CAPÍTULO 2

MODELOS DE SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO

Apresenta-se, neste capítulo, a representação de modelos de processos na forma de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT). Eles representam idealizações dos processos encontrados na prática. Mas, normalmente, essas aproximações geram bons resultados (LJUNG, 1999). Um sistema linear invariante no tempo pode ser descrito, dentre outras formas, por sua resposta ao impulso ou por sua equivalente função de transferência.

Seja um sistema com um sinal de entrada $u(t)$ e um sinal de saída $y(t)$. Ele é dito **invariante no tempo** se sua resposta a um certo sinal de entrada, partindo-se sempre das mesmas condições iniciais, for sempre a mesma, independente do tempo em que o sinal de entrada ocorrer. Ele é dito **linear** se sua saída a uma combinação linear de entradas é a mesma combinação linear das saídas para cada entrada individual (efeito da sobreposição). Ele é dito **causal** se a saída em um determinado instante depende da entrada apenas até aquele instante.

2.1 RESPOSTA AO IMPULSO E FUNÇÃO PESO

Mostra-se, nesta seção, a representação de processos lineares através de sua resposta ao impulso.

A função de transferência $G(s)$ de um sistema causal, linear e invariante no tempo (SLIT) é:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

onde $U(s)$ é a transformada de Laplace da entrada e $Y(s)$ é a transformada de Laplace da saída. Assim, a saída $Y(s)$ pode ser obtida como o produto de $G(s)$ e $U(s)$:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \tag{2.1}$$

A saída (resposta) de um sistema a uma entrada impulso unitário $[U(s) = 1]$, quando as condições iniciais são nulas, é dada por:

$Y(s) = G(s)$

A transformada inversa de Laplace da saída deste sistema é a função resposta ao impulso:

$y(t) = g(t) =$ função resposta ao impulso=função peso (*weighting function*) do sistema

A função peso incorpora as propriedades físicas internas do sistema. Desta forma, é possível obter uma informação completa sobre as características dinâmicas do sistema, excitando-o com uma entrada impulsiva e medindo-se a sua resposta.

EXEMPLO

Seja o sistema linear dado pela seguinte equação diferencial ordinária de 1ª ordem:

$\tau \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t) \qquad y(0) = 0 \qquad u(t) = 0$ para $t < 0$

Sua função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau \cdot s + 1}$$

Caso se aplique no instante $t = 0$ uma excitação do tipo impulso unitário a este sistema, resulta:

$$y(t) = \frac{K}{\tau}\, \mathrm{e}^{-t/\tau} = g(t)$$

Esta equação representa a resposta livre ou natural do sistema e caracteriza totalmente um sistema linear invariante no tempo, sendo intitulada função peso do sistema.

Para uma excitação do tipo degrau unitário aplicada em $t = 0$ tem-se que:

$y(t) = K \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad$ para $t \geq 0$

Esta equação corresponde à resposta total do sistema, dada pela soma da resposta livre com a resposta forçada. Nota-se que a resposta livre do sistema, representada neste caso por uma exponencial decrescente, se manifesta na resposta ao degrau, de forma transitória, predominando ao longo do tempo a resposta forçada. Vide o Apêndice A para maiores detalhes sobre resposta livre, resposta forçada e resposta total de um SLIT.

2.1.1 Integrais de convolução em tempo contínuo

A resposta de um sistema linear invariante no tempo, causal, com condições iniciais nulas e $u(t) = 0$ para $t < 0$, pode ser descrita pela sua resposta ao impulso ou função peso do sistema $g(\tau)$, através de uma integral de convolução. Como a multiplicação no domínio complexo é equivalente à convolução no domínio do tempo, a transformada inversa de Laplace da Equação (2.1) é dada pela seguinte integral de convolução:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau) \cdot u(t - \tau)\, d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} g(t - \tau) \cdot u(\tau)\, d\tau \qquad (2.2)$$

Tem-se que $g(t-\tau)=0$ para $\tau > t$. Caso $u(t)$ seja a função impulso unitário, vale:

$u(t)=\delta(t)$ delta de Dirac

$\delta(t)=0$ (para $t \neq 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

A seguir listam-se algumas das propriedades da função impulso ou função delta de Dirac (BORRIE, 1992):

a. quando o impulso ocorre no instante $t=\tau$, sua representação é dada por:

$\delta(t-\tau)$

b. se $f(t)$ é contínua em $t=\tau$ então:

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\, d\tau = f(t)$$

c. para uma função degrau unitário em $t=\tau$ representada por $H(t-\tau)$ tem-se:

$$\frac{d[H(t-\tau)]}{dt} = \delta(t-\tau)$$

Se $u(t)=\delta(t)$ em (2.2) e as condições iniciais são nulas, então pela propriedade "b" do parágrafo anterior, tem-se que a resposta ao impulso unitário é dada por:

$$y(t)=\int_{\tau=0}^{\infty} g(t-\tau)\cdot\delta(\tau)\, d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\, d\tau = g(t)$$

Conhecendo-se $\{g(\tau)\}_{\tau=0}^{\infty}$ e $u(r)$ para $r \le t$, pode-se computar a saída correspondente $y(r)$ ($r \le t$) para qualquer entrada. A resposta ao impulso é assim uma caracterização completa do sistema (LJUNG, 1999).

2.1.2 Discretização da integral de convolução

Na prática, uma entrada em forma de pulso, cuja duração seja muito curta frente às constantes de tempo dominantes do sistema, pode ser encarada como impulsiva (OGATA, 2001). Assim, pode-se aproximar uma função impulso por uma função pulso de grande amplitude e de duração pequena, cuja área equivale à magnitude da função impulso. Se a função de entrada $u(t)$ for uma função pulso unitário com amplitude $1/T$ e largura *T*, que ocorre em $t=0$ e dura até $t=T$, então a seguinte integral de convolução, dada em (2.2):

$$y(t)=\int_{\tau=0}^{\infty} g(t-\tau)\cdot u(\tau)\, d\tau$$

torna-se:

$$y(t)=\int_{\tau=0}^{T} \frac{1}{T}\, g(t-\tau)\, d\tau \cong g(t)$$

para *T* suficientemente pequeno.

Por outro lado, se $u(t)$ for uma função pulso unitário com amplitude $1/T$ e largura *T*, que ocorra em $t = j \cdot T$ e dure até $t = (j+1) \cdot T$ (a entrada é nula em qualquer outra parte), então a integral de convolução é dada por:

$$y(t) = \int_{\tau = j \cdot T}^{(j+1) \cdot T} \frac{1}{T} \, g(t-\tau) \, d\tau \cong g(t - j \cdot T) \tag{2.3}$$

ou, equivalentemente, um pulso unitário que ocorra em $t = (j-1) \cdot T$ e dure até $t = j \cdot T$:

$$y(t) = \int_{\tau = (j-1) \cdot T}^{j \cdot T} \frac{1}{T} \, g(t-\tau) \, d\tau \cong g(t - (j-1) \cdot T) \tag{2.4}$$

para *T* suficientemente pequeno (OGATA, 2001).

O tempo *T* é chamado de **intervalo de amostragem** (*sampling time*). É possível considerar o caso em que os instantes de amostragem não sejam igualmente distribuídos.

Normalmente, em aplicações de controle digital ou de aquisição digital de dados, o sinal de entrada $u(t)$ para o processo, correspondente à saída de um conversor D/A (digital para analógico), é mantido constante entre dois instantes sucessivos de amostragem, graças à presença do conversor D/A, que funciona como um segurador de ordem zero (*zero order hold*):

$$u(t) = u(j \cdot T) \qquad j \cdot T \le t < (j+1) \cdot T \tag{2.5}$$

Pode-se considerar $u(t)$ como uma entrada na forma de pulso. Seja agora o sistema cuja função peso seja $g(t)$. A entrada $u(t)$ começa em $t = 0$ e dura até $t = t_1$. Busca-se uma resposta desse sistema a uma excitação qualquer $u(t)$, usando uma aproximação para a integral de convolução dada em (2.2). A entrada $u(t)$ pode ser aproximada por uma sequência de *N* funções pulso, cuja duração seja *T*, onde $T = t_1 / N$. Se *T* é suficientemente pequeno quando comparado com a menor constante de tempo do sistema, então um pulso pode ser considerado um impulso cuja magnitude seja a área $u(j \cdot T) \cdot T$, caso se considere que o pulso dure desde $t = j \cdot T$ até $t = (j+1) \cdot T$ ou então $u((j-1) \cdot T) \cdot T$, caso se considere que o pulso dure desde $t = (j-1) \cdot T$ até $t = j \cdot T$. Seja então uma entrada em pulso aplicada em $t = j \cdot T$ e que dure até $t = (j+1) \cdot T$ aplicada na Equação (2.2):

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau) \cdot u(t-\tau) \, d\tau = \int_{\tau = j \cdot T}^{(j+1) \cdot T} g(\tau) \cdot u(t-\tau) \, d\tau =$$

$$= \left(\int_{\tau = j \cdot T}^{(j+1) \cdot T} g(\tau) \, d\tau \right) \cdot \underbrace{u(t - j \cdot T) \cdot T}_{\substack{\text{Área do pulso} \\ \text{na entrada}}} = g_T(j \cdot T) \cdot u(t - j \cdot T) \cdot T \tag{2.6}$$

onde se definiu (LJUNG, 1999):

$$g_T(j \cdot T) = \int_{\tau = j \cdot T}^{(j+1) \cdot T} g(\tau) \, d\tau$$

A sequência $\{g_T(j \cdot T)\}_{j=0}^{\infty}$ é chamada de resposta ao impulso, resposta impulsiva ou função peso desse sistema. Caso se considere que a função peso seja obtida por meio de um sistema digital de aquisição de dados, ela é medida apenas em intervalos de amostragem *T*. Neste caso, analogamente a (2.5), considera-se que:

$$g(t) = g(j \cdot T) \qquad j \cdot T \le t < (j+1) \cdot T \tag{2.7}$$

Assim, a resposta a um pulso de número $j-1$, com amplitude $u(j \cdot T)$, duração *T* e área $u(j \cdot T) \cdot T$, aplicado no instante $t = j \cdot T$ e permanecendo até $t = (j+1) \cdot T$, aplicado a uma função impulsiva amostrada como sugerido em (2.7), gera a seguinte equação, originada de (2.6):

$$y(t) = g(j \cdot T) \cdot u(t - j \cdot T) \cdot T = g(t - j \cdot T) \cdot u(j \cdot T) \cdot T \tag{2.8}$$

A segunda parte desta resposta corresponde ao produto da área do pulso pela função resposta ao impulso atrasada de $j \cdot T$.

Mesmo que a entrada não seja constante por segmentos e sujeita a (2.5), a representação (2.8) ainda é uma aproximação razoável, desde que $u(t)$ não varie muito durante um intervalo de amostragem. Pode-se também escrever (2.8) para o *j*-ésimo pulso ocorrendo entre $t = (j-1) \cdot T$ até $t = j \cdot T$:

$$y(t) = g((j-1) \cdot T) \cdot u(t - (j-1) \cdot T) \cdot T = g(t - (j-1) \cdot T) \cdot u((j-1) \cdot T) \cdot T \tag{2.9}$$

Neste livro se lida com dados de entradas e saídas em tempo discreto, pois esse é o modo típico de se obter dados para identificar sistemas. Assume-se então que, assim como $u(t)$, $y(t)$ também seja medido nos instantes de amostragem $t_k = k \cdot T$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, isto é, ambos são coletados com um mesmo período de amostragem. De (2.8) resulta:

$$y(k \cdot T) = g(j \cdot T) \cdot u(k \cdot T - j \cdot T) \cdot T = g(k \cdot T - j \cdot T) \cdot u(j \cdot T) \cdot T \tag{2.10}$$

A expressão (2.10) mostra qual é a saída $y(k \cdot T)$ nos instantes de amostragem. Perceba que nenhuma aproximação é envolvida se a entrada é sujeita à expressão (2.5) e que é suficiente conhecer a sequência $\{g(j \cdot T)\}_{j=0}^{\infty}$, para se computar a resposta à entrada $u(j \cdot T)$. A relação (2.10) descreve um sistema de dados amostrados (LJUNG, 1999). A Equação (2.10) pode também ser escrita a partir de (2.9):

$$y(k \cdot T) = g((j-1) \cdot T) \cdot u(k \cdot T - (j-1) \cdot T) \cdot T = g(k \cdot T - (j-1) \cdot T) \cdot u((j-1) \cdot T) \cdot T \tag{2.11}$$

Como o sistema em questão é linear, o princípio da superposição se aplica. Assim, considerando a expressão (2.10), a resposta $y(t)$ do sistema, não a um único pulso, mas a toda a sequência de *N* funções pulso, é dada pelo seguinte somatório de convolução:

$$y(k \cdot T) = \sum_{j=0}^{N-1} g(j \cdot T) \cdot u(k \cdot T - j \cdot T) \cdot T = \sum_{j=0}^{N-1} g(k \cdot T - j \cdot T) \cdot u(j \cdot T) \cdot T \tag{2.12}$$

ou, considerando-se a expressão (2.11):

$$y(k\cdot T)=\sum_{j=1}^{N} g((j-1)\cdot T)\cdot u(k\cdot T-(j-1)\cdot T)\cdot T=\sum_{j=1}^{N} g(k\cdot T-(j-1)\cdot T)\cdot u((j-1)\cdot T)\cdot T \tag{2.13}$$

onde $g(\tau)=0$ para $\tau<0$. As equações (2.12) ou (2.13) fornecem a resposta no instante *t*. Note que como $g(\tau)=0$ para $\tau<0$, a resposta não precede a entrada.

Expandindo-se o somatório de convolução de (2.12), chega-se a:

$y(0)=g(0)\cdot u(0)\cdot T$ (valor da saída válido no intervalo $0\le t<T$)

$y(T)=[g(0)\cdot u(T)+g(T)\cdot u(0)]\cdot T$ (valor da saída válido no intervalo $T\le t<2T$)

$y(2T)=[g(0)\cdot u(2T)+g(T)\cdot u(T)+g(2T)\cdot u(0)]\cdot T$ (valor da saída no intervalo $2T\le t<3T$)

$$\vdots$$

$$y((N-1)\cdot T)=\left[\sum_{j=0}^{N-1} g((N-1-j)\cdot T)\cdot u(j\cdot T)\right]\cdot T=\left[\sum_{j=1}^{N} g((N-j)\cdot T)\cdot u((j-1)\cdot T)\right]\cdot T$$

(valor da saída válido no intervalo $(N-1)\cdot T\le t<N\cdot T$)

Como em um processo dinâmico a sua resposta depende da história da(s) entrada(s), o que se deduz das Equações (2.12) ou (2.13) é que leva algum tempo para o efeito pleno de cada ação $u(j\cdot T)$ ou $u((j-1)\cdot T)$ na entrada ser totalmente manifestado na saída. A implicação imediata é que não é possível obter o *quadro total* dos efeitos de entradas previamente aplicadas, analisando-se apenas a saída atual do processo.

Na maioria das vezes, se adotará *T* unitário e se usará *t* para enumerar o instante de amostragem ao invés de *k*. Ao se assumir *T* como unitário presume-se que a unidade de tempo da identificação passe a ser o valor de *T*. Assim, por exemplo, se o intervalo de amostragem *T* for de 100 ms, assume-se que a unidade de tempo da identificação corresponda a esse valor. Substitui-se então (2.12) por:

$$y(t)=\sum_{j=0}^{N-1} g(j)\cdot u(t-j)=\sum_{j=0}^{N-1} g(t-j)\cdot u(j) \qquad t=0,1,2,3,\ldots \tag{2.14}$$

Resulta que a resposta a uma entrada qualquer $u(t)$ de um sistema em tempo discreto em que se conheça sua resposta ao pulso $g(t)$ seja dada por (2.14).

Observa-se que na expressão (2.14) não se considerou o somatório tendendo a ∞, como seria a tendência caso se analisasse a Equação (2.2). Na prática, pode-se aproximar a saída $y(t)$ do sistema, empregando-se uma integral de convolução de 0 a *t* ao invés de 0 a ∞, conhecendo-se $g(t)$ apenas em um intervalo finito de tempo. Isto é possível para sistemas lineares invariantes no tempo, estáveis e sem integradores (CAMACHO; BORDONS, 2004). Portanto, adaptando-se (2.2) a esta proposta, resulta:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(t-\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau = \int_{\tau=0}^{t} g(t-\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau = \int_{\tau=0}^{t} g(\tau)\cdot u(t-\tau)\,d\tau$$

Deve-se ainda considerar os níveis de discretização (resolução do conversor A/D). Esses conversores são disponíveis com resolução de 8, 10, 12, 14 e 16 bits. Deve-se considerar que o erro de discretização é calculado de acordo com a seguinte equação:

$$\text{erro na discretização} = \frac{LSB}{2}$$

onde $LSB = FSR/2^n$ (*Least Significant Bit*), sendo *FSR* (*Full Scale Range*) e *n* o número de bits do conversor.

Supõe-se que o erro na discretização dos sinais seja muito menor que o ruído de medição e o efeito das perturbações, de modo que as amplitudes quantizadas dos sinais podem ser consideradas contínuas. Isto, na prática, com a resolução atualmente empregada nos conversores A/D é totalmente verdadeiro. Considere, apenas a título de exemplo, que se empregue um conversor A/D com resolução de 14 bits. Neste caso, a amplitude do sinal analógico na entrada será discretizada em 2^{14} níveis, isto é, em 16.384 patamares, o que, em termos práticos, é um sinal contínuo em amplitude.

2.2 Representação de um sistema por sua função de transferência discreta

Mostra-se, nesta seção, a representação de processos lineares através de sua função de transferência discreta.

É conveniente inserir uma notação mais sucinta para o somatório da Expressão (2.14). Introduz-se então o operador de deslocamento para trás (*backward shift operator*) ou de retrocesso q^{-1} dado por:

$$q^{-1}u(t) = u(t-1)$$

Pode-se então escrever (2.14) na forma (LJUNG, 1999):

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} g(j)\cdot u(t-j) = \sum_{j=0}^{N-1} g(j)\cdot\left(q^{-j}u(t)\right) = \left[\sum_{j=0}^{N-1} g(j)\cdot q^{-j}\right]\cdot u(t) = G(q)\cdot u(t) \tag{2.15}$$

onde se introduziu a notação:

$$G(q) = \sum_{j=0}^{N-1} g(j)\cdot q^{-j}$$

$G(q)$ é chamado **operador de transferência** ou **função de transferência**. A representação por função de transferência somente é válida para sistemas SLIT.

Pode-se colocar $G(q)$ na forma de uma função racional:

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} \tag{2.16}$$

que, substituída em (2.15), resulta:

$$A(q) \cdot y(t) = B(q) \cdot u(t) \tag{2.17}$$

onde: $A(q) = 1 + a_1 \cdot q^{-1} + a_2 \cdot q^{-2} + \cdots + a_{n_a} \cdot q^{-n_a}$

$B(q) = b_1 \cdot q^{-1} + b_2 \cdot q^{-2} + \cdots + b_{n_b} \cdot q^{-n_b}$

O primeiro coeficiente do polinômio $A(q)$ é fixado em 1 para unicidade do modelo. Este tipo de polinômio, com seu primeiro coeficiente unitário, é dito mônico. Tem-se que:

$$y(t) + a_1 \cdot y(t-1) + a_2 \cdot y(t-2) + \cdots + a_{n_a} \cdot y(t-n_a) = b_1 \cdot u(t-1) + b_2 \cdot u(t-2) + \cdots + b_{n_b} \cdot u(t-n_b) \tag{2.18}$$

Em (2.18) a saída *y* é considerada até o instante atual *t*, ao passo que a entrada *u* é considerada até o instante $t-1$. Isto ocorre porque se assume, como citado no parágrafo que antecede a Equação (2.5), a presença de um segurador de ordem zero, o qual impõe um atraso de 1 intervalo de amostragem entre o sinal de saída do processo $y(t)$ com relação a seu sinal de entrada $u(t)$. Isto pode ser facilmente visualizado, caso se considere a função de transferência discreta de um processo operando em conjunto com um sistema digital de controle ou de aquisição de dados que contenha um segurador de ordem zero:

$$HG(z) = \mathrm{Z}[H(s) \cdot G(s)] \tag{2.19}$$

onde: $HG(z) =$ função de transferência do conjunto processo mais segurador de ordem zero

$H(s) =$ função de transferência do segurador de ordem zero

$G(s) =$ função de transferência do processo em tempo contínuo

Sabe-se que:

$$H(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \mathrm{e}^{-T \cdot s}\right) \tag{2.20}$$

Substituindo-se (2.20) em (2.19):

$$HG(z) = \mathrm{Z}\left[\frac{1}{s}\left(1 - \mathrm{e}^{-T \cdot s}\right) \cdot G(s)\right] = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \mathrm{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \tag{2.21}$$

Caso se considere, por exemplo, que $G(s)$ seja um sistema de 1ª ordem:

$$G(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1} \tag{2.22}$$

Substituindo-se (2.22) em (2.21):

$$HG(z) = K \cdot \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \mathrm{Z}\left[\frac{1}{s \cdot (\tau \cdot s + 1)}\right]$$

Calculando-se a transformada Z, resulta:

$$HG(z)=\frac{K\cdot\left(1-e^{-T/\tau}\right)\cdot z^{-1}}{1-e^{-T/\tau}\cdot z^{-1}} \tag{2.23}$$

Caso se calculasse a transformada Z apenas de $G(s)$, resultaria:

$$G(z)=\mathrm{Z}[G(s)]=\frac{K}{\tau}\,\frac{1}{1-e^{-T/\tau}\cdot z^{-1}} \tag{2.24}$$

Comparando-se (2.23) com (2.24), nota-se que (2.23) possui um atraso z^{-1} que (2.24) não tem, justamente devido à presença do segurador de ordem zero. Isto comprova a existência de um atraso de um intervalo de amostragem entre $y(t)$ e $u(t)$ em (2.17). Portanto, considera-se que haja um atraso de um intervalo de amostragem, dado por T, entre a atuação de uma entrada e seu efeito na saída. A função de transferência discreta resultante da equação de diferenças (2.17) é dada por:

$$G(q)\overset{\Delta}{=}\frac{B(q)}{A(q)}=\frac{b_1\cdot q^{-1}+b_2\cdot q^{-2}+b_3\cdot q^{-3}+\cdots+b_{n_b}\cdot q^{-n_b}}{1+a_1\cdot q^{-1}+a_2\cdot q^{-2}+\cdots+a_{n_a}\cdot q^{-n_a}}=\frac{y(t)}{u(t)} \tag{2.25}$$

Assim, para sistemas lineares invariantes no tempo estáveis e sem integradores, a saída (resposta) para condições iniciais nulas a uma entrada pulso unitário $u(t)=\delta(t)$ é dada por $g(t)=y(t)$, que é a **resposta impulsiva** ou **resposta ao pulso** ou ainda **função peso** do sistema. Esta resposta fornece as mesmas informações sobre o processo que a função de transferência $G(q)$. Conclui-se que a resposta impulsiva e a função de transferência contêm o mesmo tipo de informação acerca da dinâmica do sistema. Dessa forma, pode-se utilizar para definir o comportamento dinâmico de um sistema tanto sua função de transferência quanto sua resposta impulsiva, pois os resultados obtidos são os mesmos.

A função de transferência de um sistema causal, linear, invariante no tempo, no domínio z é normalmente chamada de **função de transferência discreta** $G(z)$ (em Inglês, o termo normalmente usado é *pulse transfer function*). Ela é definida como a razão das transformadas Z da saída e da entrada da equação de diferenças, a partir de condições iniciais nulas. Percebe-se que se pode chegar a $G(z)$ a partir de (2.25), caso se efetue a substituição $z=q$. Na literatura relativa à Identificação de Sistemas, emprega-se o operador de atraso q^{-1} pois z^{-1}, a rigor, não é um operador, mas sim o inverso de uma variável complexa. Além disso, $G(q)$ é uma representação no domínio do tempo ao passo que $G(z)$ é uma representação no domínio da frequência (AGUIRRE, 2015).

Sabe-se que $z=e^{T\cdot s}$. Para se realizar a análise em frequência, faz-se $s=\mathrm{j}\cdot\omega$, portanto $z=e^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot T}$, que corresponde aos pontos do plano z sobre o círculo de raio unitário. Caso se avalie a função de transferência sobre esse círculo, então $G\left(e^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot T}\right)$ é denominada de resposta em frequência do processo.

A designação função de transferência é válida para sistemas SISO. Caso se tenha um sistema com mais de uma entrada ou mais de uma saída ou ambos, emprega-se a denominação matriz de transferência.

2.3 EXEMPLOS DE MODELOS REPRESENTADOS POR RESPOSTA IMPULSIVA E POR FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Nas subseções seguintes são apresentados exemplos de modelos representados por resposta impulsiva e por função de transferência.

2.3.1 Obtenção da função de transferência discreta a partir da resposta impulsiva do sistema

EXEMPLO 1

Um modelo de um processo sem ruído foi obtido experimentalmente, na forma de uma tabela, como resultado de uma excitação do tipo pulso unitário (modelo não paramétrico) aplicado no instante $t = 0$. Sejam os seguintes valores da resposta, coletados com intervalo de amostragem de 0,5 s:

$$\{y(t)\} = \{g(t)\} = \{0;\ 1;\ 0{,}80;\ 0{,}64;\ 0{,}512;\ 0{,}4096;\ 0{,}32768;\ 0{,}26214;\ 0{,}20972;\ 0{,}16777;\ \cdots\}$$

Portanto, dispõe-se da resposta impulsiva do processo. Deseja-se saber qual a resposta deste sistema a uma entrada qualquer $u(t)$. Para calcular esta resposta deve-se empregar a convolução entre $g(t)$ e $u(t)$:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{t} g(t-j)\cdot u(j) = \sum_{j=0}^{t} g(j)\cdot u(t-j)$$

Suponha que a entrada $u(t)$ seja um degrau unitário aplicado no instante $t = 0$:

$$\{u(t)\} = \{1, 1, 1, 1, 1, \cdots\}$$

Resulta:

$$y(0) = \sum_{j=0}^{0} g(0-0)\cdot u(0) = g(0)\cdot u(0) = 0\cdot 1 = 0$$

$$y(1) = \sum_{j=0}^{1} g(1-j)\cdot u(j) = g(1)\cdot u(0) + g(0)\cdot u(1) = 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1$$

ou, equivalentemente:

$$y(1) = \sum_{j=0}^{1} u(1-j)\cdot g(j) = u(1)\cdot g(0) + u(0)\cdot g(1) = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$$

$$y(2) = \sum_{j=0}^{2} g(2-j)\cdot u(j) = g(2)\cdot u(0) + g(1)\cdot u(1) + g(0)\cdot u(2) = 0{,}8\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1{,}8$$

$$y(3)=\sum_{j=0}^{3} g(3-j)\cdot u(j)=g(3)\cdot u(0)+g(2)\cdot u(1)+g(1)\cdot u(2)+g(0)\cdot u(3)=$$

$$=0{,}64\cdot 1+0{,}8\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1=2{,}44$$

$$\vdots$$

Portanto:

$$\{y(t)\}=\{0;\ 1;\ 1{,}8;\ 2{,}44;\ \cdots\}$$

Suponha agora que se deseje encontrar a expressão analítica no domínio z equivalente da sequência apresentada no início deste exemplo, bem como a equação de diferenças que a represente. Seja então:

$$\{y(t)\}=\{g(t)\}=\{0;\ 1;\ 0{,}8;\ 0{,}64;\ 0{,}512;\ 0{,}4096;\ 0{,}32768;\ 0{,}26214;\ 0{,}20972;\ 0{,}16777;\ \cdots\}$$

Para tal, propõe-se empregar a definição de transformada Z:

$$Y(z)=\sum_{t=0}^{\infty} y(t)\cdot z^{-t}=z^{-1}+0{,}8\cdot z^{-2}+0{,}64\cdot z^{-3}+0{,}512\cdot z^{-4}+0{,}4096\cdot z^{-5}+\cdots$$

$$Y(z)=\frac{1}{z}+\frac{0{,}8}{z^2}+\frac{0{,}64}{z^3}+\frac{0{,}512}{z^4}+\frac{0{,}4096}{z^5}+\cdots$$

$$Y(z)=\frac{1}{z}\left(1+\frac{0{,}8}{z}+\frac{0{,}64}{z^2}+\frac{0{,}512}{z^3}+\frac{0{,}4096}{z^4}+\cdots\right)$$

O termo entre parêntesis se trata de uma progressão geométrica com razão $0{,}8/z$. Portanto, a expressão no domínio z que representa a sequência dada é:

$$Y(z)=z^{-1}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{0{,}8}{z}}\right)=z^{-1}\cdot\left(\frac{z}{z-0{,}8}\right)=\frac{1}{z-0{,}8}=\frac{z^{-1}}{1-0{,}8\cdot z^{-1}} \qquad (2.26)$$

Calculando-se a transformada Z inversa:

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{z\cdot(z-0{,}8)}=\frac{K_1}{z}+\frac{K_2}{z-0{,}8}$$

Resulta:

$$Y(z)=-1{,}25+1{,}25\,\frac{z}{z-0{,}8}$$

Portanto, a expressão analítica que descreve a sequência dada é:

$$y(t)=\mathrm{Z}^{-1}[Y(z)]=-1{,}25\cdot\delta(t)+1{,}25\cdot(0{,}8)^t=(0{,}8)^{t-1}-1{,}25\cdot\delta(t) \qquad t=0,1,2,\ldots$$

Testando-se esta expressão:

$$y(0)=0 \qquad y(1)=1 \qquad y(2)=0{,}8 \qquad y(3)=0{,}64 \qquad y(4)=0{,}512 \quad \ldots$$

Para calcular a equação de diferenças, deve-se considerar que a expressão obtida no domínio z para descrever a sequência dada pode ser convertida em uma função de transferência, tendo em vista que se sabe que a sequência fornecida foi gerada através de uma excitação impulsiva aplicada em $t=0$. Portanto, de (2.26), como $U(z)=1$, resulta:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - 0{,}8 \cdot z^{-1}} \tag{2.27}$$

$$\left(1 - 0{,}8 \cdot z^{-1}\right) \cdot Y(z) = z^{-1} \cdot U(z)$$

Desfazendo-se a transformada Z para retornar ao domínio do tempo discreto:

$$y(t) - 0{,}8 \cdot y(t-1) = u(t-1) \tag{2.28}$$

Assim, a sequência dada foi obtida de um processo descrito por esta equação de diferenças. Como a entrada é um pulso unitário aplicado no instante $t = 0$, calculando-se as primeiras saídas desta equação de diferenças, resulta:

$$y(0) = 0{,}8 \cdot y(t-1) + u(t-1) = 0$$

$$y(1) = 0{,}8 \cdot y(0) + u(0) = 1$$

$$y(2) = 0{,}8 \cdot y(1) + u(1) = 0{,}8$$

$$\vdots$$

EXEMPLO 2

Um modelo de um processo sem ruído foi obtido experimentalmente, como resultado de uma excitação do tipo pulso unitário aplicado em $t = 0$. Sejam os seguintes valores da resposta impulsiva do processo, com os dados coletados a cada 0,5 s:

$$\{y(t)\} = \{g(t)\} = \{0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}1463;\ 0{,}1392;\ 0{,}1324;\ 0{,}1259;\ 0{,}1198;\ 0{,}1139;\ 0{,}1084\ \cdots\}$$

Suponha que se deseje encontrar a equação de diferenças que a represente. Para tal, emprega-se a definição de transformada Z:

$$Y(z) = \sum_{t=0}^{\infty} y(t) \cdot z^{-t} = 0{,}1463 \cdot z^{-5} + 0{,}1392 \cdot z^{-6} + 0{,}1324 \cdot z^{-7} + 0{,}1259 \cdot z^{-8} + 0{,}1198 \cdot z^{-9} + \cdots$$

$$Y(z) = \frac{0{,}1463}{z^5} + \frac{0{,}1392}{z^6} + \frac{0{,}1324}{z^7} + \frac{0{,}1259}{z^8} + \frac{0{,}1198}{z^9} + \cdots$$

$$Y(z) = \frac{0{,}1463}{z^5} \left(1 + \frac{0{,}9512}{z} + \frac{0{,}9048}{z^2} + \frac{0{,}8606}{z^3} + \frac{0{,}8186}{z^4} + \cdots\right)$$

O termo entre parêntesis se trata de uma progressão geométrica com razão $0{,}9512/z$. Portanto, a expressão no domínio z que representa a sequência dada é:

$$Y(z) = z^{-5} \left(\frac{0{,}1463}{1 - \frac{0{,}9512}{z}}\right) = z^{-5} \left(\frac{0{,}1463 \cdot z}{z - 0{,}9512}\right) = \frac{0{,}1463 \cdot z^{-5}}{1 - 0{,}9512 \cdot z^{-1}} \tag{2.29}$$

Para calcular a equação de diferenças equivalente, como $U(z) = 1$, de (2.29) resulta:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0{,}1463 \cdot z^{-5}}{1 - 0{,}9512 \cdot z^{-1}} \tag{2.30}$$

$$\left(1 - 0{,}9512\ z^{-1}\right) \cdot Y(z) = 0{,}1463 \cdot z^{-5} \cdot U(z)$$

No domínio do tempo discreto tem-se que:

$$y(t) - 0{,}9512 \cdot y(t-1) = 0{,}1463 \cdot u(t-5) \qquad (2.31)$$

Portanto, a sequência dada foi obtida de um processo descrito por esta equação de diferenças. Caso se deseje calcular a função de transferência equivalente em tempo contínuo, pode-se aplicar o seguinte comando em Matlab, supondo-se a presença de um segurador de ordem zero no processo:

```
% Geração de f. t. em tempo contínuo a partir de f. t. discreta
num = [0.1463]; den = [1 -0.9512];
sysd = tf(num,den,0.5,'inputdelay',4);
sysc = d2c(sysd,'zoh');
```

Resulta a seguinte função de transferência em tempo contínuo:

$$G(s) = \frac{0{,}3 \cdot e^{-2 \cdot s}}{s + 0{,}1001} = \frac{2{,}997 \cdot e^{-2 \cdot s}}{9{,}99 \cdot s + 1}$$

2.3.2 Cálculo da resposta do sistema a uma entrada em degrau por meio da convolução

Deseja-se saber qual a resposta $y(t)$ do sistema do Exemplo 1 da Subseção 2.3.1 a uma entrada qualquer $u(t)$. Para se calcular esta resposta deve-se convoluir $g(t)$ com $u(t)$, aplicando-se a expressão (2.14). Suponha que a entrada $u(t)$ seja um degrau unitário aplicado no instante $t = 0$:

$$\{u(t)\} = \{1, 1, 1, 1, 1, \cdots\}$$

Conhecendo-se a expressão analítica da resposta impulsiva $g(t)$, calculada no Exemplo 1 da Subseção 2.3.1, um procedimento possível para realizar esta operação em Matlab é mostrado a seguir.

```
% Cálculo da saída por meio da convolução
clear all;
n=31;
for t=1:n,
   j(t) = t-1;
   u(t)=1;
   if t==1
      g(t)=0.8^(j(t)-1)-1.25;
   else
      g(t)=0.8^(j(t)-1);
```

```
    end
end
figure(1);
plot(j(1:n),g(1:n),'k.');
axis([-0.7 30.6 -0.03 1.02]);
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
y=conv(g,u);
figure(2);
plot(j(1:n),y(1:n),'k.');
axis([-0.7 30.6 -0.11 5.12]);
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
```

Os valores de $g(t)$ e $y(t)$ são mostrados, respectivamente, nas Figuras 2.1 e 2.2.

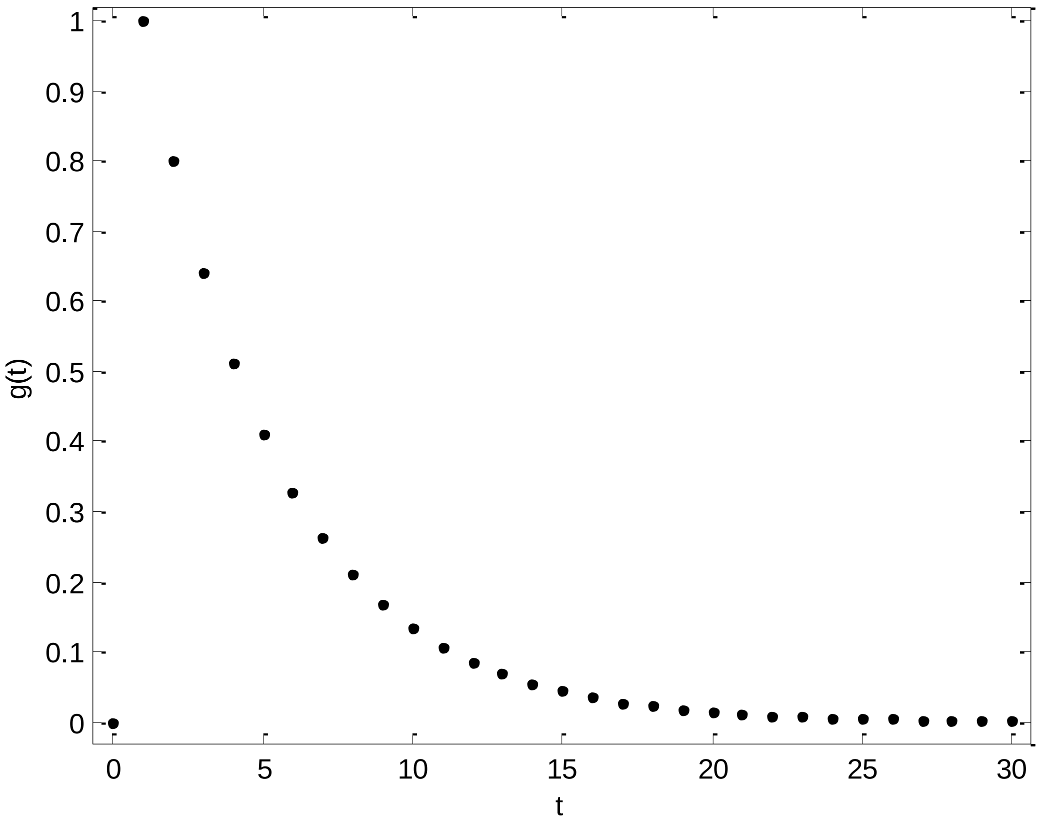

Fig. 2.1 Resposta impulsiva (função peso) $g(t)$.

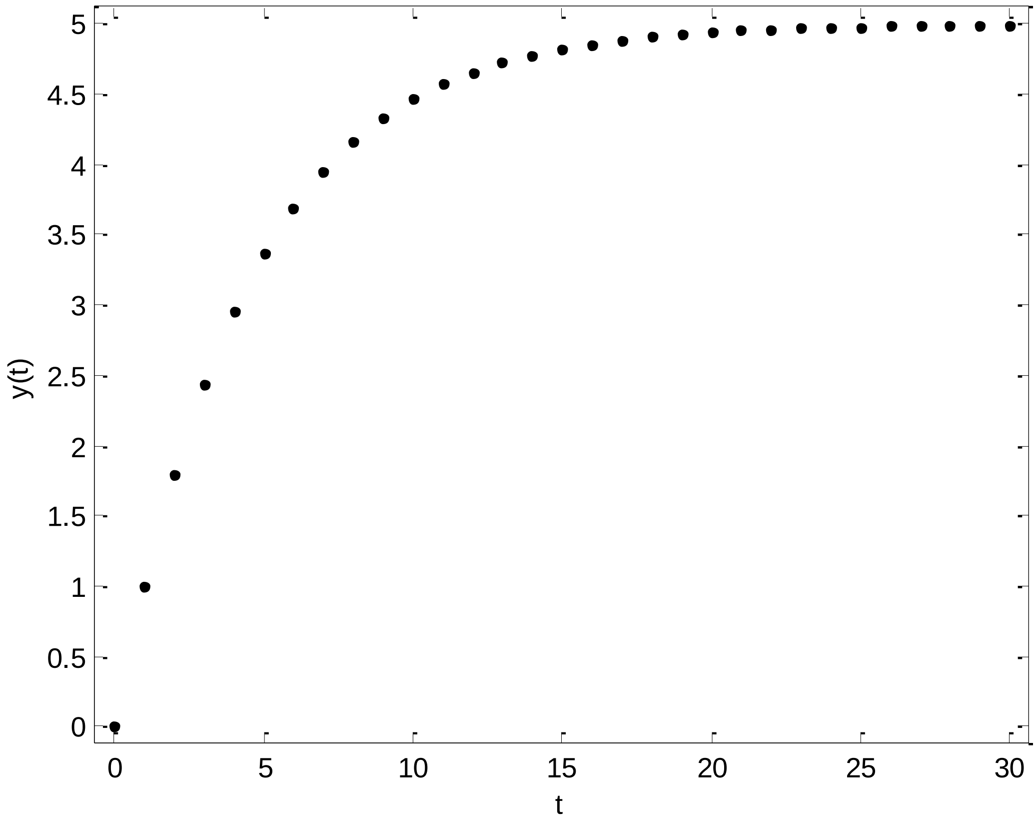

Fig. 2.2 Resposta de $y(t)$ ao degrau unitário.

Os primeiros valores da sequência são dados por:

$\{y(t)\} = \{0;\ 1;\ 1{,}8;\ 2{,}44;\ 2{,}9520;\ \cdots\}$

Na figura 2.2 nota-se que $y(t) \to 5$. Como o degrau aplicado foi unitário, isto implica que o ganho estacionário do processo deve ser 5. De fato, tomando-se a função de transferência discreta do sistema dada em (2.27) e fazendo-se $z \to 1$, resulta:

$$\lim_{z\to 1} G(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z^{-1}}{1 - 0{,}8 \cdot z^{-1}} = 5$$

2.3.3 Obtenção da expressão analítica da resposta impulsiva a partir da equação de diferenças do sistema

Seja uma equação de diferenças do tipo:

$y(t) + a \cdot y(t-1) = b \cdot u(t-1)$

Pede-se:

a. Sua função de transferência discreta equivalente.

b. A expressão analítica (em forma fechada) da resposta temporal para $t \geq 0$ ao pulso unitário aplicado no instante zero.

a. Calculando-se a transformada Z da equação de diferenças dada:

$$\left(1 + a \cdot z^{-1}\right) \cdot Y(z) = b \cdot z^{-1} \cdot U(z)$$

Sua função de transferência discreta é:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b \cdot z^{-1}}{1 + a \cdot z^{-1}} = \frac{b}{z + a}$$

b. Para calcular a resposta impulsiva $g(t)$ deste sistema, tem-se que $U(z) = 1$, portanto:

$$G(z) = Y(z) = \frac{b}{z + a}$$

Percebe-se, neste caso, que a resposta impulsiva do processo $Y(z)$ corresponde à sua própria função de transferência discreta $G(z)$. Calculando-se a transformada Z inversa desta expressão através do método da expansão em frações parciais, resulta:

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{b}{(z + a) \cdot z} = \frac{K_1}{z + a} + \frac{K_2}{z}$$

Calculando-se os resíduos K_1 e K_2 resulta:

$$\frac{G(z)}{z} = -\frac{b/a}{z + a} + \frac{b/a}{z}$$

Portanto:

$$G(z) = \frac{b}{a}\left(1 - \frac{z}{z + a}\right)$$

Aplicando-se a transformada Z inversa, resulta a seguinte resposta impulsiva:

$$g(t) = \mathrm{Z}^{-1}[G(z)] = \frac{b}{a}\left[\delta(t) - (-a)^t \cdot H(t)\right]$$

Calculam-se, a seguir, alguns pontos no tempo dessa resposta:

$$g(0) = 0 \qquad g(1) = b \qquad g(2) = -b \cdot a \qquad g(3) = b \cdot a^2 \qquad \ldots \qquad g(i) = (-1)^{i-1} \cdot b \cdot a^{i-1}$$

Suponha agora que $a = -0{,}8$ e $b = 1$. Então:

$$g(t) = 1{,}25 \cdot (0{,}8)^t - 1{,}25 \cdot \delta(t) = (0{,}8)^{t-1} - 1{,}25 \cdot \delta(t)$$

Calculando-se os primeiros valores da sequência, resulta:

$$g(0) = 0 \qquad g(1) = 1 \qquad g(2) = 0{,}8 \qquad g(3) = 0{,}64 \qquad g(4) = 0{,}512$$

Percebe-se que esta é a mesma sequência citada no Exemplo 1 da Subseção 2.3.1.

2.4 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES DE TEMPO DISCRETO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Supõe-se neste item, por simplicidade, que os processos não sejam afetados por ruídos ou perturbações. A representação em espaço de estados linear de um sistema em tempo discreto é feita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

onde: ***x***=vetor de estados do sistema

A=matriz de estados ***B***=matriz de entrada

C=matriz de saída ***D***=matriz de alimentação direta

A representação em espaço de estados é adequada tanto para sistemas SISO quanto MIMO. Existem infinitos conjuntos de variáveis de estado para representar um mesmo sistema. Qualquer combinação linear das variáveis de estado pode também ser usada como uma variável de estado.

A função de transferência discreta pode ser obtida a partir da descrição em espaço de estados, da seguinte forma:

$$G(q) = \boldsymbol{B} \cdot (q \cdot \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}$$

Para ilustrar a aplicação da representação em espaço de estados linear, considere a seguinte equação de diferenças:

$$x(t) + 3 \cdot x(t-1) + 2 \cdot x(t-2) = u(t-1)$$

Tem-se que:

$$x_1(t) = x(t)$$
$$x_2(t) = x(t-1)$$

Portanto:

$$x_1(t-1) = x_2(t)$$
$$x_2(t-1) = -\frac{1}{2}x_1(t) - \frac{3}{2}x_2(t) + \frac{1}{2}u(t-1)$$

A representação em espaço de estados fica:

$$\boldsymbol{x}(t-1) = \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} u(t-1)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas** – técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais. 4.ed. Belo Horizonte, Editora UFMG, 2015.

BORRIE, J. A. **Stochastic systems for engineers** - modelling, estimation and control. London, Prentice Hall, 1992.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Model predictive control in the process industry.** 2.ed. London, Springer, 2004.

LJUNG, L. **System identification:** theory for the user. 2.ed. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1999.

OGATA, K. **Modern control engineering.** 4.ed. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 2001.