

CAPÍTULO 4

MODELOS COMPLETOS

Neste capítulo se discute a representação de um modelo completo, incluindo a parte do processo propriamente dito e a parte das perturbações.

4.1 REPRESENTAÇÃO DE MODELOS COMPLETOS

Segundo a relação (2.14), a saída pode ser calculada de modo exato, uma vez que a entrada seja conhecida. Na maioria dos casos isso é utópico. Sempre há sinais além do controle do usuário, que também afetam o sistema. Dentro do enfoque linear que se está adotando, supõe-se que tais efeitos possam ser concentrados em um termo aditivo $v(t)$ na saída, como visto na Figura 4.1 (LJUNG, 1999).

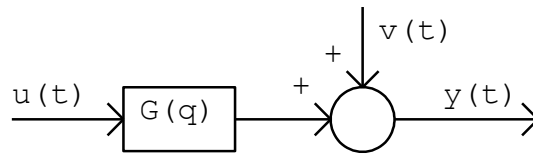


Fig. 4.1 Sistema com perturbação.

Resulta:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j) \cdot u(t-j) + v(t) \quad (4.1)$$

A Expressão (4.1), intitulada uma **equação de diferenças estocástica linear**, descreve um sistema de tempo discreto com período de amostragem unitário, onde $v(t)$ é uma variável aleatória com média nula que é independente de $u(t)$, de todos valores passados de $u(t)$ e também independente de todos valores passados de $v(t)$. A sequência $\{v(t), t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas. Assim, o processo estocástico $\{v(t)\}$ equivale a ruído branco de tempo discreto com média zero e variância σ^2 . Como $y(t)$ contém uma variável aleatória $v(t)$, ela também é uma variável aleatória. Há uma diferença relevante entre $y(t)$ e $v(t)$: valores de $y(t)$ em diferentes instantes de tempo são correlacionados, ao passo que de $v(t)$ não são.

As perturbações podem, em alguns casos, ser separadamente mensuráveis, mas em situações típicas elas são detectáveis apenas através do seu efeito na saída. Se a resposta ao impulso do sistema for conhecida, então o valor da perturbação $v(t)$ pode ser calculado por (4.1) no instante t (LJUNG, 1999).

A hipótese da Figura 4.1, que o ruído entra aditivamente na saída, implica em algumas restrições. Algumas vezes, as medições das entradas do sistema podem também estar afetadas por ruído. Em tais casos, supõem-se os valores medidos da entrada como entradas reais $u(t)$ e que seus desvios sejam propagados através do sistema e concentrados na perturbação $v(t)$. Considerando-se as Equações (2.15) e (3.3), a descrição básica de um sistema linear com perturbações aleatórias aditivas é:

$$y(t) = G(q) \cdot u(t) + H(q) \cdot e(t) = G(q) \cdot u(t) + v(t) \quad (4.2)$$

com $\{e(t)\}$ como uma sequência de variáveis aleatórias independentes com valor médio nulo e variância σ^2 .

A representação em diagrama de blocos da Equação (4.2) é mostrada na Figura 4.2.

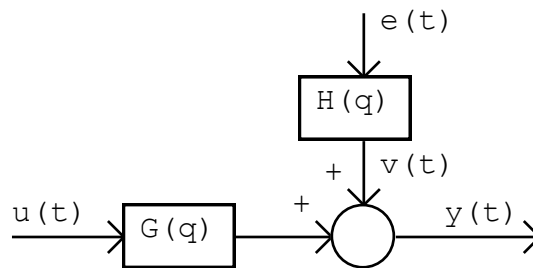


Fig. 4.2 Representação de sistema linear com perturbação aleatória.

Outras formas de representar sistemas lineares são muito comuns na prática, como os modelos em espaço de estados e as equações de diferença. Essas representações podem, no entanto, ser encaradas como modos particulares de representar as sequências $\{g(j)\}$ e $\{h(j)\}$.

Até aqui se trabalhou com sistemas possuindo uma entrada e uma saída escalar. Considera-se agora o caso em que o sinal de saída tenha p componentes e o sinal de entrada tenha m componentes.

Deve-se ressaltar que modelos com múltiplas saídas possuem uma estrutura interna muito complexa, de modo que sua parametrização não é trivial. Por outro lado, sistemas MISO não apresentam esses problemas (LJUNG, 1999).

Colocando-se os p componentes do sinal de saída em um vetor coluna p -dimensional $\mathbf{y}(t)$, construindo-se um vetor coluna de entrada m -dimensional $\mathbf{u}(t)$ e fazendo com que a perturbação seja também um vetor coluna p -dimensional $\mathbf{e}(t)$, a descrição básica do sistema passa a ser:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(q) \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(q) \cdot \mathbf{e}(t)$$

onde $\mathbf{G}(q)$ é uma matriz de transferência com dimensão $p \times m$ e $\mathbf{H}(q)$ tem dimensão $p \times p$.

Isto significa que a posição (i, j) de $\mathbf{G}(q)$, denotada por $G_{ij}(q)$, é a função de transferência escalar da entrada número j para a saída número i . A sequência $\{e(t)\}$ é uma sequência de vetores p -dimensionais aleatórios independentes com médias zero e matrizes de covariância $E[e(t) \cdot e^T(t)] = \Sigma$ (LJUNG, 1999).

4.2 EXEMPLO DE MODELO COMPLETO DE UM SISTEMA

Apresentam-se, a seguir, exemplos de modelos com e sem perturbação na saída.

4.2.1 Modelo do processo sem ruído nem perturbações

Emprega-se, como exemplo, o modelo de um processo SISO de primeira ordem afetado por tempo morto, conforme indicado a seguir:

$$G(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1} e^{-\theta \cdot s}$$

onde: $K = 3$ $\tau = 10 \text{ s}$ $\theta = 2 \text{ s}$.

Como a identificação pressupõe a geração de modelos em tempo discreto, tendo em mente que a coleta dos dados é feita pelo sistema de aquisição de dados em tempo discreto, o processo em tempo contínuo é discretizado a seguir, supondo-se a presença de um segurador de ordem zero. O intervalo de amostragem escolhido é $T = 0,5 \text{ s}$.

$$HG(z) = K \cdot (1 - z^{-1}) \cdot z^{-\theta/T} Z\left(\frac{1}{s \cdot (\tau \cdot s + 1)}\right)$$

Consultando-se uma tabela de transformadas Z, resulta:

$$HG(z) = K \cdot (1 - z^{-1}) \cdot z^{-\theta/T} \frac{(1 - e^{-T/\tau}) \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - e^{-T/\tau} \cdot z^{-1})}$$

Substituindo-se os valores numéricos:

$$HG(z) = \frac{0,1463 \cdot z^{-5}}{1 - 0,9512 \cdot z^{-1}}$$

Este mesmo resultado poderia ser obtido através do seguinte programa em Matlab:

```
% Conversão de função de transferência em tempo contínuo para tempo discreto
K = 3;
Tau = 10;
Theta = 2;
sysc = tf(K,[Tau 1],'inputdelay',Theta);
T=0.5;
sysd = c2d(sysc,T,'zoh');
```

O processo em tempo contínuo é representado com um segurador de ordem zero, ao passo que seu modelo é representado em tempo discreto, com ambos implementados em Simulink/Matlab, conforme mostrado na Figura 4.3.

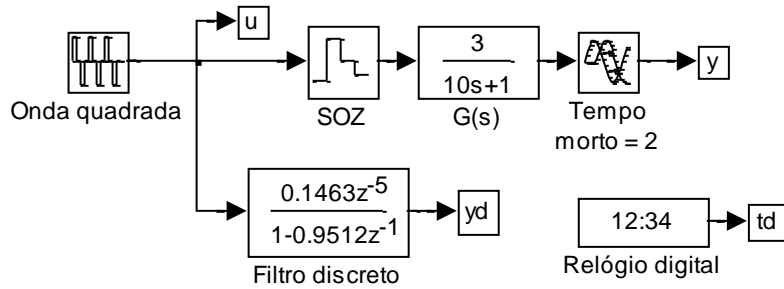


Fig. 4.3 Representação em Simulink apresentando o processo sem perturbações em tempo contínuo e seu modelo equivalente em tempo discreto.

A entrada aplicada é uma onda quadrada, conforme indicado na Figura 4.4, sendo que as saídas obtidas são mostradas na Figura 4.5.

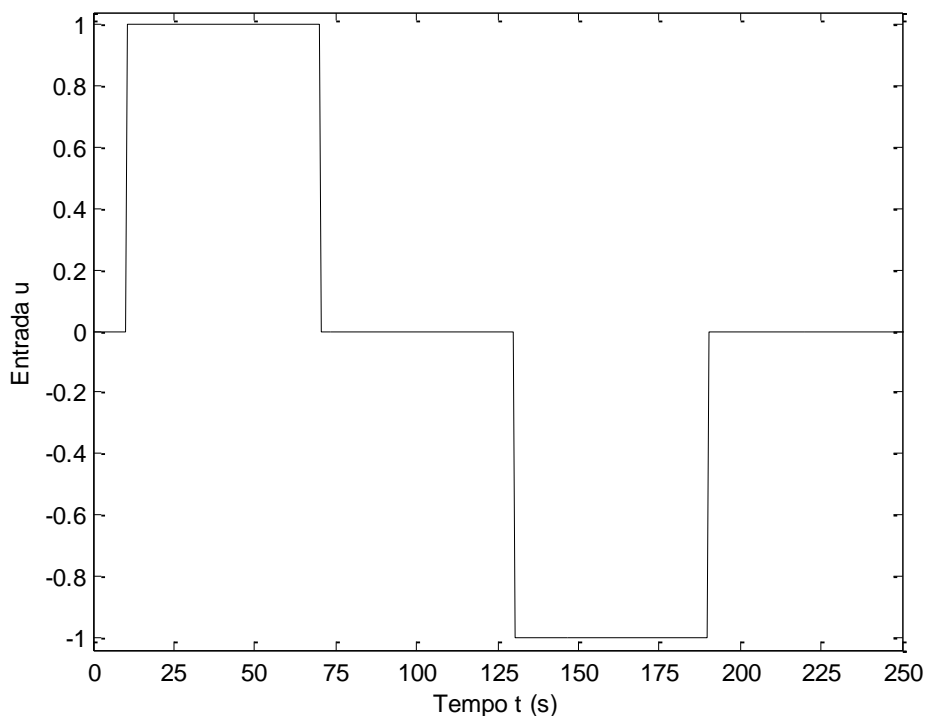


Fig. 4.4 Sinal de entrada $u(t)$.

A análise da Figura 4.5 indica que o processo e seu modelo respondem de forma praticamente idêntica, conforme era de se esperar, pois se conhece exatamente a descrição matemática do processo e o mesmo não é afetado por perturbações.

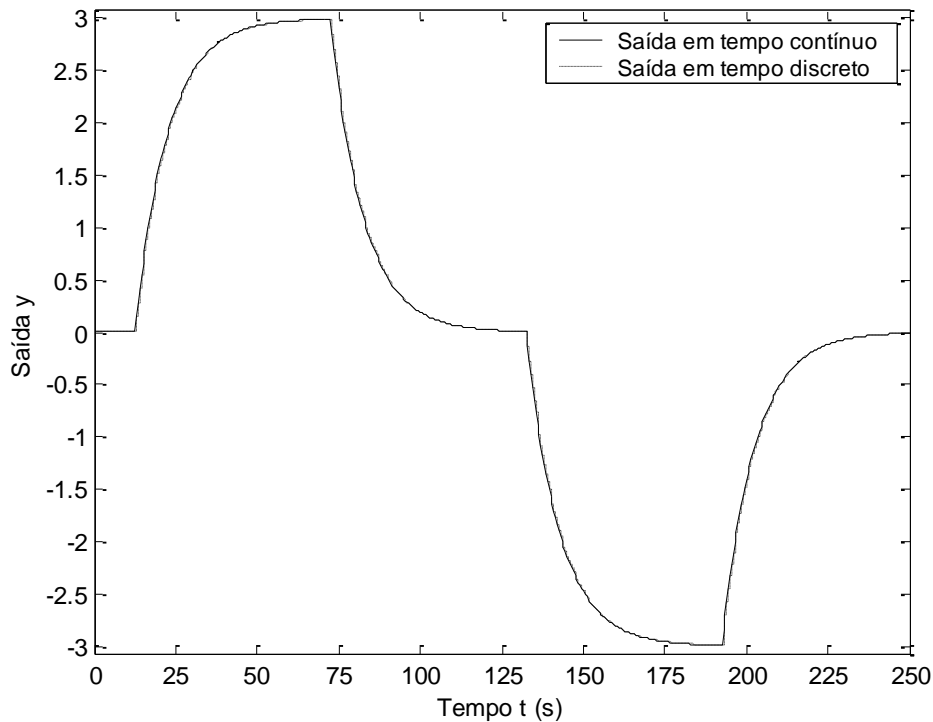


Fig. 4.5 Saída do processo em tempo contínuo e de seu modelo em tempo discreto.

4.2.2 Modelo do processo em tempo discreto afetado por perturbações aditivas na saída

Considera-se que a saída $y(t)$ do processo seja afetada por perturbações aditivas $v(t)$ na saída. Suponha que as perturbações sejam descritas por processos estocásticos do tipo ARMA, com o ruído entrando de três modos diferentes: $e(t)$, $e(t) + 0,5 \cdot e(t-1)$ ou ainda $e(t) - a \cdot e(t-1)$, onde $e(t)$ corresponde a ruído branco com média nula e variância σ^2 , conforme visto no item 3.4.1. Resulta a seguinte estrutura geral:

$$y(t) = a \cdot y(t-1) + b \cdot u(t-5) + e(t) + c \cdot e(t-1)$$

onde: $a = 0,9512$

$b = 0,1463$

$c = 0$ (para sistema S_1); $c = 0,5$ (para sistema S_2); $c = -0,9512$ (para sistema S_3)

$e(t)$ é uma sequência de ruído branco em tempo discreto (variáveis aleatórias independentes com distribuição normal, de média nula e variância σ^2)

Conforme o valor do parâmetro c utilizado, geram-se os seguintes sistemas:

$$S_1: y(t) = 0,9512 \cdot y(t-1) + 0,1463 \cdot u(t-5) + e(t)$$

$$S_2: y(t) = 0,9512 \cdot y(t-1) + 0,1463 \cdot u(t-5) + e(t) + 0,5 \cdot e(t-1)$$

$$S_3: y(t) = 0,9512 \cdot y(t-1) + 0,1463 \cdot u(t-5) + e(t) - 0,9512 \cdot e(t-1)$$

A seguir, representam-se as equações de diferenças resultantes na forma de diagramas de blocos, empregando funções de transferência discretas para os modelos do processo e das perturbações.

Sistema S_1 :

$$y(t) = \frac{0,1463 q^{-5}}{1 - 0,9512 q^{-1}} u(t) + \frac{1}{1 - 0,9512 q^{-1}} e(t) = G(q) \cdot u(t) + H_1(q) \cdot e(t)$$

O diagrama de blocos resultante é mostrado na Figura 4.6.

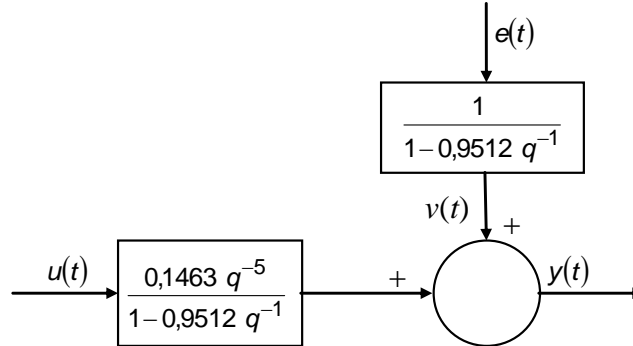


Fig. 4.6 Diagrama de blocos do sistema S_1 .

Sistema S_2 :

$$y(t) = \frac{0,1463 q^{-5}}{1 - 0,9512 q^{-1}} u(t) + \frac{1 + 0,5 q^{-1}}{1 - 0,9512 q^{-1}} e(t) = G(q) \cdot u(t) + H_2(q) \cdot e(t)$$

O diagrama de blocos resultante é mostrado na Figura 4.7.

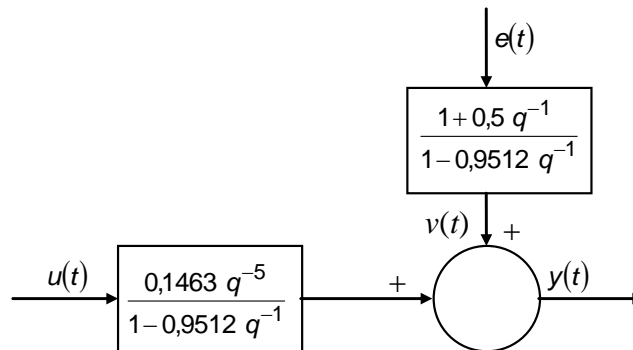


Fig. 4.7 Diagrama de blocos do sistema S_2 .

Sistema S_3 :

$$y(t) = \frac{0,1463 q^{-5}}{1 - 0,9512 q^{-1}} u(t) + \frac{1 - 0,9512 q^{-1}}{1 - 0,9512 q^{-1}} e(t) = \frac{0,1463 q^{-5}}{1 - 0,9512 q^{-1}} u(t) + e(t) = G(q) \cdot u(t) + e(t)$$

O diagrama de blocos resultante é mostrado na Figura 4.8.

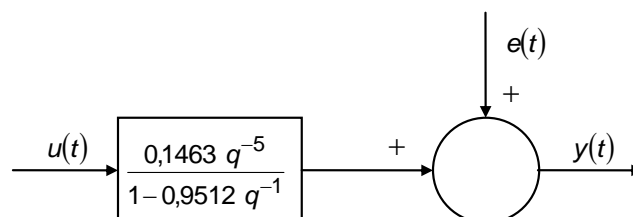


Fig. 4.8 Diagrama de blocos do sistema S_3 .

O ruído branco $e(t)$ adentra os sistemas de diferentes modos: para os sistemas S_1 e S_2 ele surge como uma equação de perturbação, ao passo que para o sistema S_3 ele é adicionado na saída. O modelo em Simulink dos três sistemas é mostrado na Figura 4.9.

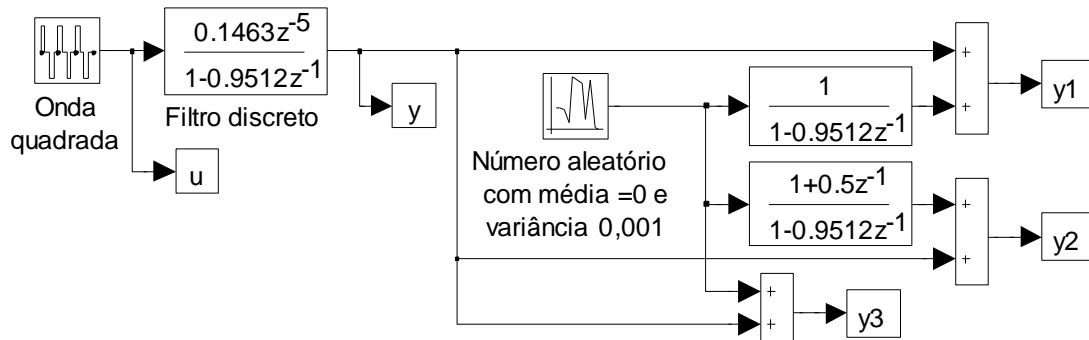


Fig. 4.9 Modelo em Simulink representando os sistemas S_1 , S_2 e S_3 .

4.2.3 Simulação dos sistemas S_1 , S_2 e S_3

Os modelos da Figura 4.9 são simulados por 250 s, tendo como entrada a onda quadrada da Figura 4.4. Assumem-se dois valores para a variância σ^2 do sinal $e(t)$: 0,001 e 0,1. A saída do sistema S_1 , com e sem perturbação, é mostrada na Figura 4.10.

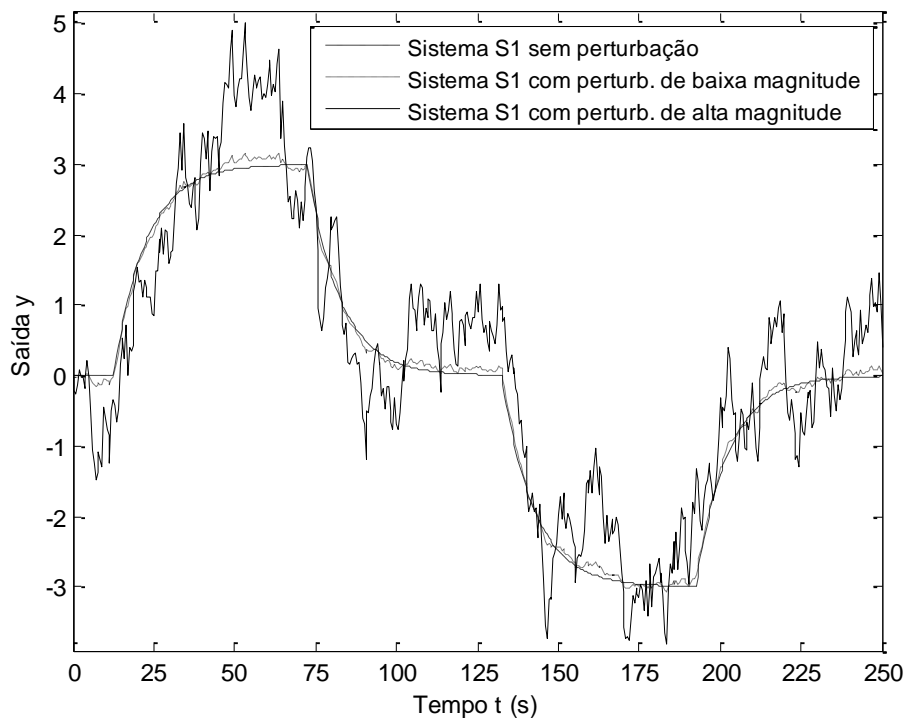


Fig. 4.10 Resposta do sistema S_1 sem perturbação e com perturbação de baixa e alta magnitude.

Analisando-se a Figura 4.10, percebe-se que com a variância da perturbação de 0,001, a parte determinística do processo está perfeitamente delineada, ao passo que com variância 0,1 a relação sinal/ruído fica pequena, de modo que a parte determinística do processo fica “encoberta” pela perturbação. A identificação do sistema tem como missão tentar estimar o modelo do processo no meio de todo esse ruído.

Na Figura 4.11 apresenta-se a resposta do sistema S_2 .

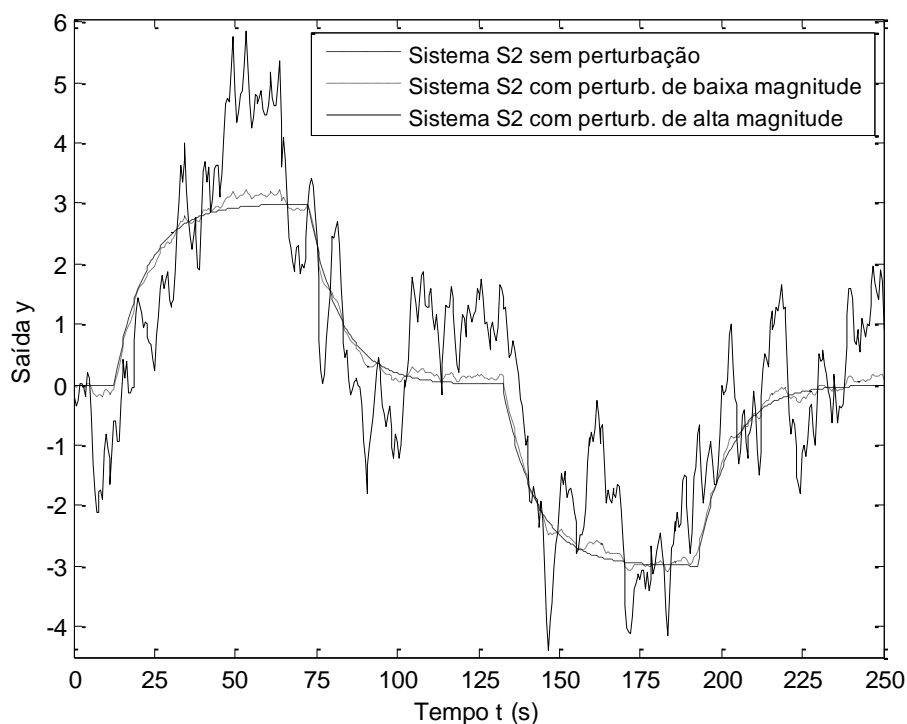


Fig. 4.11 Resposta do sistema S_2 sem perturbação e com perturbação de baixa e alta magnitude.

Devido ao filtro usado para a perturbação, a amplitude das variações na Figura 4.11 é maior que na Figura 4.10. Na Figura 4.12 apresenta-se a resposta do sistema S_3 .

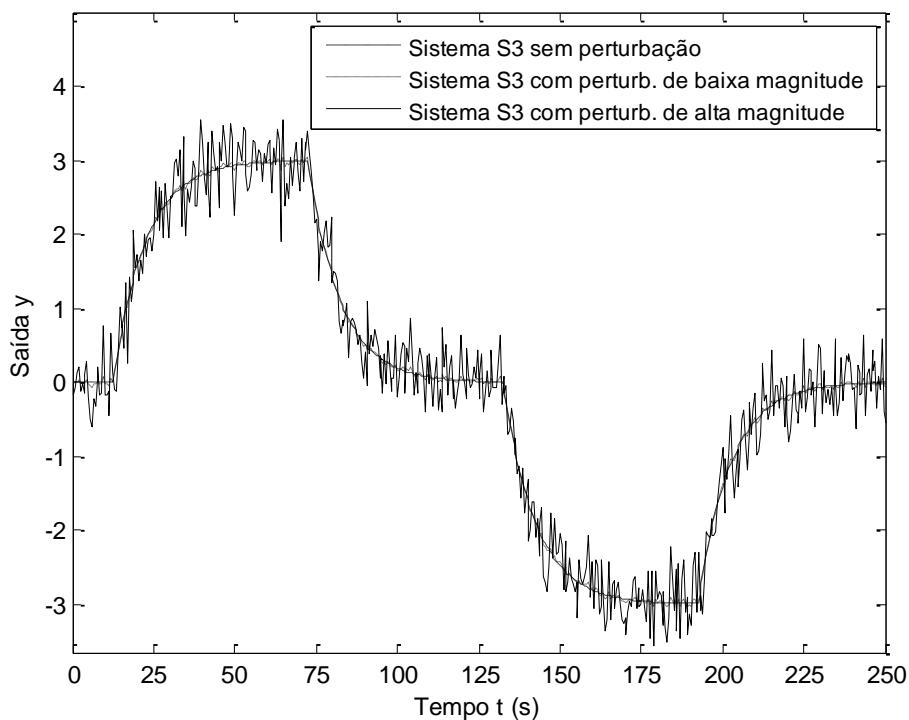


Fig. 4.12 Resposta do sistema S_3 sem perturbação e com perturbação de baixa e alta magnitude.

Percebe-se na Figura 4.12 uma grande redução na amplitude das variações na saída, quando comparada com as Figuras 4.10 e 4.11, devido ao filtro usado para o ruído.

4.2.4 Modelo do processo afetado por perturbação não estacionária

Visando mostrar o efeito que teria uma perturbação não estacionária, mostra-se na Figura 4.13 a resposta do modelo processo na presença de uma perturbação estocástica não estacionária do tipo *random walk*, com variância de entrada $\sigma^2 = 0,001$ e $0,1$.

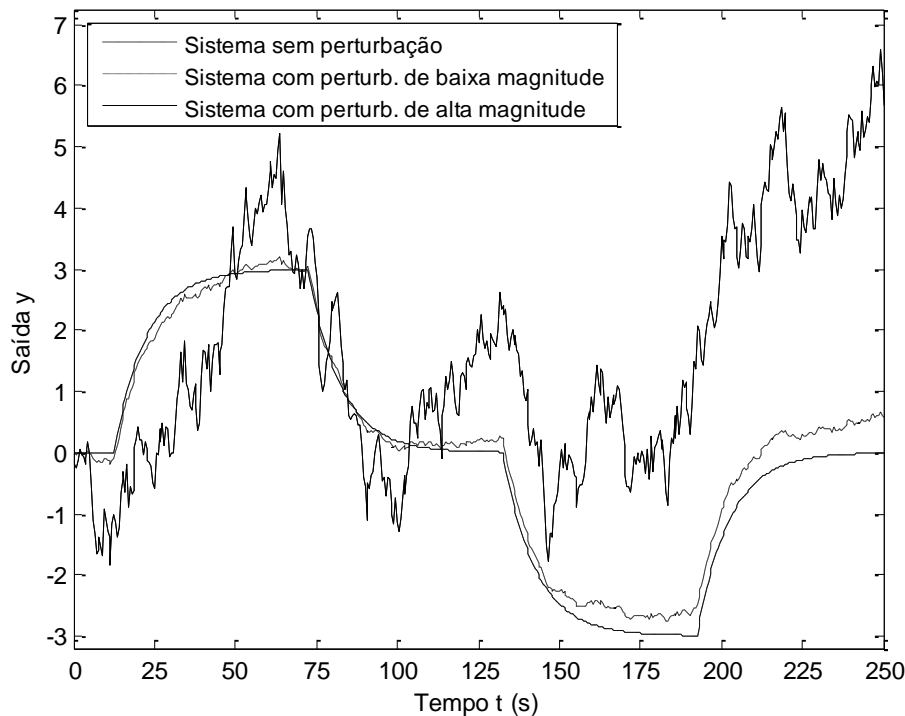


Fig. 4.13 Resposta do processo com perturbação *random walk* com variância de entrada 0,001 e 0,1.

Analisando-se a Figura 4.13, vê-se que ao se aplicar o ruído branco a um processo estocástico não estacionário, o efeito sobre o modelo do processo é a tendência da saída não se manter em torno da saída do modelo do processo determinístico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LJUNG, L. **System identification: theory for the user**. 2.ed. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1999.