

CAPÍTULO 13

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS EM MALHA FECHADA

A maior parte dos processos opera com malhas de controle e várias entradas do processo são determinadas como realimentação de outros sinais. Para muitos processos é impossível realizar experimentos em malha aberta devido a razões de segurança e restrições da produção. O processo pode ser instável em malha aberta ou deve ser mantido dentro de uma faixa desejada de operação. Há inclusive processos que estão inerentemente em malha fechada como, por exemplo, processos com recirculação (refluxo), processos econômicos e biológicos (GUSTAVSSON *et al.*, 1977). Nas aplicações industriais, a realimentação pode ocorrer de diversas formas, como, por exemplo, através da ação de um operador que faz ajustes ocasionais.

Como há certos métodos de identificação que falham na determinação do modelo correto para sistemas operando em malha fechada, deve-se ter um certo cuidado ao realizar a identificação nessa condição. Procura-se mostrar neste capítulo que, na maioria das situações, a identificação em malha fechada é factível, tanto do ponto de vista da identificabilidade quanto da precisão, abordando-se aqui os problemas de identificabilidade que podem surgir da identificação em malha fechada.

Em processos operando em malha fechada, o regulador pode ser considerado como parte do que está sendo identificado e então a entrada e a saída são encarados como um processo conjunto. Este enfoque é muito natural, por exemplo, em sistemas econômicos, onde o mecanismo de realimentação não é manipulável. Para outros processos, em particular nos industriais, é natural assumir que o regulador seja conhecido e que ele possa ser escolhido livremente, desde que ele forneça um desempenho aceitável da saída.

É muito importante saber se e como o sistema em malha aberta pode ser identificado quando ele deve operar em malha fechada durante o experimento. Será mostrado que a realimentação pode causar dificuldades mas também que elas podem ser contornadas. Há inclusive certos casos práticos, em que se deve incluir limites nas variâncias da entrada e saída, em que o uso da realimentação pode ser uma vantagem.

Nas seções que se seguem enfocam-se os seguintes aspectos de identificabilidade e precisão relacionados com a identificação em malha fechada:

- a influência do método escolhido de identificação;
- o efeito de diferentes estruturas de modelo; e
- várias configurações possíveis de realimentação.

Uma grande preocupação aqui se concentra nas propriedades de identificabilidade dos sistemas operando em malha fechada. Serão enfatizadas as condições sob as quais é possível identificar um sistema em malha fechada. Outra preocupação neste capítulo é com relação a aspectos de precisão. Uma condição experimental que proporcione precisão ótima do modelo identificado é apresentada e se constatará que a melhor condição experimental frequentemente inclui a realimentação.

13.1 MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO EM MALHA FECHADA

Recentemente, tem havido um maior interesse em identificar um processo enquanto ele está operando sob controle por realimentação, ao invés de excitá-lo em malha aberta.

Nos sistemas operando em malha fechada, diferentes formas de se aplicar os métodos de identificação são possíveis. Um modo que pode sempre ser aplicado é tratar os dados de entrada e saída exatamente como se eles fossem obtidos de um experimento em malha aberta, isto é, desconsiderando a existência da realimentação. Este procedimento é intitulado **identificação direta**. Neste caso, para realizar a identificação, mede-se a saída do controlador $u(t)$ e a saída do processo $y(t)$.

Se o regulador for linear, sem ruído e invariante no tempo ou alterna entre diferentes leis de realimentação, então um modo indireto de estimar os parâmetros pode ser aplicado. Os parâmetros do sistema em malha fechada podem ser determinados por algum método. Os parâmetros do modelo em malha aberta podem então ser determinados a partir dos parâmetros estimados do processo em malha fechada usando, para tal, o conhecimento do regulador. Neste caso, se assume que o valor de referência externo $r(t)$ seja mensurável e que a lei de realimentação seja conhecida. Inicialmente, o sistema em malha fechada é identificado considerando $r(t)$ como entrada e $y(t)$ como saída. O sistema em malha aberta é então determinado a partir do regulador conhecido e do sistema identificado em malha fechada. Este enfoque é denominado **identificação indireta**.

Por fim, em alguns casos pode ser vantajoso considerar tanto a entrada quanto a saída conjuntamente, como se fossem saídas de um sistema excitado apenas por perturbações e entradas extras. Os dados registrados $u(t)$ e $y(t)$ são encarados como saídas de um sistema multivariável excitado por ruído branco, isto é, como uma série temporal de dimensão $n_y + n_u$. Este sistema multivariável é identificado usando os parâmetros originais como incógnitas. Esta forma é chamada de **identificação conjunta de entrada e saída** (GUSTAVSSON *et al.*, 1977).

Em cada um desses enfoques, diferentes métodos de identificação podem ser usados, incluindo-se os não paramétricos (análise espectral e de correlação) e os paramétri-

cos. Uma maior ênfase será dada aos métodos de identificação do tipo erro de predição.

13.2 EMPREGO DE MÉTODO INADEQUADO DE IDENTIFICAÇÃO EM MALHA FECHADA

Seja o sistema da Figura 13.1. Ao identificar sistemas em malha fechada, deve-se tomar cuidado para não se obter o inverso da função de transferência da realimentação.

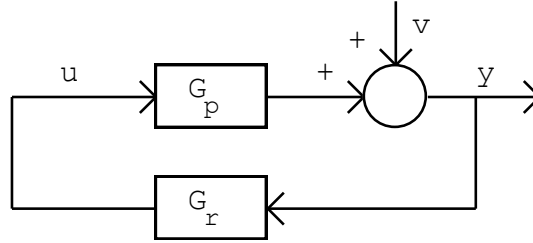


Fig. 13.1 Sistema típico operando em malha fechada.

Suponha que a identificação seja realizada através de métodos que não impliquem em uma estrutura causal, como, por exemplo, métodos baseados na análise de correlação e análise espectral. Então uma tentativa para identificar G_p a partir das medições de u e y de uma forma direta, resulta em:

$$\hat{G}_p = \frac{1}{G_r}$$

Trata-se do inverso da função de transferência da realimentação. Portanto métodos não paramétricos do tipo análise de correlação e análise espectral não podem ser aplicados de forma direta na identificação de sistemas operando em malha fechada, pois a identificabilidade do sistema não é alcançada. Para demonstrar a veracidade desta afirmação, suponha que a realimentação seja realizada por um controlador proporcional de ganho f durante o experimento. Resulta:

$$u(t) = -f \cdot y(t) \quad (13.1)$$

Aplica-se então a análise de correlação para determinar a função-peso do sistema. Para tanto, substitui-se (13.1) em (7.7), resultando:

$$\begin{aligned} E[y(t) \cdot u(t - \tau)] &= -f \cdot E[y(t) \cdot y(t - \tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \cdot E[u(t - k) \cdot u(t - \tau)] + E[v(t) \cdot u(t - \tau)] = \\ &= f^2 \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \cdot E[y(t - k) \cdot y(t - \tau)] - f \cdot E[v(t) \cdot y(t - \tau)] \end{aligned} \quad (13.2)$$

Supondo que a perturbação $v(t)$ seja ruído branco de média nula e variância σ^2 , resulta para $\tau \neq 0$ que:

$$r_{vy}(\tau) = E[v(t) \cdot y(t - \tau)] = 0 \quad (13.3)$$

Substituindo-se (13.3) em (13.2) resulta:

$$-f \cdot r_y(\tau) = -f \cdot E[y(t) \cdot y(t - \tau)] = f^2 \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \cdot E[y(t - k) \cdot y(t - \tau)] = f^2 \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \cdot r_y(\tau - k) \quad (13.4)$$

Como se usou ruído branco como perturbação, resulta que $r_y(\theta)=0$ para $\theta \neq 0$ e $r_y(\theta) \neq 0$ para $\theta=0$. Assim, $r_y(\tau-k)$ em (13.4) só é diferente de 0 quando $\tau=k$. Resulta:

$$g(k) = -\frac{r_y(k)}{f \cdot r_y(0)} = -\frac{r_y(k)}{f \cdot \sigma^2}$$

Portanto:

$$g(k) = \begin{cases} -\frac{1}{f} & \text{para } k=0 \\ 0 & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$$

Verifica-se que o modelo obtido (função-peso) corresponde ao inverso da função de transferência do controlador, a qual é uma constante e cuja resposta impulsiva é $-f \cdot \delta(t)$.

Usando-se outros métodos de identificação, por exemplo, um método de predição do erro e postulando um modelo paramétrico causal, a identificabilidade pode ser alcançada para esse tipo de condição experimental. Isto não é sempre verdadeiro, o que pode ser visto na próxima seção.

13.3 IDENTIFICAÇÃO DIRETA

Neste tipo de enfoque, os valores registrados de $\{u(t)\}$ e $\{y(t)\}$ são usados no procedimento de estimação dos parâmetros do vetor θ , como se nenhuma realimentação existisse. Esta é, sem dúvida, uma abordagem interessante, pois se ela funciona, não é necessário se preocupar com a possível presença da realimentação.

São fornecidos nas subseções a seguir dois exemplos de métodos de identificação direta: o primeiro é um caso em que não se alcança a identificabilidade do sistema e o segundo é um caso em que isso ocorre.

13.3.1 Emprego de método de identificação paramétrica gerando modelo incorreto

Considere a seguinte estrutura de um processo de 1ª ordem:

$$y(t) + a \cdot y(t-1) = b \cdot u(t-1) + e(t) \quad E[e^2(t)] = \lambda^2 \quad (13.5)$$

onde $e(t)$ é ruído branco.

Suponha a seguinte estrutura de modelo:

$$y(t) + \hat{a} \cdot y(t-1) = \hat{b} \cdot u(t-1) + \varepsilon(t)$$

Assuma que o sistema seja controlado por um controlador proporcional:

$$u(t) = -f \cdot y(t) \quad (13.6)$$

Inserindo-se a lei de realimentação no modelo resulta:

$$\varepsilon(t) = y(t) + (\hat{a} + \hat{b} \cdot f) \cdot y(t-1) \quad (13.7)$$

Trata-se do modelo do sistema em malha fechada. A Expressão (13.7) mostra que somente a combinação linear $\hat{a} + \hat{b} \cdot f$ pode ser estimada a partir dos dados. Todos os va-

lores de \hat{a} e \hat{b} que resultem no mesmo valor para $\hat{a} + \hat{b} \cdot f$ gerarão a mesma sequência de resíduos $\{\varepsilon(t)\}$ e o mesmo valor da função custo. Em particular, a função-custo $V(\theta)$:

$$V(\theta) = \frac{1}{2N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t)$$

não terá um único mínimo. Ela é minimizada ao longo de uma linha reta (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Uma tentativa para estimar os parâmetros a e b , por exemplo, pelo método dos mínimos quadrados, mostra que todos os modelos com parâmetros (\hat{a}, \hat{b}) do tipo:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= a + \gamma \cdot f \\ \hat{b} &= b - \gamma \end{aligned} \tag{13.8}$$

onde γ é um valor escalar arbitrário, fornecem a mesma descrição entrada/saída do sistema que usando os parâmetros (a, b) . Para comprovar esta assertiva basta substituir (13.8) em (13.7) e verifica-se que resulta na estrutura real do processo dada em (13.5). Portanto, para $\gamma \neq 0$, uma descrição errônea do sistema em malha aberta é obtida.

Não há, portanto, nenhuma maneira de se distinguir entre esses modelos. Repare também que é inócuo conhecer o parâmetro f do controlador. Resulta, portanto, que, neste caso, a realimentação proposta torna os experimentos não informativos com relação à estrutura de modelo (13.5). No entanto, o sinal de entrada $u(t)$ é p.e., pois ele consiste em ruído branco filtrado que está sendo realimentado. A persistência da excitação não é, portanto, uma condição suficiente na entrada para a identificabilidade com experimentos em malha fechada.

Se a estrutura de modelo (13.5) for restrita, por exemplo, atribuindo-se a a ou a b um valor (por exemplo $b = 1$), resulta:

$$y(t) + \hat{a} \cdot y(t-1) = u(t-1) + \varepsilon(t)$$

Então, os dados gerados através da realimentação (13.6) são suficientemente informativos para distinguir entre diferentes valores do parâmetro a , de forma que o sistema (13.5) se torna identificável.

13.3.2 Emprego de método de identificação paramétrica gerando modelo correto

Em muitos casos é, em princípio, possível identificar um processo, mesmo que os experimentos tenham sido realizados com o processo operando com realimentação da saída (isto é, em malha fechada). Por exemplo, uma sugestão para produzir experimentos suficientemente informativos em malha fechada é utilizar reguladores variantes no tempo ou não lineares ou afetados por ruído ou ainda com uma entrada externa aplicada. Nestes casos, a identificabilidade é assegurada na maioria das vezes. Além disso, o mesmo procedimento de identificação pode ser usado como se o processo estivesse operando em malha aberta durante os experimentos. A análise deve, no entanto, ser realizada com métodos de identificação paramétricos do tipo predição de erro (por exemplo método dos mínimos quadrados, método da máxima verossimilhança etc). Pode acontecer que uma

melhor precisão possa ser obtida de um experimento em malha fechada, por exemplo, sob a hipótese de variância da saída limitada, do que para um experimento em malha aberta com uma entrada projetada de forma ótima (GUSTAVSSON, 1975; LJUNG, 1999).

Apresenta-se, a seguir, uma condição para controladores variantes no tempo com entrada extra para produzir experimentos informativos (LJUNG, 1999). Seja o sinal de entrada dado pela realimentação da saída mais um sinal extra:

$$u(t) = F_i(q) \cdot y(t) + K_i(q) \cdot w(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (13.9)$$

F_i e K_i são filtros lineares que são mudados durante o experimento dentre r diferentes opções. As mudanças são feitas de modo que cada controlador seja usado durante uma certa proporção (diferente de zero) do tempo total do experimento.

A variável $w(t)$ em (13.9) é uma perturbação externa ao sinal de entrada.

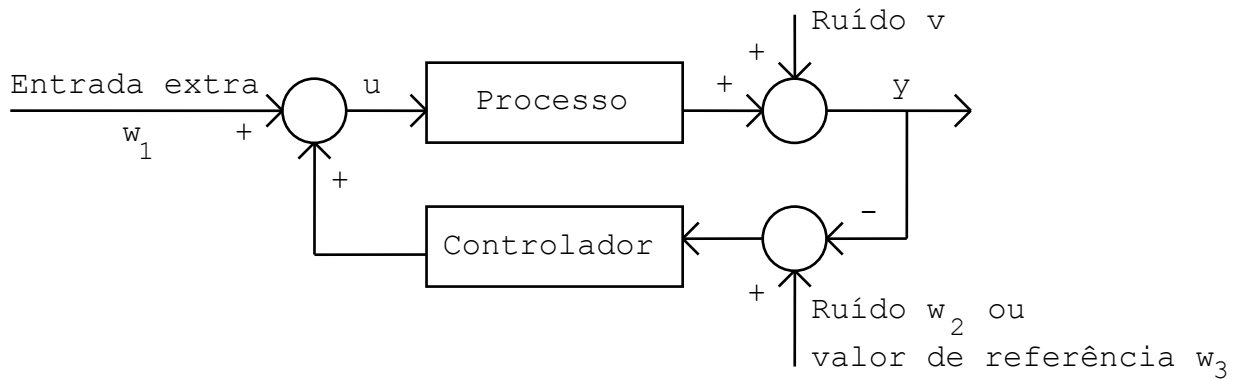


Fig. 13.2 Diagrama de blocos de um sistema típico em malha fechada.

Analisando-se a Figura 13.2, verifica-se que w pode ser considerado como um sinal de entrada extra w_1 (mensurável), como ruído w_2 no controlador (não mensurável) ou mudanças no valor de referência do controlador w_3 ou como uma combinação desses efeitos (LJUNG, 1999). Assuma que as malhas fechadas obtidas com os diferentes controladores sejam todas estáveis. Resulta que um sinal extra w que passe através de filtros sem zeros no círculo unitário gerará experimentos informativos, independente da realimentação usada. Além disso, mesmo que nenhuma entrada extra seja permitida, experimentos informativos resultarão, caso se comute entre dois diferentes controladores lineares (LJUNG, 1999).

EXEMPLO (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989)

Retomando-se o exemplo da Subseção 13.3.1, suponha que se use um controlador proporcional variante no tempo, de modo que a entrada $u(t)$ assuma os seguintes valores:

$$u(t) = \begin{cases} -f_1 \cdot y(t) & \text{para uma proporção } \gamma_1 \text{ do tempo total do experimento} \\ -f_2 \cdot y(t) & \text{para uma proporção } \gamma_2 \text{ do tempo total do experimento} \end{cases}$$

Então:

$$y_i(t) + (a + b \cdot f_i) \cdot y_i(t-1) = e(t) \quad (13.10)$$

$$\varepsilon_i(t) = y_i(t) + (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i) \cdot y_i(t-1) \quad (13.11)$$

onde $i = 1$ ou 2 , dependendo do controlador usado.

Deve-se enfatizar que este exemplo só tem valor didático, pois na prática, não se conhece a expressão do sistema real, conforme mostrada em (13.10).

Aplica-se agora o método de identificação. Seleciona-se aqui o método dos mínimos quadrados. Neste caso, o vetor de parâmetros $\theta = (a \ b)^T$ é determinado como o vetor que minimize o somatório dos erros da equação ao quadrado $\varepsilon_i^2(t)$. Isto significa que se busca a seguinte estimativa:

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \arg \min_{\theta} V(\theta)$$

onde a função-custo $V(\theta)$ é dada por:

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_i^2(t)$$

Calculando-se a função-custo para a Equação (13.11) resulta:

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \left(\sum_{t=1}^N y_i^2(t) + 2 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i) \cdot \sum_{t=1}^N y_i(t) \cdot y_i(t-1) + (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i)^2 \cdot \sum_{t=1}^N y_i^2(t-1) \right) \quad (13.12)$$

Caso se aproxime o somatório pelo operador expectância, como indicado a seguir:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_i^2(t) \approx E[y_i^2(t)]$$

a Expressão (13.12) fica:

$$V(\hat{\theta}) = E[y_i^2(t)] + 2 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i) \cdot E[y_i(t) \cdot y_i(t-1)] + (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i)^2 \cdot E[y_i^2(t-1)] \quad (13.13)$$

De (13.10) resulta:

$$y_i^2(t) = e^2(t) - 2 \cdot (a + b \cdot f_i) \cdot e(t) \cdot y_i(t-1) + (a + b \cdot f_i)^2 y_i^2(t-1)$$

O valor esperado de $y_i^2(t)$ em (13.13) é dado por:

$$E[y_i^2(t)] = \lambda^2 + (a + b \cdot f_i)^2 \cdot E[y_i^2(t)] = \frac{\lambda^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} \quad (13.14)$$

Como se supõe estar lidando com processos estocásticos estacionários, resulta:

$$E[y_i^2(t)] = E[y_i^2(t-1)]$$

O valor esperado de $y_i(t)y_i(t-1)$ em (13.13) é dado por:

$$\begin{aligned} E[y_i(t) \cdot y_i(t-1)] &= E[e(t) - (a + b \cdot f_i) \cdot y_i(t-1)] \cdot y_i(t-1) = E[e(t) \cdot y_i(t-1)] - (a + b \cdot f_i) \cdot E[y_i^2(t-1)] = \\ &= -(a + b \cdot f_i) \frac{\lambda^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} \end{aligned} \quad (13.15)$$

Por fim, o valor esperado de $y_i^2(t-1)$ em (13.13) é dado por:

$$E[y_i^2(t-1)] = E[y_i^2(t)] = \frac{\lambda^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} \quad (13.16)$$

Substituindo-se (13.14), (13.15) e (13.16) em (13.13) resulta:

$$V(\hat{\theta}) = \frac{\lambda^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} - 2 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i) \cdot (a + b \cdot f_i) \frac{\lambda^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} + (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i)^2 \frac{\lambda^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} =$$

$$= \lambda^2 \cdot \left[\frac{1 - 2 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i) \cdot (a + b \cdot f_i) + (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i)^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} \right]$$

Introduzindo-se $(\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i)^2 - (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i)^2$ no numerador, resulta:

$$V(\hat{\theta}) = \lambda^2 \cdot \left[\frac{1 - 2 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i) \cdot (a + b \cdot f_i) + (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i)^2 + (a + b \cdot f_i)^2 - (a + b \cdot f_i)^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} \right]$$

Rearranjando-se os termos:

$$V(\hat{\theta}) = \lambda^2 \cdot \left[\frac{1 - (a + b \cdot f_i)^2 + (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i)^2 - 2 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i) \cdot (a + b \cdot f_i) + (a + b \cdot f_i)^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} \right] =$$

$$V(\hat{\theta}) = \lambda^2 \cdot \left[1 + \frac{[(\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i) - (a + b \cdot f_i)]^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} \right]$$

Portanto:

$$V(\hat{\theta}) = \lambda^2 \cdot \left[1 + \frac{(\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i - a - b \cdot f_i)^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} \right] \quad (13.17)$$

Como se tem dois controladores com ganho f_i , cada um deles operando uma parte γ_i do tempo total do experimento, a função-custo $V(\hat{\theta})$ calculada em (13.17) se torna:

$$V(\hat{a}, \hat{b}) = \lambda^2 + \gamma_1 \cdot \lambda^2 \frac{(\hat{a} + \hat{b} \cdot f_1 - a - b \cdot f_1)^2}{1 - (a + b \cdot f_1)^2} + \gamma_2 \cdot \lambda^2 \frac{(\hat{a} + \hat{b} \cdot f_2 - a - b \cdot f_2)^2}{1 - (a + b \cdot f_2)^2} \quad (13.18)$$

Este mesmo resultado poderia ter sido alcançado caso se fizesse:

$$V_i(\hat{a}, \hat{b}) = \gamma_i \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_i^2(t) \cong \gamma_i \cdot E[\varepsilon_i^2(t)] \quad \text{com } i = 1, 2$$

Então:

$$V_i(\hat{a}, \hat{b}) = \gamma_i \cdot \lambda^2 \frac{1 + (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i)^2 - 2 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i) \cdot (a + b \cdot f_i)}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} = \gamma_i \cdot \lambda^2 \cdot \left[1 + \frac{(\hat{a} + \hat{b} \cdot f_i - a - b \cdot f_i)^2}{1 - (a + b \cdot f_i)^2} \right]$$

Mas:

$$V = V_1 + V_2$$

Agora, como ocorreu na Seção 13.2, não existe um único ponto de mínimo, mas o mínimo corresponde a todos os pontos na linha dada por:

$$\hat{a} + \hat{b} \cdot f_1 = a + b \cdot f_1$$

Analogamente, os pontos de mínimo de V_2 estão situados na linha:

$$\hat{a} + \hat{b} \cdot f_2 = a + b \cdot f_2$$

A intersecção destas duas linhas resulta no ponto de mínimo da função-custo total V .

A condição $f_1 \neq f_2$ é necessária para gerar uma intersecção.

Derivando-se a Expressão (13.18) com relação a \hat{a} e \hat{b} resulta:

$$\frac{\partial V(\hat{\theta})}{\partial \hat{a}} = \frac{2 \cdot \lambda^2 \cdot \gamma_1 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_1 - a - b \cdot f_1)}{1 - (a + b \cdot f_1)^2} + \frac{2 \cdot \lambda^2 \cdot \gamma_2 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_2 - a - b \cdot f_2)}{1 - (a + b \cdot f_2)^2} = 0 \quad (13.19)$$

$$\frac{\partial V(\hat{\theta})}{\partial \hat{b}} = \frac{2 \cdot \lambda^2 \cdot \gamma_1 \cdot f_1 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_1 - a - b \cdot f_1)}{1 - (a + b \cdot f_1)^2} + \frac{2 \cdot \lambda^2 \cdot \gamma_2 \cdot f_2 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_2 - a - b \cdot f_2)}{1 - (a + b \cdot f_2)^2} = 0 \quad (13.20)$$

Caso se denomine:

$$X = \frac{2 \cdot \lambda^2 \cdot \gamma_1 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_1 - a - b \cdot f_1)}{1 - (a + b \cdot f_1)^2} \quad (13.21)$$

$$Y = \frac{2 \cdot \lambda^2 \cdot \gamma_2 \cdot (\hat{a} + \hat{b} \cdot f_2 - a - b \cdot f_2)}{1 - (a + b \cdot f_2)^2} \quad (13.22)$$

Substituindo-se (13.21) e (13.22) em (13.19) e (13.20), resulta:

$$\begin{cases} X + Y = 0 \\ f_1 \cdot X + f_2 \cdot Y = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema de equações tem uma solução única se e somente se $f_1 \neq f_2$.

Pode-se também chegar neste mesmo resultado de outra forma. Verifica-se, a partir de (13.19) e (13.20) que $\hat{a} = a$ e $\hat{b} = b$ satisfaz ambas as equações e, portanto, que se trata de um ponto de mínimo. Substituindo-se $\hat{a} = a$ e $\hat{b} = b$ em (13.18) resulta:

$$V(a, b) = \lambda^2 \leq V(\hat{a}, \hat{b})$$

Para examinar se $\hat{a} = a$ e $\hat{b} = b$ é o único mínimo, é necessário resolver a equação $V(\hat{a}, \hat{b}) = \lambda^2$ com relação a \hat{a} e \hat{b} . De (13.18) resulta:

$$\hat{a} + \hat{b} \cdot f_1 - a - b \cdot f_1 = 0$$

$$\hat{a} + \hat{b} \cdot f_2 - a - b \cdot f_2 = 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & f_1 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b \cdot f_1 \\ a + b \cdot f_2 \end{bmatrix}$$

que tem uma solução única se e somente se $f_1 \neq f_2$.

Dessa forma, o uso de dois controladores diferentes é suficiente, neste caso, para prover a identificabilidade do processo.

Os exemplos anteriores deste capítulo mostram os seguintes problemas ao se identificar sistemas operando em malha fechada (GUSTAVSSON *et al.*, 1977):

- a importância de se escolher um método apropriado de identificação (conforme exemplo da Seção 13.2);
- a importância de usar condições experimentais que garantam a identificabilidade (no exemplo da Subseção 13.3.1, comutar entre 2 controladores proporcionais com diferentes valores de f resolve o problema, como visto no exemplo da Subseção 13.3.2); e
- a importância de se escolher uma estrutura adequada de modelo em casos onde as condições experimentais não garantam a identificabilidade (conforme exemplo da Subseção 13.3.1).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GUSTAVSSON, I. Survey of applications of identification in chemical and physical processes. **Automatica**, v.11, n.1, p.3-24, 1975.

GUSTAVSSON, I.; LJUNG, L.; SÖDERSTRÖM, T. Identification of processes in closed loop - identifiability and accuracy aspects. **Automatica**, v.13, n.1, p.59-75, 1977.

LJUNG, L. **System identification: theory for the user**. 2.ed., Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1999.

SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. **System identification**. Hemel Hempstead, U.K., Prentice Hall International, 1989.