

CAPÍTULO 3

MODELOS DE PERTURBAÇÕES

A principal característica das perturbações é a impossibilidade de prever exatamente seu valor futuro. O modelo das perturbações descreve o comportamento do sistema que não seja refletido pelo modelo do processo, incluindo: efeito de entradas não medidas (perturbações na carga); ruídos e erros na medição; erros no modelo do processo; e variação dos parâmetros do processo (processo variante no tempo).

3.1 TIPOS E FONTES DE PERTURBAÇÕES

As perturbações são classificadas como distúrbios não medidos na carga, erros de medição, ruído nos sensores e, por fim, variação nos parâmetros do processo (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997):

- As **perturbações não medidas na carga** podem, por exemplo, ser forças em um sistema mecânico: lufadas de vento em uma antena, ondas em um navio, carga em um motor. Em controle de processos as perturbações na carga podem ser variações na qualidade de uma vazão de alimentação ou variações na vazão demandada. Em sistemas termais as perturbações podem ser variações na temperatura ambiente. Perturbações na carga tipicamente variam lentamente, podendo também ser periódicas, como, por exemplo, ondas em navios. As perturbações na carga correspondem a entradas não manipuladas, pois o sistema está sujeito a sinais que possuam a natureza de entradas, mas não são manipuladas (ou manipuláveis) pelo usuário.
- Os **erros de medição** são gerados pelos sensores. Pode haver erros estacionários em alguns sensores devido a erros na calibração. No entanto, os erros de medição tipicamente têm componentes de alta frequência, oriundos de **ruído** nos sensores. Os sensores também estão sujeitos a derivação (*drift*). Pode ainda haver erros dinâmicos devido à dinâmica dos sensores. Por exemplo, um termopar pode ter uma constante de tempo de 10 a 50 s, dependendo de seu encapsulamento. As características dos erros de medição normalmente dependem da filtragem dos sinais medidos.

Em alguns casos não é possível medir a variável controlada diretamente; o valor das variáveis é então inferido a partir de medições indiretas de diversas outras variáveis.

Uma situação que pode ocorrer é que um instrumento forneça uma indicação rápida com grandes erros e outro forneça uma medição precisa após um grande atraso. A medição precisa pode ser obtida a partir de uma medição laboratorial, por exemplo.

- **Variação em parâmetros:** teoria linear é usada ao longo deste livro. As perturbações na carga e os ruídos na medição aparecem então de forma aditiva na saída do processo. No entanto, sistemas assumidos como lineares são frequentemente não lineares. Isso significa que as perturbações podem entrar de uma forma mais complicada. Algumas perturbações aparecem como variações nos parâmetros do processo.

3.2 FORMAS CLÁSSICAS DE DESCREVER PERTURBAÇÕES

A natureza das perturbações pode variar muito. Há quatro diferentes formas clássicas de representar perturbações: impulso (pulso), degrau, rampa e senoide, que são normalmente usadas na análise de sistemas de controle. Já em controle estocástico as perturbações são modeladas como realizações de processos estocásticos (aleatórios), considerando-as como saídas de sistemas lineares dinâmicos com entradas do tipo ruído branco (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997).

O **impulso** e o **pulso** podem representar perturbações na carga, bem como erros de medição. Para sistemas em tempo contínuo a perturbação é um impulso (função delta de Dirac); para sistemas em tempo discreto a perturbação é modelada como um pulso com amplitude unitária e duração de um período de amostragem. A resposta de um sistema linear em tempo contínuo é completamente especificada por sua resposta ao impulso, enquanto que a de um sistema linear em tempo discreto é especificada por sua resposta ao pulso.

O **degrau** é tipicamente usado para representar uma perturbação na carga ou uma polarização (*offset*) em uma medição. A **rampa** é usada para representar erros de medição que derivem (*drift*) e perturbações que repentinamente passem a derivar.

A **onda senoidal** é o protótipo de uma perturbação periódica. A escolha da frequência permite representar perturbações na carga de baixa frequência, bem como ruído na medição de alta frequência.

É conveniente visualizar as perturbações como saídas de sistemas dinâmicos lineares. Do ponto de vista entrada/saída, as perturbações podem ser descritas como respostas ao impulso, pulso ou sequência de pulsos através de filtros lineares. As perturbações também podem ser encaradas como respostas de sistemas dinâmicos com

entradas nulas e condições iniciais não nulas. Em ambos os casos, as principais características das perturbações são descritas pelos sistemas dinâmicos que as geram. Essa abordagem pode, naturalmente, ser aplicada a sistemas de tempo contínuo, bem como de tempo discreto. O degrau pode ser gerado a partir de um integrador, a rampa a partir de um duplo integrador e a senóide a partir de um oscilador harmônico (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997), conforme mostrado no modelo em Simulink da Figura 3.1.

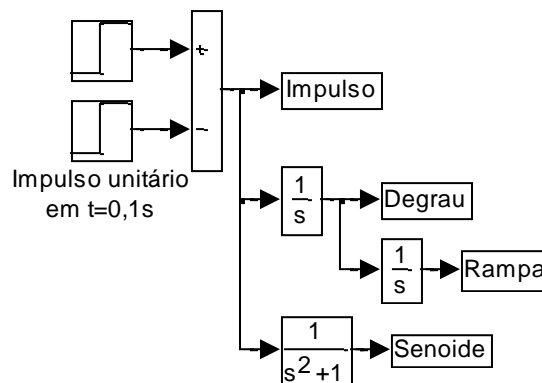


Fig. 3.1 Modelo em Simulink mostrando a geração das perturbações clássicas a partir do impulso.

Na Figura 3.2 apresenta-se o degrau, a rampa e a senóide gerados a partir de impulso unitário aplicado em $t = 0,1$ s.

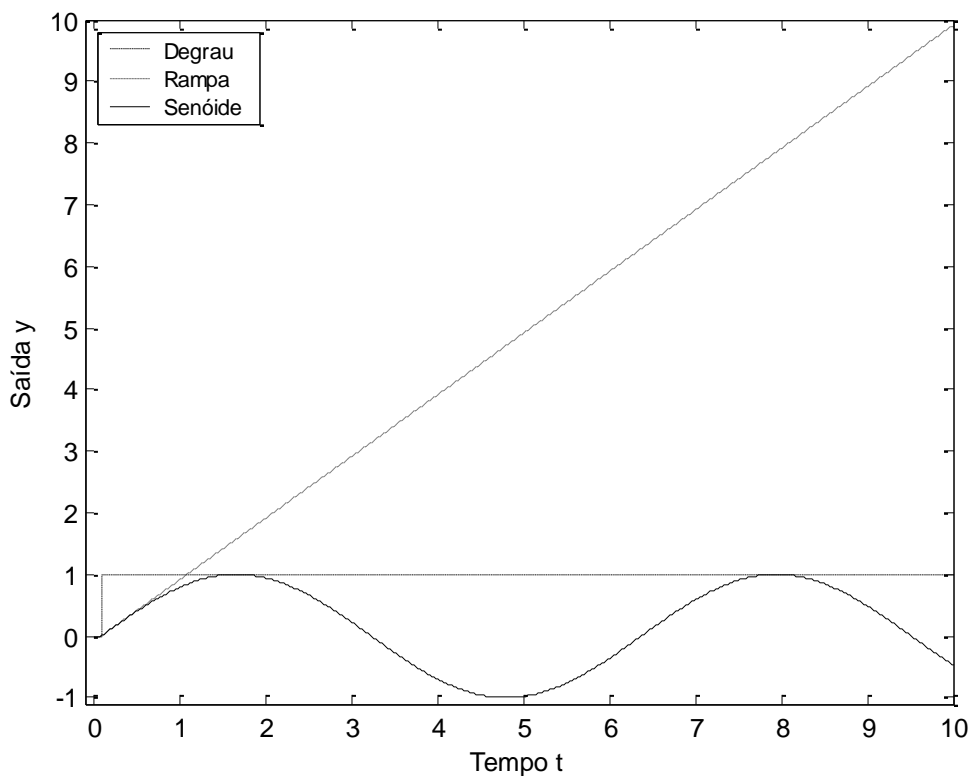


Fig. 3.2 Degrau, rampa e senóide gerados a partir de impulso unitário em $t = 0,1$ s.

Resulta um degrau unitário, uma rampa unitária e uma senóide com amplitude unitária.

Ao se usar espaço de estados, as perturbações podem ser encaradas como soluções de equações diferenciais lineares com condições iniciais. As variáveis de estado do sistema linear são simplesmente aumentadas com as variáveis de estado usadas para descrever as perturbações (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997).

3.3 REPRESENTAÇÃO DE PERTURBAÇÕES POR PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Um problema que se defronta ao trabalhar com processos, é como caracterizar as perturbações de forma adequada. Uma característica das perturbações é a impossibilidade de prever seus valores futuros precisamente. Não é fácil pensar em modelos matemáticos que possuam essa propriedade. Não é possível, por exemplo, modelar uma perturbação através de uma função analítica porque, se os valores de uma função analítica são conhecidos em um intervalo arbitrariamente pequeno, os valores da função para outros argumentos podem ser determinados (ÅSTRÖM, 1970).

Como as funções analíticas não funcionam, poder-se-ia pensar em usar conceitos estatísticos para modelar as perturbações. Portanto, uma resposta para o problema de modelar perturbações é descrevê-las como processos estocásticos. Por exemplo, caso se tente modelar uma perturbação como:

$$v(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \cdot x_i \quad (3.1)$$

onde $a_1(t)$, $a_2(t)$, ... $a_n(t)$ são funções conhecidas e x_i é uma variável aleatória, verifica-se que se as equações lineares:

$$\begin{aligned} v(t_1) &= a_1(t_1) \cdot x_1 + a_2(t_1) \cdot x_2 + \cdots + a_n(t_1) \cdot x_n \\ v(t_2) &= a_1(t_2) \cdot x_1 + a_2(t_2) \cdot x_2 + \cdots + a_n(t_2) \cdot x_n \\ &\vdots \\ v(t_n) &= a_1(t_n) \cdot x_1 + a_2(t_n) \cdot x_2 + \cdots + a_n(t_n) \cdot x_n \end{aligned}$$

têm uma solução, então as realizações das variáveis estocásticas x_1 , x_2 , ... x_n podem ser determinadas exatamente a partir das observações de $v(t_1)$, $v(t_2)$, ... $v(t_n)$ e os futuros valores de v podem ser determinados exatamente. A perturbação descrita em (3.1) é portanto chamada um “processo estocástico completamente determinístico” ou um “processo estocástico singular” (ÅSTRÖM, 1970).

A característica mais marcante de uma perturbação é que **seu valor não é conhecido de antemão**. Informações acerca de perturbações passadas podem, no entanto, ser importantes para efetuar “avaliações qualificadas” (chutes) acerca de valores futuros. Assim, é natural empregar um quadro probabilístico para descrever perturbações futuras. Coloca-se então o usuário no instante t e se procura efetuar afirmações acerca das perturbações nos instantes $t+k, k \geq 1$. Uma caracterização completa seria descrever a função densidade de probabilidade condicional conjunta para $\{v(t+k), k \geq 1\}$, dado $\{v(s), s \leq t\}$. Isto, no entanto, seria trabalhoso demais na maioria dos casos e, ao invés disso, se usará um enfoque mais simples. Uma tentativa com melhores resultados que o “processo estocástico completamente determinístico” previamente apresentado é modelar uma perturbação como uma sequência de variáveis aleatórias. As perturbações são então modeladas como saídas de sistemas dinâmicos lineares tendo como entrada ruído branco. Os modelos de perturbação são assim similares aos modelos discutidos na Seção 3.2, sendo que a única diferença é o tipo de sinal de entrada para os sistemas (pulso, sequência de pulsos ou ruído branco). Seja $v(t)$ dado por (LJUNG, 1999):

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) \cdot e(t-j) \quad (3.2)$$

onde $\{e(t)\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes (identicamente distribuídas) com uma certa função densidade de probabilidade, média zero e variância σ^2 (ruído branco). Embora essa descrição não permita caracterizações completamente gerais de todas as perturbações probabilísticas possíveis, ela é versátil o bastante para a maioria dos propósitos práticos. Por razões de normalização, normalmente se assumirá que $h(0) = 1$, o que não é nenhuma perda de generalidade, visto que a variância de e pode ser ajustada (LJUNG, 1999). Percebe-se que se estabelecendo uma analogia entre $g(j)$ em (2.14) e $h(j)$ em (3.2), $h(j)$ faz o papel de uma resposta impulsiva do processo ao ruído. Escrevendo-se (3.2) na forma:

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) (q^{-j} e(t)) = \left[\sum_{j=0}^{\infty} h(j) q^{-j} \right] e(t) = H(q) \cdot e(t) \quad (3.3)$$

onde:

$$H(q) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) \cdot q^{-j} \quad (3.4)$$

Para a Expressão (3.3) ter significado, assume-se que $H(q)$ seja estável, isto é:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |h(j)| < \infty \quad (3.5)$$

Verifica-se que a Expressão (3.3) se trata de uma equação de diferenças descrevendo a relação entrada-saída de sinais aleatórios. O sinal $v(t)$ pode ser descrito como a saída de um sistema dinâmico linear excitado por ruído branco de tempo discreto. A Figura 3.3 representa esse sistema (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997).

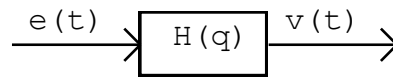


Fig. 3.3 Geração de perturbações pela excitação de filtros lineares com ruído branco.

Portanto, uma maneira unificada de modelar diferentes tipos de perturbações é caracterizada pelo seguinte sistema dinâmico, representado na forma entrada-saída (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997):

$$v(t) = H(q) \cdot x(t)$$

onde $v(t)$ é a saída do sistema submetido às perturbações e $x(t)$ pode ser um pulso, uma sequência de pulsos ou ruído branco.

Pode-se colocar $H(q)$ na forma de uma função racional, como foi feito em (2.16), resultando em:

$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)} \quad (3.6)$$

3.4 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONÁRIOS GERADOS PELA EXCITAÇÃO DE FILTROS LINEARES COM RUÍDO BRANCO

Diversas classes de processos estocásticos podem ser geradas excitando-se sistemas lineares com ruído branco. Seja $\{e(t), t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ ruído branco de tempo discreto. Algumas das classes de processos estocásticos estacionários são descritas a seguir.

- Processo MA ou *moving average* (média móvel):

O nome média móvel provém do fato que o sinal $v(t)$ corresponde a uma média de um certo número dos últimos valores da entrada.

$$v(t) = C(q) \cdot e(t) \quad (3.7)$$

$$\text{onde } C(q) = 1 + c_1 \cdot q^{-1} + c_2 \cdot q^{-2} + \dots + c_{n_c} \cdot q^{-n_c}$$

$$\text{Exemplo: } v(t) = e(t) + c_1 \cdot e(t-1)$$

A primeira autocorrelação da expressão anterior, correspondente a $c(t, t-1)$, pode ser calculada por:

$$c(t, t-1) = \frac{c_1}{1 + c_1^2}$$

Isto implica que para diferentes valores de c_1 pode-se obter diferentes valores para a primeira autocorrelação. Assim, valores positivos de c_1 levam a autocorrelações positivas. Isto implica que um valor grande de $v(t)$ (acima da média) provavelmente vai ser seguido por um valor grande de $v(t+1)$, assim como um valor pequeno de $v(t)$ (abaixo da média) provavelmente vai ser seguido por um valor pequeno de $v(t+1)$. Em contrapartida, valores negativos de c_1 implicam em autocorrelações negativas: se espera que um grande valor de $v(t)$ seja seguido por um pequeno valor de $v(t+1)$ e vice-versa. Assim, uma série temporal de ruído branco ($c_1 = 0$), sem nenhuma autocorrelação, surge visualmente sem nenhum padrão, de modo que o valor de uma observação não gera nenhuma informação sobre o valor da próxima observação. Para $c_1 = 0,5$ a série temporal se torna mais suave, com observações acima ou abaixo do valor médio frequentemente surgindo em grupos com uma duração pequena. Para $c_1 = 0,9$, os afastamentos da média podem ser mais prolongados, de modo que perturbações fortes levam um tempo considerável para desaparecer. A Figura 3.4 exibe o efeito de diferentes valores do parâmetro de média móvel c_1 na série temporal $\{v(t)\}$, considerando-se $e(t) \approx N(0, 1)$ e os seguintes valores para c_1 : 0 (saída corresponde a ruído branco); 0,5 e 0,9.

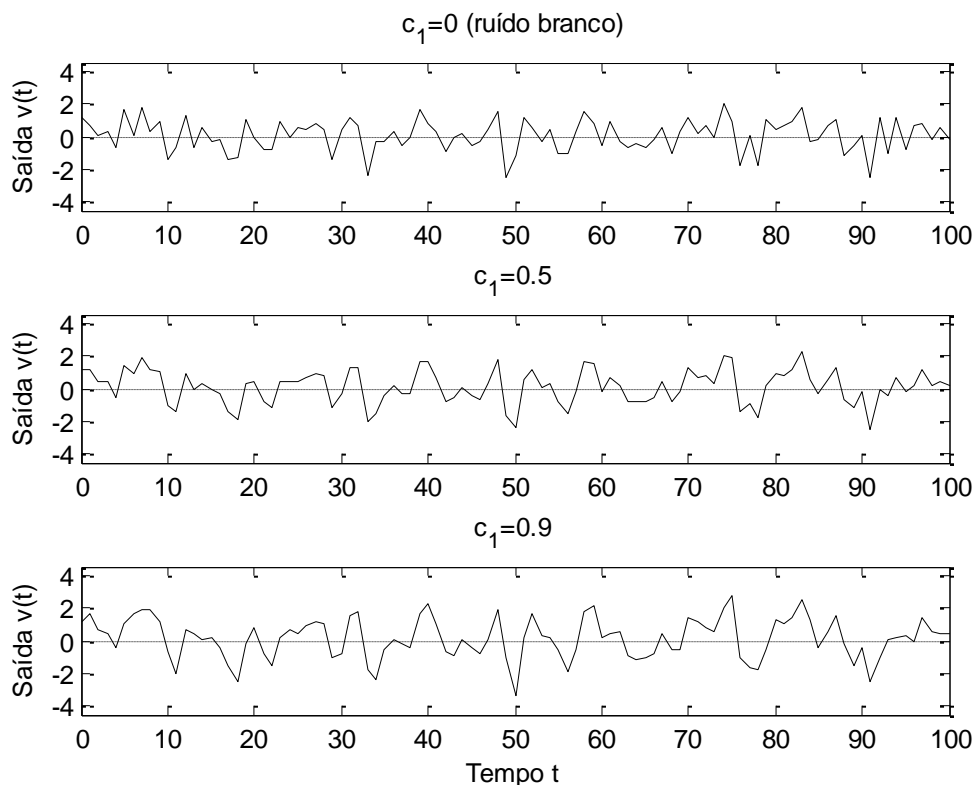


Fig. 3.4 Realizações de um processo MA de primeira ordem, $v(t) = e(t) + c_1 \cdot e(t-1)$, para diferentes valores positivos de c_1 .

Para $c_1 = -0,5$ a série temporal fica mais oscilatória, com observações acima ou abaixo do valor médio normalmente aparecendo de forma aleatória. Para $c_1 = -0,9$, os saltos

na saída são ainda mais frequentes. A Figura 3.5 mostra o efeito de diferentes valores do parâmetro de média móvel c_1 na série temporal $\{v(t)\}$, considerando-se $e(t) \approx N(0, 1)$ e os seguintes valores para c_1 : 0 (saída corresponde a ruído branco); $-0,5$ e $-0,9$.

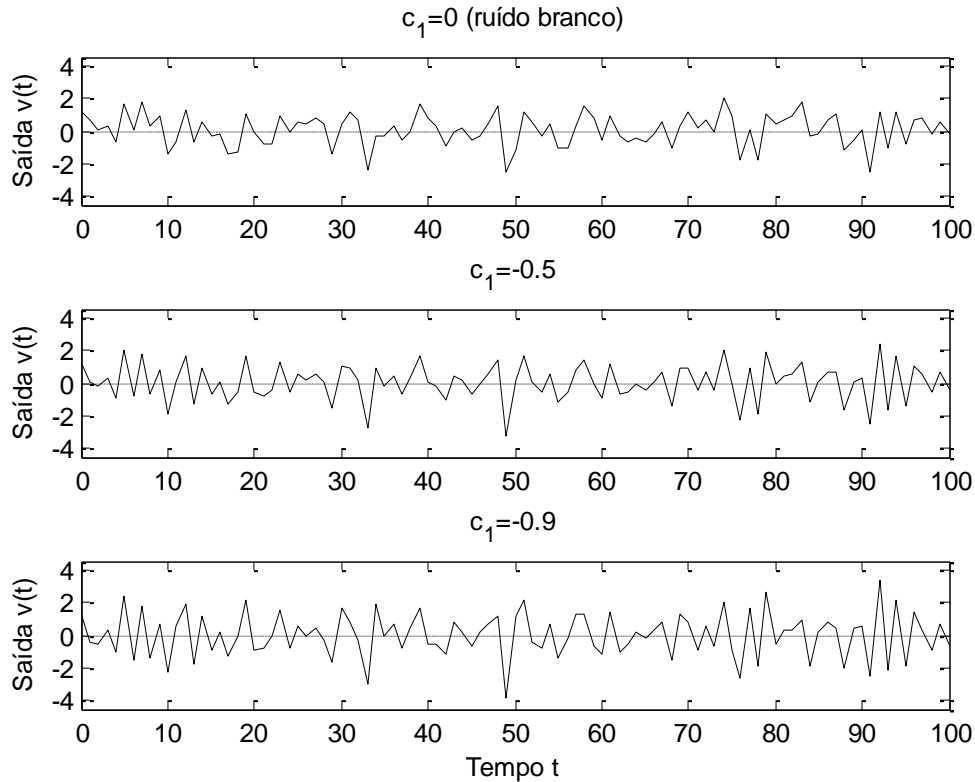


Fig. 3.5 Realizações de um processo MA de primeira ordem, $v(t) = e(t) + c_1 \cdot e(t-1)$, para diferentes valores negativos de c_1 .

Ao contrário do que ocorre na Figura 3.4, na Figura 3.5 quanto menor o valor de c_1 , tanto mais “rápidas” ficam as variações na saída e com amplitudes (dispersão) maiores.

- Processo AR ou *autoregressive* (autoregressivo):

O nome auto-regressivo se refere ao fato do sinal $v(t)$ ser descrito em função de valores “regredidos” dele mesmo, tomados em instantes passados.

$$v(t) = \frac{1}{A(q)} e(t) \quad (3.8)$$

onde $A(q) = 1 + a_1 \cdot q^{-1} + a_2 \cdot q^{-2} + \dots + a_{n_a} \cdot q^{-n_a}$

Exemplo: $v(t) = -a_1 \cdot v(t-1) + e(t)$

Um valor positivo de a_1 implica em correlação positiva entre $v(t)$ e $v(t-1)$, de forma análoga a um valor positivo de c_1 para um processo MA de primeira ordem. Em contrapartida, um valor negativo de a_1 implica em autocorrelação negativa de primeira ordem, positiva de segunda ordem e seguindo alternadamente.

A Figura 3.6 mostra o efeito de diferentes valores do parâmetro autoregressivo a_1 na série temporal $\{v(t)\}$, considerando-se $e(t) \approx N(0,1)$. Considera-se correlação positiva, com os seguintes valores para a_1 : 0 (saída corresponde a ruído branco); 0,5 e 0,9.

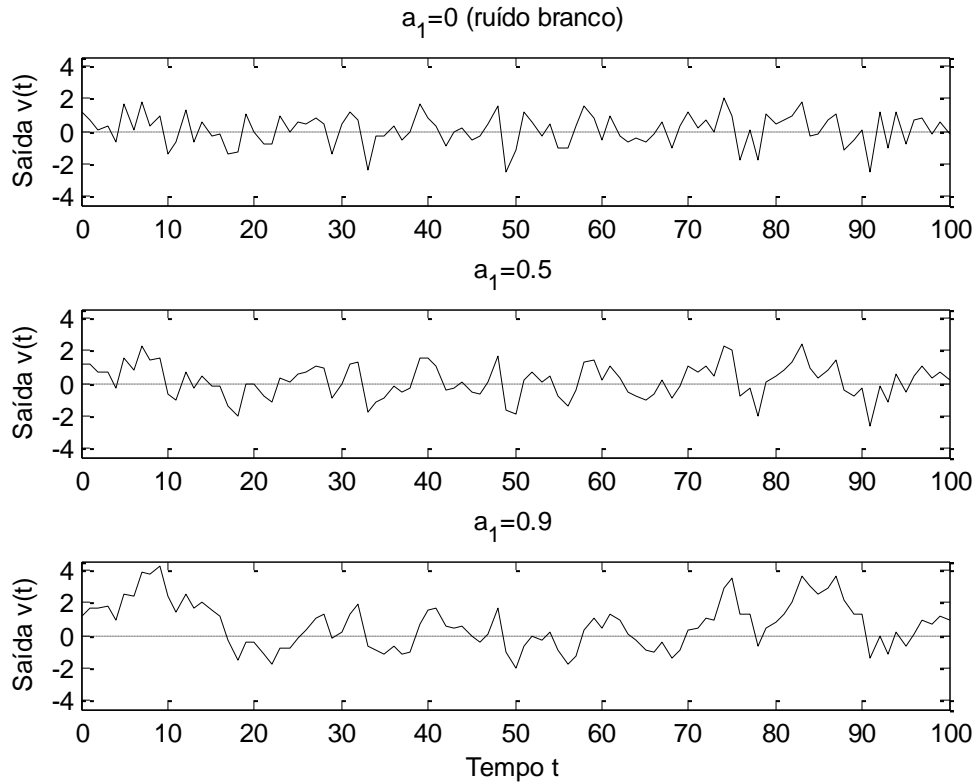


Fig. 3.6 Realizações de um processo AR de primeira ordem, $v(t) = a_1 \cdot v(t-1) + e(t)$, para diferentes valores positivos de a_1 .

Comparando-se os resultados das Figuras 3.4 e 3.6, percebe-se que são parecidas, portanto, as observações relativas à Figura 3.6 são as mesmas tecidas com respeito à Figura 3.4, considerando-se agora que as variações ocorram para o parâmetro a_1 .

A Figura 3.7 mostra o efeito de diferentes valores do parâmetro autoregressivo a_1 na série temporal $\{v(t)\}$, tomando-se $e(t) \approx N(0,1)$. Considera-se correlação negativa, com os seguintes valores para a_1 : 0 (saída corresponde a ruído branco); $-0,5$ e $-0,9$.

Comparando-se os resultados das Figuras 3.5 e 3.7 percebe-se que são parecidas, portanto, os comentários sobre a Figura 3.7 são os mesmos feitos com relação à Figura 3.5, considerando-se agora que as variações ocorram para o parâmetro a_1 .

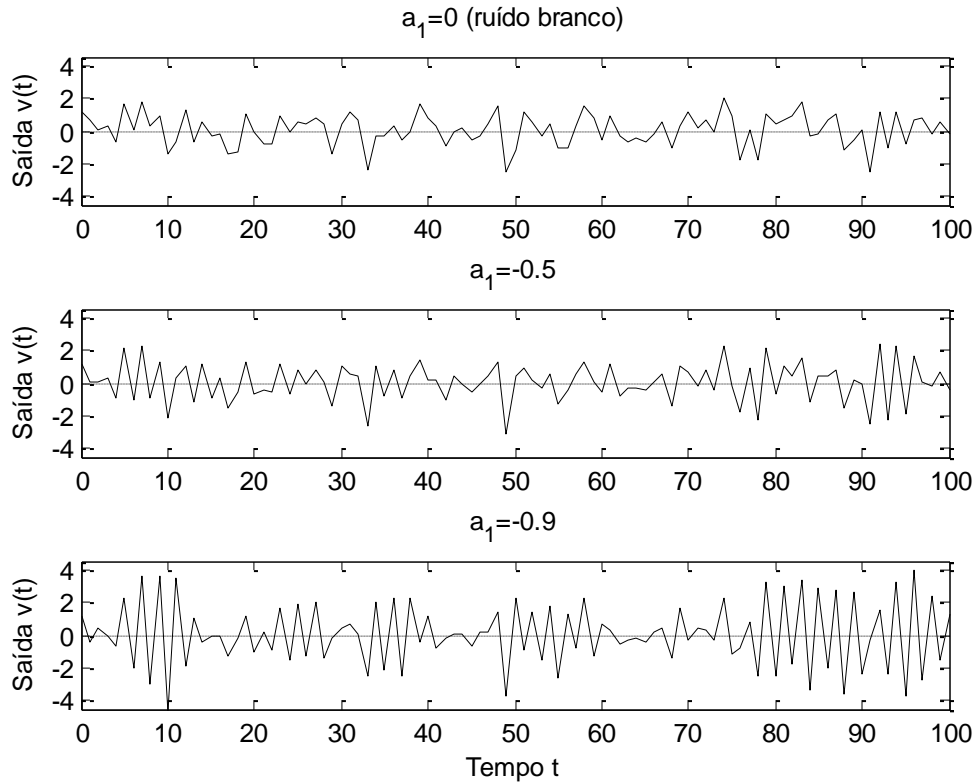


Fig. 3.7 Realizações de um processo AR de primeira ordem, $v(t) = a_1 \cdot v(t-1) + e(t)$, para diferentes valores negativos de a_1 .

- Processo ARMA ou *autoregressive with moving average*:

$$v(t) = \frac{C(q)}{A(q)} e(t) \quad (3.9)$$

$$\text{onde } A(q) = 1 + a_1 \cdot q^{-1} + a_2 \cdot q^{-2} + \dots + a_{n_a} \cdot q^{-n_a}$$

$$C(q) = 1 + c_1 \cdot q^{-1} + c_2 \cdot q^{-2} + \dots + c_{n_c} \cdot q^{-n_c}$$

$$\text{Exemplo: } v(t) = -a_1 \cdot v(t-1) + e(t) + c_1 \cdot e(t-1)$$

3.4.1 Exemplos de perturbações geradas por ruído branco passando por filtros lineares

Para verificar as alterações provocadas no ruído branco ao passar por filtros lineares, que podem imitar perturbações em processos, considere as seguintes opções:

Caso 1:

$$v(t) = e(t) \quad \therefore H(q) = \frac{v(t)}{e(t)} = 1$$

Caso 2:

$$v(t) = 0,9512 \cdot v(t-1) + e(t) \quad \therefore H(q) = \frac{v(t)}{e(t)} = \frac{1}{1 - 0,9512 \cdot q^{-1}} \quad (\text{processo AR})$$

Caso 3:

$$v(t) = 0,9512 \cdot v(t-1) + e(t) + 0,5 \cdot e(t-1) \quad \therefore H(q) = \frac{v(t)}{e(t)} = \frac{1 + 0,5 \cdot q^{-1}}{1 - 0,9512 \cdot q^{-1}} \quad (\text{processo ARMA})$$

Para ilustrar a diferença que os filtros lineares geram no formato do ruído, mostra-se na Figura 3.8 uma simulação com os três casos apresentados anteriormente. O ruído branco usado tem variância $\sigma^2 = 0,10$ e o intervalo de amostragem é de 0,5 s.

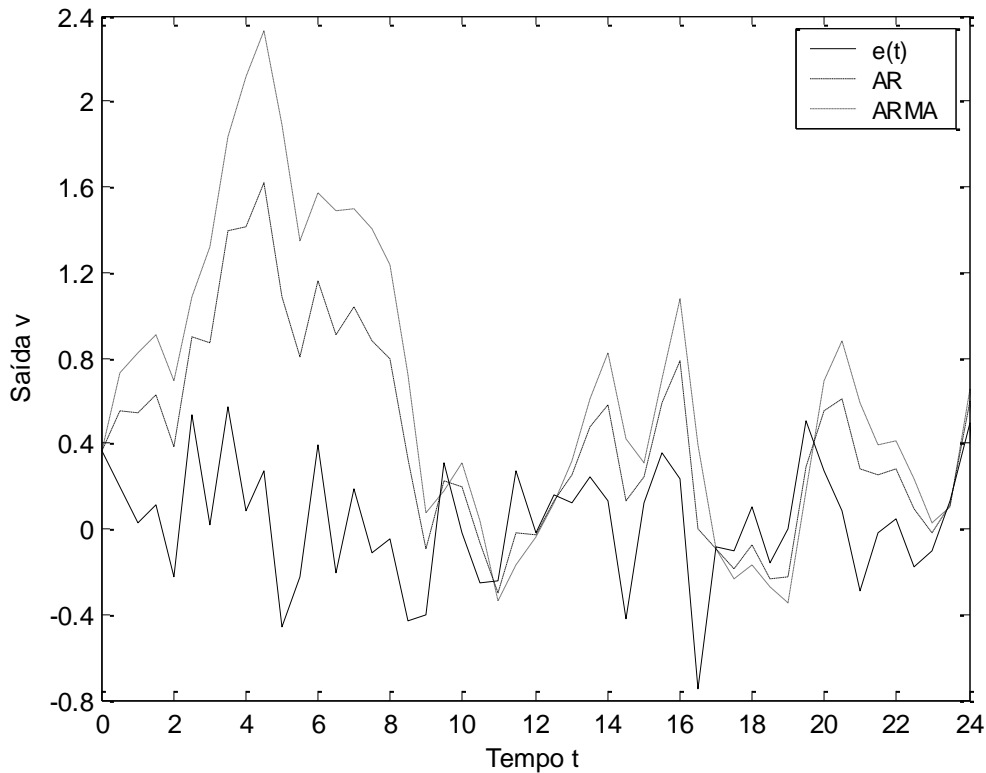


Fig. 3.8 Simulação dos sinais de ruído branco e dos processos estocásticos AR e ARMA.

Analisando-se a Figura 3.8, percebem-se as diferentes realizações do sinal aleatório ao passar por diferentes filtros lineares. Desta forma, é possível caracterizar diferentes formas de perturbação através do emprego de filtros lineares.

3.4.2 Efeito na média e na variância de sinais aleatórios que passem por filtros lineares

Como $v(t)$ é descrito como a saída de um sistema linear excitado por ruído branco, é natural se verificar como as propriedades de processos estocásticos se alteram quando eles são filtrados por sistemas dinâmicos. Caso se assuma que a entrada $e(t)$ seja um processo estocástico com um valor médio m_e e uma função covariância $r_e(\tau)$, deseja-se saber como a média m_v e a covariância $r_v(\tau)$ variam como função de $h(t)$, m_e e $r_e(\tau)$.

Na seção anterior, verificou-se visualmente o efeito de um filtro linear sobre um sinal aleatório. Neste item, propõe-se avaliar o efeito na média e na variância desses sinais. Para tal, propõe-se coletar um número tendendo a infinito de pontos, dos três processos estocásticos apresentados na Subseção 3.4.1. O número efetivamente coleta-do foi 1.000.000 de pontos. Calculando-se a média e a variância destes sinais, resulta:

$$\begin{aligned}\mu_e &= 3,0771 \cdot 10^{-4} & \sigma_e^2 &= 0,1000 \\ \mu_{V_AR} &= 0,0063 & \sigma_{V_AR}^2 &= 1,0474 \\ \mu_{V_ARMA} &= 0,0095 & \sigma_{V_ARMA}^2 &= 2,3055\end{aligned}$$

Pode-se comparar os valores de média e variância obtidos anteriormente com os valores obtidos analiticamente, que relacionam a média e a variância de um processo estocástico antes e depois de passar por um filtro linear. A média pode ser calculada pela Expressão (C.10) do Apêndice C:

$$m_v(t) = m_e \cdot \sum_{k=0}^{\infty} h(k) = m_v \quad (\text{C.10})$$

É necessário então se conhecer os valores da resposta impulsiva $h(k)$. Para tal, aplica-se um impulso unitário na entrada dos filtros relativos aos processos AR e ARMA e coleta-se os valores das saídas. Os valores obtidos para o somatório de $h(k)$ são:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{200} h_{AR}(k) &= 20,4909 \\ \sum_{k=0}^{200} h_{ARMA}(k) &= 30,7364\end{aligned}$$

Uma forma mais fácil e mais precisa de efetuar este cálculo é considerando que de (B.7) tem-se:

$$m_v = m_e \cdot \sum_{k=0}^{\infty} h(k) = m_e \cdot H(q) \Big|_{q=1} \quad (\text{B.7a})$$

No caso do processo AR, a função de transferência $H(q)$ é dada por:

$$H(q) = \frac{v(t)}{e(t)} = \frac{1}{1 - 0,9512 \cdot q^{-1}}$$

Substituindo-se esta expressão em (B.7a):

$$m_v = m_e \cdot \frac{1}{1 - 0,9512 \cdot q^{-1}} \Big|_{q=1} = 20,4918 \cdot m_e$$

No caso do processo ARMA, tem-se que:

$$H(q) = \frac{v(t)}{e(t)} = \frac{1 + 0,5 \cdot q^{-1}}{1 - 0,9512 \cdot q^{-1}}$$

Substituindo-se esta expressão em (B.7a) resulta:

$$m_V = m_e \left. \frac{1 + 0,5 \cdot q^{-1}}{1 - 0,9512 \cdot q^{-1}} \right|_{q=1} = 30,7377 \cdot m_e$$

Como a média do ruído branco de entrada resultou em $\mu_e = 3,0771 \cdot 10^{-4}$, tem-se então que:

$$m_{V_AR_teórico} = 20,4918 \cdot 3,0771 \cdot 10^{-4} = 0,0063$$

$$m_{V_ARMA_teórico} = 30,7377 \cdot 3,0771 \cdot 10^{-4} = 0,0095$$

Os valores obtidos teoricamente coincidem com os valores medidos no simulador.

Executa-se agora o cálculo da variância dos sinais na saída dos filtros lineares. Para tal, emprega-se a Expressão (C.13) do Apêndice C:

$$r_V(0) = \text{var}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot h(k) \cdot r_e(0) = r_e(0) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} h^2(k) = \text{var}(e) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} h^2(k) \quad (\text{C.13})$$

Os valores obtidos para a somatória de $h^2(k)$ são:

$$\sum_{k=0}^{200} h_{AR}^2(k) = 10,5022$$

$$\sum_{k=0}^{200} h_{ARMA}^2(k) = 23,1173$$

Como a variância do ruído branco de entrada é $\sigma_e^2 = 0,1000$, tem-se então que:

$$\sigma_{V_AR_teórico}^2 = 10,5022 \cdot 0,1000 = 1,0502$$

$$\sigma_{V_ARMA_teórico}^2 = 23,1173 \cdot 0,1000 = 2,3117$$

Uma forma mais exata para calcular estes valores é apresentada a seguir. Considere o processo ARMA. Tem-se que:

$$v(t) = 0,9512 \cdot v(t-1) + e(t) + 0,5 \cdot e(t-1) \quad (3.10)$$

Elevando-se esta expressão ao quadrado:

$$\begin{aligned} v^2(t) = & 0,9512^2 \cdot v^2(t-1) + e^2(t) + 0,5^2 \cdot e^2(t-1) + 2 \cdot 0,9512 \cdot v(t-1) \cdot e(t) + \\ & + 2 \cdot 0,9512 \cdot 0,5 \cdot v(t-1) \cdot e(t-1) + 2 \cdot 0,5 \cdot e(t) \cdot e(t-1) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Calculando-se a expectância desta expressão, como o sinal de ruído é branco, resulta que:

$$E[v(t-1) \cdot e(t)] = 0 \quad \text{e} \quad E[e(t) \cdot e(t-1)] = 0 \quad (\text{sinais não correlacionados})$$

Para o cálculo de $v(t-1) \cdot e(t-1)$, considere que (3.10) seja tomado no instante anterior de tempo, isto é:

$$v(t-1) = 0,9512 \cdot v(t-2) + e(t-1) + 0,5 \cdot e(t-2)$$

Portanto, multiplicando-se esta expressão por $e(t-1)$, resulta:

$$v(t-1) \cdot e(t-1) = [0,9512 \cdot v(t-2) + e(t-1) + 0,5 \cdot e(t-2)] \cdot e(t-1)$$

Mas:

$$E[v(t-2) \cdot e(t-1)] = 0 \quad E[e(t-2) \cdot e(t-1)] = 0$$

$$E[e^2(t-1)] = E[e^2(t)] = \sigma_e^2$$

Esta última expressão é verdadeira porque o ruído branco corresponde a um processo estocástico estacionário, cuja variância é assumida como σ_e^2 .

Então:

$$E[v(t-1) \cdot e(t-1)] = E[e^2(t-1)] = \sigma_e^2$$

Retornando-se a (3.11):

$$E[v^2(t)] = 0,9512^2 \cdot E[v^2(t-1)] + E[e^2(t)] + 0,5^2 \cdot E[e^2(t-1)] + 0,9512 \cdot v(t-1) \cdot e(t-1)$$

Sabe-se que:

$$E[v^2(t-1)] = E[v^2(t)] \quad \text{e} \quad E[v(t-1) \cdot e(t-1)] = E[e^2(t-1)] = E[e^2(t)] = \sigma_e^2$$

Resulta:

$$(1 - 0,9512^2) \cdot E[v^2(t)] = (1 + 0,5^2 + 0,9512) \cdot \sigma_e^2$$

Portanto:

$$E[v^2(t)] = \frac{(1 + 0,5^2 + 0,9512) \cdot \sigma_e^2}{(1 - 0,9512^2)} = 23,1173 \cdot \sigma_e^2$$

Como a variância do ruído branco de entrada é $\sigma_e^2 = 0,1000$, tem-se então que:

$$\sigma_{v_ARMA_exato}^2 = 23,1173 \cdot 0,1000 = 2,3117$$

Os valores obtidos teoricamente estão muito próximos dos valores medidos no simulador. Fica então patente o efeito dos filtros lineares sobre o ruído branco.

Enfatiza-se que a especificação de diferentes funções densidade de probabilidade para $\{e(t)\}$ pode resultar em características muito diferentes da perturbação. Frequentemente se especificam apenas as propriedades de 2ª ordem da sequência $\{e(t)\}$, isto é, a média e a variância. No entanto, dois sinais podem ter média e variância iguais, mas realizações completamente diferentes. A título de ilustração, considere uma variável aleatória branca distribuída como $N(0,1)$ e outra variável aleatória branca que seja igual a 1 com probabilidade 0,5 e -1 com probabilidade 0,5. Ambas as variáveis têm média nula e variância unitária, muito embora suas realizações (saídas) sejam muito diferentes.

3.5 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS NÃO ESTACIONÁRIOS GERADOS PELA EXCITAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES COM RUÍDO BRANCO

Além das classes de processos estocásticos estacionários vistas na Seção 3.4, há também os processos estocásticos não estacionários descritos a seguir.

- Processo *random walk*:

Trata-se de um processo em que os polinômios $A(q)$ e $C(q)$ são unitários e se substitui a saída $v(t)$ em (3.7) por $\Delta v(t) = v(t) - v(t-1) = (1 - q^{-1}) \cdot v(t)$:

$$\Delta v(t) = v(t) - v(t-1) = e(t)$$

$$\text{ou} \quad v(t) = \frac{1}{1 - q^{-1}} e(t) \quad (3.12)$$

- Processo IMA (*integrated moving average*):

Um processo deste tipo pode ser obtido substituindo-se $v(t)$ em (3.7) por $\Delta v(t) = v(t) - v(t-1)$ ou, equivalentemente, $\Delta v(t)$ por $(1 - q^{-1}) \cdot v(t)$. Resulta:

$$\Delta v(t) = v(t) - v(t-1) = C(q) \cdot e(t)$$

ou

$$v(t) = \frac{C(q)}{1 - q^{-1}} e(t) \quad (3.13)$$

onde o polinômio $C(q)$ é o mesmo do processo MA.

Por exemplo, um modelo IMA de 1ª ordem é dado por:

$$v(t) = \frac{1 + c_1 \cdot q^{-1}}{1 - q^{-1}} e(t)$$

- Processo IAR (*integrated autoregressive*):

Um processo deste tipo pode ser obtido substituindo-se $v(t)$ em (3.8) por $\Delta v(t) = v(t) - v(t-1)$ ou, equivalentemente, $\Delta v(t)$ por $(1 - q^{-1}) \cdot v(t)$. Resulta:

$$\Delta v(t) = v(t) - v(t-1) = \frac{1}{A(q)} e(t)$$

ou

$$v(t) = \frac{1}{(1 - q^{-1}) \cdot A(q)} e(t) \quad (3.14)$$

onde o polinômio $A(q)$ é o mesmo do processo AR.

Por exemplo, um modelo IAR de 1ª ordem é dado por:

$$v(t) = \frac{1}{(1 - q^{-1}) \cdot (1 + c_1 \cdot q^{-1})} e(t)$$

- Processo ARIMA (*autoregressive integrated moving average*):

Este processo corresponde a sistemas com perturbações lentas. Pode-se obtê-lo substituindo-se c em (3.9) por $\Delta v(t) = v(t) - v(t-1)$ ou, equivalentemente, $A(q)$ por $(1 - q^{-1}) \cdot A(q)$. Resulta:

$$\Delta v(t) = v(t) - v(t-1) = \frac{C(q)}{A(q)} e(t)$$

ou

$$v(t) = \frac{C(q)}{(1 - q^{-1}) \cdot A(q)} e(t) \quad (3.15)$$

onde os polinômios $A(q)$ e $C(q)$ são os mesmos do processo ARMA.

Apresentam-se, na Figura 3.9, modelos em Simulink com processos estocásticos dos tipos *random walk*, IMA, IAR e ARIMA.

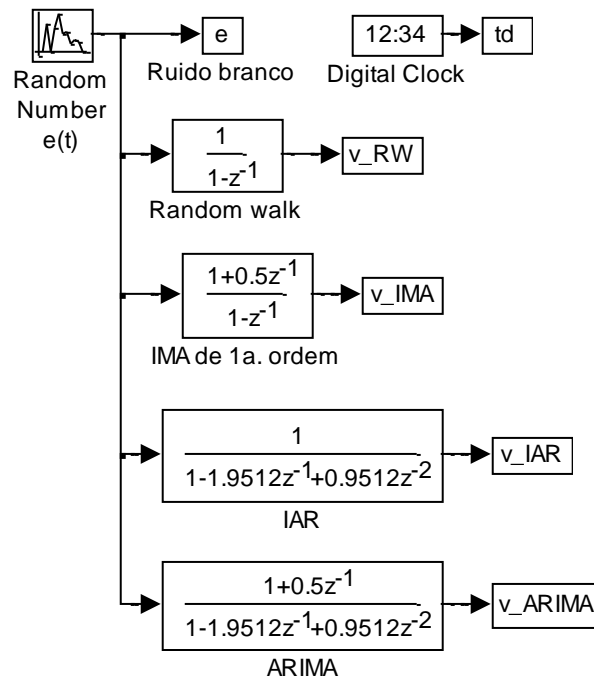


Fig. 3.9 Diagrama em Simulink para mostrar o efeito de diferentes filtros lineares para entrada ruído branco em tempo discreto.

Os resultados da simulação, com a mesma realização do ruído branco empregada na Figura 3.8, são mostrados nas Figuras 3.10 e 3.11.

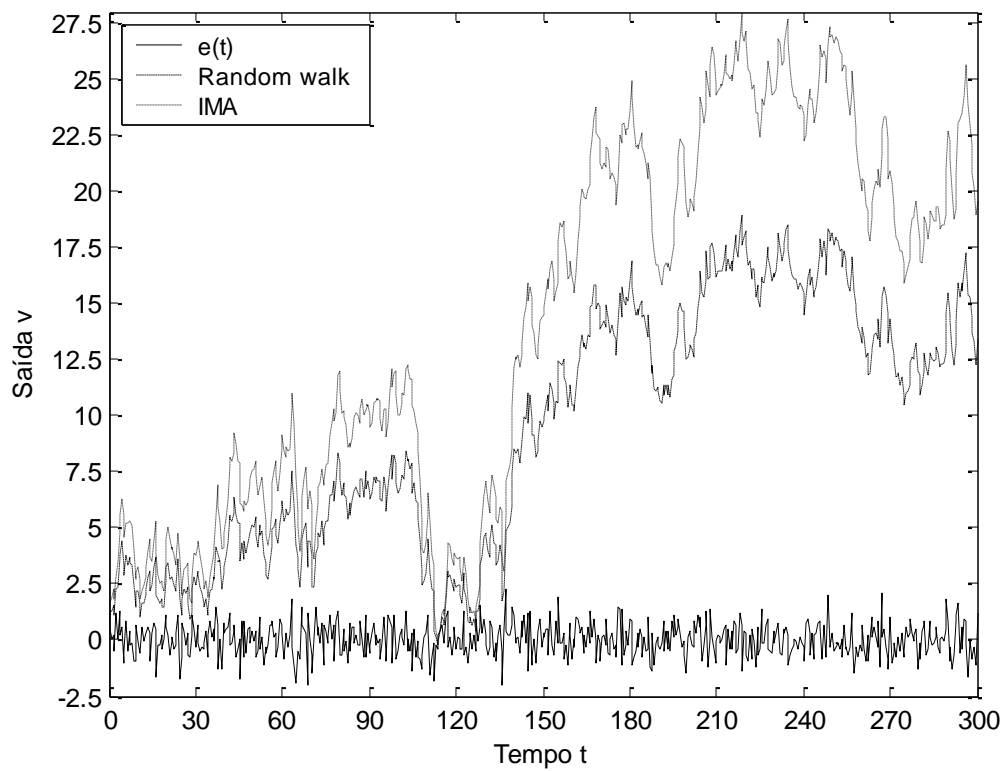


Fig. 3.10 Ruído branco e processos estocásticos dos tipos *random walk* e IMA.

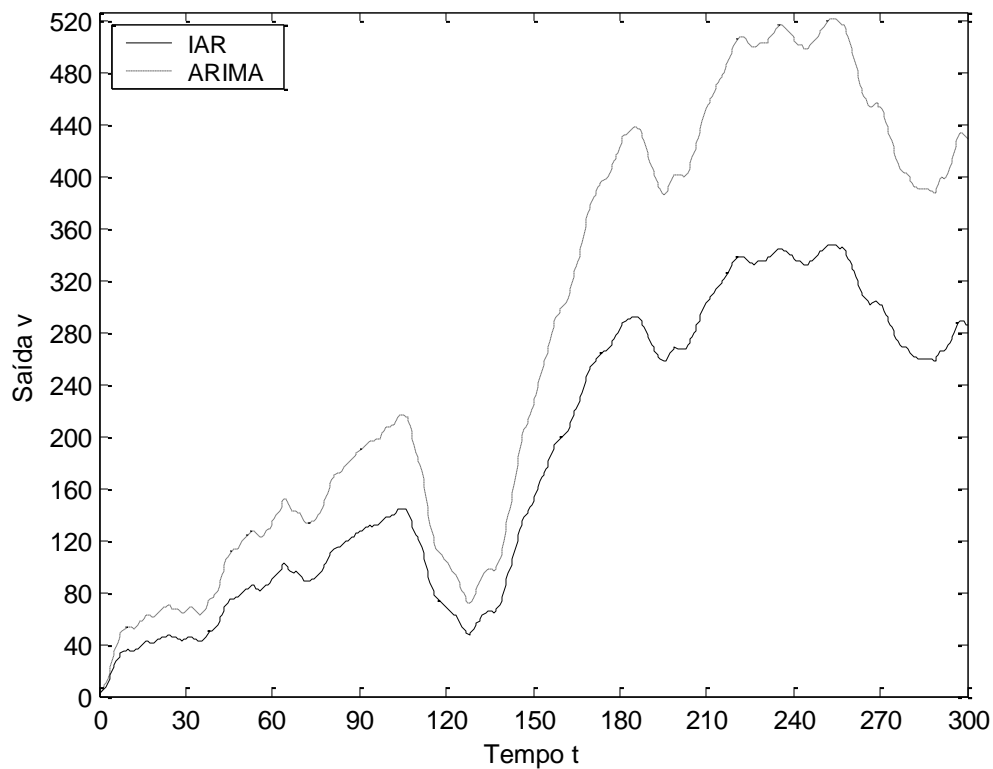


Fig. 3.11 Processos estocásticos dos tipos IAR e ARIMA.

Percebe-se que no caso dos processos estocásticos não estacionários, o sinal $v(t)$ não mantém a sua média em torno de 0.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÅSTRÖM, K. J. **Introduction to stochastic control theory.** New York, Academic Press, 1970.

ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer-controlled systems - theory and design.** 3.ed. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1997.

LJUNG, L. **System identification: theory for the user.** 2.ed. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1999.