Chapter 3

행렬과 대수
Matrices and Matrix Algebra

3.1 행렬 연산
Operations on Matrices

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

행렬 표기

- $m \times n$ 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- m개의 행(row), n개의 열(column)
- 행렬의 크기 = $m \times n$ (*m* by *n*)
- 간단한 표기:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{또는} \quad A = [a_{ij}]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad 3], \quad \begin{bmatrix} \pi & -\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 0.5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\boxed{3\times 2}$ $\boxed{2\times 3}$ $\boxed{1\times 4}$ $\boxed{3\times 3}$

주대각선

- 행렬 A의 i행 j열의 성분: $(\mathbf{A})_{ij}$
  - 예:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A})_{11} = 2,\ (\mathbf{A})_{12} = -3,\ (\mathbf{A})_{21} = 7,\ (\mathbf{A})_{22} = 0$$

행렬 연산 – 행렬의 상등

많은 응용에서 행렬들을 더하고, 빼고, 곱하는 행렬 연산이 요구된다....

- **정의 3.1.1:** 두 행렬의 **크기가 같고, 대응하는 성분들이 같으면 두 행렬은 같다(equal)**라고 한다.

- 예제 1. 행렬의 상등

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x+1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

  - $A = B$ 가 되기 위한 필요충분조건은?
  - $A = C$?

행렬 연산 – 덧셈과 뺄셈

- **정의 3.1.2**: A와 B가 **같은 크기의 행렬이면**, **합(sum) A+B**는 B의 성분을 대응하는 A의 성분에 더하여 얻는 행렬이다. **차(difference) A-B**는 B의 성분을 대응하는 A의 성분으로부터 빼서 얻는 행렬이다.

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$(A-B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

- 예제 2. 행렬의 더하기와 빼기

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- A + B = ?
- A – B = ?

A+C, B+C, A-C, B-C ?

행렬 연산 – 스칼라 곱

- **정의 3.1.3**: 행렬 A와 스칼라 c에 대해서, **곱(product) cA**는 A의 각 성분에 c를 곱하여 얻는 행렬이다.

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

- 예제 3. 행렬에 스칼라 곱하기

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

- 2A =
- (-1)B =
- 1/3 C =

- 참고: 행렬 A의 **덧셈 역원(negative) –A는** (-1)A로 정의한다.

행 벡터와 열 벡터

행렬 속에는 벡터들이 있는데...

- 행 벡터(Row vector): 한 행으로 된 행렬 (1×n) $\mathbf{r} = [r_1 r_2 \cdots r_n]$
- 열벡터(Column vector) : 한 열로 된 행렬 (m×1) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$

- 행렬을 행 벡터나 열 벡터로 분할(partition)할 수 있다.

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \qquad A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

행렬 A의 i번째 행 벡터

$$\mathbf{r}_1(A) = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}]$$
$$\mathbf{r}_2(A) = [a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad a_{24}]$$
$$\mathbf{r}_3(A) = [a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \quad a_{34}]$$

행렬 A의 j번째 열 벡터

$$\mathbf{c}_1(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2(A) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3(A) = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4(A) = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

행렬과 벡터의 곱 *Ax*

- **정의 3.1.4**: A가 m×n행렬이고 x가 n×1 열 벡터이면, **곱 Ax**는 A의 열 벡터와 x의 성분을 계수로 하는 선형 결합으로 만들어진 m×1 열벡터이다. 즉, A의 열벡터가 a_1, a_2, ...a_n이면

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

- 예를 들면..

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + (-5)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- 참고: **벡터 x의 성분의 수**와 **행렬 A의 열 벡터의 수**가 같아야 곱 Ax가 정의된다. (같지 않으면 정의되지 않는다.)

- 예제 4. 선형계를 Ax=b로 쓰기

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

- 풀이:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

- **정리 3.1.5**: A가 $m \times n$행렬이면 R^n의 모든 열 벡터 u 및 v, 임의의 스칼라 c에 대하여 다음 관계가 성립한다.

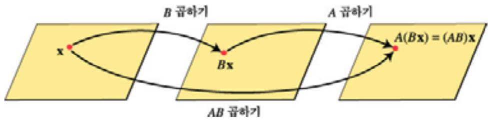
$$(a)\ \ A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$$
$$(b)\ \ A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

- 증명:

행렬 곱 AB

- 곱 AB가 대수적으로 잘 작용하려면, R^n에서 모든 열 벡터 x에 대하여 결합법칙 조건을 만족하여야 한다.

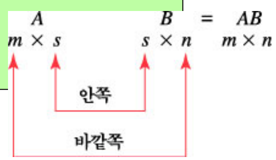
$$A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$



- 행렬 A와 행렬 B의 크기에 대한 제한
  - x가 R^n의 열 벡터이므로, n행으로 이루어진다.
  - Bx가 정의되려면, B는 n개의 열로 이루어져야 한다.
  - 따라서, 행렬 B는 $s \times n$ 크기이어야 하고, Bx는 $s \times 1$ 크기이어야 한다.
  - 이 경우에 A(Bx)가 정의되려면, 행렬 A는 s열을 갖고 있어야 한다.
  - 따라서, A의 열의 수는 B의 행의 수와 일치해야 한다.

- **정의 3.1.6**: A가 $m \times s$행렬, B가 $s \times n$행렬이고, B의 열 벡터가 b_1, b_2, ..., b_n이면 **곱(product) AB**는 $m \times n$ 행렬로서

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_n]$$



- 예제 5. 행렬 곱 AB는 ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{과} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- 풀이:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (4)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + (7)\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = (4)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + (5)\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (3)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

- 예제 6. 행렬 곱 BA는 ?

행렬 곱에서 특정한 성분 구하기

- **정리 3.1.7 (행-열 규칙 또는 점곱 규칙)**: 행렬 곱 AB의 i행 j열의 성분은 A의 i 행 벡터와 B의 j 열 벡터의 곱, 즉 점 곱이다.

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

- 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$(AB)_{ij} = \mathbf{r}_i(A)\mathbf{c}_j(B) = \mathbf{r}_i(A) \cdot \mathbf{c}_j(B)$$

- 예제 7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \boxed{26} & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

전치 행렬 (transpose of a matrix)

실수들의 대수에는 없는 행렬 연산을 정의..

- **정의 3.1.9**: A가 m×n행렬이면, A의 전치행렬(transpose) A^T는 A의 행들을 열로 하여 만들어진 n×m행렬로 정의한다. 즉 A^T의 첫째 열은 A의 첫째 행, A^T의 둘째 열은 A 의 둘째 행 등이다.

$$\underset{m\times n}{A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \qquad (A)_{ij}=(A^T)_{ji} \qquad \underset{n\times m}{A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}$$

- 예제 10. 전치 행렬

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad A^T=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad B^T=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- A^T의 전치행렬 : $(A^T)^T=A$?
- $(AB)^T=B^TA^T$

대각합 (trace)

정사각 행렬에만 적용..

- **정의 3.1.10**: 정방 행렬 A의 대각 합(trace)은 A의 주 대각선 위의 성분들의 합으로 정의하고, tr(A)로 표기한다.

- 예.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{tr}(A)=$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{tr}(B)=b_{11}+b_{22}+b_{33}$$

행렬 내적과 외적(inner and outer matrix products)

- **정의 3.1.11**: u와 v가 같은 크기의 열 벡터이면, 곱 $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$를 u와 v의 행렬 내적(matrix inner product)이라 한다. u와 v가 임의의 크기의 열 벡터이면 곱 $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$를 u와 v의 행렬 외적(matrix outer product)이라 한다.

  - 행렬 내적 = 행 벡터 × 열 벡터
  - 행렬 외적 = 열 벡터 × 행 벡터

- 예제 11. 행렬 내적과 외적 구하기

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{과} \qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- 풀이:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}=[13]=13=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

행렬의 내적, 외적, 점 곱, 대각합의 관계

- u와 v가 열 벡터일 때만..

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{과} \qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}=[u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n]=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & u_nv_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v}=\mathrm{tr}(\mathbf{u}\mathbf{v}^T)$$

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{v}^T\mathbf{u}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{u}\mathbf{v}^T)=\mathrm{tr}(\mathbf{v}\mathbf{u}^T)=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$