturbação
Modelo_1a_ordem_subsecao_5_2_5;
sim('Modelo_1a_ordem_subsecao_5_2_5'); % Gera a saída do modelo isenta de ruído
z = iddata(y,u,T);
% Predição k passos à frente estimada de diferentes maneiras
k = 10;      % [adim.] Número de passos da predição à frente
% Predição k-passos à frente pela relação (5.22)
hk = impulse(H_ARMAX,k);
Hbarrak = filt(hk(1:k)',1,T);
H_1 = filt(H_ARMAX.den{1},H_ARMAX.num{1},T);
Wk = series(Hbarrak,H_1);
Wk_G = series(Wk,G_ARMAX);
Wk1 = filt(Wk.num{1},Wk.den{1},T);
Wk_1 = 1 - Wk1;
ypk = filter(Wk_G.num{1},Wk_G.den{1},u) + filter(Wk_1.num{1},Wk_1.den{1},y);
% Predição k-passos à frente pelo comando predict do Matlab
ypkp = predict(Modelo_ARMAX,z,k,'InitialState','zero');
% Predição k- passos à frente sem perturbações nem ruído
figure(1)
plot(t,y,'k',t,ypk,'k-',t,ypkp.OutputData,'k:')
xlabel('Tempo t (s)')
ylabel('Saída y')
axis([0 250 -3.08 3.08])
set(gca,'XTick',0:25:250,'YTick',-3:0.5:3)
ll = legend('Saída da planta','Saída predita pela relação (5.22)','Saída predita pelo comando predict');
set(ll,'FontSize',9)
```


Na Figura 5.8 mostra-se a saída do preditor dez passos à frente quando a planta não é afetada por perturbações nem por ruído de medição. Assim como ocorreu na Figura 5.2, na Figura 5.8 todas as saídas são idênticas, pois o modelo com que se está realizando as predições é perfeito e não há perturbações nem ruído no processo.

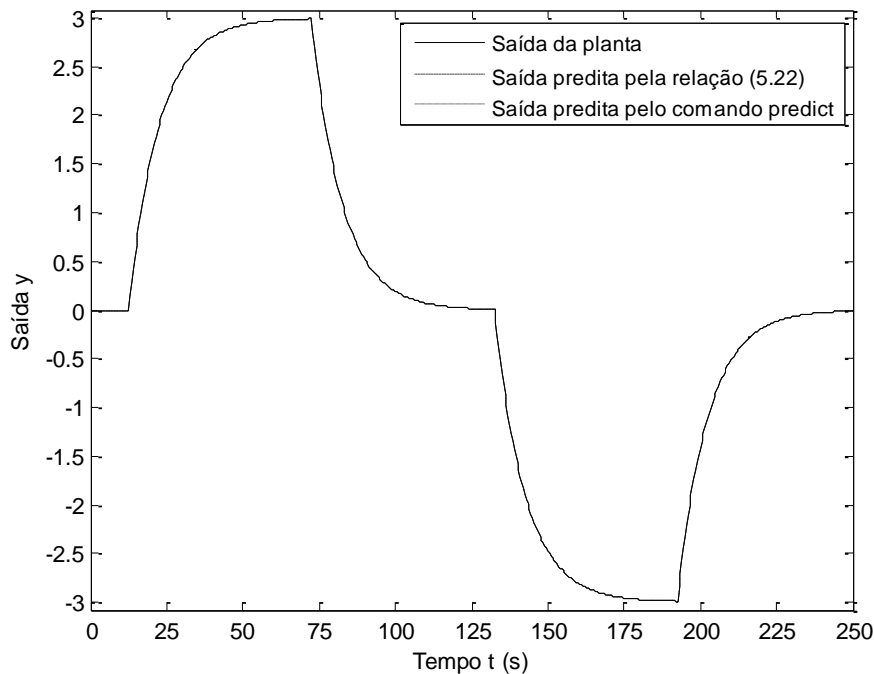


Fig. 5.8 Resposta do preditor dez passos à frente com planta sem perturbações nem ruído de medição.

Na Figura 5.9 apresenta-se a saída do preditor dez passos à frente quando a planta é afetada por perturbações de baixa intensidade e sem ruído de medição.

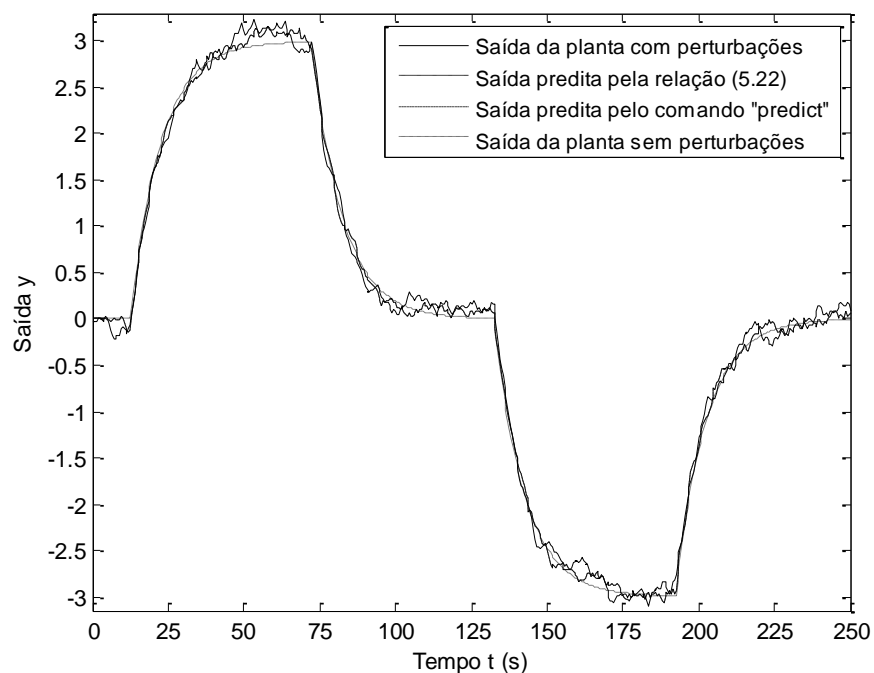


Fig. 5.9 Resposta do preditor dez passos à frente com planta afetada por perturbações de baixa intensidade e sem ruído de medição.

A aderência da saída predita à saída do processo na Figura 5.9 já não é tão boa como na Figura 5.8. Além disso, a resposta do preditor de dez passos à frente está muito mais próxima da resposta da planta com perturbações do que sem perturbações. Para ver isto melhor, a Figura 5.10 mostra uma ampliação da Figura 5.9. Comprova-se na Figura 5.10 a maior proximidade entre a saída do processo com perturbações e a saída predita do que entre o processo sem perturbações e a saída predita. Verifica-se ainda que as previsões realizadas pela Relação (5.22) e pelo comando *predict* são idênticas.

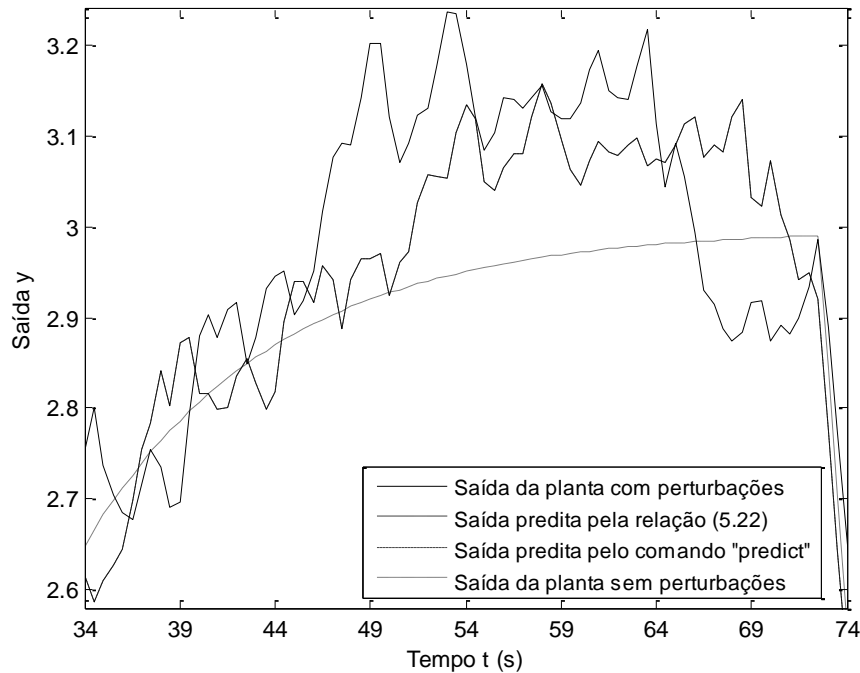


Fig. 5.10 Ampliação da resposta do preditor dez passos à frente com planta afetada por perturbações de baixa intensidade e sem ruído de medição.

Na Figura 5.11 mostra-se a saída do preditor dez passos à frente com a planta afetada por perturbações de alta intensidade e sem ruído de medição.

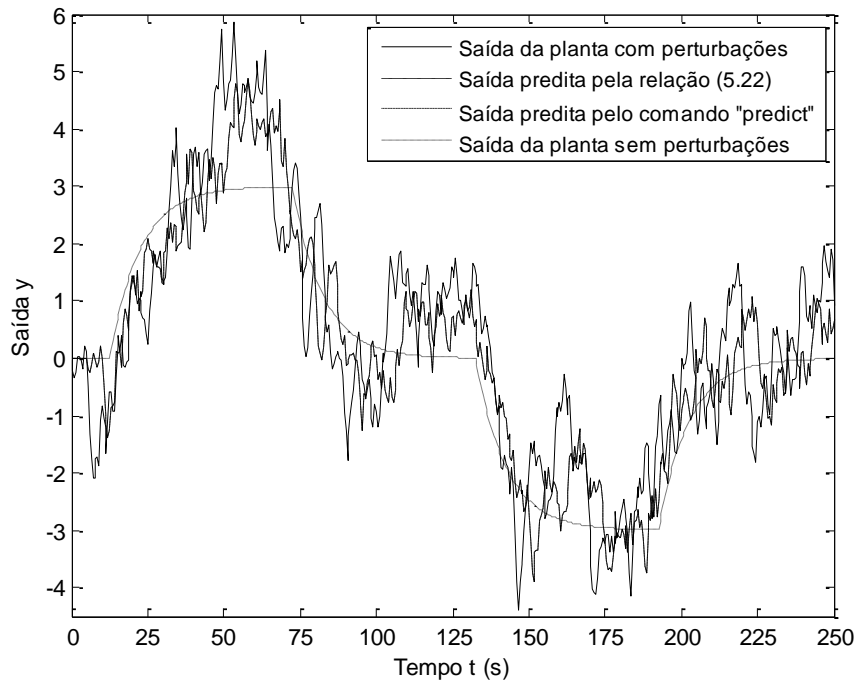


Fig. 5.11 Resposta do preditor dez passos à frente com planta afetada por perturbações de alta intensidade e sem ruído de medição.

A Figura 5.11 indica que a saída predita segue melhor a saída da planta com perturbações do que sem elas. Na Figura 5.12 exibe-se uma visão ampliada da Figura 5.11.

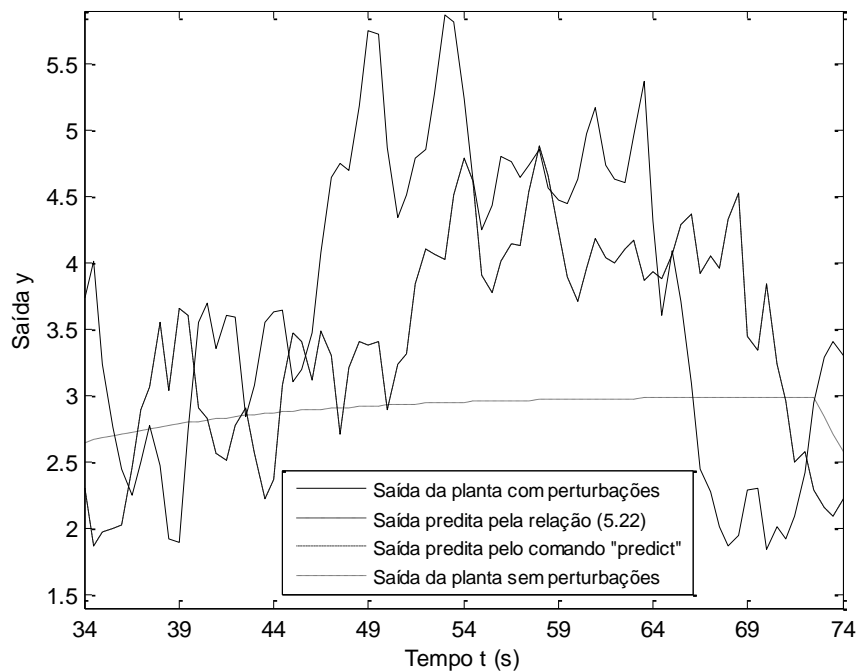


Fig. 5.12 Ampliação da resposta do preditor dez passos à frente com planta afetada por perturbações de alta intensidade.

Vê-se na Figura 5.12 a maior semelhança entre a saída predita e a saída da planta com perturbações do que com a saída da planta sem perturbações, atestando a relevância de se dispor do modelo de perturbações ao se fazer previsões. Na Figura 5.13 vê-se a resposta do preditor com passos à frente quando aplicado a um processo sem perturbações.

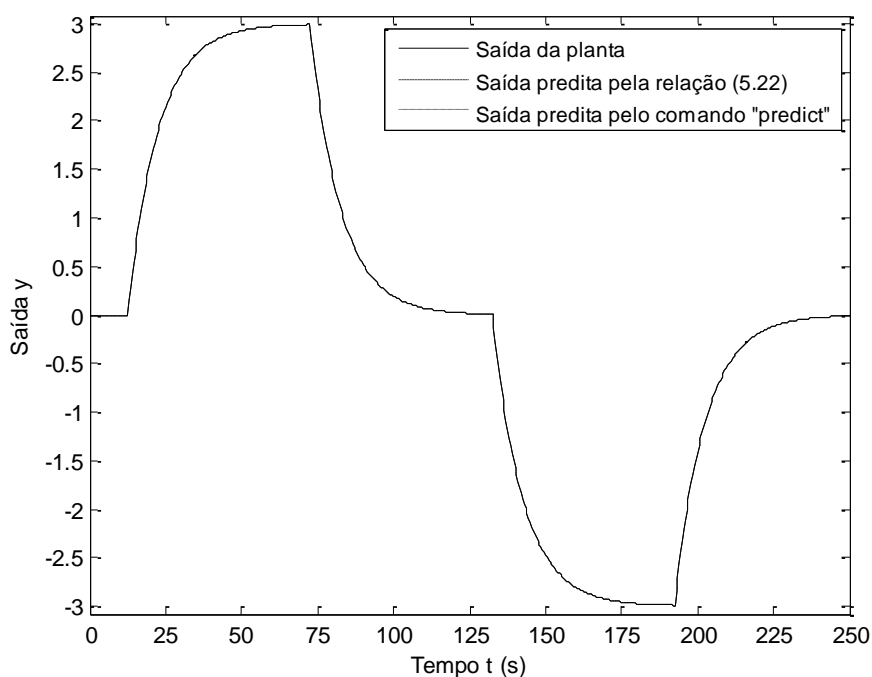


Fig. 5.13 Resposta do preditor com passos à frente com planta sem perturbações.

As respostas da Figura 5.13 são idênticas às vistas nas Figuras 5.2 e 5.8. Na Figura 5.14 mostra-se a resposta do preditor com passos à frente quando aplicado a um processo com perturbações de baixa intensidade.

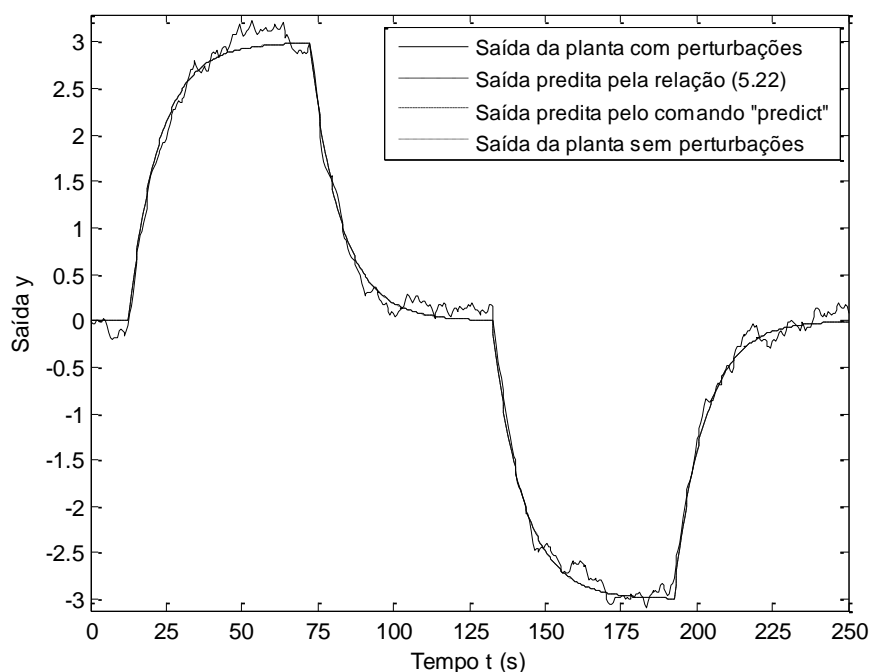


Fig. 5.14 Resposta do preditor com passos à frente e saída da planta afetada por perturbações de baixa intensidade.

Na Figura 5.14 vê-se que a saída do preditor já não acompanha mais de perto a saída da planta com perturbações, mas responde de modo praticamente idêntico à do processo sem perturbações. Isto ocorre pois, neste caso, as últimas saídas estimadas são usadas para prever a próxima saída e, neste caso, como o sinal de entrada não tem

ruído, resulta que a saída do preditor acaba se assemelhando à saída que o processo teria se não tivesse perturbações. Para poder visualizar melhor o que foi dito, exibe-se na Figura 5.15 uma ampliação de um trecho da Figura 5.14, na qual se nota que a saída do preditor com passos à frente e a saída da planta sem perturbações são praticamente coincidentes.

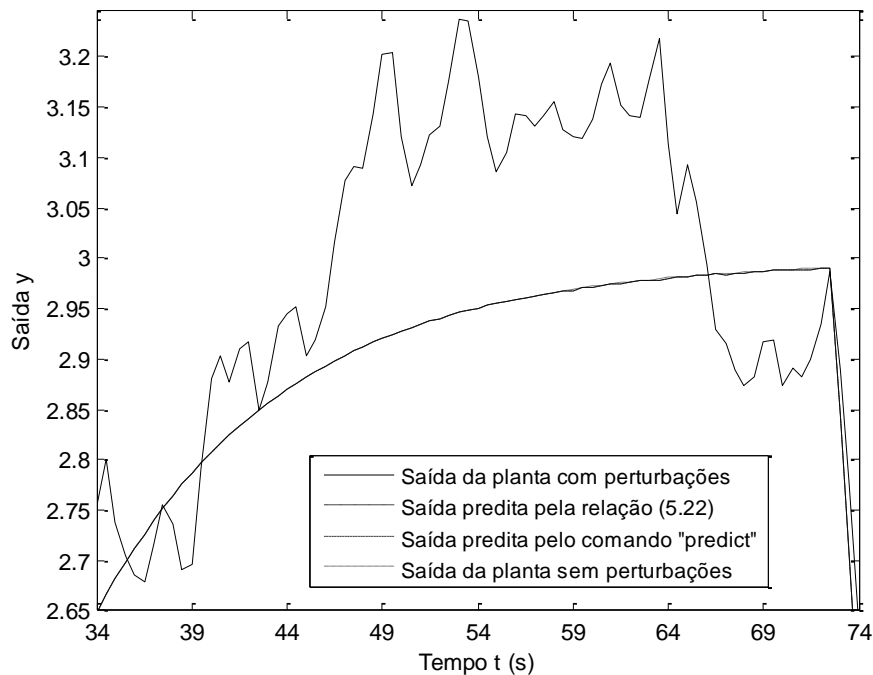


Fig. 5.15 Ampliação da resposta do preditor com passos à frente e da saída da planta afetada por perturbações de baixa intensidade.

A Figura 5.16 mostra a saída do preditor com passos à frente aplicado à planta afetada por perturbações de alta intensidade.

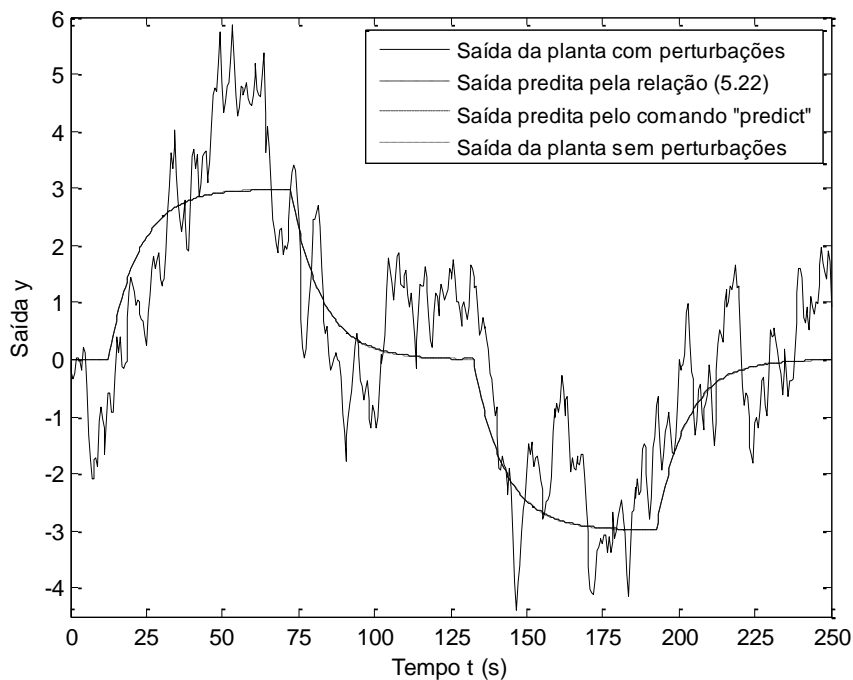


Fig. 5.16 Resposta do preditor com passos à frente e saída do processo com perturbações de alta intensidade.

A Figura 5.16 revela que assim como ocorreu na Figura 5.14, a resposta do preditor com passos à frente responde como se o processo não fosse afetado por perturbações. A Figura 5.17 mostra uma ampliação de parte da Figura 5.16.

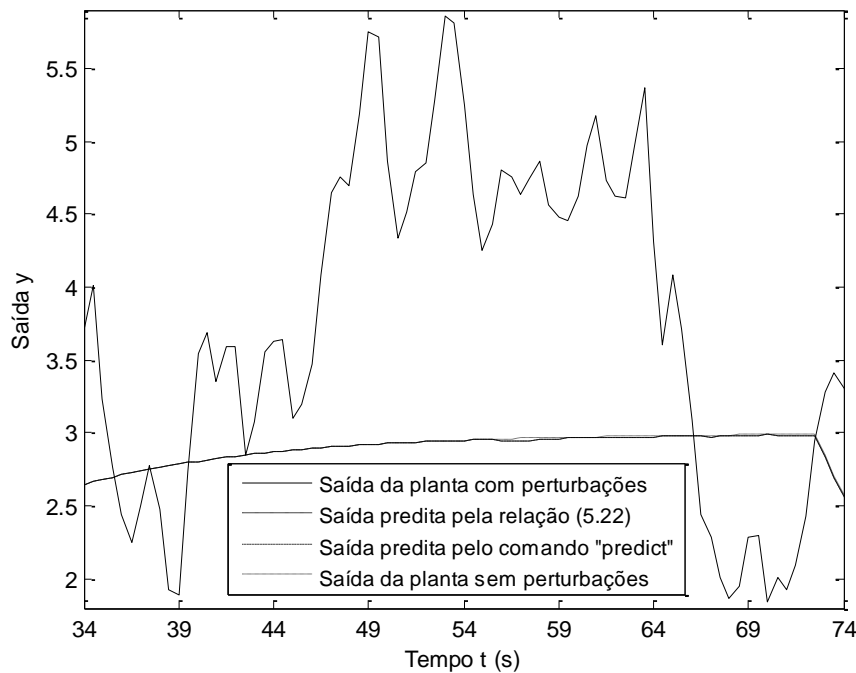


Fig. 5.17 Ampliação da resposta do preditor com passos à frente e da saída da planta afetada por perturbações de alta intensidade.

Fica claro na Figura 5.17 a aderência quase perfeita entre a saída predita com passos à frente e a saída da planta sem perturbações.

A seguir, apresenta-se o procedimento em Matlab para realizar uma simulação livre (predição infinitos passos à frente). Esta aplicação corresponde a realizar uma simulação empregando a Equação (5.2).

```
% Predição infinitos passos à frente (simulação livre)
tsim = 250;      % [s] Duração da simulação para coleta dos dados
T = 0.5;        % [s] Período de amostragem
A = [1 -0.9512];
B = [0 0 0 0 0 0.1463];
C = [1 0.5];
k = inf;
Modelo_ARMAX = idpoly(A,B,C,[],[],T);
G_ARMAX = filt(Modelo_ARMAX.B,Modelo_ARMAX.A,T);
H_ARMAX = filt(Modelo_ARMAX.C,Modelo_ARMAX.A,T);
% Predição infinitos passos à frente pelo comando idsim
ypinf = idsim(u,Modelo_ARMAX);
% Predição infinitos passos à frente pelo comando predict
```

```

zrb = iddata(yrb,u,T);
ypinfprb = predict(Modelo_ARMAX,zrb,k,'InitialState','zero');
figure(1);
plot(t,yrb,'k',t,ypinf,'k--',t,ypinfprb.OutputData,'k-.',t,y,'k');
xlabel('Tempo t (s)');
ylabel('Saída y');
axis([0 250 -3.12 3.28]);
set(gca,'XTick',0:25:250,'YTick',-3:0.5:3);
ll = legend('Saída da planta com perturbações','Saída predita pelo comando idsim','Saída predita pelo comando predict','Saída da planta sem perturbações');
set(ll,'FontSize',9);

```

Na Figura 5.18 mostra-se a saída do preditor infinitos passos à frente e a saída do processo sem perturbações.

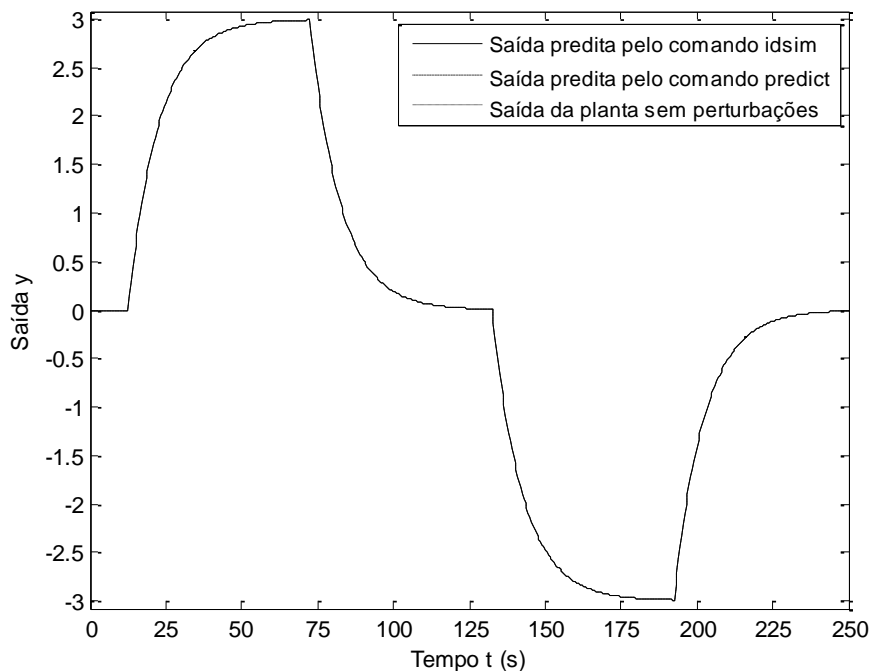


Fig. 5.18 Resposta do preditor infinitos passos à frente e saída do processo sem perturbações.

Como o modelo usado no estimador é exato, a Figura 5.18 indica que todas as saídas são idênticas, como esperado. Na Figura 5.19 exibe-se a saída do preditor infinitos passos à frente (simulação livre) com processo sendo afetado por perturbações de baixa intensidade.

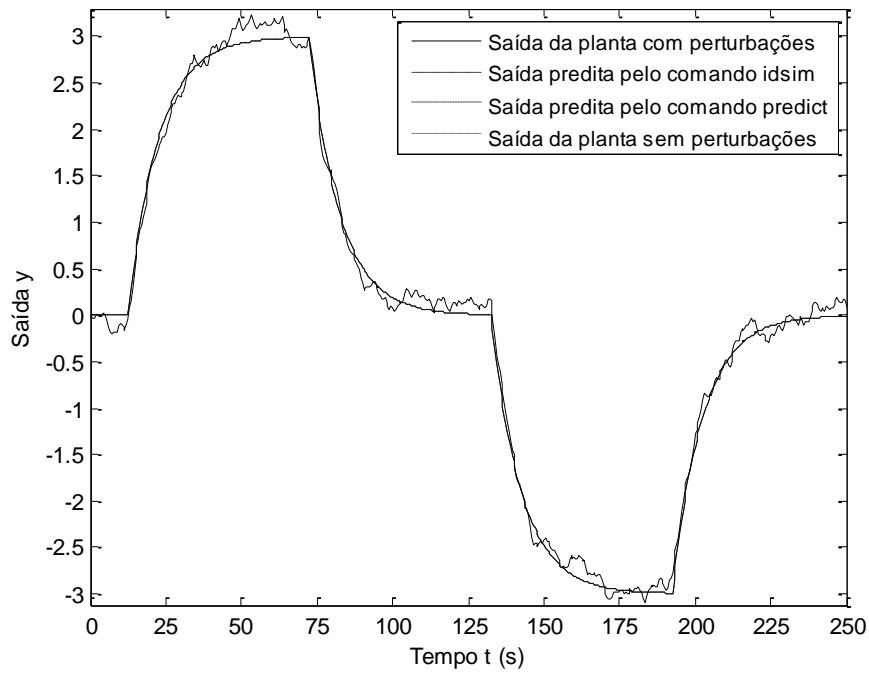


Fig. 5.19 Resposta do preditor infinitos passos à frente e do processo com perturbações de baixa intensidade.

A resposta do preditor infinitos passos à frente da Figura 5.19 e de cem passos à frente da Figura 5.14 são similares, coincidindo exatamente com a saída da planta sem perturbações. A Figura 5.20 é um trecho ampliado da Figura 5.19.

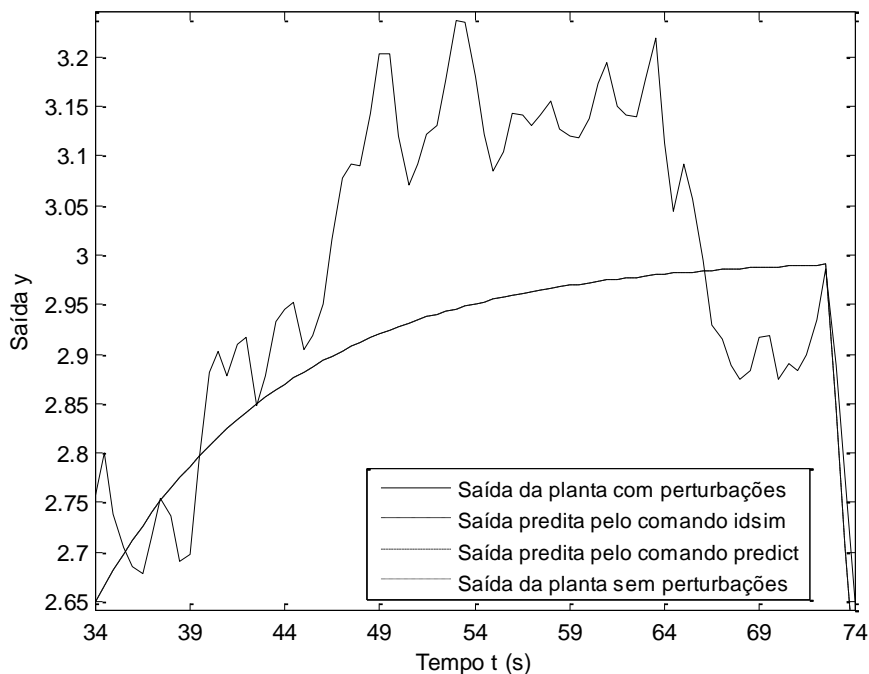


Fig. 5.20 Ampliação da resposta do preditor infinitos passos à frente e da saída do processo afetado por perturbações de baixa intensidade.

A resposta do preditor infinitos passos à frente da Figura 5.20 é exatamente igual à resposta do processo sem perturbações, tendo-se em vista que o modelo que foi usado no

preditor corresponde a um modelo exato do processo. Na Figura 5.21 é mostrada a resposta do preditor infinitos passos à frente quando aplicado ao processo com perturbações de alta intensidade.

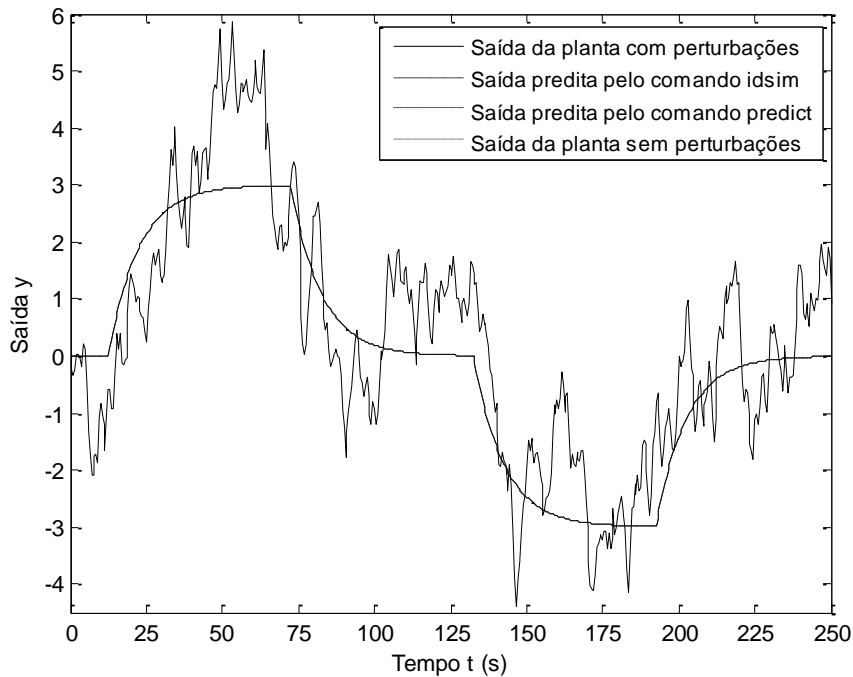


Fig. 5.21 Resposta do preditor infinitos passos à frente e saída do processo com perturbações de alta intensidade.

A resposta do preditor infinitos passos à frente na Figura 5.21 é muito parecida com a do preditor cem passos à frente da Figura 5.16 e idêntica à saída da planta sem perturbações, indicando que para realizar simulações livres (predições infinitos passos à frente) não é preciso se dispor do modelo de perturbações $H(q)$, mas apenas do modelo determinístico do processo $G(q)$. Na Figura 5.22 apresenta-se um trecho ampliado da Figura 5.21.

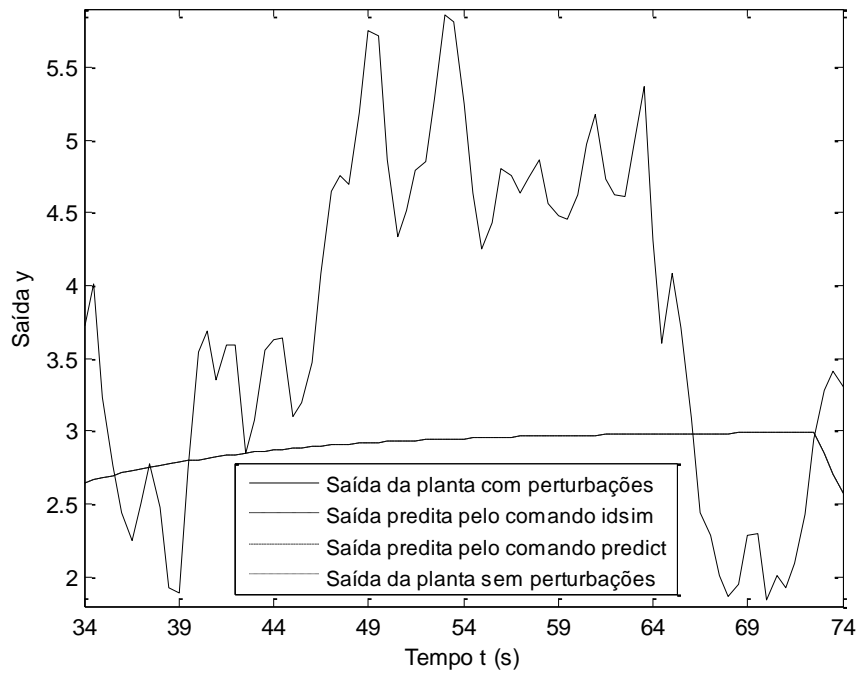


Fig. 5.22 Ampliação da resposta do preditor infinitos passos à frente e da saída do processo afetado por perturbações de alta intensidade.

Na Figura 5.22 percebe-se a perfeita coincidência entre a saída predita infinitos passos à frente com a saída da planta sem perturbações.

5.2.5.3 Aplicação de predição com modelo incorreto do processo

Neste caso, o modelo incorreto corresponde à aproximação mostrada na Expressão (5.25). Seguindo-se a mesma sequência do item anterior, apresentam-se inicialmente os resultados do preditor um passo à frente, sendo que na Figura 5.23 mostra-se o caso quando o processo não está afetado por perturbações.

Na Figura 5.23 nota-se que já não há mais uma perfeita aderência entre a saída da planta e as saídas preditas, como na Figura 5.2, devido à imprecisão no modelo empregado no preditor.

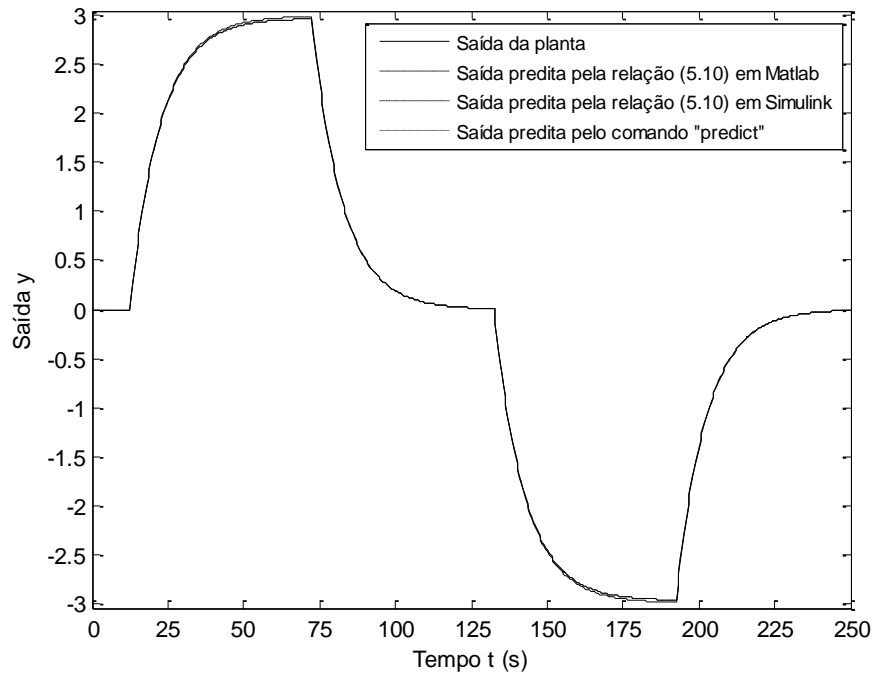


Fig. 5.23 Resposta do preditor um passo à frente com modelo incorreto e saída do processo sem perturbações.

Para perceber melhor a discrepância entre a saída da planta e as saídas preditas, a Figura 5.24 mostra um trecho ampliado da Figura 5.23.

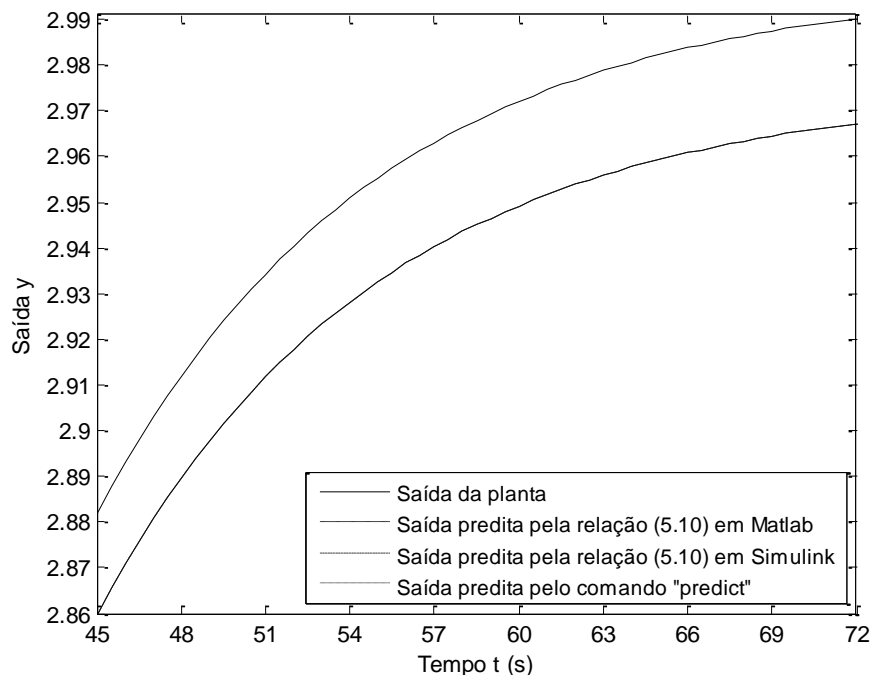


Fig. 5.24 Resposta ampliada do preditor um passo à frente com modelo incorreto e saída do processo sem perturbações.

Na Figura 5.24 fica clara a discrepância entre a resposta do preditor com modelo incorreto e do processo, muito embora a diferença entre a saída do processo e a saída predita seja pequena. Na Figura 5.25 mostra-se a resposta do preditor um passo à frente aplicado ao processo afetado por perturbações de baixa intensidade.

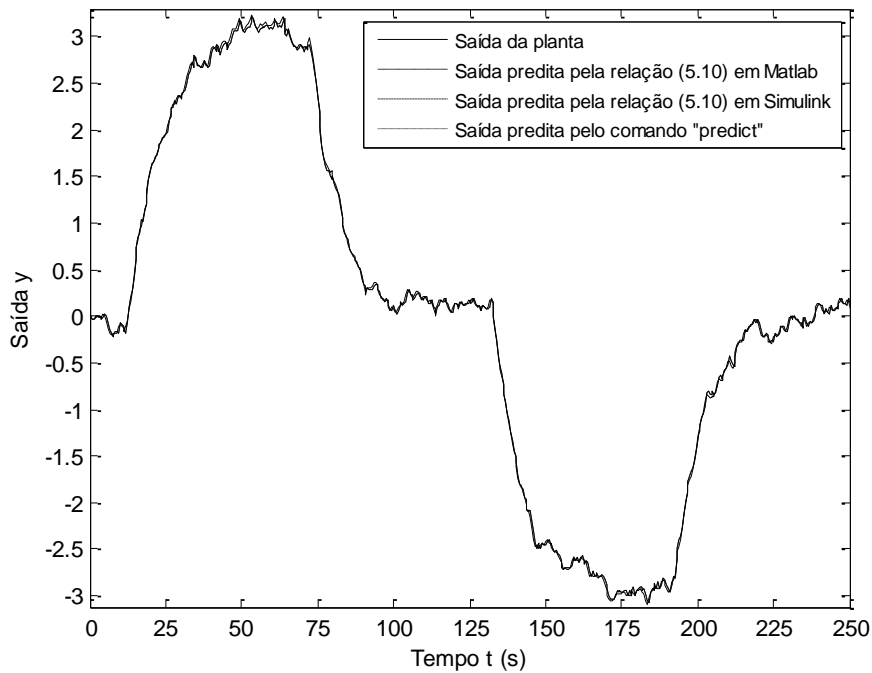


Fig. 5.25 Resposta do preditor um passo à frente com modelo incorreto e saída do processo afetada por perturbações de baixa intensidade.

Na Figura 5.25 a aderência entre ambas as respostas não fica tão boa como na Figura 5.4. Isto é confirmado pela ampliação de um trecho desta figura, mostrada na Figura 5.26. A Figura 5.26 mostra que a saída predita, diferentemente do que ocorre na Figura 5.5, já não segue mais tão de perto a saída do processo.

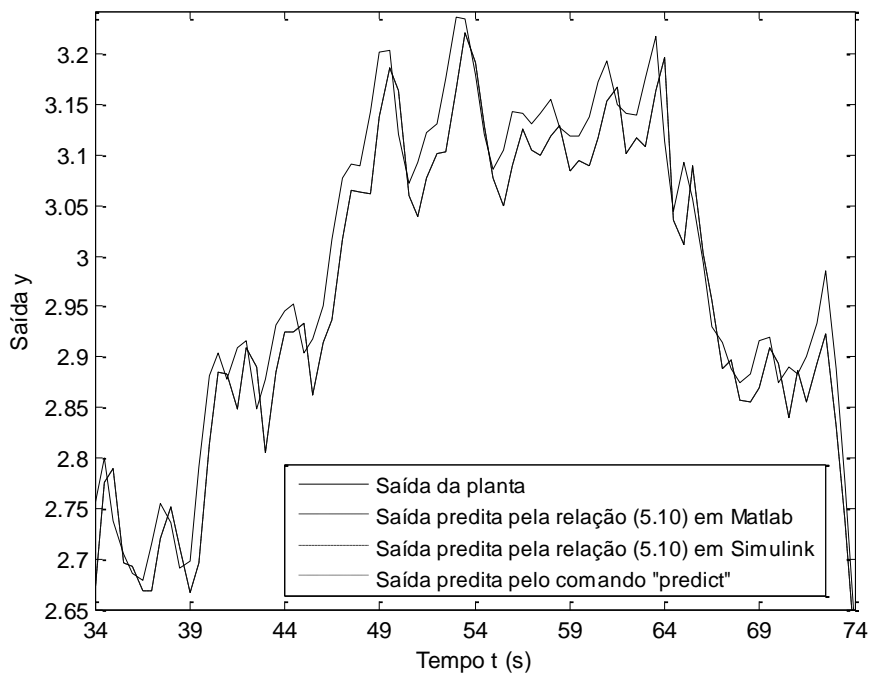


Fig. 5.26 Ampliação da resposta do preditor um passo à frente com modelo incorreto com saída do processo afetada por perturbações de baixa intensidade.

Na Figura 5.27 mostra-se a resposta do preditor um passo à frente aplicado ao processo afetado por perturbações de alta intensidade.

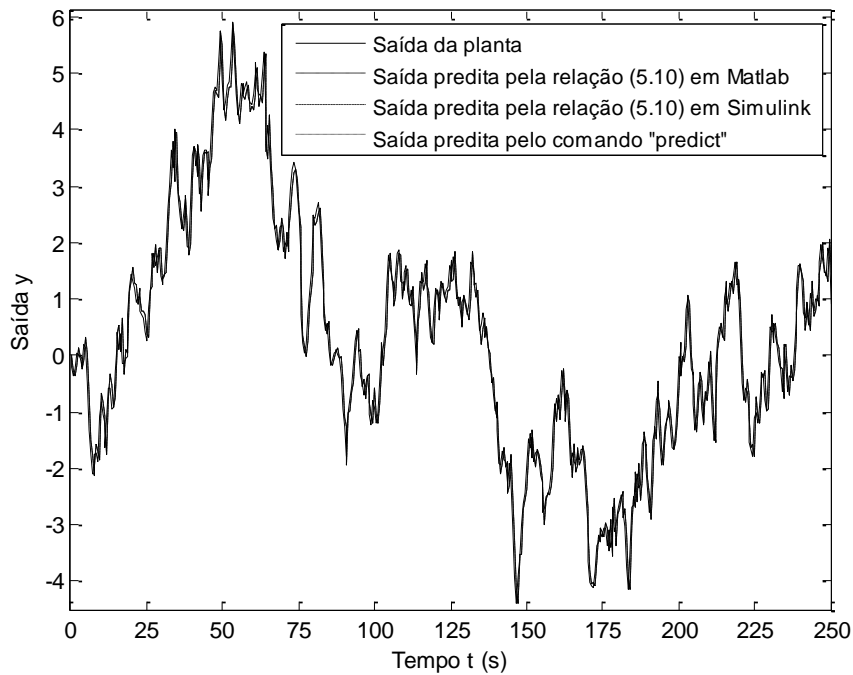


Fig. 5.27 Resposta do preditor um passo à frente com modelo incorreto e saída do processo afetada por perturbações de alta intensidade.

Na Figura 5.27 todas as respostas estão próximas. Para poder ver melhor o que de fato ocorre, a Figura 5.28 apresenta uma ampliação de parte da Figura 5.27.

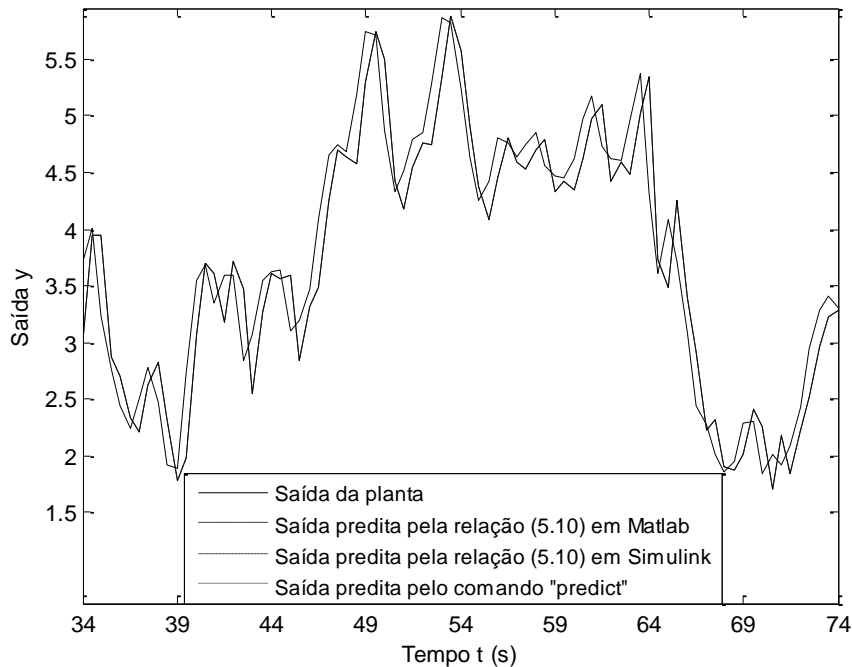


Fig. 5.28 Ampliação de parte da resposta do preditor um passo à frente com modelo incorreto e saída do processo afetada por perturbações de alta intensidade.

A Figura 5.28 indica que a saída da planta e a saída do preditor um passo à frente já não estão tão próximas como na Figura 5.7. Na Figura 5.29 apresenta-se a saída da planta sem perturbações e a saída predita dez passos à frente. Nota-se na Figura 5.29 que o preditor já não reproduz o comportamento da planta, pois está com um modelo incorreto.

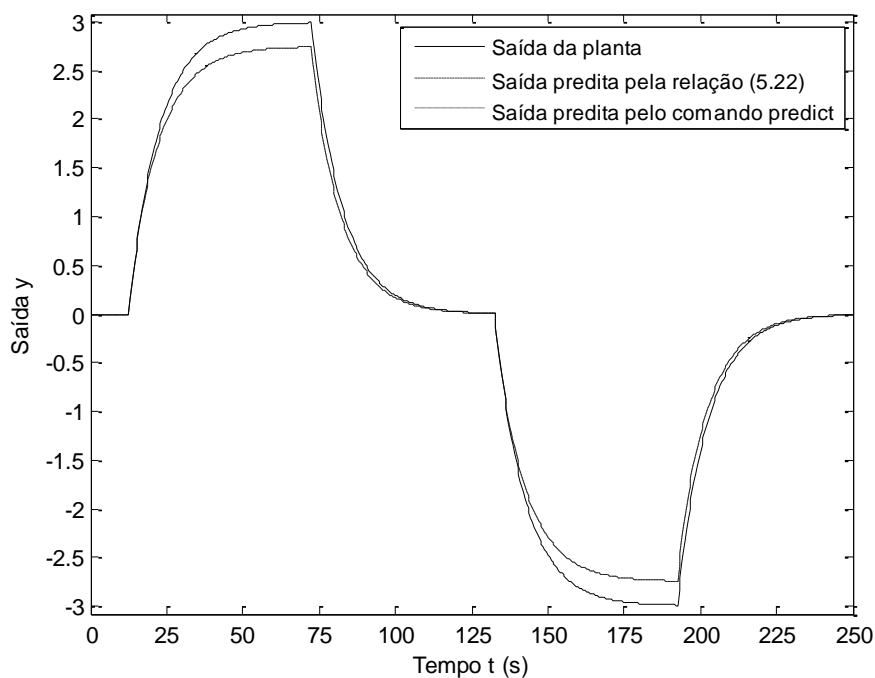


Fig. 5.29 Resposta do preditor dez passos à frente com modelo incorreto e da saída da planta isenta de perturbações e de ruído de medição.

Na Figura 5.30 apresenta-se a saída da planta afetada por perturbações de baixa intensidade e a saída predita dez passos à frente.

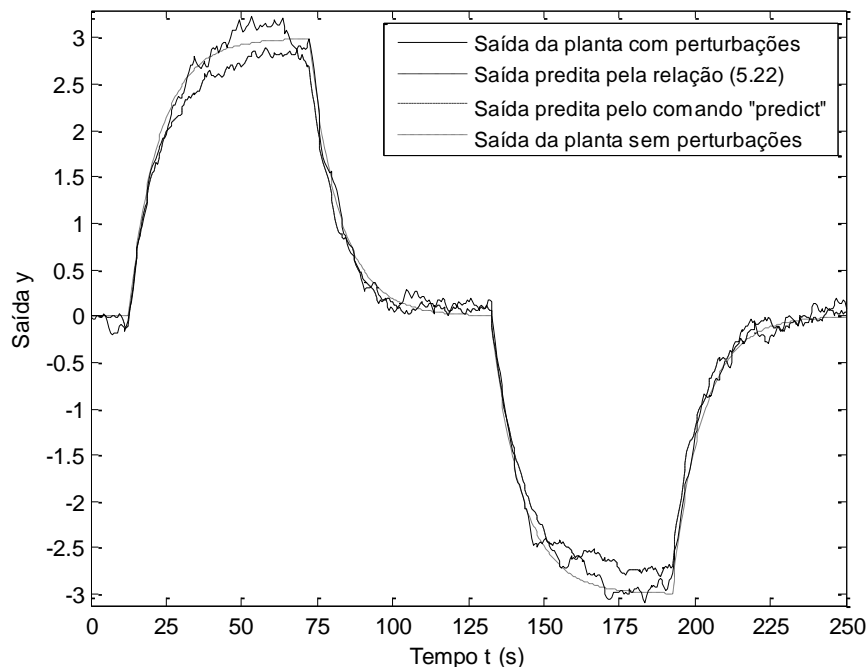


Fig. 5.30 Saída da planta afetada por perturbações de baixa intensidade e resposta do preditor dez passos à frente com modelo incorreto.

Nota-se na Figura 5.30 que a resposta predita tende a se afastar mais da resposta do processo com perturbações do que no caso da Figura 5.25, que emprega um preditor de um passo à frente. Na Figura 5.31 mostra-se a resposta ampliada de um trecho da Figura 5.30.

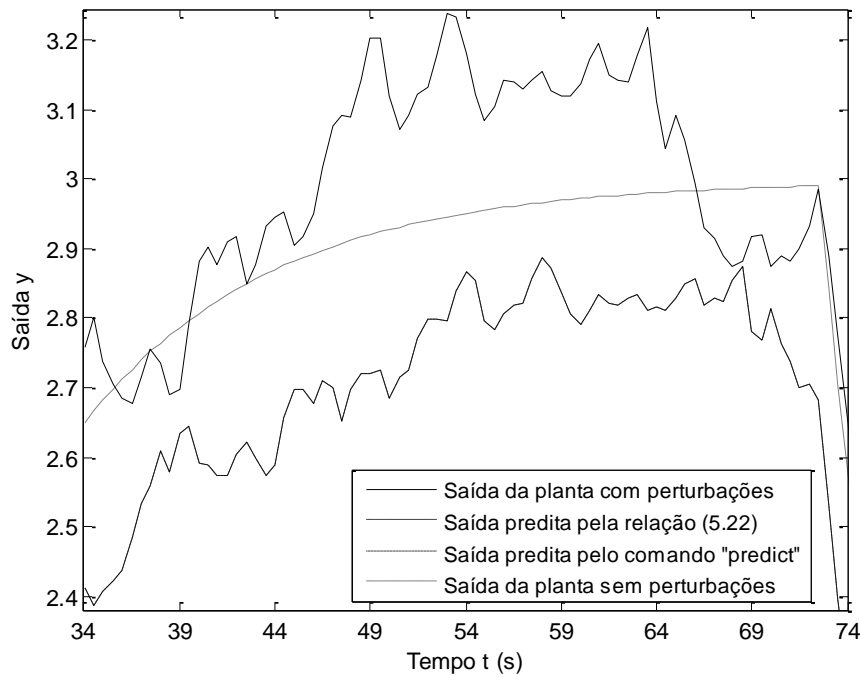


Fig. 5.31 Ampliação da saída da planta afetada por perturbações de baixa intensidade e da resposta do preditor dez passos à frente com modelo incorreto.

Na Figura 5.31 nota-se claramente que o emprego de um modelo incorreto afeta bastante a precisão do preditor dez passos à frente, quando comparado com um preditor usando modelo exato, como na Figura 5.10. Na Figura 5.32 apresenta-se a saída do preditor dez passos à frente com a planta afetada por perturbações de alta intensidade.

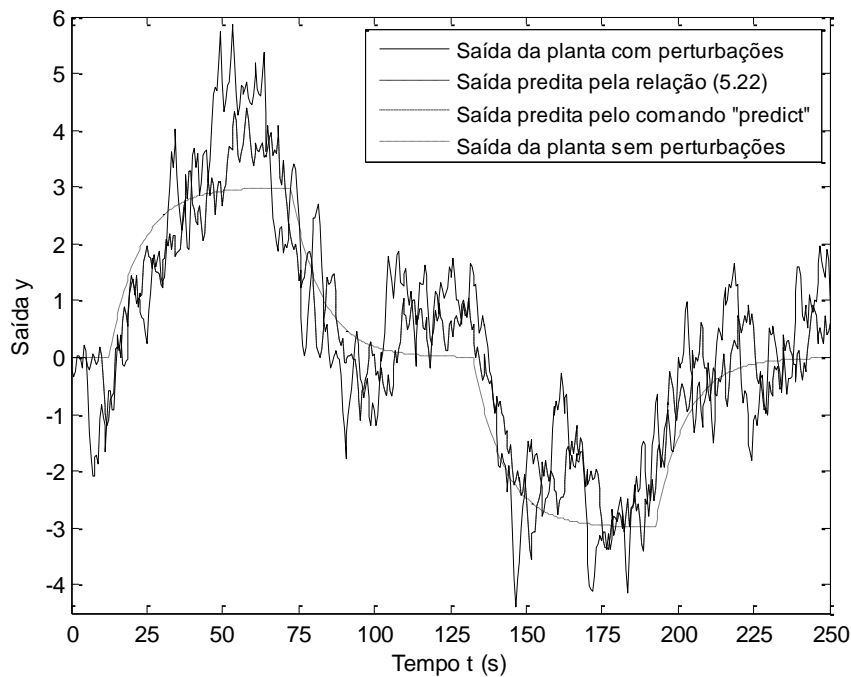


Fig. 5.32 Saída da planta afetada por perturbações de alta intensidade e resposta do preditor dez passos à frente com modelo incorreto.

Para poder comentar a Figura 5.32, propõe-se ampliar um trecho da mesma, conforme mostrado na Figura 5.33.

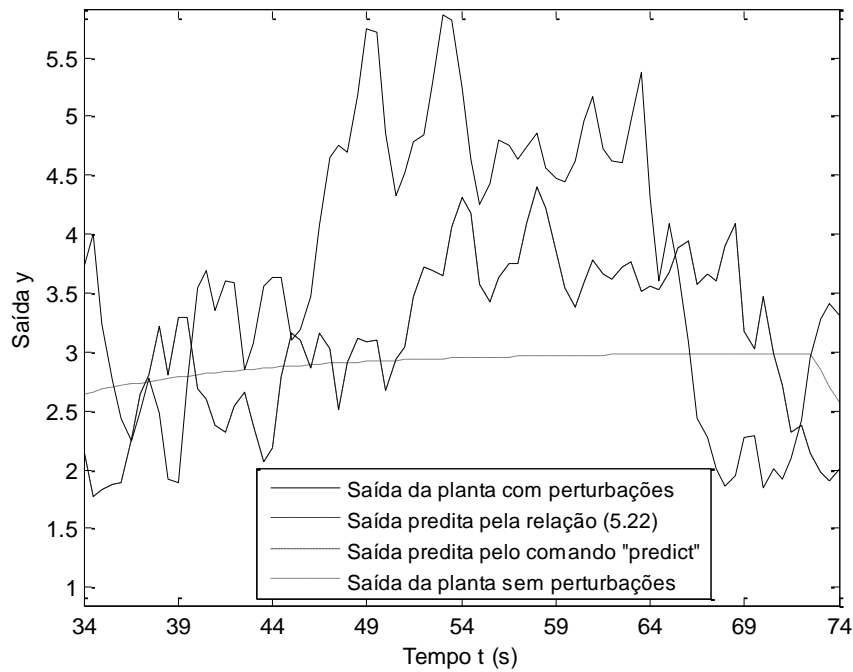


Fig. 5.33 Ampliação da saída da planta afetada por perturbações de alta intensidade e da resposta do preditor dez passos à frente com modelo incorreto.

Percebe-se na Figura 5.33 que a incorreção no modelo usado no preditor afeta bastante sua capacidade de predição, gerando um resultado pior que o da Figura 5.12, em que se emprega um modelo exato da planta. Na Figura 5.34 mostra-se a saída do preditor com passos à frente aplicado a uma planta sem perturbações.

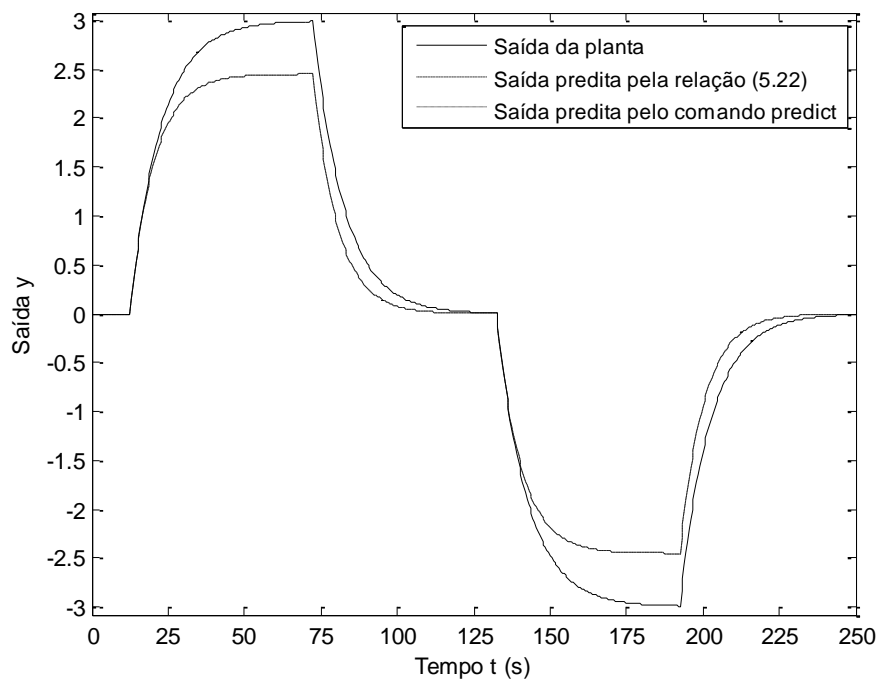


Fig. 5.34 Saída da planta sem perturbações e resposta do preditor com passos à frente com modelo incorreto.

A Figura 5.34 indica que o modelo incorreto afetou a predição, sendo o efeito pequeno na parte dinâmica da resposta mas acentuado na parte estacionária. Na Figura 5.35 vê-

se a saída do preditor com passos à frente com perturbações de baixa intensidade. Na Figura 5.35 há diferenças entre a predição e a saída do processo, sendo a saída predita menos oscilatória que a saída do processo e estabilizando em valores diferentes deste.

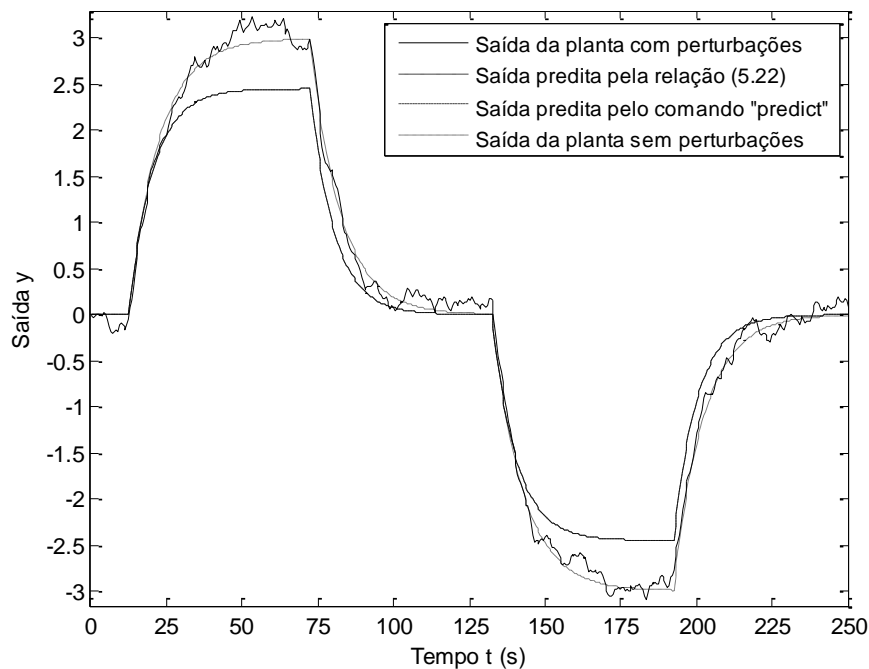


Fig. 5.35 Resposta do preditor com passos à frente com modelo incorreto e saída do processo afetada por perturbações de baixa intensidade.

Uma ampliação da Figura 5.35 é vista na Figura 5.36, a qual indica que a saída do preditor com passos à frente tem um comportamento determinístico e estabiliza em um valor não coincidente com o da planta real, devido à incorreção no modelo usado no preditor.

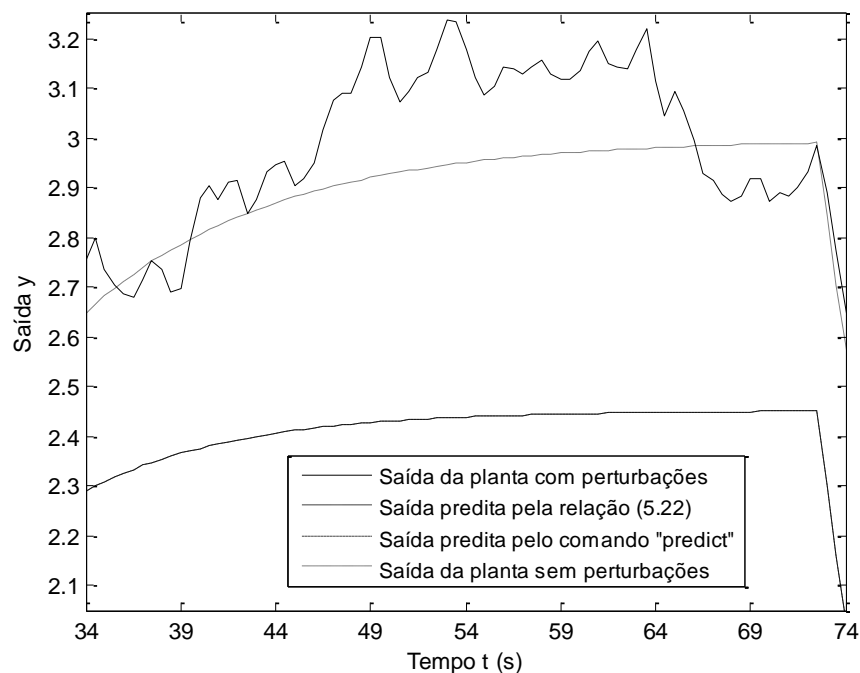


Fig. 5.36 Ampliação da saída da planta afetada por perturbações de baixa intensidade e da resposta do preditor com passos à frente com modelo incorreto.

A Figura 5.37 mostra a resposta do preditor com passos à frente aplicado a processo com perturbações de alta intensidade. Essa figura indica que a saída do estimador praticamente não apresenta mais oscilações e estabiliza em um ponto diferente do processo.

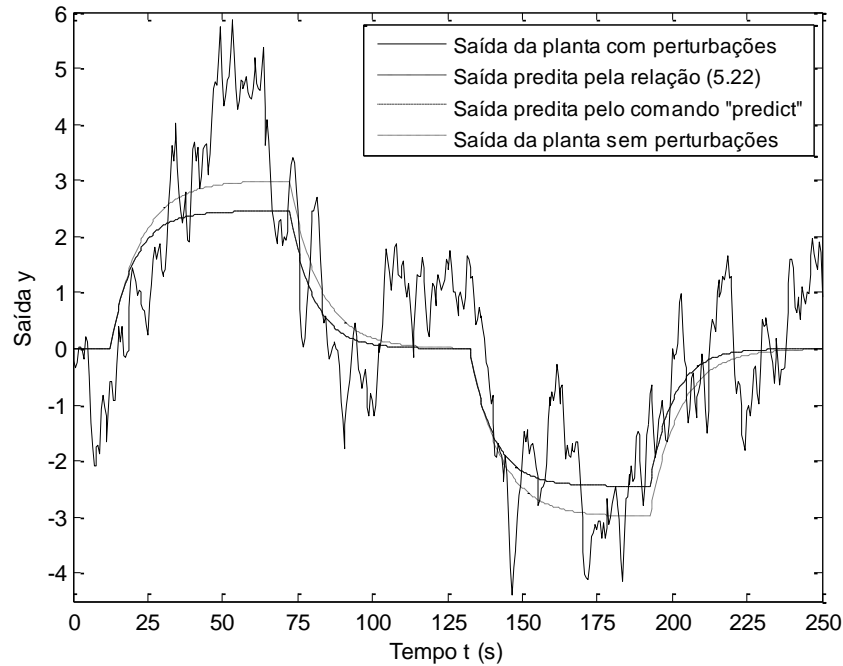


Fig. 5.37 Resposta do preditor com passos à frente com modelo incorreto e saída do processo afetada por perturbações de alta intensidade.

A Figura 5.38 exibe a saída do preditor infinitos passos à frente ao ser aplicado a processo sem perturbações. A figura indica que a saída do preditor infinitos passos à frente estabiliza em um ponto diferente da planta, embora a dinâmica de ambas seja similar.

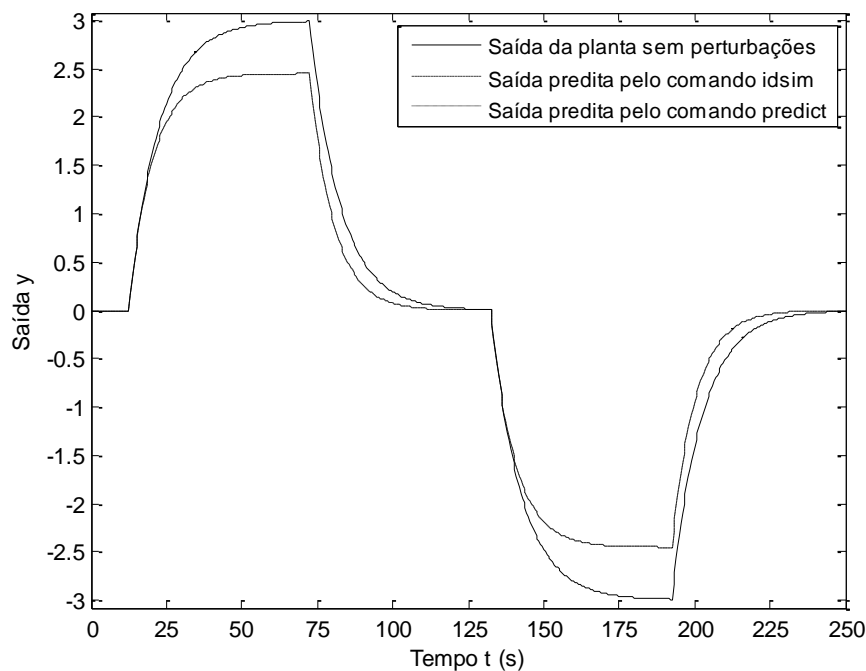


Fig. 5.38 Resposta do preditor infinitos passos à frente com modelo incorreto e saída do processo não afetada por perturbações.

A Figura 5.39 apresenta a resposta do preditor infinitos passos à frente quando aplicado a planta afetada por perturbações de baixa intensidade.

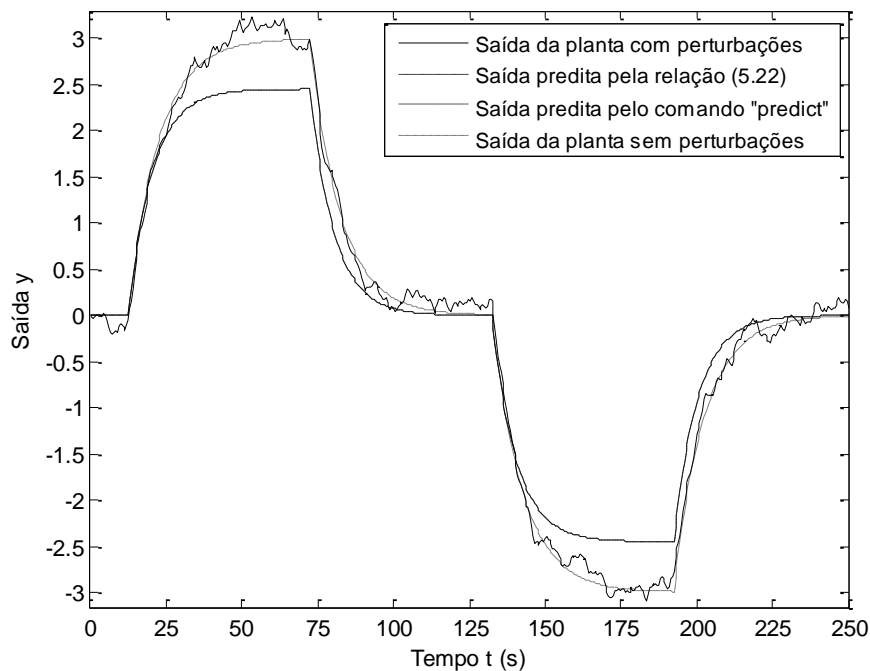


Fig. 5.39 Resposta do preditor infinitos passos à frente com modelo incorreto e saída do processo afetada por perturbações de baixa intensidade.

A resposta do preditor infinitos passos à frente, vista na Figura 5.39, é muito semelhante à do preditor com passos à frente, mostrada na Figura 5.35. Na Figura 5.40 mostra-se a resposta do preditor infinitos passos à frente quando aplicado à planta afetada por perturbações de alta intensidade.

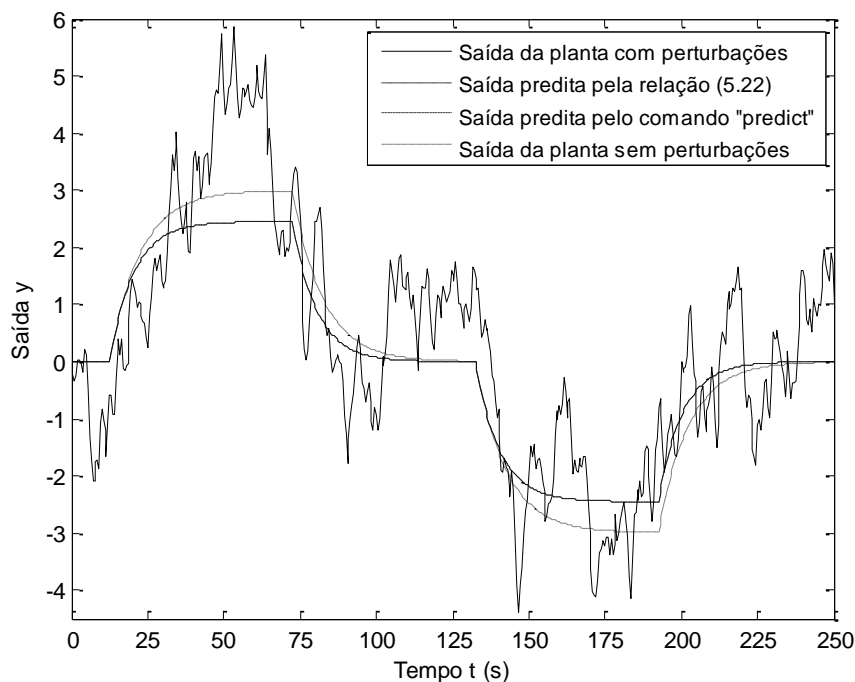


Fig. 5.40 Resposta do preditor infinitos passos à frente com modelo incorreto e saída do processo afetado por perturbações de alta intensidade.

A Figura 5.40 mostra que a saída predita se assemelha muito mais à saída da planta sem perturbações do que à saída da planta com perturbações, caracterizando a simulação livre, em que o modelo usado é apenas o do processo (G).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas** – técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. 4.ed. Belo Horizonte, Editora UFMG, 2015.
- ÅSTRÖM, K. J. **Introduction to stochastic control theory**. New York, Academic Press, 1970.
- LJUNG, L. **System identification: theory for the user**. 2.ed. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1999.
- SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. **System identification**. Hemel Hempstead, U.K., Prentice Hall International, 1989.