

# CAPÍTULO 8

## PROJETO DE EXPERIMENTOS DE IDENTIFICAÇÃO

O projeto de um experimento de identificação inclui diversas escolhas, tais como quais sinais medir, quando medir, quais sinais manipular e como manipular. Deve-se considerar também como condicionar os sinais antes de amostrá-los, através de filtros de pré-amostragem e como (eventualmente) refinar os dados coletados, por exemplo, removendo tendências (LJUNG, 1999).

Um ponto crucial no projeto do experimento é que, enquanto a escolha da estrutura do modelo ou dos métodos de identificação é feita *off line*, em um computador, os dados experimentais só podem ser alterados através de um novo experimento, que normalmente é dispendioso e consome tempo. Portanto, compensa projetar o experimento cuidadosamente, de forma a gerar dados que sejam suficientemente informativos (LJUNG, 1999).

### 8.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS ACERCA DO PROJETO DE EXPERIMENTOS

Dessa forma, se o processo a ser identificado for não linear e busca-se um modelo linear para representá-lo, então o experimento deve ser realizado em torno do ponto nominal de operação da planta. Os experimentos devem ser realizados quando o processo esteja em um modo de operação próximo ao desejado e em regime próximo ao estacionário.

Em muitos casos, experimentos preliminares devem ser realizados para atingir o conhecimento necessário do processo para projetar experimentos apropriados. Nestes casos, é preferível usar a resposta ao degrau ou então análise de correlação, devido à simplicidade desses métodos. Os experimentos preliminares devem indicar (GUSTAVSSON, 1975):

- constantes de tempo majoritárias;
- tempo de acomodação ou estabilização (*settling time*);
- amplitude permitida das entradas;
- presença de não linearidades e variação temporal do processo;
- níveis de perturbação e ruído nas malhas; e
- atrasos puros (tempos mortos).

Essas informações podem ser usadas para o projeto de experimentos de identificação, o qual deve considerar os seguintes tópicos (GUSTAVSSON, 1975):

- escolha das variáveis de entrada e saída;
- excitação natural;
- sinal de entrada (forma, amplitude, espectro);
- taxa de amostragem;
- duração do experimento; e
- identificação em malha aberta ou fechada.

Todos os itens acima são abordados nas seções que se seguem, exceto o último, que é tratado em outro capítulo.

A faixa de operação que o modelo deve cobrir determina, em parte, a amplitude permitida do sinal de entrada e a escolha da estrutura do modelo. Um modelo linear que vá ser usado em controle regulatório em torno de um dado valor de referência requer um experimento com uma amplitude de entrada baixa o suficiente para que a linearização não seja violada. Por outro lado, se o objetivo for um modelo não linear, que possa ser usado em um controle de faixa ampla, o experimento deve cobrir toda a faixa de operação da planta.

Algumas vezes, a validação indica que o modelo obtido não é preciso o bastante. Isso pode ocorrer, por exemplo, devido a (GUSTAVSSON, 1975):

- amplitude insuficiente das entradas;
- sinais de entrada não persistentemente excitantes;
- frequência inadequada do sinal de entrada;
- estrutura de modelo não identificável; e
- duração do experimento muito curta.

Neste caso, um novo experimento é frequentemente a única forma de se obter um modelo mais preciso.

## **8.2 ESCOLHA DAS VARIÁVEIS DE ENTRADA E SAÍDA**

A primeira etapa no projeto de um experimento é definir quais sinais (variáveis) devem ser considerados como entradas e saídas. Uma regra simples é que as entradas sejam todas as variáveis que se possa ajustar e as saídas sejam as variáveis que se possa medir e que se relacionem com o fenômeno de interesse. Se o modelo é para ser usado em controle, as entradas e saídas devem ser as mesmas que sejam relevantes para o controlador. Isso implica que a dinâmica de válvulas e medidores deva ser parte do processo.

Esta etapa responde onde, no processo, os sensores que medem as variáveis de saída devem ser instalados e quais sinais devem ser manipulados (entradas), para excitar adequadamente o sistema durante o experimento. Deve-se ressaltar que pode haver sinais associados com o processo que devam ser considerados como entradas, no sentido que eles afetam o sistema, muito embora não seja possível ou permitido manipulá-los. Se eles são mensuráveis é então altamente desejável incluí-los entre os sinais de entrada medidos

e tratá-los como tal na geração dos modelos, embora, de um ponto de vista operacional, eles deveriam ser considerados como perturbações mensuráveis (LJUNG, 1999).

Quando se procura um modelo matemático que relacione dinamicamente uma variável de saída  $y(t)$  com uma de entrada  $u(t)$ , supõe-se que haja uma correlação significativa entre essas variáveis. Além disso, pressupõe-se que o sinal  $u(t)$  afete o sinal  $y(t)$ . Se tais variáveis forem invertidas, o modelo resultante precisaria ser não causal para satisfazer as restrições impostas pelos dados (AGUIRRE, 2015).

Há casos em que a escolha das variáveis de entrada e saída é muito simples, como quando se deseja implantar um sistema de controle em que já se conheçam as variáveis manipulada e controlada. Nestes casos, busca-se obter um modelo da planta, cujo sinal de entrada seja a saída do controlador ou variável manipulada e o sinal de saída seja a entrada do controlador ou variável controlada. No entanto, há sistemas onde as relações de causa e efeito não são tão óbvias. Por exemplo, em um sistema de tratamento de efluentes, há muitos sinais de entrada, mas nem todos são mensuráveis diretamente e o efeito deles sobre as saídas pode ser pouco conhecido. Há casos de sistemas multivariáveis em que é uma tarefa complicada estabelecer quais e quantas variáveis devam ser usadas para compor o modelo. Para auxiliar a definir as variáveis de entrada e saída nestes casos mais complexos, pode-se lançar mão de funções de correlação cruzada entre as entradas e as saídas, para verificar se há um acoplamento entre elas (AGUIRRE, 2015). A tese de doutorado de Jerônimo (2004) é dedicada a estudar formas de selecionar as variáveis de entrada de um modelo, onde ela estuda dois métodos existentes na literatura e propõe um novo método. Neste trabalho, há inclusive uma preocupação de se analisar a correlação cruzada entre as próprias variáveis de entrada, no sentido de se eliminar aquelas que estejam fortemente correlacionadas entre si, deixando apenas uma delas.

Esta etapa do projeto define “onde” e “o que” medir.

### 8.3 EXCITAÇÃO NATURAL

Os sinais de entrada influenciam muito os dados observados. Os sinais de entrada determinam o ponto de operação do sistema e quais partes e modos do sistema são excitados durante o experimento. A liberdade do usuário na escolha das características dos sinais de entrada pode variar com a aplicação. Em processos industriais pode não ser permitido manipular nenhuma variável de um sistema em operação. Para outros sistemas, como econômicos ou ecológicos, não é possível afetar o sistema visando um experimento de identificação. Em aplicações laboratoriais e de desenvolvimento, por outro lado, a escolha de entradas não é geralmente restrita, exceto pelos seus efeitos ou limitações de potência.

No caso de sistemas cujas entradas não possam ser manipuladas intencionalmente, usam-se perturbações naturais (identificação com dados históricos). Em situações como essas, há um sério problema devido a possíveis realimentações. A razão é que se uma cor-

relação entre a entrada medida e a saída é encontrada pela identificação, isso não necessariamente implica que haja uma relação de causalidade entre a entrada e a saída. Ao invés disso, ambas podem ser forçadas a variar por influência de outra variável, normalmente chamada de variável oculta (GUSTAVSSON, 1975).

Há casos em que a estimação de parâmetros deve ser feita através do uso de sinais (aleatórios) presentes no processo; em outros casos sinais de teste específicos com uma amplitude suficiente devem ser inseridos. No caso de processos industriais é normalmente desejável realizar algum tipo de experimento, observando-se as mudanças nas variáveis de saída do processo enquanto se perturbam as variáveis de entrada. Na prática, é comum haver limitações severas nos experimentos que possam ser realizados. Para se obter modelos realistas é comumente preciso realizar os experimentos durante a operação normal do processo. Isso significa que se o sistema for perturbado, as perturbações devem ser pequenas, de forma que a produção seja minimamente afetada (EYKHOFF, 1974). Assim, aconselha-se excitar as entradas, sempre que possível.

## 8.4 SINAIS DE ENTRADA

É de vital importância que o sinal de entrada excite todos os modos do processo, isto é, o processo deve ser **controlável** e os sinais de entrada devem ser de uma classe intitulada **persistentemente excitante**. O sinal de saída deve conter informações suficientes acerca do que esteja ocorrendo no processo, isto é, devem ser seguidos os preceitos de **observabilidade** e de **identificabilidade**. Dessa forma, a escolha dos **sinais de teste** é muito importante. Em situações em laboratório, sinais de teste longos ou periódicos podem frequentemente ser usados. Se sinais de teste não são permitidos, então se deve usar as perturbações disponíveis da melhor forma possível. Se apenas um pequeno sinal pode ser adicionado à entrada, então se deve considerar a relação sinal/ruído, a melhor escolha das características predeterminadas do sinal de teste etc (EYKHOFF, 1974).

Se perturbações de entrada são permitidas, a questão é como escolhê-las. Nesta etapa do projeto, define-se “como” e “quando” os sinais de entrada devem ser manipulados. A seleção de sinais de entrada pode essencialmente ser dividida em três subproblemas (GUSTAVSSON, 1975):

- forma;
- amplitude; e
- características em frequência.

Se um certo método, como a análise em frequência ou a análise transitória é usado, a forma da entrada é determinada pelo método. Em muitas situações, entradas em degrau ou senoidal não são adequadas por razões práticas, visto que elas levam a tempos longos de medição ou os sinais possuem um grande nível de ruído. Outros métodos não impõem restrições severas na forma da entrada. Na prática, os transdutores e atuadores podem restringir as opções. Por exemplo, eles não podem mudar seus valores instantaneamente.

Em geral, quanto maior for a amplitude da entrada, mais preciso é o modelo obtido. A variância das estimativas é frequentemente proporcional ao inverso da potência do sinal de entrada. Na prática, no entanto, existe o conflito entre a necessidade de um modelo preciso e a demanda de um produto gerado dentro das especificações. Uma regra prática é que para obter dados úteis para a identificação e uma precisão razoável, alguns efeitos das perturbações na entrada devam ser observáveis na saída. Além disso, a entrada é frequentemente limitada porque senão as hipóteses de linearidade seriam violadas, pois grandes sinais de entrada podem levar o sistema para fora da região linear e podem também causar variações inaceitavelmente grandes nas variáveis do processo (GUSTAVSSON, 1975).

Geralmente, a entrada varia em torno de um ponto de operação do processo. Na prática é interessante usar um sinal do tipo pulso binário, por exemplo, uma sequência binária pseudo-aleatória (*pseudo-random binary sequence* - PRBS). Tal sinal é fácil de gerar e também fácil de transduzir para o processo. Do ponto de vista teórico, esses sinais são atraentes. Um problema, neste caso, é como escolher o período para um sinal PRBS.

Uma regra simples, mas geral, relativa aos sinais de entrada pode ser formulada: escolha as condições experimentais que mais se assemelhem às condições em que o modelo será usado no futuro. Expresso de modo mais formal: deixe a entrada possuir sua maior energia na banda de frequências que seja de interesse para a aplicação pretendida do modelo (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Há diversas opções para criar uma solução adequada para escolher condições experimentais ótimas. Algumas vezes pode-se realizar um experimento em malha fechada, se a precisão do modelo deve ser otimizada sob variância limitada da saída. Se for preciso que o processo opere em malha aberta, então a entrada ótima pode ser gerada como uma soma de senoides. O número de senoides é igual ou maior à ordem do modelo. A seleção ótima da amplitude e frequência das senoides não é uma tarefa fácil, a qual depende dos parâmetros desconhecidos do sistema a ser identificado (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Para fornecer à resposta informações suficientes e para conseguir a identificabilidade, a entrada deve ser persistentemente excitante. Isso significa que todos os modos de interesse do processo devem ser excitados. Por exemplo, uma única onda senoidal não é geralmente suficiente. Para sistemas lineares, uma entrada variando ao longo do experimento e não tendo muito poucos componentes periódicos é suficiente.

Um requisito mínimo é que a dinâmica do processo seja persistentemente excitada pelo sinal de entrada ao longo da identificação. Isso leva ao requisito de “sinais de entrada persistentemente excitantes”. Esse é o caso se o sinal de entrada tiver densidade espectral de potência constante (ÅSTRÖM, 1967). Um requisito máximo seria que o sinal de entrada fosse construído para minimizar certos erros do modelo com respeito a ruído, restrições dos sinais de entrada/saída e tempo de medição. Isso leva a “sinais ótimos de entrada” (ISERMANN, 1980). O projeto de sinais de entrada ótimos não é explorado neste livro, podendo-se consultar (GOODWIN, 1987; MEHRA, 1981; YUAN; LJUNG, 1985 e ZARROP, 1979).

### 8.4.1 Sinais de entrada normalmente usados

O sinal de entrada em experimentos de identificação pode ter uma forte influência na estimativa dos parâmetros do modelo. Os sinais de entrada mais usados na prática são:

- degrau;
- RBS (*Random Binary Signal*);
- PRBS (*Pseudo-Random Binary Sequence*);
- GBN (*Generalized Binary Noise*);
- ruído branco filtrado (ruído colorido) ou processo ARMA (*Auto-Regressive Moving Average*); e
- soma de senoides.

Assume-se que o sistema a ser identificado seja amostrado no tempo, isto é, a entrada e a saída sejam registradas em tempo discreto. Na maioria dos casos, utilizam-se modelos em tempo discreto para descrever o sistema. Mesmo que a entrada varie de forma contínua no tempo, é suficiente descrevê-la em tempo discreto. Não se está interessado no comportamento da entrada durante os intervalos de amostragem.

#### a. Degrau

A resposta ao degrau fornece o tempo de subida, sobressinal, ganho estático e constantes de tempo dominantes. O usuário deve selecionar apenas a amplitude. Normalmente é aplicado na identificação não paramétrica.

#### b. RBS

Trata-se de um sinal binário aleatório. Para usar o RBS, deve-se selecionar os dois níveis e o tempo mínimo de permanência em cada nível  $T_b$  (*clock period*), dado em número de amostras. Uma sugestão para o tempo  $T_b$  é proposta em (AGUIRRE, 2015):

$$\frac{\tau_{\min}}{10} \leq T_b \leq \frac{\tau_{\min}}{3}$$

onde  $\tau_{\min}$  é a menor constante de tempo de interesse do sistema. Na identificação de sistemas lineares costuma-se escolher  $T_b$  mais próximo do limite inferior e para sistemas não lineares mais próximo do limite superior.

Em termos do intervalo de amostragem  $T$ , a proposta feita em (AGUIRRE, 2015) para o tempo  $T_b$  corresponde a:

$$3 \cdot T \leq T_b \leq 5 \cdot T$$

Propõe-se, a seguir, um procedimento em Matlab para gerar sinais do tipo RBS com comprimento  $N$ , tempo mínimo de permanência em cada nível  $T_b$ , amplitude  $a$  e semente selecionável.

```
function u = RBS(N,Tb,a,semente)
```

```
% RBS Gera um sinal binário pseudo-aleatório com amplitude a
```

```
% Argumentos de entrada:
```

```
% N = comprimento do sinal a ser gerado
```

```

% Tb = tempo mínimo de permanência em cada nível, o qual deve ser um número inteiro
% a = vetor de amplitudes do sinal gerado
% semente = semente para gerador de números aleatórios
% Inicializa o sinal de excitação com zeros
u = zeros(1,N);
% Gera números aleatórios segundo uma distribuição uniforme no intervalo [0,1]
R = rand(N,1);
% Determinação do valor inicial de u
if R(1) >= 0.5
    u(1) = a(1);
else
    u(1) = a(2);
end
cont = 1;
for k=2:N
    if cont < Tb
        u(k) = u(k-1);
        cont = cont + 1;
    else
        cont = 1;
        if R(k) >= 0.5
            u(k) = a(1);
        else
            u(k) = a(2);
        end
    end
end
end
u = u';

```

Apresenta-se, a seguir, o procedimento em Matlab que estima o espectro de potência de sinal RBS com comprimento  $N=100$ ,  $T_b = 1$  e  $a = 1$ .

```

% Geração do espectro de potência de sinal RBS
% Gera sinal RBS com N=100, Tb=1 e a=1
N = 100; Tb = 1; a = 1; semente = 10;
RBS100_1 = iddata(RBS(N,Tb,a,semente));
% Cálculo do espectro de potência
w = [0:1000]/1000*pi; % Geração de vetor com 1001 frequências na faixa entre 0 a pi rad/s
M100_1 = min(length(RBS100_1.OutputData)/10,30);
[g100_1,phi100_1,spe100_1] = spa(RBS100_1,M100_1,w);
% Gera gráfico do sinal RBS e de seu espectro de potência
subplot(211), stairs(RBS100_1.OutputData,'k')
title('RBS com N=100, T_b=T e a=1','FontSize',9)
xlabel('Amostras','FontSize',9)
ylabel('Sinal RBS','FontSize',9)
axis([-1 102 -1.11 1.11])
subplot(212), plot(phi100_1.fre,phi100_1.Spectrum(:),'k')

```

```

xlabel('Frequência (rad/s)','FontSize',9)
ylabel('Espectro de potência','FontSize',9)
axis([0 pi 0.765 1.28])
set(gca,'YTick',0.78:0.08:1.26)

```

O sinal RBS e seu espectro de potência para  $N=100$ ,  $T_b = 1$  e  $a=1$  são mostrados na Figura 8.1 e para o mesmo comprimento  $N$  e amplitude  $a$  mas  $T_b = 4$  na Figura 8.2.

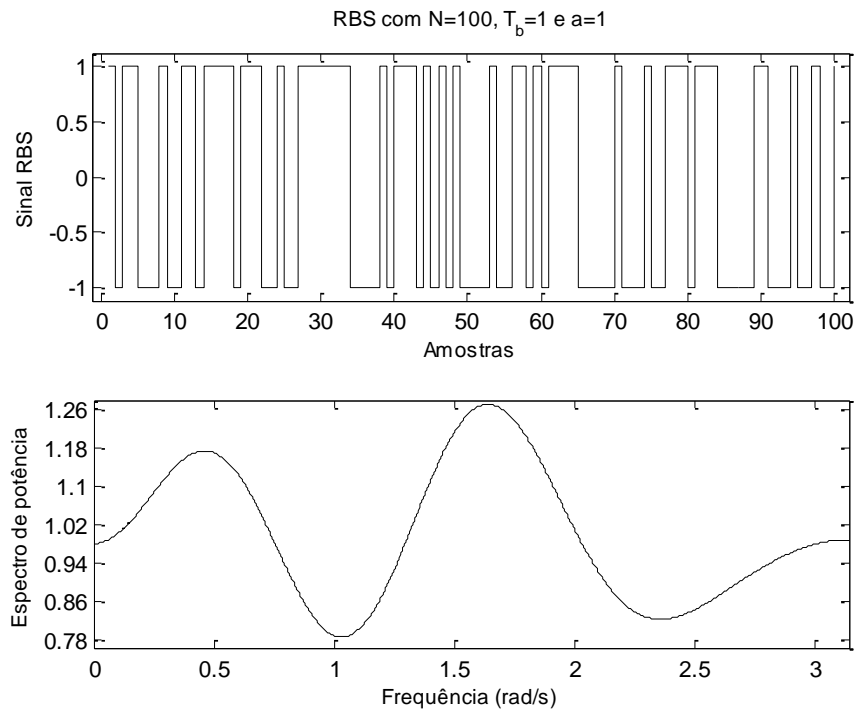


Fig. 8.1 Sinal RBS gerado com  $N=100$ ,  $T_b = 1$ ,  $a=1$  e seu espectro de potência.

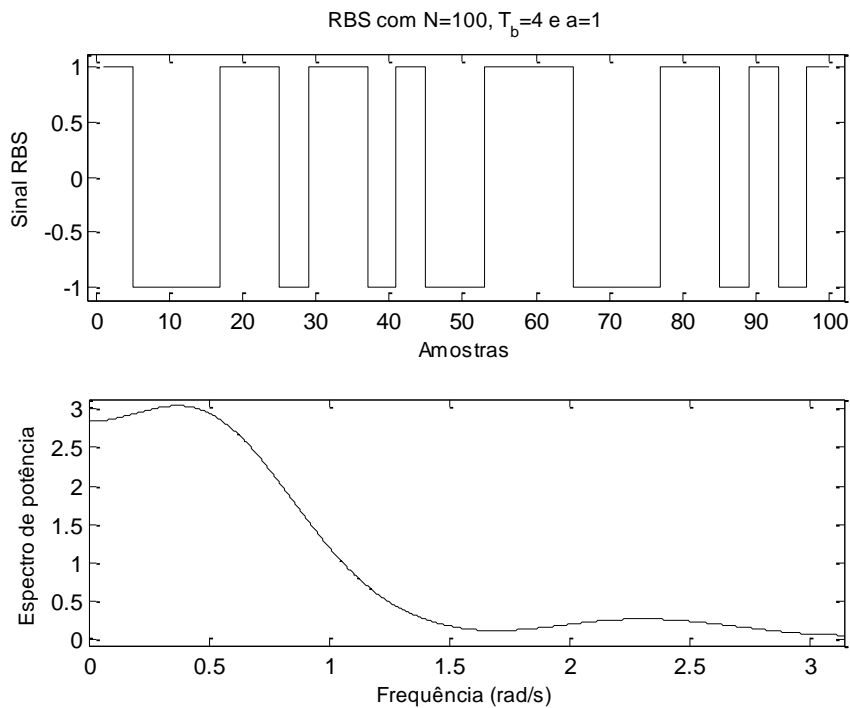


Fig. 8.2 Sinal RBS gerado com  $N=100$ ,  $T_b = 4$ ,  $a=1$  e seu espectro de potência.

Comparando-se as Figuras 8.1 e 8.2, ao se reduzir a frequência do sinal com  $T_b=4$ , o



espectro foca sua potência nas frequências mais baixas. O sinal RBS e seu espectro de potência para  $N=1000$ ,  $T_b=1$  e  $a=1$  são vistos na Figura 8.3 e para  $T_b=4$  na Figura 8.4. Por ser difícil ver o sinal com 1000 pontos, optou-se por mostrar apenas 200 pontos.

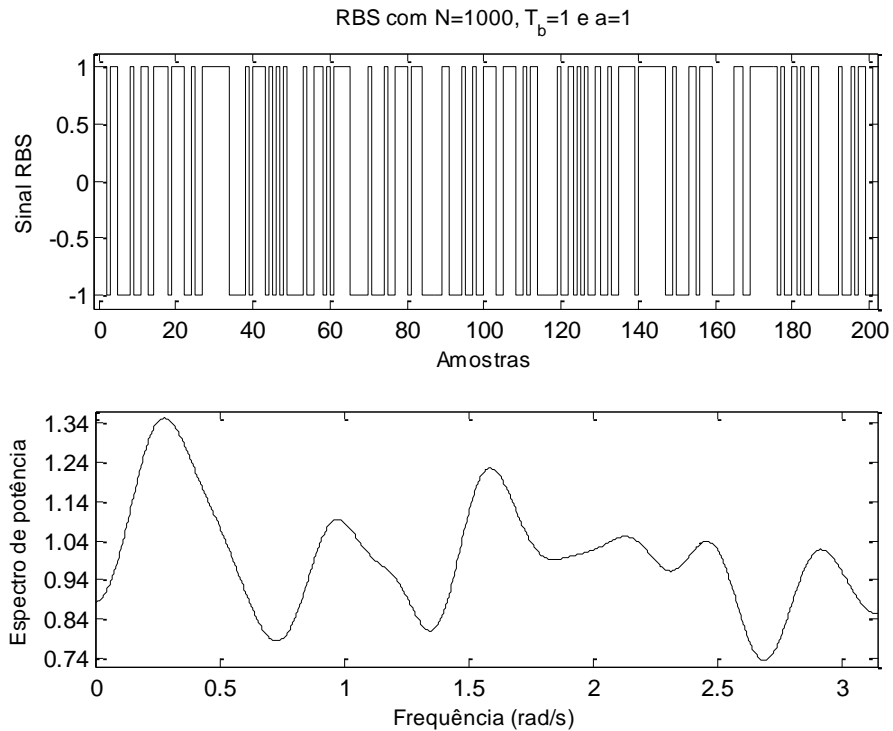


Fig. 8.3 Sinal RBS gerado com  $N=1000$ ,  $T_b=1$ ,  $a=1$  e seu espectro de potência.

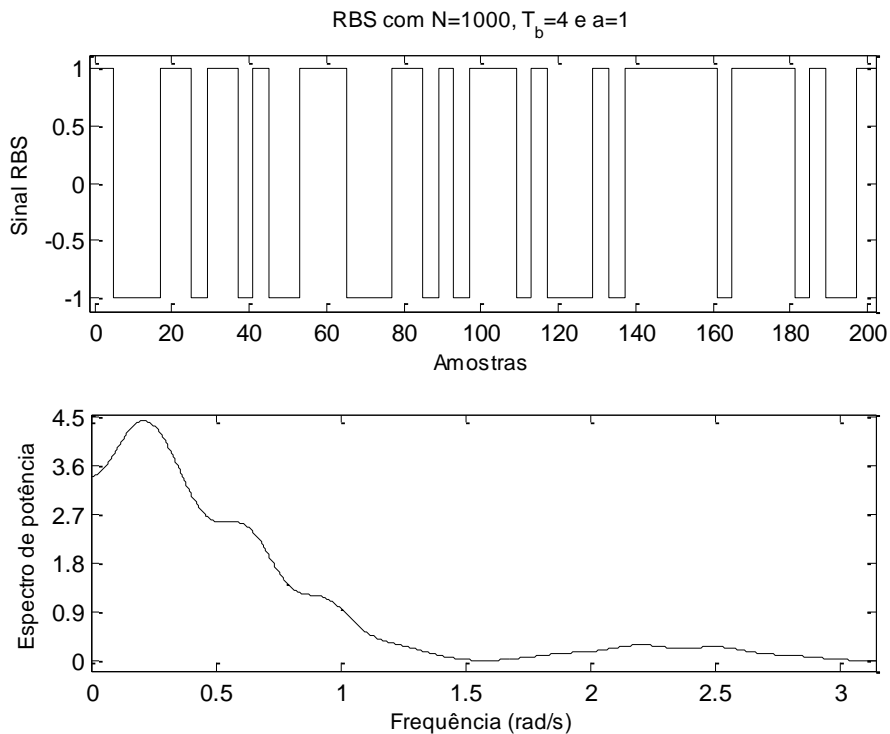


Fig. 8.4 Sinal RBS gerado com  $N=1000$ ,  $T_b=4$ ,  $a=1$  e seu espectro de potência.

Nota-se que ao se aumentar o comprimento do RBS, a tendência do espectro de potência é chegar a zero nas frequências  $k \cdot \pi/T_b$ ,  $k=1, 2, 3 \dots$

## c. PRBS

É um sinal periódico que comuta entre dois níveis. O PRBS pode ser gerado usando um registrador de deslocamento, que gere uma sequência de zeros e uns, sendo que em cada instante de amostragem, um novo número deve ser gerado. Assim, o PRBS é um sinal determinístico: dados os estados iniciais do registrador, seus futuros estados podem ser computados. No entanto, sua função correlação se assemelha à função correlação do ruído branco. Por essa razão, esse tipo de sequência é chamado “pseudo-aleatório”. A sequência é dita binária por conter apenas dois estados. O PRBS assume na saída  $u(t)$  os valores 0 e 1. Para gerar um sinal que comute entre os valores  $a$  e  $b$ , faça:

$$y(t) = a + (b - a) \cdot u(t)$$

Em particular, se  $b = -a$  (para simetria) e  $b = 1$  (por simplicidade), então:

$$y(t) = -1 + 2 \cdot u(t)$$

Para um registrador de deslocamento com  $n$  estados, são possíveis, no máximo  $2^n$  diferentes vetores de estado compostos de uns e zeros. Assim, o período máximo de uma sequência gerada usando tal sistema é  $2^n$ . Em realidade,  $2^n$  é um limite superior que não pode ser atingido. A razão é que a ocorrência do estado só com zeros deve ser evitada. Se tal estado ocorresse, então o vetor de estado permaneceria sempre em 0 no futuro. Assim, o período possível máximo é (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$M = 2^n - 1$$

onde  $n$ =ordem (número de estágios) do registrador de deslocamento. Um PRBS de período igual a  $M$  é chamado PRBS de máximo comprimento. O sinal de saída  $u(t)$  do registrador de deslocamento equivale ao valor do último elemento do vetor de estados.

## EXEMPLO

Seja  $(1 \ 0 \ 0)^T$  o estado inicial de um registrador de deslocamento de 3 estágios ( $n=3$ ). Uma possível sequência de vetores de estados gerados é mostrada a seguir (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso, o período  $M = 2^3 - 1 = 7$  (PRBS de máximo comprimento). A saída gerada  $u(t)$  neste caso é dada por  $\{0, 0, 1, 1, 1, 0, 1\}$ .

Há pelo menos duas razões para se concentrar em PRBS de máximo comprimento (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

- sua função correlação se assemelha à do ruído branco; e
- um sinal periódico é persistentemente excitante (p.e.) de uma ordem que não pode exceder o valor de seu período. Como a excitação persistente é uma condição vital para a identificabilidade, um período longo gerará mais flexibilidade nesse sentido.

Propriedades do PRBS de máximo comprimento (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

- Se  $u(t)$  é um PRBS de máximo comprimento de período  $M = 2^n - 1$ , então dentro de um período ele contém  $(M+1)/2 = 2^{n-1}$  uns e  $(M-1)/2 = 2^{n-1} - 1$  zeros. Durante um período, o vetor de estados assume todos os valores possíveis, exceto o vetor nulo. Dos  $2^n$  vetores de estado possíveis, a metade deles ( $2^{n-1}$ ) conterá um na última posição (gerando  $u(t) = 1$ ).
- Para um PRBS de máximo comprimento, sua média e sua função covariância são:

$$m = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M u(t)$$

$$r(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M [u(t+\tau) - m] \cdot [u(t) - m]$$

sendo  $r(\tau)$  periódico com período  $M$ . Resulta:

$$m = \frac{1}{M} \left( \frac{M+1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} \quad (\text{o valor médio é um pouco superior a } 0,5)$$

$$r(\tau) = \frac{M^2 - 1}{4M^2} \quad \text{para } \tau = 0, \pm M, \pm 2M, \dots \quad (\text{a variância é um pouco inferior a } 0,25)$$

$$r(\tau) = -\frac{M+1}{4M^2} \quad \text{para os demais valores de } \tau [\tau = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M-1), \pm(M+1), \dots]$$

Considere o sinal  $y(t) = -1 + 2 \cdot u(t)$ , que comuta entre -1 e +1. Os seguintes resultados são obtidos (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$m_y = -1 + 2 \cdot m_u = \frac{1}{M} \cong 0 \quad (\text{o valor médio é um pouco superior a } 0)$$

$$r_y(\tau) = 4 \cdot r_u(\tau) = 1 - \frac{1}{M^2} \cong 1 \quad \text{para } \tau = 0, \pm M, \pm 2M, \dots$$

$$r_y(\tau) = 4 \cdot r_u(\tau) = -\frac{1}{M} - \frac{1}{M^2} \cong -\frac{1}{M} \quad \text{para } \tau = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M-1), \pm(M+1), \dots$$

As aproximações acima foram obtidas desprezando-se a pequena diferença da média para zero. Caso se considere agora um sinal do tipo:

$$z(t) = -a + 2 \cdot a \cdot u(t)$$

que comute entre -a e +a, resulta:

$$m_z = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M z(t) = \frac{1}{M} \left[ \left( \frac{M+1}{2} \right) \cdot a + \left( \frac{M-1}{2} \right) \cdot (-a) \right] = \frac{a}{M}$$

$$r_z(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M [z(t+\tau) - m_z][z(t) - m_z] = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M z^2(t) - m_z^2 = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M a^2 - m_z^2 = a^2 - \frac{a^2}{M^2} \cong a^2$$

para  $\tau = 0, \pm M, \pm 2M, \dots$

$$r_z(\tau) = -\frac{a^2}{M} - \frac{a^2}{M^2} \cong -\frac{a^2}{M} \quad \text{para } \tau = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M-1), \pm(M+1), \dots$$

Devido à facilidade de geração e propriedades convenientes, o PRBS de máximo com-

primento tem sido muito usado em identificação de sistemas. Através de várias formas de filtragem linear, é possível gerar um sinal com propriedades espectrais prescritas.

O PRBS tem propriedades específicas que são vantajosas para métodos não paramétricos. A matriz de covariância  $[r(i-j)]$  correspondente a um PRBS de máximo comprimento pode ser invertida analiticamente. O cálculo da correlação cruzada de um PRBS com outro sinal necessita apenas operações de adição (multiplicações são desnecessárias). Esses fatos tornam o PRBS de máximo comprimento conveniente para identificação não paramétrica de modelos do tipo função-peso (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Procede-se, a seguir, a uma comparação entre as propriedades do PRBS e do ruído branco. Pode-se inicialmente dizer que as funções de distribuição de probabilidade podem ser bastante diferentes. Um PRBS tem uma distribuição de dois pontos (pois ele pode assumir apenas dois valores distintos), ao passo que o ruído branco tem uma função densidade de probabilidade contínua.

Comparando-se apenas as propriedades de 2ª ordem (as funções de covariância), verifica-se que:

$$\text{para PRBS: } r(\tau) = \begin{cases} a^2 & \tau = 0 \pm M, \pm 2M, \dots \\ -\frac{a^2}{M} & \tau = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (M-1), \pm (M+1), \dots \end{cases}$$

para ruído branco:  $r(\tau) = \sigma^2 \cdot \delta_{\tau,0}$  onde  $\delta_{\tau,0}$  é o delta de Kronecker ( $\delta_{\tau,0} = 1$  se  $\tau = 0$  e  $\delta_{\tau,0} = 0$  se  $\tau \neq 0$ ).

Constata-se que as funções covariância são bastante similares para  $|\tau| < M$ , desde que  $\sigma^2 = a^2$  e  $M$  seja suficientemente grande. Para valores pequenos de  $M$  há diferenças significativas entre as covariâncias.

Caso se analisem as covariâncias entre ruído branco e PRBS após passar por filtros lineares, verifica-se que seus valores são tanto mais próximos quanto maior o valor de  $M$ , similar ao que ocorre para esses mesmos sinais não filtrados. Para usar o PRBS, o usuário deve selecionar a amplitude do sinal.

Propõe-se, a seguir, um procedimento em Matlab para gerar sinais do tipo PRBS com comprimento  $N$  e amplitude  $a$ .

```
% Procedimento para geração de sinal PRBS com amplitude a
function u = PRBS(N,Tb,a)
% PRBS Gera um sinal binário pseudo-aleatório (pseudo-random binary sequence)
u = idinput(N,'PRBS',[0 1/Tb],[-a a]);
```

Devido à semelhança nas propriedades de 2ª ordem entre o PRBS e o ruído branco, os sinais PRBS têm sido tradicionalmente usados em identificação não paramétrica, tal como análise de correlação. Segundo (ZHU, 2001), sinais do tipo ruído branco e PRBS não são o melhor sinal para identificação paramétrica. Em um ambiente de controle de processos, sinais do tipo ruído branco e PRBS valorizam em demasia a banda de alta

frequência, prejudicando as bandas de baixa e média frequências. Além disso, suas frequentes flutuações podem ser prejudiciais aos atuadores dos processos. Muito frequentemente, um bom sinal de teste para identificar modelos na área de processos industriais tem uma característica de passa-baixa, significando que seu espectro de potência se assemelha ao de um filtro passa-baixa. Tal sinal pode ser obtido pela filtragem de ruído branco ou PRBS. Um sinal com frequências baixas pode ser obtido aumentando-se o período  $T_b$ . Uma desvantagem de se fazer isto é que o espectro de potência apresenta pontos mais baixos em torno das frequências  $k \cdot \pi/T_b$ ,  $k = 1, 2, 3 \dots$ , que resulta em relações sinal/ruído pequenas ao redor delas. Para mostrar esse fato, apresenta-se o seguinte procedimento em Matlab, que estima o espectro de potência de sinal PRBS com comprimento  $N=100$ ,  $T_b = 1$  e  $a=1$ .

```
% Geração do espectro de potência de sinal PRBS
% Gera sinal PRBS com N=100, Tb=1 e a=1
N = 100; Tb = 1; a = 1;
PRBS100_1 = iddata(PRBS(N,Tb,a));
% Cálculo do espectro de potência
w = [0:1000]/1000*pi; % Geração de vetor com 1001 frequências na faixa entre 0 a pi rad/s
M100_1 = min(length(PRBS100_1.OutputData)/10,30);
[g100_1,phi100_1,spe100_1] = spa(PRBS100_1,M100_1,w);
% Gera gráfico do sinal PRBS e de seu espectro de potência
subplot(211), stairs(PRBS100_1.OutputData,'k');
title('PRBS com N=100, T_b=T e a=1','FontSize',9);
xlabel('Amostras','FontSize',9);
ylabel('Sinal PRBS','FontSize',9);
axis([-1 102 -1.11 1.11]);
subplot(212), plot(phi100_1.fre,phi100_1.Spectrum(:),'k');
xlabel('Frequência (rad/s)','FontSize',9);
ylabel('Espectro de potência','FontSize',9);
axis([0 pi 0.75 1.21]);
set(gca,'YTick',0.75:0.09:1.2);
```

O sinal PRBS e seu espectro de potência para  $N=100$  e  $N=127$ ,  $T_b = 1$  e  $a=1$  são mostrados na Figura 8.5 e para  $N=100$  e  $N=124$  e  $T_b = 4$  na Figura 8.6.

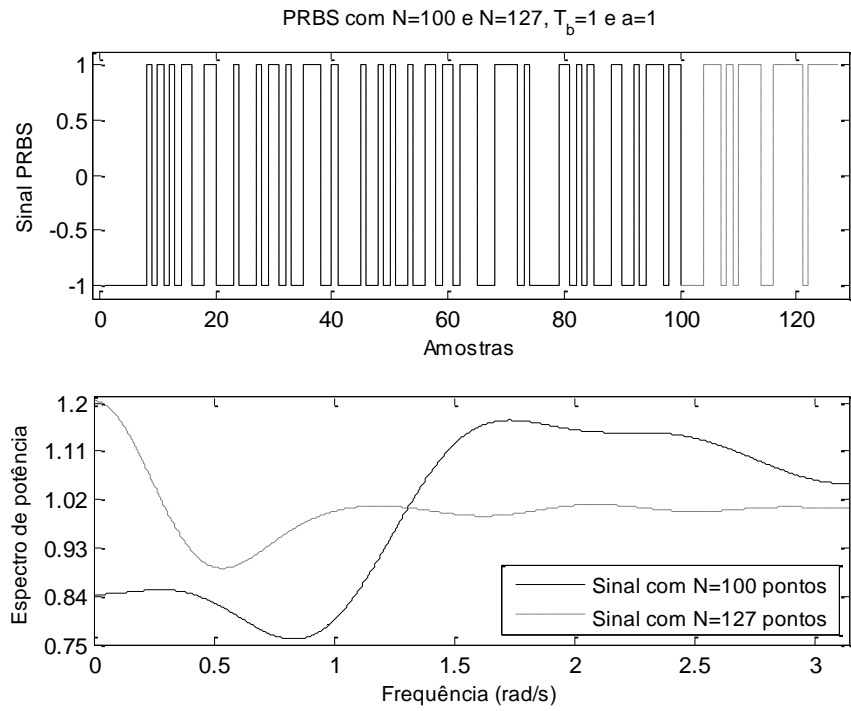


Fig. 8.5 Sinal PRBS gerado com  $N=100$  e  $N=127$ ,  $T_b = 1$ ,  $a=1$  e seu espectro de potência.

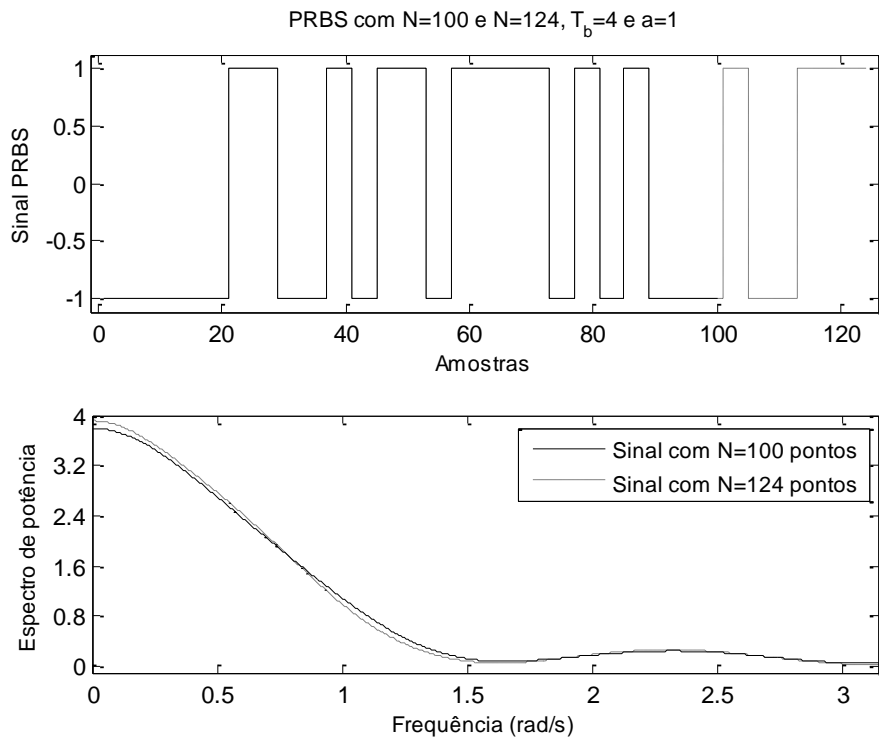


Fig. 8.6 Sinal PRBS gerado com  $N=100$  e  $N=124$ ,  $T_b = 4$ ,  $a=1$  e seu espectro de potência.

Comparando-se as Figuras 8.5 e 8.6, nota-se que quando se reduz a frequência do sinal com  $T_b=4$ , o espectro tem pontos de potência praticamente nula em torno das frequências  $k \cdot \pi/T_b$ ,  $k = 1, 2, 3 \dots$ , que gera relações sinal/ruído pequenas em torno delas. O sinal PRBS e seu espectro de potência para  $N=1000$  e  $N=1023$ ,  $T_b=1$  e  $a=1$  são vistos na Figura 8.7 e para os mesmos comprimentos  $N$  mas  $T_b=4$  na Figura 8.8. Para melhor visualização, optou-se por mostrar apenas os 200 primeiros pontos coletados.

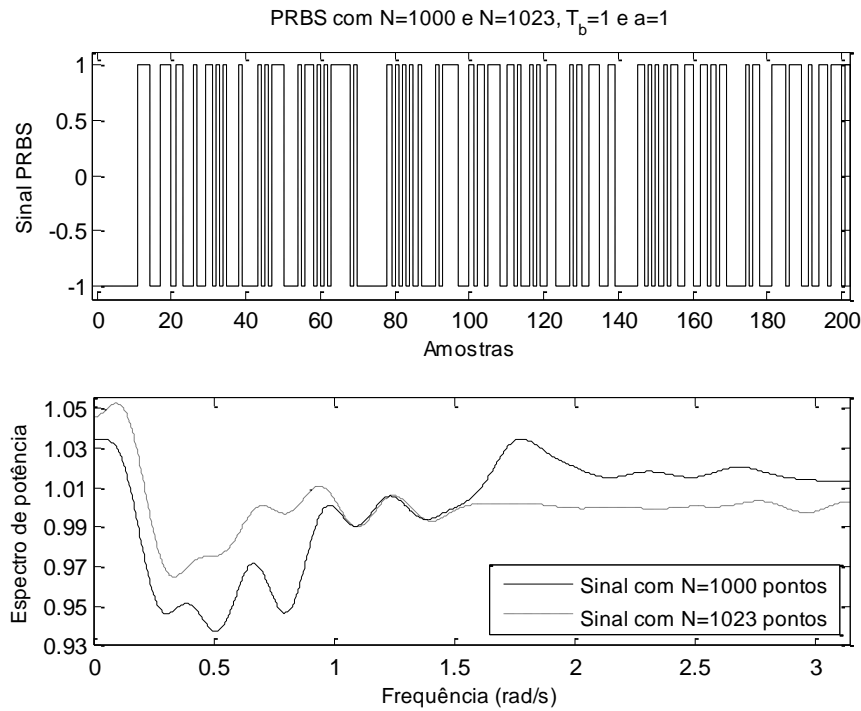


Fig. 8.7 Sinal PRBS gerado com  $N=1000$  e  $N=1023$ ,  $T_b=1$ ,  $a=1$  e seu espectro de potência.

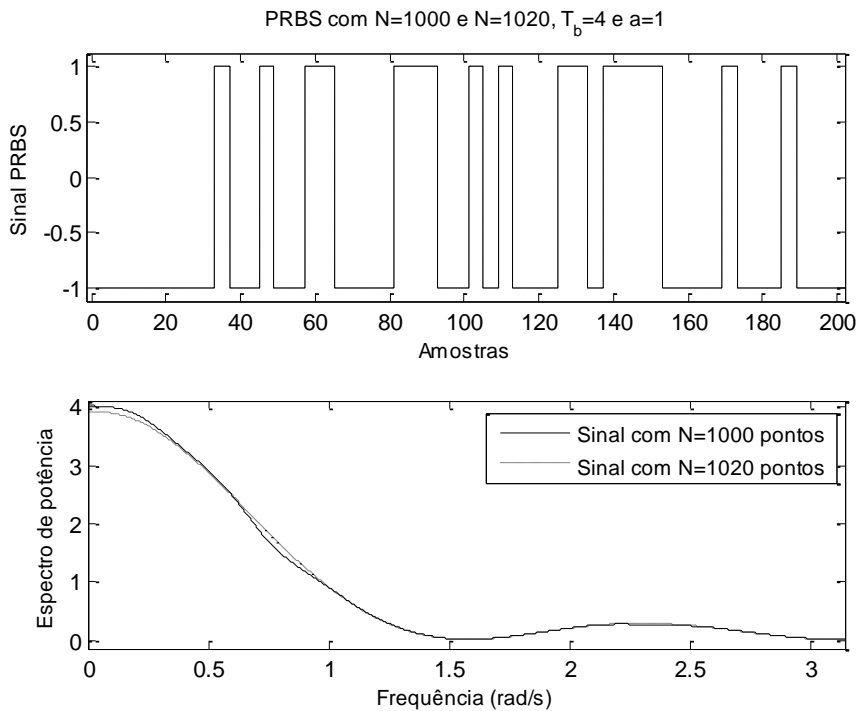


Fig. 8.8 Sinal PRBS gerado com  $N=1000$  e  $N=1020$ ,  $T_b=4$ ,  $a=1$  e seu espectro de potência.

Ao se aumentar o comprimento do PRBS, a tendência do espectro de potência é sofrer redução nas frequências  $k \cdot \pi/T_b$ ,  $k=1,2,3 \dots$ . Pode-se dizer que para coletar sinais com frequências mais baixas, o PRBS pode criar problemas pela falta de energia em algumas frequências do espectro.

#### d. GBN

Uma melhor forma para gerar sinais binários com característica de filtro passa-baixa é usar o sinal GBN (*Generalized Binary Noise*) (ZHU, 2001), que foi originalmente propos-

to em (TULLEKEN, 1990). A ideia é gerar um sinal de teste que seja adequado para a identificação de modelos de processos industriais a serem usados em controladores. Um sinal GBN  $u(t)$  é binário, assumindo dois valores:  $a(1)$  e  $a(2)$  (sinal assimétrico). A cada instante  $t$  de chaveamento, ele comuta de acordo com a seguinte probabilidade:

$$P[u(t) = -u(t-1)] = p_{ch}$$

$$P[u(t) = u(t-1)] = 1 - p_{ch}$$

onde  $p_{ch}$  é a probabilidade de chaveamento.

Considere que o valor inicial do sinal de entrada seja  $u(t)=a(2)$  e que  $R$  seja uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $[0, 1]$ . A estratégia para gerar o sinal GBN é dada por:

- se o valor sorteado de  $R$  for menor que  $p_{ch}$ , a variável  $u(t+1)$  troca de sinal, assumindo valor  $a$ , isto é,  $u(t+1) = -u(t) = a(1)$ ; e
- se o valor sorteado de  $R$  for maior ou igual a  $p_{ch}$ , a variável  $u(t+1)$  mantém o mesmo sinal de  $u(t)$ , isto é,  $u(t+1) = u(t) = -a(2)$ .

A média do sinal GBN é nula. Define-se o tempo mínimo de chaveamento  $T_{min}$  como o tempo, em intervalos de amostragem  $T$ , em que o sinal se mantém constante, até um novo chaveamento.  $T_{min}$  é normalmente assumido entre 3 a 5 intervalos de amostragem. O tempo de chaveamento  $T_{ch}$  é o intervalo, em intervalos de amostragem, entre dois chaveamentos consecutivos. O tempo médio de chaveamento é calculado por:

$$E(T_{ch}) = \frac{T_{min}}{p_{ch}}$$

Sinais GBN com frequências mais baixas podem ser criados reduzindo-se a probabilidade de chaveamento  $p_{ch}$  ou aumentando-se o tempo médio de chaveamento  $E(T_{ch})$ . Isto gera um espectro do sinal com energia suficiente na faixa de frequências de interesse para a identificação. Para se ter uma probabilidade adequada de chaveamento  $p_{ch}$ , é preciso escolher o valor médio  $E(T_{ch})$ , que é relacionado com o tempo de acomodação ou de estabilização ao degrau  $t_s$  da saída do processo, como mostrado a seguir:

$$E(T_{ch}) = \frac{t_s}{n}$$

sendo  $t_s$  o tempo que a saída do processo leva para atingir o estado estacionário, após a aplicação de um degrau na entrada. Portanto, para cada processo invariante no tempo, esse tempo é fixo e, para processos lineares, é independente da amplitude do degrau. Este valor é calculado como o intervalo de tempo necessário para a saída do processo atingir 95% da variação total do estado estacionário anterior a seu novo valor estacionário, tempo este contado a partir do instante de aplicação do degrau na entrada.  $n$  é um parâmetro escolhido para ajustar a frequência do sinal gerado, de modo que ela seja mais adequada para solucionar o problema de identificação do processo, sendo que conforme  $n$  cresce, a frequência do sinal gerado cresce na mesma proporção.

A título de ilustração, considere que se escolha o tempo mínimo de chaveamento  $T_{min}$  igual a 4 períodos de amostragem e que este último valha 1 minuto. Considere que o



tempo de acomodação ou estabilização  $t_s$  seja igual a 60 minutos. Caso se use um coeficiente  $n=2$ , resulta que o tempo médio de chaveamento  $E(T_{ch})$  é dado por:

$$E(T_{ch}) = \frac{t_s}{n} = \frac{60}{2} = 30 \text{ minutos}$$

Portanto, neste caso, tem-se a seguinte probabilidade  $p_{ch}$ :

$$p_{ch} = \frac{T_{min}}{E(T_{ch})} = \frac{4}{30} = 0,1333$$

Caso se escolha  $n=4$ , tem-se que:

$$E(T_{ch}) = 15 \text{ minutos} \quad \text{e} \quad p_{ch} = 0,2667$$

Apresenta-se, a seguir, um programa em Matlab para gerar sinais GBN.

% Procedimento para geração de sinal GBN com amplitude a

function u = GBN(N,pch,a,semente)

% Argumentos de entrada

% N = número de amostras a serem geradas

% pch = probabilidade de chaveamento do sinal

% a = amplitude do sinal gerado

% semente = semente para gerador de números aleatórios

% Inicializa o sinal de excitação com zeros

u = zeros(1,N);

% Determinação do valor inicial de u

if R(1) >= 0.5

    u(1) = a;

else

    u(1) = -a;

end

% Determinação da sequência u(2) a u(N)

for k = 2:N,

    if (R(k) < pch)

        if u(k-1) == a

            u(k) = -a;

        else

            u(k) = a

        end

    else

        if u(k-1) == a

            u(k) = a;

        else

            u(k) = -a;

        end

    end

end

u = u';

Apresentam-se, a seguir, os sinais GBN gerados com  $N=100$  e  $N=1000$ ,  $a=1$ , fazendo  $p_{ch}=0,5$  e  $p_{ch}=0,125$ , representando um sinal quatro vezes mais lento, similar ao que foi

feito para os sinais RBS e PRBS. Na Figura 8.9 apresenta-se o sinal gerado e seu espectro de potência para  $N=100$  e  $p_{ch}=0,5$  e na Figura 8.10 para  $N=100$  e  $p_{ch}=0,125$ .

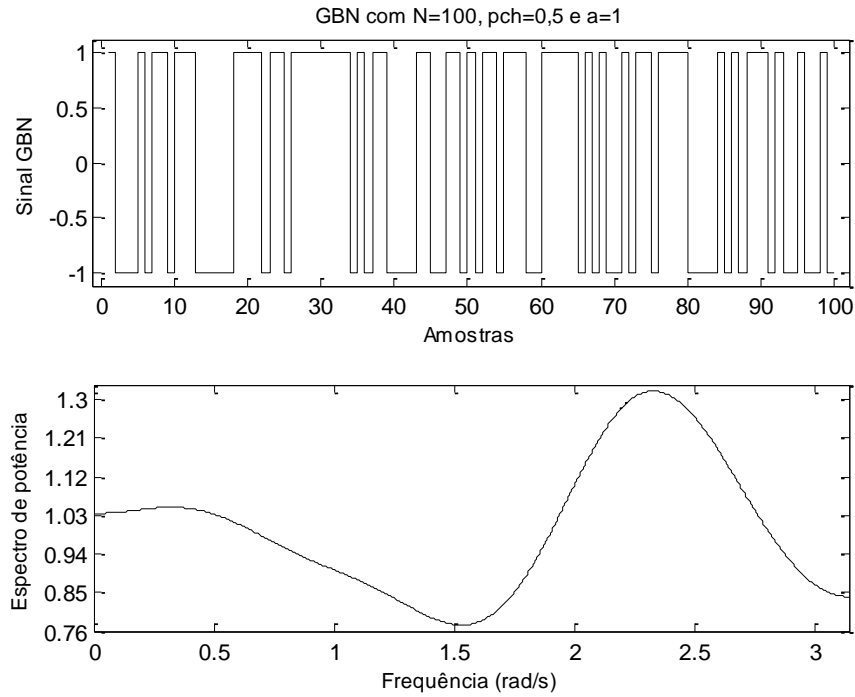


Fig. 8.9 Sinal GBN gerado com  $N=100$  e  $p_{ch}=0,5$  e seu espectro de potência.

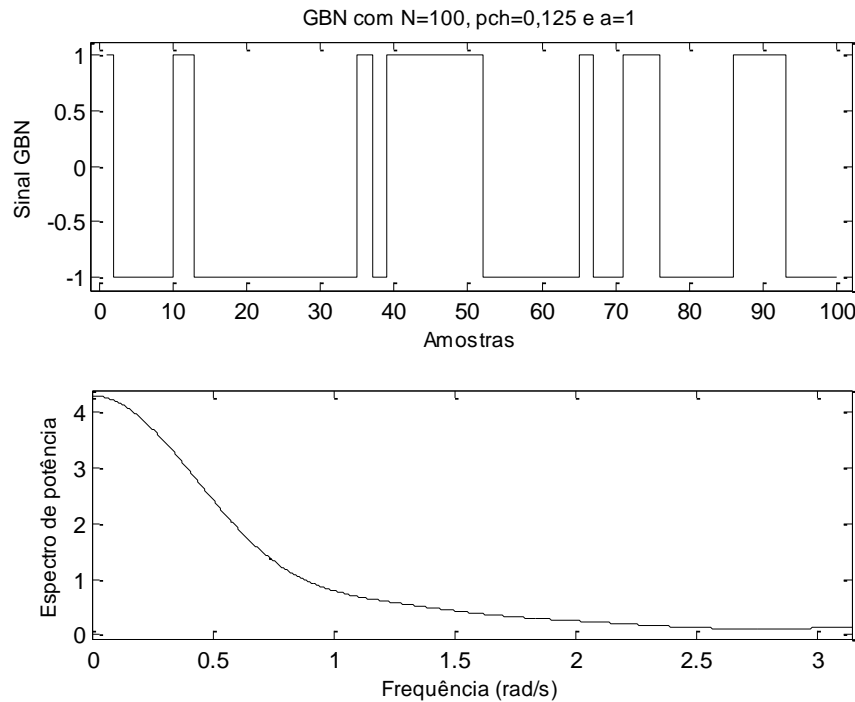


Fig. 8.10 Sinal GBN gerado com  $N=100$  e  $p_{ch}=0,125$  e seu espectro de potência.

Comparando-se as Figuras 8.9 e 8.10, nota-se que para uma maior frequência do sinal, o espectro de potência exibe potência em todas as frequências, ao passo que ao se reduzir a frequência, há uma tendência da queda da potência nas frequências mais altas e de aumento da potência nas frequências mais baixas, embora essa queda não seja tão acentuada como na Figura 8.6 nem ocorrem mínimos locais em torno de certas frequências. Como já citado, aconselha-se gerar sinais para identificação em que predomi-

nem as baixas frequências. Na Figura 8.11 mostra-se o sinal gerado e seu espectro de potência para  $N=1000$  e  $p_{ch}=0,5$  e na Figura 8.8 para  $N=1000$  e  $p_{ch}=0,125$ . Assim como ocorreu nas Figuras 8.7 e 8.8, exibem-se apenas os 200 primeiros pontos gerados.

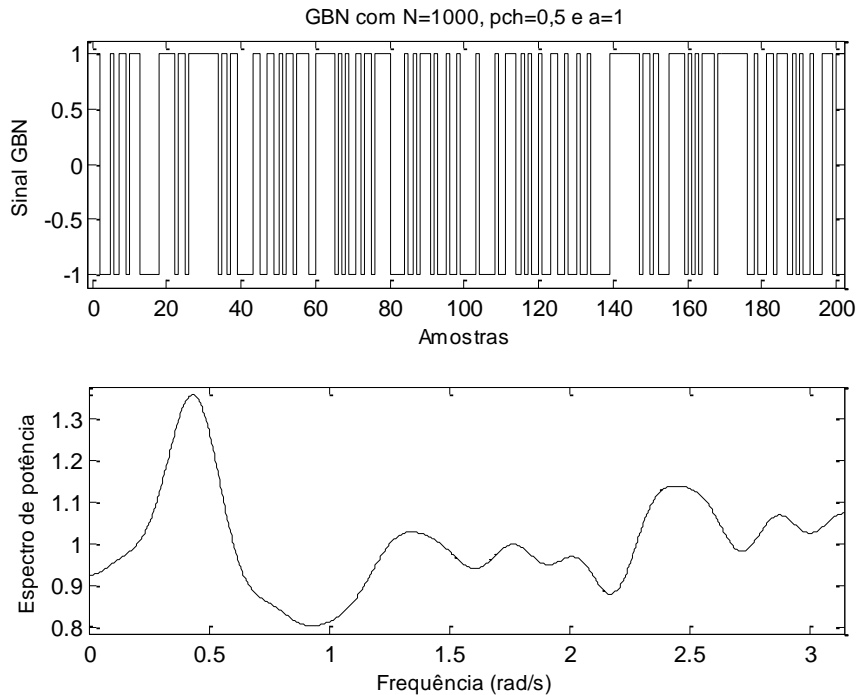


Fig. 8.11 Sinal GBN gerado com  $N=1000$  e  $p_{ch}=0,5$  e seu espectro de potência.

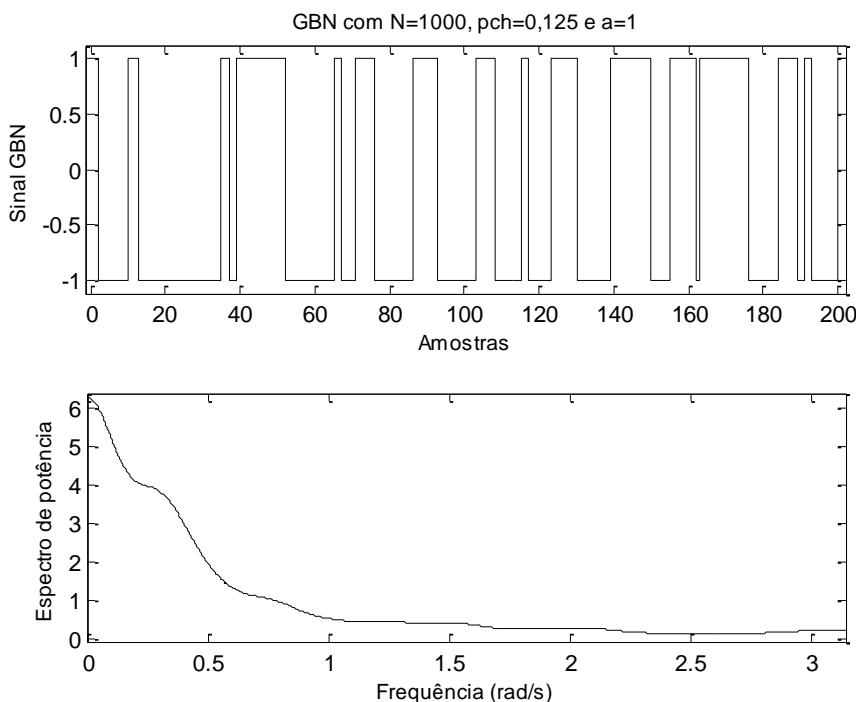


Fig. 8.12 Sinal GBN gerado com  $N=1000$  e  $p_{ch}=0,125$  e seu espectro de potência.

A análise das Figuras 8.11 e 8.12 indica que com frequências mais baixas há uma tendência da potência ser mais bem distribuída mas de menor valor nas frequências mais altas, mas não ocorre, como na Figura 8.8, frequências em que a potência caia demais.

A título de ilustração, mostra-se na Figura 8.13 o espectro de potência dos sinais RBS,

PRBS e GBN, gerados com mais baixa frequência ( $T_b = 4$  e  $p_{ch}=0,125$ ), tanto para  $N=100$  como para  $N=1000$ .

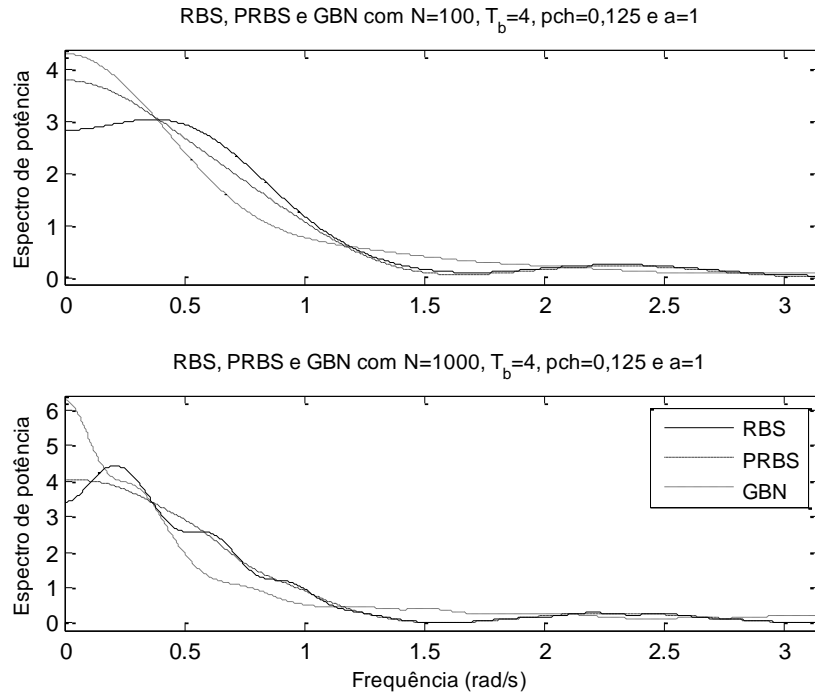


Fig. 8.13 Espectro de potência dos sinais RBS, PRBS e GBN gerados com  $N = 100$  e  $N = 1000$  para  $T_b = 4$  e  $p_{ch} = 0,125$ .

Nos pontos de baixa potência, o sinal GBN apresenta uma potência levemente superior aos sinais RBS e PRBS.

e. ARMA ou ruído colorido (ruído branco filtrado)

Devido à flexibilidade limitada do espectro de potência dos sinais RBS, PRBS e GBN, nem sempre é possível gerar uma distribuição desejada de potência em função da frequência usando esses sinais. Este problema pode ser resolvido com ruído branco filtrado (ruído colorido). Quando um sinal é criado pela filtragem de ruído branco com média nula e variância  $\sigma^2$ , qualquer distribuição da potência nas frequências pode ser aproximada pela escolha adequada do filtro linear. Seja  $\{e(t)\}$  uma sequência pseudo-aleatória. Ela é similar a ruído branco no seguinte sentido (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e(t) \cdot e(t + \tau) \rightarrow 0 \quad \text{conforme } N \rightarrow \infty \quad (\tau \neq 0)$$

A partir da sequência  $\{e(t)\}$  uma entrada  $u(t)$  pode ser obtida através de filtragem linear, a qual é bastante genérica:

$$u(t) + c_1 \cdot u(t-1) + \dots + c_m \cdot u(t-m) = e(t) + d_1 \cdot e(t-1) + \dots + d_m \cdot e(t-m) \quad (8.1)$$

Sinais  $u(t)$  do tipo dado em (8.1) são chamados de ARMA. Quando todos os  $c_i$  são iguais a 0 ele é chamado um processo MA (*moving average*, média móvel), enquanto para os  $d_i = 0$  denomina-se um processo AR (*autoregressive*, auto-regressivo).

Para definir um sinal do tipo ARMA, os seguintes parâmetros do filtro devem ser escolhidos:  $m$ ,  $\{c_i\}$ ,  $\{d_i\}$  e o gerador aleatório para  $e(t)$ , que inclua a distribuição de  $e(t)$ , que é normalmente tomada como gaussiana ou uniforme, muito embora outras opções sejam possíveis. A filtragem (8.1) pode ser escrita como:

$$C(q) \cdot u(t) = D(q) \cdot e(t)$$

ou

$$u(t) = \frac{D(q)}{C(q)} e(t)$$

onde:

$$C(q) = 1 + c_1 \cdot q^{-1} + \dots + c_m \cdot q^{-m} \quad D(q) = 1 + d_1 \cdot q^{-1} + \dots + d_m \cdot q^{-m}$$

sendo  $q^{-1}$  o operador de deslocamento para trás  $[q^{-1}e(t) = e(t-1)]$ .

Os parâmetros do filtro devem ser seleccionados de forma que os polinômios  $C(q)$  e  $D(q)$  tenham todos os zeros dentro do círculo de raio unitário. Diferentes escolhas dos parâmetros do filtro  $\{c_i, d_i\}$  levam a sinais de entrada com conteúdos diferentes de frequência e diversos formatos de realizações temporais.

#### f. Soma de senoides

Neste caso  $u(t)$  é dado por:

$$u(t) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \sin(\omega_j \cdot t + \varphi_j)$$

onde as frequências angulares  $\{\omega_j\}$  são distintas:

$$0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \leq \pi$$

Para uma soma de senoides o usuário deve escolher as amplitudes  $\{a_j\}$ , as frequências  $\{\omega_j\}$  e as fases  $\{\varphi_j\}$ . Normalmente se assume que as frequências  $\omega_j$  sejam uniformemente distribuídas no intervalo  $[0, \pi]$  e que o número  $n$  atenda as condições de persistência da excitação, conforme explicado na Subseção 8.4.3. Desta forma, qualquer conteúdo desejado da distribuição de frequências pode ser atingido, ajustando-se as amplitudes  $a_j$  adequadamente.

### 8.4.2 Excitação persistente

Um objetivo básico ao projetar um experimento é gerar dados informativos o suficiente para distinguir entre diferentes modelos nos conjuntos pretendidos de modelos. Como foi visto nos métodos não paramétricos e, em particular, na análise de correlação, uma estimativa  $\{\hat{g}(k)\}$  da função peso  $\{g(k)\}$  pode ser determinada resolvendo-se o seguinte sistema linear de equações, já mostrado em (7.15) (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$\begin{pmatrix} \hat{r}_{yu}(0) \\ \hat{r}_{yu}(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yu}(M-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}_u(0) & \cdots & \hat{r}_u(M-1) \\ \hat{r}_u(1) & \cdots & \hat{r}_u(M-2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_u(M-1) & \cdots & \hat{r}_u(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{g}(0) \\ \hat{g}(1) \\ \vdots \\ \hat{g}(M-1) \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

ou, na forma matricial:

$$\hat{\mathbf{R}}_{yu} = \hat{\mathbf{R}}_u \hat{\mathbf{G}}$$

Então, assintoticamente (para  $N \rightarrow \infty$ ), os coeficientes  $\{\hat{g}(k)\}_{k=0}^{M-1}$  são determinados como solução do sistema de equações (7.15).

Para existir uma única solução, a matriz  $\hat{\mathbf{R}}_u$  deve ser não singular, isto é, deve existir a matriz inversa  $\hat{\mathbf{R}}_u^{-1}$ , a qual existe se o determinante de  $\hat{\mathbf{R}}_u$  for diferente de zero. Isso leva ao conceito de **excitação persistente**.

DEFINIÇÃO: um sinal estocástico estacionário  $u(t)$  é dito **persistentemente excitante** (p.e.) de ordem  $n$  se (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

a. o seguinte limite existir:

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t+\tau) \cdot u(t) \quad \text{e} \quad (8.2)$$

b. a matriz

$$\mathbf{R}_u(n) = \begin{pmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \cdots & r_u(n-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & \cdots & r_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_u(1-n) & r_u(2-n) & \cdots & r_u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \cdots & r_u(n-1) \\ r_u(1) & r_u(0) & \cdots & r_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_u(n-1) & r_u(n-2) & \cdots & r_u(0) \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

for definida positiva (e assim não singular). Uma matriz quadrada simétrica  $\mathbf{M}$  de ordem  $n$  é semidefinida positiva se ela satisfizer qualquer uma das seguintes propriedades:

a. para qualquer vetor  $\mathbf{x} \neq 0$  tem-se a relação:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0 \quad \text{ou então}$$

b. se todos seus autovalores forem positivos.

EXEMPLO:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Resulta:

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1$$

Portanto, a matriz  $\mathbf{M}$  é definida positiva.

Ressalta-se que o conceito de sinal p.e. está relacionado com a forma do sinal e não com sua amplitude.

Como muitos processos estacionários são ergódicos, pode-se substituir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N$$

em (8.2) pelo operador expectância. Então a matriz  $\mathbf{R}_u(n)$  é a matriz usual de covariância (supondo-se, por simplicidade, que  $u(t)$  tenha média zero). Dessa forma, um sinal é persistentemente excitante de ordem  $n$  se sua matriz de covariância de ordem  $n$  for definida positiva. No domínio da frequência essa condição é equivalente a requerer que a densidade espectral do sinal  $\phi_u(\omega)$  seja não nula em pelo menos  $n$  pontos no intervalo  $-\pi < \omega \leq \pi$ .

No contexto do controle adaptativo, uma definição alternativa de sinal p.e. é usada. Neste caso,  $u(t)$  é dito p.e. de ordem  $n$  se, para todo  $t$ , exista um inteiro  $m$  tal que (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$\rho_1 I > \sum_{k=t}^{t+m} \varphi(k) \varphi^T(k) > \rho_2 I \quad (8.4)$$

onde  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sejam maiores que 0 e o vetor  $\varphi(t)$  seja dado por:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} u^T(t-1) & \dots & u^T(t-n) \end{pmatrix}^T$$

Para verificar a correlação entre a definição de sinal p.e. dada em (8.4) e a expressão (8.3), note que a matriz (8.3) pode ser escrita como (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$\mathbf{R}_u(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t)$$

### 8.4.3 Ordem da excitação persistente de sinais empregados na prática

A ordem da excitação persistente de sinais comumente empregados na prática é mostrada a seguir (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

- Seja  $u(t)$  ruído branco de média zero e variância  $\sigma^2$ . Então  $r_u(\tau) = \sigma^2 \cdot \delta(\tau)$  e  $\mathbf{R}_u(n) = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_n$ , que é sempre definida positiva. Assim, o ruído branco é persistentemente excitante de todas as ordens.
- Seja  $u(t)$  uma função degrau de magnitude  $A$ . Então  $r_u(\tau) = A^2$  para todo  $\tau$ . De (8.3) resulta que:

$$\mathbf{R}_u(n) = \begin{pmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(n-1) \\ r_u(1) & r_u(0) & \dots & r_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_u(n-1) & r_u(n-2) & \dots & r_u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & A^2 & \dots & A^2 \\ A^2 & A^2 & \dots & A^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^2 & A^2 & \dots & A^2 \end{pmatrix}$$

Portanto,  $\mathbf{R}_u(n)$  é não singular se e somente se  $n=1$ . Dessa forma, uma função degrau é persistentemente excitante apenas de ordem 1.

- Seja  $u(t)$  um impulso unitário:  $u(t)=1$  para  $t=0$  e 0 para  $t \neq 0$ . Isso resulta em  $r_u(\tau) = 0$  para todo  $\tau$  e  $\mathbf{R}_u(n) = 0$ . Esse sinal não é persistentemente excitante de nenhuma ordem.

- Um processo ARMA é persistentemente excitante de qualquer ordem.
- Seja um sinal GBN ou então PRBS de comprimento  $M$ . Esse sinal é persistentemente excitante de ordem igual mas não superior a  $M$ . Um sinal periódico qualquer de período  $M$  pode ser persistentemente excitante no máximo de ordem  $M$ . Como a excitação persistente é uma condição vital para a identificabilidade, um período longo gerará mais flexibilidade nesse sentido.
- Seja  $u(t)$  a seguinte soma de senoides:

$$u(t) = \sum_{j=1}^m a_j \cdot \sin(\omega_j \cdot t + \varphi_j) \quad 0 \leq \omega_1 < \omega_2 \dots < \omega_m \leq \pi$$

Esse sinal é persistentemente excitante de ordem igual mas não superior a  $n$ , onde:

$$n = \begin{cases} 2 \cdot m & \text{se } 0 < \omega_1, \omega_m < \pi \\ 2 \cdot m - 1 & \text{se } \omega_1 = 0 \text{ ou } \omega_m = \pi \\ 2 \cdot m - 2 & \text{se } \omega_1 = 0 \text{ e } \omega_m = \pi \end{cases}$$

Um sinal escalar de entrada  $u(t)$  que seja persistentemente excitante de ordem  $n$  tem uma densidade espectral diferente de 0 em, pelo menos,  $n$  frequências. Um sinal escalar que seja persistentemente excitante de ordem  $n$  mas não de ordem  $n+1$  tem uma densidade espectral que seja não nula em exatamente  $n$  pontos distintos [no intervalo  $(-\pi, \pi)$ ]. Esse sinal pode ser gerado como uma soma de  $(n/2 + 1)$  senoides.

#### 8.4.4 Experimentos informativos em malha aberta

O conceito de excitação persistente foi introduzido usando o modelo de função-peso truncada. No entanto, o uso desse conceito não está limitado ao problema de estimação da função-peso. Uma condição necessária para estimação consistente dos parâmetros de um modelo linear de  $n$ -ésima ordem é que o sinal de entrada  $u(t)$  seja persistentemente excitante de ordem  $2n$ , mas a ordem exata varia de método para método de identificação (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

A afirmação do parágrafo anterior é aplicável para a estimação consistente em sistemas ruidosos. Para sistemas livres de ruído, não é preciso que a entrada seja persistentemente excitante. Considere, por exemplo, um sistema linear de  $n$ -ésima ordem sem ruído e inicialmente em repouso. Assuma que um impulso seja aplicado. A partir dos  $2n$  primeiros valores não nulos da resposta, é possível encontrar os parâmetros do sistema. Assim, o sistema pode ser identificado, mesmo que a entrada não seja persistentemente excitante. A razão é que sistemas livres de ruído podem ser identificados a partir de um número finito de pontos ( $N < \infty$ ), enquanto que a excitação persistente se refere às propriedades da entrada para  $N \rightarrow \infty$ , que é relevante para a análise da consistência das estimativas dos parâmetros em sistemas ruidosos (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Caso um conjunto de dados seja **suficientemente informativo** com relação a um conjunto de modelos, então esses dados permitem discriminar dois modelos quaisquer



dentro do conjunto. Transferindo-se essa terminologia para experimentos de identificação, diz-se que um experimento seja suficientemente informativo se ele gera um conjunto de dados que seja suficientemente informativo (LJUNG, 1999). Um requisito básico no projeto é que o experimento deveria ser suficientemente informativo com respeito a todos os conjuntos de modelos que se pretende usar.

Caracterizam-se, a seguir, experimentos em malha aberta suficientemente informativos (LJUNG, 1999). Considere um conjunto  $M^*$  de modelos SISO, de forma que as funções de transferência  $G(q, \theta)$  sejam funções racionais:

$$G(q, \theta) = \frac{B(q, \theta)}{F(q, \theta)} = \frac{q^{-n_b} \cdot (b_1 + b_2 \cdot q^{-1} + \dots + b_{n_b} \cdot q^{-n_b+1})}{1 + f_1 \cdot q^{-1} + \dots + f_{n_f} \cdot q^{-n_f}}$$

onde o grau do numerador é  $n_b - 1$  e o grau do denominador é  $n_f$ .

Então um experimento em malha aberta com uma entrada que seja persistentemente excitante de ordem  $n_b + n_f$  é suficientemente informativo com relação a  $M^*$ . Dessa forma, pode-se dizer que um experimento em malha aberta é informativo se a entrada for persistentemente excitante.

Uma condição para estimar  $n$  parâmetros é que o sinal de excitação seja p.e. pelo menos de ordem  $n$ . Se o numerador e o denominador do modelo têm o mesmo grau  $n$ , então a entrada deve ser p.e. de ordem  $2n$ . Isto significa que  $\phi_u(\omega)$  deve ser diferente de zero em pelo menos  $2n$  pontos, o que é atingido, por exemplo, com  $u$  composto de  $n$  diferentes senoides (LJUNG, 1999):

$$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k \cos(\omega_k t), \quad \omega_k \neq \omega_j \text{ para } k \neq j, \quad \omega_k \neq 0, \quad \omega_k \neq \pi$$

Assim, é suficiente usar  $n$  senoides para identificar um sistema de  $n$ -ésima ordem.

#### 8.4.5 Modelos de equação de diferenças com entradas persistentemente excitantes

A propriedade da excitação persistente foi introduzida com relação à estimação dos mínimos quadrados dos modelos de função-peso (ou modelos só de zeros). Ela é relevante também para os modelos de equações de diferença (ou modelos polos-zeros).

A saída  $y(t)$  de um filtro racional, assintoticamente estável, linear, da forma  $B(q)/A(q)$  com entrada  $u(t)$ , pode ser escrita como (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$A(q) \cdot y(t) = B(q) \cdot u(t) + \varepsilon(t) \quad (8.5)$$

onde:  $A(q) = 1 + a_1 \cdot q^{-1} + \dots + a_{n_a} \cdot q^{-n_a}$   $B(q) = b_1 \cdot q^{-1} + \dots + b_{n_b} \cdot q^{-n_b}$   
 $\varepsilon(t)$  = alguma perturbação aleatória

A equação de diferenças (8.5) pode ser escrita como uma regressão linear:

$$y(t) = \varphi^T(t) \cdot \theta + \varepsilon(t)$$

onde:  $\varphi^T(t) = (-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \quad u(t-1) \dots u(t-n_b))$   
 $\theta = (a_1 \dots a_{n_a} \quad b_1 \dots b_{n_b})^T$

Deve-se salientar que o vetor  $\varphi(t)$  possua termos de entrada e saída até o instante  $(t-1)$ , de modo que é possível encontrá-lo em outras publicações, citado como  $\varphi(t-1)$ .

Analogamente ao caso dos modelos só de zeros, a existência da estimativa dos mínimos quadrados  $\hat{\theta}$  é assintoticamente equivalente à não singularidade (definição positiva) da matriz de covariância  $\mathbf{R} = E\varphi(t)\varphi^T(t)$ .

A condição  $\mathbf{R} > 0$  está relacionada com a propriedade de excitação persistente de  $u(t)$ . Os casos  $\varepsilon(t) \equiv 0$  e  $\varepsilon(t) \neq 0$  são considerados em separado (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

- saída sem ruído:  $\{\mathbf{R} > 0\} \Leftrightarrow \{u(t) \text{ é p.e. de ordem } (n_a + n_b) \text{ e } A(q) \text{ e } B(q) \text{ são coprimas}\}$ ; e
- saída com ruído:  $\{\mathbf{R} > 0\} \Leftrightarrow \{u(t) \text{ é p.e. de ordem } (n_b)\}$ .

#### 8.4.6 Amplitude dos sinais de entrada

Ao selecionar a amplitude dos sinais de entrada deve-se considerar o seguinte (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

- pode haver restrições acerca da amplitude permitida da variação dos sinais de entrada e saída durante o experimento. Por razões econômicas ou de segurança, pode não ser possível introduzir flutuações muito acentuadas no processo;
- na prática, a maioria dos processos é não linear, de modo que um modelo linear corresponda apenas a uma aproximação. A linearização da dinâmica não linear é válida apenas em alguma região. Dessa forma, para estimar os parâmetros do modelo linearizado não se deve escolher uma amplitude muito grande do sinal de entrada. Por outro lado, seria de grande interesse realizar um segundo experimento com uma amplitude maior para testar a linearidade do processo, isto é, saber em que região o modelo linearizado possa ser considerado apropriado; e
- há razões para se usar uma grande amplitude de entrada, pois se espera que a precisão das estimativas melhore quando se aumente a amplitude da entrada. Isto é natural, pois se aumentando a amplitude de  $u(t)$ , a relação sinal/ruído cresce, de forma que a influência das perturbações diminui.

### 8.5 PERÍODO DE AMOSTRAGEM

Para efetuar a coleta dos dados experimentais, eles devem ser amostrados em pontos discretos no tempo. O intervalo de tempo entre amostras sucessivas é chamado de período de amostragem  $T$ . Dois outros termos correlatos são também usados: a taxa de amostragem  $f_s = 1/T$  e a frequência de amostragem  $\omega_s = 2\pi/T$ . Se  $T$  é dado em segundos,  $f_s$  tem unidade de ciclos por segundo e  $\omega_s$  de radianos por segundo.

A taxa de amostragem determina o componente mais alto da frequência que seja possível observar no sinal amostrado, de acordo com o teorema da amostragem de Nyquist

(vide Seção D.1 no Apêndice D). É difícil encontrar características do processo por mais do que umas poucas décadas da faixa de frequência com apenas um experimento. Isso é muito natural, pois modos com grandes constantes de tempo podem ser aproximados por integradores e modos com constantes de tempo significativamente menores que o intervalo de amostragem não podem ser encontrados. Portanto, é algumas vezes necessário executar diversos experimentos com diferentes taxas de amostragem e características do sinal de entrada para cobrir toda a faixa de frequências de interesse.

### 8.5.1 Escolha do período de amostragem – regras práticas

É muito pior usar um valor de  $T$  muito grande que um valor de  $T$  muito pequeno. Seja, por exemplo, um sistema de 1ª ordem. Caso se faça  $T = 10 \cdot \tau$ , resulta uma variância do parâmetro estimado com base em um certo número de dados mais que  $10^5$  vezes a variância ótima, ao passo que para  $T = 0,1 \cdot \tau$  resulta uma variância que é inferior a 10 vezes a variância ótima. A escolha ótima do intervalo de amostragem, neste caso, se encontra em torno da constante de tempo do sistema (LJUNG, 1999).

O teorema de Shannon, visto na Seção D.1, afirma que um sinal periódico deve ser amostrado pelo menos duas vezes a cada oscilação completa. Na prática, no entanto, é comum se amostrar o sinal com uma frequência de amostragem 5 a 10 vezes superior à maior frequência de interesse e não apenas 2 vezes (chamada de frequência de Nyquist), conforme exigido pelo teorema de Shannon. Na prática, a proposta de se escolher a frequência de amostragem 5 a 10 vezes superior à maior frequência de interesse, nem sempre ajuda muito, pois é comum não se conhecer tal frequência (AGUIRRE, 2015).

Uma regra prática para escolher o intervalo de amostragem é  $T = \tau$ , onde  $\tau$  é a menor constante de tempo ou o inverso da maior auto-frequência de interesse. Isso corresponde aproximadamente a 6 amostras por período de um sinal periódico e pode, algumas vezes, ser uma escolha muito conservativa. Para muitos processos a metade dessa taxa de amostragem é suficiente. Para processos com polos muito próximos uma taxa mais alta de amostragem é requerida para poder distingui-los. Outra regra razoável é usar um intervalo de amostragem de cerca de 1/10 da maior constante de tempo (GUSTAVSSON, 1975). Outra regra prática aproximada é estipular que o intervalo de amostragem seja tomado como 10% do tempo de acomodação ou de estabilização da resposta ao degrau. Deve-se levar em conta que é frequentemente muito pior selecionar o intervalo de amostragem muito grande do que muito pequeno (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Intervalos de amostragem muito pequenos frequentemente geram problemas de ordem prática: todos os polos se concentrarão em torno do ponto  $z = 1$  no plano complexo e a determinação do modelo se torna muito sensível. Um sistema com excesso de polos de 2 ou mais se torna de fase não mínima quando amostrado muito rapidamente (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). A seguir apresenta-se, a título de exemplo, a discretização feita na Seção 4.2, considerando-se, além de  $T = 0,5$  s,  $T = 0,05$  s,  $T = 0,005$  s e  $T = 0,0005$  s.

Resulta:

$$G(q) = \frac{0,1463 \cdot q^{-4}}{q - 0,9512} \quad (\text{para } T = 0,5 \text{ s})$$

$$G(q) = \frac{0,01496 \cdot q^{-40}}{q - 0,995} \quad (\text{para } T = 0,05 \text{ s})$$

$$G(q) = \frac{0,0015 \cdot q^{-400}}{q - 0,9995} \quad (\text{para } T = 0,005 \text{ s})$$

$$G(q) = \frac{0,00015 \cdot q^{-4000}}{q - 1} \quad (\text{para } T = 0,0005 \text{ s})$$

Nota-se que, conforme o intervalo de amostragem cai, o polo se aproxima de 1. Mostra-se na Figura 8.14 o efeito dessa aproximação do polo em  $z = 1$  através de um ensaio em degrau unitário em  $t = 0 \text{ s}$ , aplicado ao sistema em tempo contínuo e em tempo discreto com  $T = 0,005 \text{ s}$  e  $T = 0,0005 \text{ s}$ .

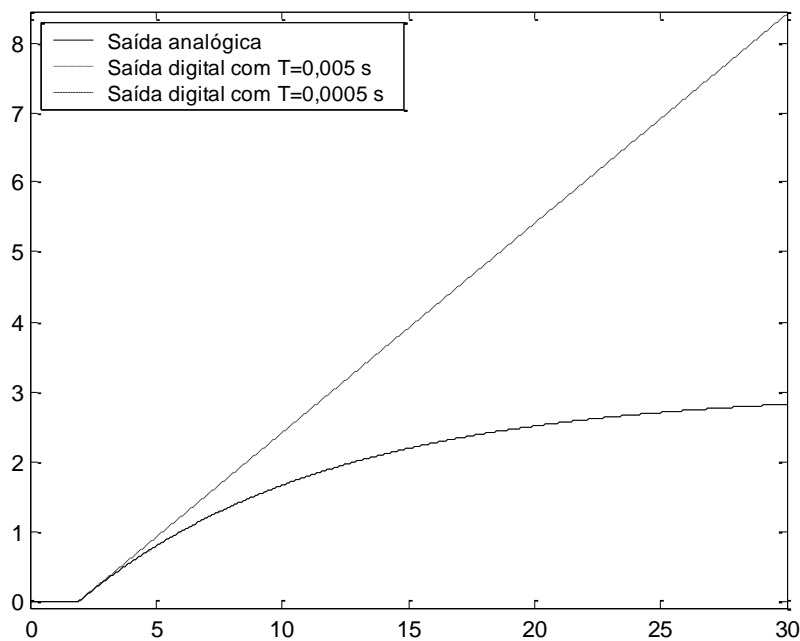


Fig. 8.14 Resposta ao degrau unitário de sistema em tempo contínuo e em tempo discreto com  $T = 0,005 \text{ s}$  e  $T = 0,0005 \text{ s}$ .

A análise da Figura 8.14 indica que as respostas em tempo contínuo e em tempo discreto com  $T = 0,005 \text{ s}$  (ou maior) são praticamente idênticas, não se vendo diferença entre elas, ao passo que com  $T = 0,0005 \text{ s}$  o sistema passa a se comportar como um integrador, com um comportamento totalmente diferente do sistema original.

Do ponto de vista econômico é mais vantajoso amostrar tão lentamente quanto possível. Mais dados conduzem a uma análise de dados mais custosa. No entanto, se um sinal for amostrado muito vagarosamente, nada pode ser feito com esses dados para melhorar a situação. Portanto, é recomendável amostrar o experimento tão rápido quanto for possível e, durante a análise, desprezar alguns pontos. Por outro lado, ao se amostrar com uma frequência muito alta, o número de pontos coletado cresce proporcionalmente à frequência.

Suponha um caso extremo em que o período de amostragem seja maior do que o tempo de acomodação do processo. Pode ocorrer então que uma perturbação afete o processo e sua influência desapareça antes de qualquer dado desse transitório ser coletado. Assim, é importante considerar a dinâmica do processo, incluindo as perturbações, ao selecionar o período de amostragem.

Se as condições do processo mudam significativamente, pode ser necessário alterar o período de amostragem. Uma regra conservativa é selecionar o período de amostragem que corresponda às piores condições operacionais possíveis, isto é, o menor período de amostragem (SEBORG *et al.*, 2004).

A relação sinal ruído (S/R) também influencia na seleção do período de amostragem. Esta relação é usualmente definida como (SEBORG *et al.*, 2004):

$$\frac{S}{R} = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_R^2}$$

onde  $\sigma_S^2$  denota a variância do sinal e  $\sigma_R^2$  é a variância da perturbação aleatória (ruído).

Para casos com relações S/R baixas, uma amostragem rápida deve ser evitada, porque mudanças na variável medida de um instante de amostragem para outro serão devidas principalmente a ruído de alta frequência e não a mudanças no processo. Para valores de S/R baixos, recomenda-se utilizar filtros nos sinais coletados (SEBORG *et al.*, 2004).

### 8.5.2 Escolha do período de amostragem pelo método da autocovariância

Apresenta-se, a seguir, um critério simples para avaliação do período de amostragem, que tem dado boas indicações em casos práticos (AGUIRRE, 2015).

Supõe-se inicialmente que o sinal do processo  $y^*(t)$  tenha sido coletado com um período de amostragem muito pequeno, isto é, muito menor do que o necessário, representando um sinal superamostrado. O problema é definir a taxa pela qual o sinal observado  $y^*(t)$  será decimado (*decimated*), de modo a gerar o sinal de trabalho  $y(t)$ , devidamente amostrado. Isto significa que se quer definir o número inteiro  $\Delta$  tal que  $y(t) = y^*(\Delta \cdot t)$ . Para tal, propõe-se verificar o grau de correlação (redundância) entre observações adjacentes do sinal  $y^*(t)$ . Deve-se ter em mente que, quanto mais super-amostrado estiver o sinal  $y^*(t)$ , maior será a redundância entre duas observações consecutivas.

Para quantificar os efeitos causados pela sobreamostragem do sinal  $y^*(t)$ , são calculadas as seguintes funções de autocovariância, uma linear e outra não linear:

$$r_{y^*}(\tau) = E \left[ \left( y^*(t) - \overline{y^*(t)} \right) \cdot \left( y^*(t-\tau) - \overline{y^*(t)} \right) \right]$$

$$r_{y^{*2}}(\tau) = E \left[ \left( y^{*2}(t) - \overline{y^{*2}(t)} \right) \cdot \left( y^{*2}(t-\tau) - \overline{y^{*2}(t)} \right) \right]$$

onde  $E[\cdot]$  indica a expectância ou esperança matemática.

Considerando-se o sinal  $y^*(t)$  ergódico, substitui-se a esperança matemática pela média temporal. O motivo de se usar  $r_{y^{*2'}}(\tau)$  além de  $r_{y^*}(\tau)$  é para poder detectar correlações não lineares que porventura existam nos dados. A escolha da taxa de decimação  $\Delta$  pode ser feita do seguinte modo: dado o sinal superamostrado  $y^*(t)$ , determinam-se as funções de autocovariância mostradas acima e seus primeiros mínimos  $\tau_{y^*}$  e  $\tau_{y^{*2'}}$ , respectivamente. O menor desses mínimos passa a ser o valor de trabalho, isto é:

$$\tau_m^* = \min[\tau_{y^*}, \tau_{y^{*2'}}]$$

$\tau_m^*$  é medido em número de atrasos. Por fim, deseja-se escolher  $\Delta$  tal que as funções de autocovariância do sinal decimado  $y(t) = y^*(\Delta \cdot t)$  satisfaçam:

$$10 \leq \tau_m \leq 20$$

sendo que  $\tau_m$  é definido para o sinal decimado  $y(t)$  de maneira análoga a  $\tau_m^*$  para o sinal original  $y^*(\Delta \cdot t)$ , de modo que  $\tau_m = \tau_m^* / \Delta$ . Os limites inferior e superior acima podem, eventualmente, ser relaxados para 5 e 25, respectivamente.

Os dados disponíveis se referem a  $y^*(t)$ . Nota-se que, à exceção do fator de escala  $\Delta$  (no eixo de atrasos), as funções de autocovariância de  $y(t)$  e  $y^*(t)$  são idênticas. Isto significa que se  $\tau_m$  satisfaz  $10 \leq \tau_m \leq 20$ , então tem-se que:

$$10 \cdot \Delta \leq \tau_m^* \leq 20 \cdot \Delta$$

Portanto, supondo-se que para um determinado exemplo tenha-se  $\tau_m^* \cong 100$ , então taxas de decimação na faixa de  $5 \leq \Delta \leq 10$  podem ser escolhidas para gerar o sinal de trabalho  $y(t)$ .

### 8.5.3 Exemplos de escolha do período de amostragem

Suponha o mesmo processo de primeira ordem afetado de tempo morto sugerido na Seção 4.2, cuja função de transferência seja dada por:

$$G(s) = \frac{3 \cdot e^{-2 \cdot s}}{10 \cdot s + 1}$$

Empregando-se as sugestões apresentadas nas Subseções 8.5.1 e 8.5.2, calcule as possíveis opções para o valor do período de amostragem.

a.  $T = \frac{\tau}{10} = 1 \text{ s}$

b.  $T = \frac{t_s}{10}$

onde  $t_s$  corresponde ao tempo de acomodação (*settling time*) de uma resposta ao degrau. Como se trata de um sistema de 1ª ordem, quando  $t = 5 \cdot \tau$ , implica que a resposta do sistema ao degrau atingiu 99,33% de seu valor máximo. Encarando-se esse como o tempo de acomodação, resulta, neste caso:

$$T = \frac{5 \cdot \tau}{10} = 5 \text{ s}$$

c. Para se empregar o método heurístico proposto na Subseção 8.5.2, deve-se coletar um conjunto de dados de saída do processo, com intervalo de amostragem pequeno.

Propõe-se então empregar o diagrama em Simulink da Figura 8.15, onde se considera o processo dado e se usa  $T = 0,1$  s.

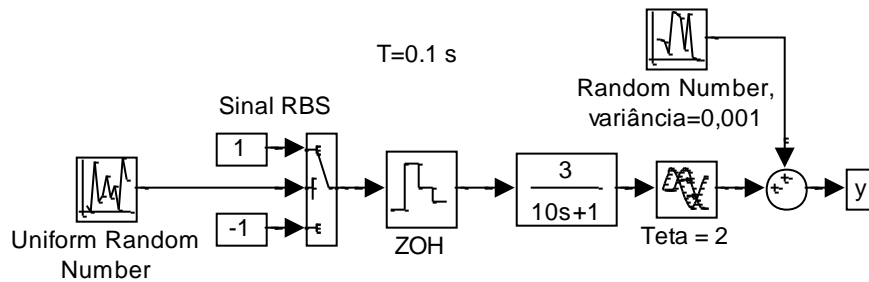


Fig. 8.15 Diagrama em Simulink do processo dado afetado por ruído.

O processo é excitado com um sinal do tipo RBS, sendo que o período  $T_b$  de permanência em cada nível é igual a  $4 \cdot T$ , o intervalo de amostragem do ruído é igual a  $T$  e sua variância é igual a 0,001. Coletam-se 10.000 pontos para realizar o cálculo das funções de autocovariância, o qual é feito de acordo com o programa a seguir em Matlab.

% Cálculo de período de amostragem pelo método proposto em (AGUIRRE, 2015)

```
clear all; close all; clc
```

```
% Autocovariâncias normalizadas linear e não linear com T=0,1 s
```

```
T = 0.1;
```

```
Tsim = 1000;
```

```
Delta = T/10;
```

```
Decim = T/Delta;
```

```
Tipo_entrada = 1;
```

```
Modelo_coleta_dados_perodo_amostragem_T_0_1_subsecao_8_5_3
```

```
sim('Modelo_coleta_dados_perodo_amostragem_T_0_1_subsecao_8_5_3')
```

```
N = length(y);
```

```
ym = mean(y);
```

```
ym2 = mean(y.*y);
```

```
atraso_max = 201;
```

```
for j = 1:(2*atraso_max-1),
```

```
    tau(j) = j-atraso_max;
```

```
    sum(j) = 0;
```

```
    sum2(j) = 0;
```

```
    if tau(j) <= 0
```

```
        for k=1:(N+tau(j)),
```

```
            sum(j) = sum(j) + ((y(k)-ym)*(y(k-tau(j))-ym));
```

```
            sum2(j) = sum2(j) + ((y(k)^2-ym2)*(y(k-tau(j))^2-ym2));
```

```
        end
```

```
        sum(j)=sum(j)/(N+tau(j));
```

```
        sum2(j)=sum2(j)/(N+tau(j));
```

```
    else
```

```
        for k=1+tau(j):N,
```

```
            sum(j) = sum(j) + ((y(k)-ym)*(y(k-tau(j))-ym));
```

```

        sum2(j) = sum2(j) + ((y(k)^2-ym2)*(y(k-tau(j))^2-ym2));
    end
    sum(j)=sum(j)/(N-tau(j));
    sum2(j)=sum2(j)/(N-tau(j));
end
end
plot(tau,sum/sum(atraso_max),tau,sum2/sum2(atraso_max),'r:')
xlabel('Atrasos tau')
ylabel('Autocovariância normalizada')
legend('Autocovariância linear', 'Autocovariância não linear')

```

Aplicando-se este programa aos dados coletados, obtém-se a Figura 8.16

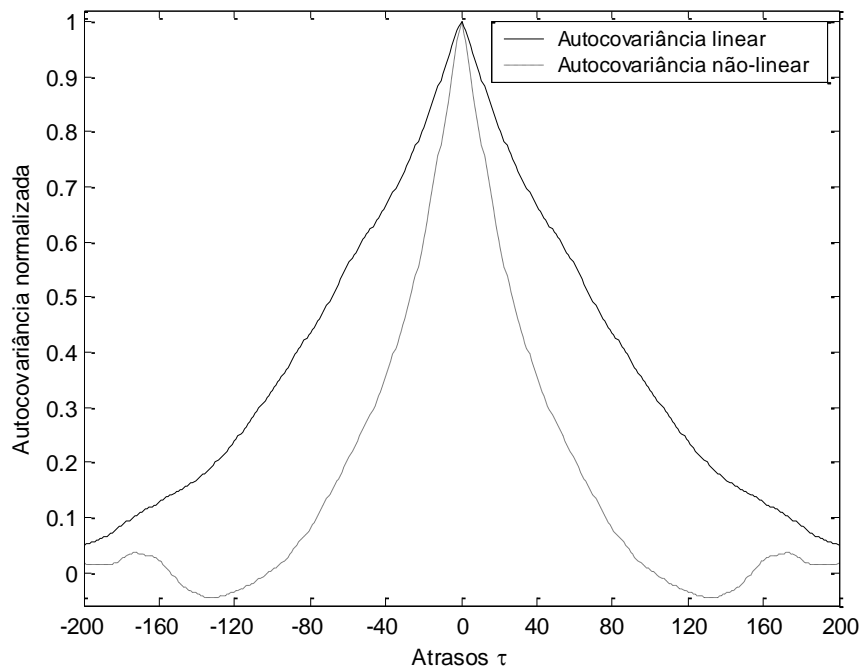


Fig. 8.16 Autocovariâncias normalizadas linear e não linear.

Nota-se que a curva é simétrica em torno do atraso 0, o que não é surpresa, pois se o processo for estacionário, sua função autocovariância será simétrica, isto é,  $r_y(\tau) = r_y(-\tau)$ . Analisando-se a Figura 8.16, o primeiro mínimo aparece na função autocovariância não linear e ocorre para  $\tau = \tau_m^* = 132$ . De  $10 \cdot \Delta \leq \tau_m^* \leq 20 \cdot \Delta$ , resulta:

$$7 \leq \Delta \leq 13$$

Assumindo-se um valor médio para a relação acima, resulta  $\Delta = 10$ . Como a coleta de pontos foi feita com  $T = 0,1$  s, deve-se então decimar os dados com um fator 10. Isto significa que o período de amostragem a ser utilizado é  $T = 1$  s.

Repete-se, na Figura 8.17, o gráfico das autocovariâncias normalizadas linear e não linear da Figura 8.16, mas considerando agora os dados decimados com  $\Delta = 10$ .



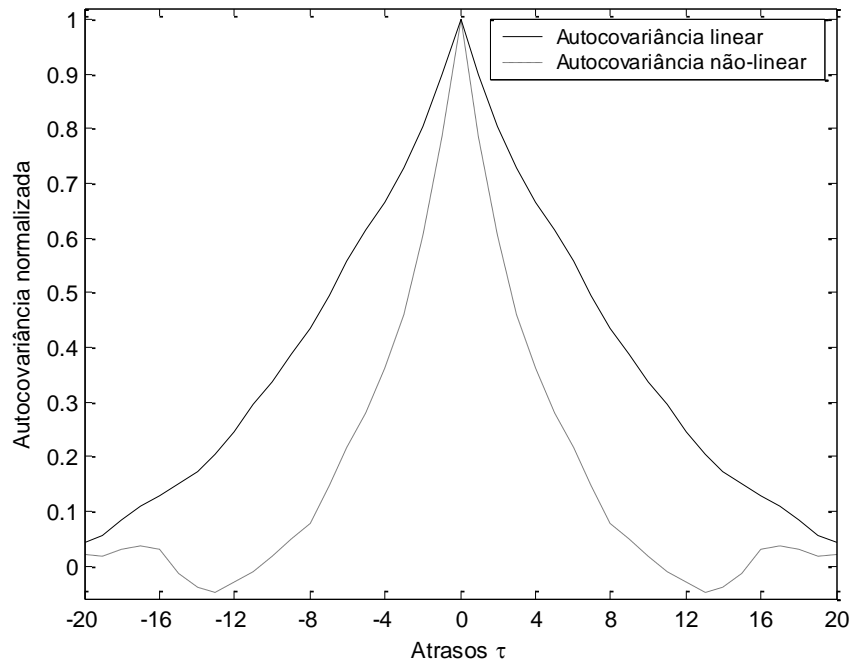


Fig. 8.17 Autocovariâncias normalizadas linear e não linear com dados decimados com  $\Delta = 10$ .

Ambos os gráficos da Figura 8.17 são muito similares aos da Figura 8.16, conforme era de se esperar. Neste caso, o valor mínimo ocorre para  $\tau_m = 13$ .

Comparando-se os três valores obtidos para o intervalo de amostragem, tem-se que:

$$T = 1 \text{ s}$$

$$T = 5 \text{ s}$$

$$T = 1 \text{ s}$$

Vê-se que o período de amostragem recomendado pelo primeiro método coincide com o do terceiro método. Isto nem sempre ocorre. Suponha que a função de transferência do processo tivesse parâmetros de tempo diferentes dos fornecidos originalmente, como, por exemplo:

$$G(s) = \frac{3 \cdot e^{-1 \cdot s}}{8 \cdot s + 1}$$

Neste caso, o primeiro método resulta em  $T = 0,8 \text{ s}$  e o segundo em  $T = 4 \text{ s}$ . Para calcular o período de amostragem do terceiro, considere as curvas de autocovariâncias normalizadas linear e não linear mostradas na Figura 8.18.

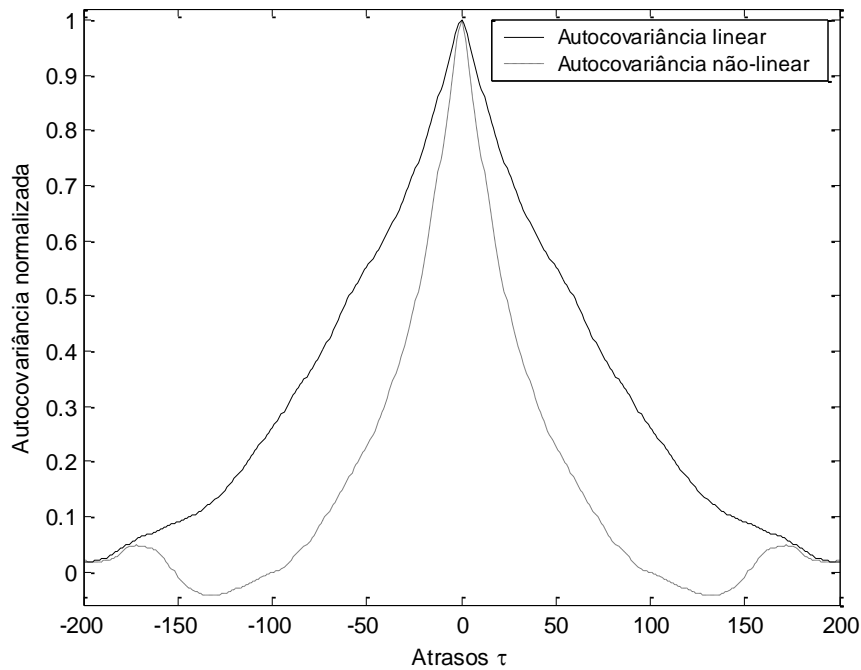


Fig. 8.18 Autocovariâncias normalizadas linear e não linear para processo com parâmetros de tempo diferentes.

Na Figura 8.18 o primeiro mínimo aparece na função autocovariância não linear e ocorre para  $\tau = \tau_m^* = 133$ . Resulta:

$$7 \leq \Delta \leq 13$$

Assumindo-se novamente um valor médio para a relação acima, resulta  $\Delta = 10$ . Como a coleta de pontos foi feita com  $T = 0,1\text{ s}$ , resulta que se deve decimar os dados com um fator 10. Isto significa que o período de amostragem a ser utilizado é  $T = 1\text{ s}$ . Portanto, neste caso tem-se que:

$$T = 0,8\text{ s} \quad T = 4\text{ s} \quad T = 1\text{ s}$$

Para mostrar a diferença existente entre estes três valores na coleta de dados, apresenta-se a resposta do sistema com  $\tau = 8\text{ s}$  e  $\theta = 1\text{ s}$ , afetada de ruído, mas considerando-se como entrada não mais um sinal RBS, mas sim um sinal degrau unitário. Apresenta-se primeiramente, na Figura 8.19, a resposta do sinal coletado com intervalo de amostragem de  $0,1\text{ s}$ .

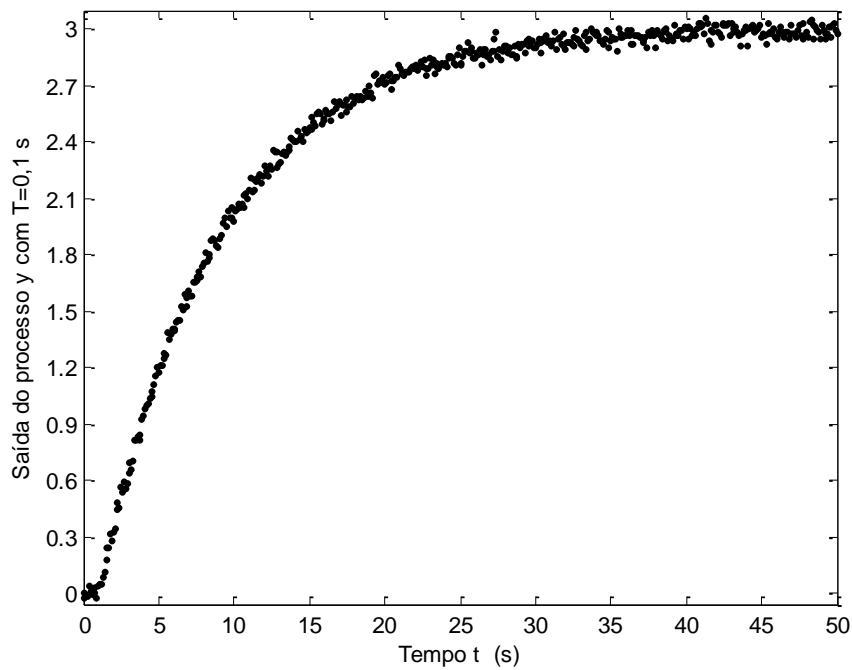


Fig. 8.19 Resposta do processo afetado de ruído com  $T = 0,1$  s .

Nos 50 segundos do ensaio foram coletados 501 pontos. Na Figura 8.20 apresenta-se a resposta do sistema com  $T = 0,8$  s .

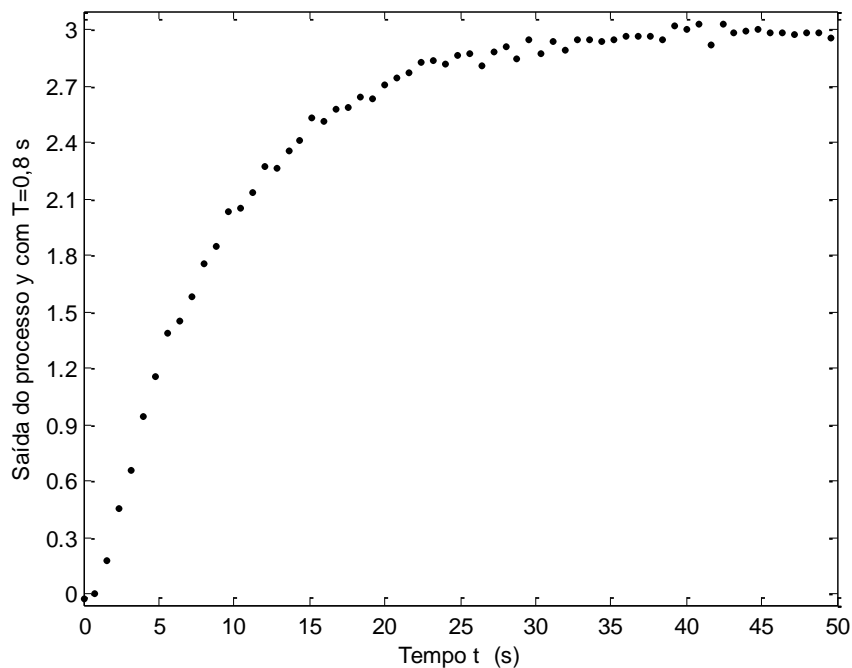
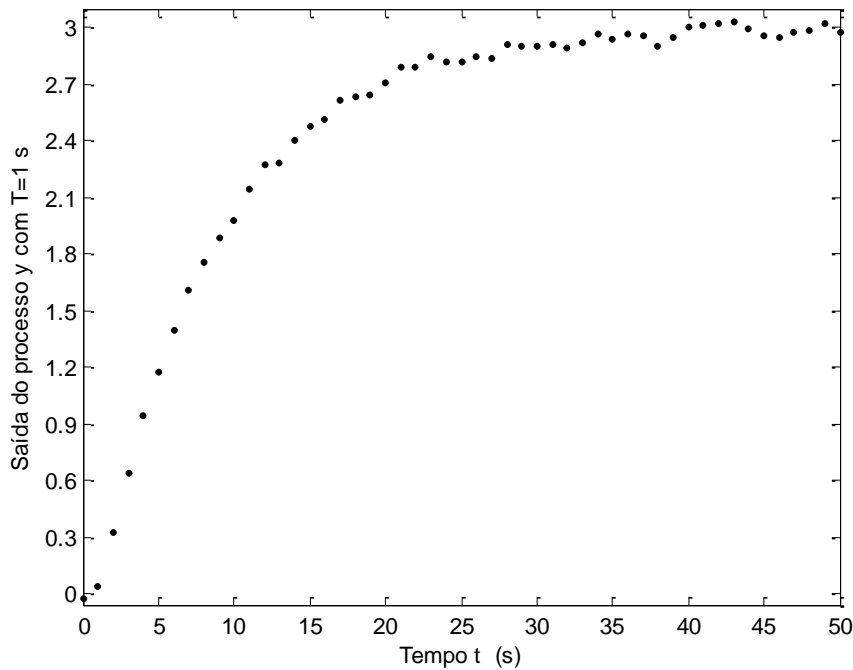
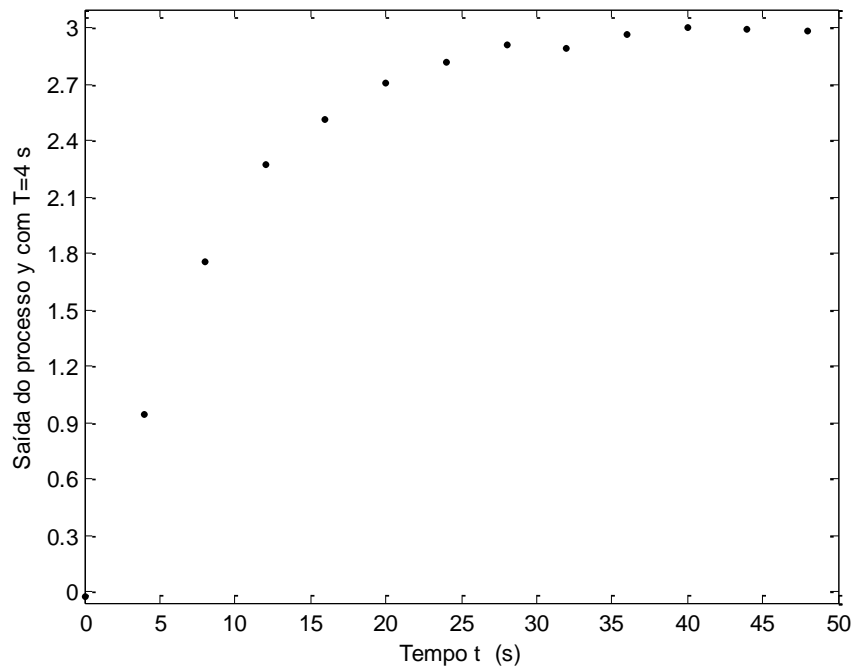


Fig. 8.20 Resposta do processo afetado de ruído com  $T = 0,8$  s .

Foram coletados 63 pontos. Na Figura 8.21 mostra-se a resposta com  $T = 1$  s .

Fig. 8.21 Resposta do processo afetado de ruído com  $T = 1$  s.

Foram coletados 54 pontos. Na Figura 8.22 apresenta-se a resposta com  $T = 4$  s.

Fig. 8.22 Resposta do processo afetado de ruído com  $T = 4$  s.

Foram coletados 13 pontos. Nota-se nas figuras acima que a coleta com  $T = 1$  s e  $T = 0,8$  s varre os pontos de tal modo, que dificilmente alguma variação significativa no processo deixaria de ser detectada. Já no caso com  $T = 4$  s, vê-se que o espaçamento entre os pontos poderia permitir a presença de variações rápidas no processo que passariam despercebidas.

Analisa-se agora o que ocorre se a variância do ruído passa de 0,001 para 0,01. Para tal, exibe-se na Figura 8.23 o gráfico das autocovariâncias normalizadas linear e não linear.

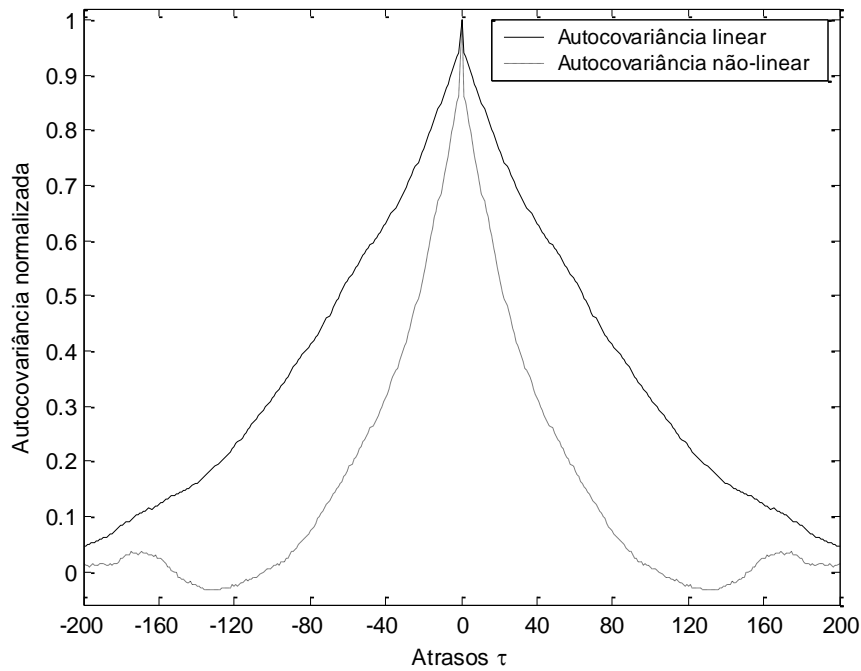


Fig. 8.23 Autocovariâncias normalizadas linear e não-linear para perturbação com variância de 0,01 ao invés de 0,001.

O primeiro mínimo na Figura 8.23 aparece na função autocovariância não-linear e ocorre para  $\tau = \tau_m^* = 129$ , portanto muito similar ao valor obtido na Figura 8.16, onde a variância da perturbação é de 0,001. Dessa forma, percebe-se que, neste caso, o aumento da intensidade das perturbações tem um efeito pequeno no resultado que determina o intervalo de amostragem. Considere que  $10 \cdot \Delta \leq \tau_m^* \leq 20 \cdot \Delta$ . Resulta:

$$7 \leq \Delta \leq 12$$

Assumindo-se um valor médio para a relação acima, resulta  $\Delta = 10$ , idêntico ao obtido para o caso da Figura 8.16.

#### 8.5.4 Considerações diversas relativas ao período de amostragem

As seguintes considerações relativas ao período de amostragem são importantes (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

- pré-filtragem dos dados é frequentemente necessária para evitar *aliasing*. Filtros analógicos devem ser usados. A largura de banda do filtro deve ser um pouco menor que a frequência de amostragem. O filtro deveria ter um ganho constante e uma fase próxima a 0 em baixas e médias frequências, visando não distorcer o sinal desnecessariamente. Para altas frequências o ganho deve cair rapidamente. Para um filtro assim concebido, as perturbações de alta frequência nos dados são filtradas. Isso diminuirá o efeito *aliasing* e pode também aumentar a relação sinal/ruído;
- sinais de saída devem sempre ser pré-filtrados. Caso o sinal de entrada não esteja em uma forma amostrada, mas seja mantido constante ao longo dos intervalos de amostragem, pode ser útil pré-filtrá-los também;

- assuma que o intervalo total de tempo para um experimento de identificação esteja fixado. Pode então ser útil amostrar os sinais a uma taxa alta, visto que assim mais medições do sistema são coletadas; e
- assuma que o número total de dados coletados esteja fixado, restando estabelecer o intervalo de amostragem. Caso ele seja muito grande, os dados conterão muito poucas informações sobre a dinâmica de alta frequência. Se ele for muito pequeno, as perturbações poderão ter uma influência relativamente grande. Além disso, neste último caso, os dados amostrados podem conter poucas informações acerca das dinâmicas de baixa frequência do sistema.

## 8.6 DURAÇÃO DO EXPERIMENTO

Como a precisão da identificação depende da duração do experimento, ele deveria ser o mais longo possível. A variância das estimativas é frequentemente proporcional ao inverso da duração do experimento. Isto significa que para melhorar o desvio-padrão das estimativas de um fator de 2, o experimento deve ser 4 vezes mais longo. Na prática, há frequentemente restrições severas à duração do experimento. Por exemplo, a duração do experimento deve ser curta porque perturbações extras são frequentemente introduzidas. *Drift* dos dados e possíveis mudanças na dinâmica do processo são outros fatores limitantes. Uma regra prática é que o experimento tenha, no mínimo, uma duração de 10 vezes a maior constante de tempo do processo (GUSTAVSSON, 1975).

Outra sugestão é fazer a duração do experimento ser de 5 a 18 vezes o tempo de acomodação ou de estabilização  $t_s$  do processo. Este tempo pode ficar na faixa entre 5 a 8 vezes  $t_s$  se o número de entradas for pequeno e se a relação sinal/ruído for elevada. Por outro lado, a duração do teste deve ser longa, de 14 a 18 vezes o tempo de acomodação se há muitas variáveis manipuladas e se a relação sinal/ruído for baixa. É claro que se o processo for linear e praticamente livre de perturbações, o teste pode ser muito menor, durando apenas de 1 a 2 vezes o tempo de estabilização. Grosseiramente falando, ao se quadruplicar o tempo da coleta de dados, diminui-se à metade o erro do modelo (ZHU, 2001).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas** – técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. 4ed. Belo Horizonte, Editora UFMG, 2015.
- ÅSTRÖM, K. J. Computer control of a paper machine: an application of linear stochastic control theory. **IBM Journal of research and development**, v.11, n.4, p.389-405, July 1967.
- GOODWIN, G. C. Experiment design for system identification. IN: **Encyclopedia of systems and control**. Editada por SINGH, M., Oxford, Pergamon Press, 1987.

- GUSTAVSSON, I. Survey of applications of identification in chemical and physical processes. **Automatica**, v.11, n.1, p.3-24, 1975.
- ISERMANN, R. Practical aspects of process identification. **Automatica**, v.16, n.5, p.575-87, 1980.
- JERÔNIMO, R. A. Seleção de variáveis de entrada para identificação de sistemas aplicada a uma planta de tratamento de efluentes. **Tese** de Doutorado apresentada ao Depto. de Engenharia de Telecomunicações e Controle da Escola Politécnica da USP, 2004.
- LJUNG, L. **System identification: theory for the user**. 2.ed., Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1999.
- MEHRA, R. K. Choice of input signals. In: **Trends and progress in systems identification**, p.305-366, editado por EYKHOFF, P., Elmsford, NY, Pergamon Press, 1981.
- SEBORG, D. E.; EDGAR, T.F.; MELLICHAMP, D. A. **Process Dynamics and Control**. 2.ed., New York, John Wiley, 2004.
- SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. **System identification**. Hemel Hempstead, U.K., Prentice Hall International, 1989.
- TULLEKEN, H. J. A. F. Generalized binary noise test-signal concept for improved identification-experiment design. **Automatica**, v.26, n.1, p.37-49, 1990.
- YUAN, Z. D.; LJUNG, L. Unprejudiced optimal open loop input design for identification of transfer functions. **Automatica**, v.21, n.6, p.697-708, 1985.
- ZARROP, M. B. **Optimal experimental design for dynamic system identification**. New York, Springer-Verlag, 1979. ZHU, Y. **Multivariable system identification for Process Control**. Londres, Pergamon, 2001.