PROBLEMA DE TRANSPORT DE MINIMIZARE

Determinarea unei soluţii de bază

Se utilizează următorul raţionament pentru determinarea unei soluţii de bază.

Se alege o variabilă X_{ij} căreia i se atribuie o valoare nenegativă maximă compatibilă cu restricţiile (4.8) – (4.9), astfel:

$$X_{ij} = \min(a_i, b_j)$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad (4.12)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$$

$$X_{ij} \geq 0 .$$

$$a_i' = a_i - X_{ij}$$
$$b_j' = b_j - X_{ij},$$

iar a_i şi b_j se înlocuiesc cu a_i' şi b_j'.
Sunt posibile trei cazuri.

Cazul 1. $a_i < b_j$

$X_{ij} = \min(a_i, b_j) = a_i$,
rezultă: $\mathbf{a_i'} = a_i - X_{ij} = a_i - a_i = 0$, $\mathbf{b_j'} = b_j - X_{ij} = b_j - a_i$, $X_{i1} = 0, X_{i2} = 0, \ldots, X_{i,j-1} = 0$, $X_{i,j+1} = 0, \ldots, X_{in} = 0$, se renunţă la ecuaţia de rang i.

Cazul 2. $a_i > b_j$

$X_{ij} = \min(a_i, b_j) = b_j$,
rezultă: $\mathbf{a_i'} = a_i - X_{ij} = a_i - b_j$, $\mathbf{b_j'} = b_j - X_{ij} = b_j - b_j = 0$, $X_{1j} = 0, X_{2j} = 0, \ldots, X_{i-1,j} = 0$, $X_{i+1,j} = 0, \ldots, X_{mj} = 0$, se renunţă la ecuaţia de rang j.

Cazul 3. $a_i = b_j$

$X_{ij} = \min(a_i, b_j) = a_i = b_j$

rezultă: $\mathbf{a_i'} = a_i - X_{ij} = a_i - a_i = 0$, $\mathbf{b_j'} = b_j - X_{ij} = b_j - b_j = 0$, $X_{i1} = 0, X_{i2} = 0, \ldots, X_{i,j-1} = 0$, $X_{i,j+1} = 0, \ldots, X_{in} = 0, X_{1j} = 0, X_{2j} = 0, \ldots, X_{i-1,j} = 0, X_{i+1,j} = 0, \ldots, X_{mj} = 0$, se renunţă la ecuaţiile de rang i şi j . Se continuă în acelaşi mod cu celelalte variabile rămase în sistemul restricţiilor.

Metoda generală de determinare a soluţiei de bază a problemei de transport se poate particulariza prin stabilirea unei reguli de determinare a perechii de indici (i, j), deci a variabilei X_{ij} cu care se porneşte aflarea soluţiei de bază. Astfel, se poate determina soluţia de bază a problemei de transport prin: metoda colţului Nord-Vest, metoda costului minim pe linie, metoda costului minim pe coloană, metoda costului minim pe matricea costurilor.

Metoda colţului Nord-Vest

Metoda colţului Nord-Vest precizează calcularea la fiecare etapă a valorii variabilei care se află în tabelul problemei de transport din tabelul nr. 1 în pătratul din colţul Nord-Vest al tabelului, colţul stânga sus. Deci, se începe cu X_{11} .

$X_{11} = \min (a_1 , b_1)$
şi se continuă cu unul din cele trei cazuri prezentate, care se reiau până se atribuie valori tuturor variabilelor matricii X.

Metoda costului minim pe linie

Metoda costului minim pe linie determină cel mai mic cost pe linia întâi, care va stabili coordonatele variabilei X_{ij} cu care se începe algoritmul calculării soluţiei de bază a problemei de transport.

Astfel, se determină:

$c_{1k} = \min \{c_{1j} , j = 1, 2, \ldots, n\}$

$X_{1k} = \min \{a_1 , b_k\}$

Se ţine cont de relaţiile (4.13).

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} X_{1j} = a_1 \\ &\sum_{i=1}^{m} X_{ik} = b_k \\ &X_{ij} \geq 0 . \end{aligned} \tag{4.13}$$

$\mathbf{a_1}' = a_1 - X_{1k}$

$\mathbf{b_k}' = b_k - X_{1k}$,

iar a_1 şi b_k se înlocuiesc cu $\mathbf{a_1}'$ şi $\mathbf{b_k}'$, fiind posibile cele trei cazuri analizate mai sus. După determinarea valorilor variabilelor din linia întâi, se continuă apoi cu linia doi, trei, .., m, în mod analog.

Metoda costului minim pe coloană

Metoda costului minim pe coloană determină cel mai mic cost pe coloana întâi, care va stabili coordonatele variabilei X_{ij} cu care se începe algoritmul calculării soluţiei de bază a problemei de transport. Astfel, se determină:

$c_{k1} = \min \{c_{i1} , i = 1, 2, \ldots, m\}$

$X_{k1} = \min \{a_k , b_1\}$

Se ţine cont de suma variabilelor de pe linia k şi coloana întâi date de relaţiile (4.14).

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} X_{kj} = a_k \\ &\sum_{i=1}^{m} X_{i1} = b_1 \\ &X_{ij} \geq 0 . \end{aligned} \tag{4.14}$$

$\mathbf{a_k}' = a_k - X_{k1}$

$\mathbf{b_1}' = b_1 - X_{k1}$,

Valorile a_k şi b_1 se înlocuiesc cu $\mathbf{a_k}'$ şi $\mathbf{b_1}'$, fiind posibile cele trei cazuri analizate mai sus. După determinarea valorilor variabilelor din coloana întâi, se continuă cu coloana 2, 3, .., n, în mod analog.

Metoda costului minim pe ansamblu matrice costuri

Metoda costului minim pe ansamblu matrice costuri determină cel mai mic cost din matricea costurilor problemei de transport, care va stabili coordonatele variabilei X_{ij} cu care se începe algoritmul calculării soluţiei de bază a problemei de transport.

Astfel, se determină:

c_{kh} = min {c_{ij} , i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n}

X_{kh} = min {a_k , b_h}

Se ţine cont de suma variabilelor de pe linia k şi coloana h date de restricţiile (4.15).

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} X_{kj} = a_k \\ &\sum_{i=1}^{m} X_{ih} = b_h \qquad (4.15) \\ &X_{ij} \geq 0 . \end{aligned}$$

$$\mathbf{a_k}' = a_k - X_{kh}$$

$$\mathbf{b_h}' = b_h - X_{kh} ,$$

Valorile a_k şi b_h se înlocuiesc cu $\mathbf{a_k}'$ şi $\mathbf{b_h}'$, fiind posibile cele trei cazuri analizate mai sus. După determinarea valorii variabilei X_{kh} , se determină următorul cost minim din cele rămase, fie acesta c_{pq} , rezultă variabila X_{pq} căreia i se va da valoare în mod analog şi procesul va continua până toate variabilele matricii X vor primi valori.

Algoritmul potenţialelor

Cu algoritmul potenţialelor, numit şi algoritmul primal – dual, se poate determina o soluţie optimă a problemei de transport.

Se consideră problema de transport de minimizare la forma standard din relaţiile (4.7), echivalentă cu cea din relaţiile (4.8) – (4.11).

Se notează cu I_B mulţimea indicilor de bază formată din mulţimea indicilor corespunzători variabilelor de bază şi cu I_{NB} mulţimea indicilor nebazici corespunzători variabilelor care nu sunt de bază.

Pasul 1.

Se determină o soluţie de bază a problemei de transport de minimizare cu una din metodele prezentate (metoda colţului nord – vest, metoda costului minim pe linie, pe coloană sau pe ansamblu matrice costuri).

Pasul 2.

Se determină mulţimea indicilor de bază I_B formată din mulţimea indicilor corespunzători variabilelor de bază.

Pasul 3.

Se rezolvă sistemul de ecuaţii:

$$u_i + v_j = c_{ij} , \ (i, j) \in I_B$$

Sistemul este nedeterminat, se va rezolva atribuind (fixând) o valoare arbitrară unei variabile, de exemplu $u_1 = 0$, apoi se rezolvă normal.

Se calculează:

$$Z_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} , \quad \text{pentru indicii nebazici, } (i, j) \in I_{NB}$$

Dacă $Z_{ij} \leq 0$, $(\forall)(i, j) \in I_{NB}$ soluţia X este optimă. Stop.

Dacă există $Z_{ij} > 0$, soluţia X nu este optimă,se determină:

$$Z_{kp} = \max_{(i,j)\in I_{NB}} \left\{ Z_{ij} \middle| Z_{ij} > 0 \right\}$$

care este *criteriul de intrare în bază* a variabilei determinate X_{kp} .

Dacă acest maxim este atins pentru mai mulţi indici, se alege acel indice pentru care coeficientul corespunzător din funcţia obiectiv f este cel mai mic.

Pasul 4.

Criteriul de ieşire din bază.

Se stabileşte ciclul corespunzător variabilei X_{kp} . Ciclul este constituit din segmente (săgeţi) care pun în evidenţă legătura dintre variabila X_{kp} care urmează să intre în bază şi unele variabile de bază alese după regula: două variabile succesive din ciclu trebuie să fie situate pe aceeaşi linie sau coloană, obţinându-se un contur poligonal cu număr par de vârfuri ocupate de variabile X_{ij} , $(i, j) \in I_B$ şi variabila X_{kp} . Se numerotează căsuţele ciclului când acesta este parcurs într-un sens determinat (de exemplu, sensul acelor ceasornicului), începând cu căsuţa variabilei X_{kp} care se numerotează cu 1. Se marchează într-un mod oarecare (de exemplu, cu *) căsuţele de rang par în succesiunea ciclului. Din căsuţele marcate (deci cele de rang par) se alege variabila de valoare minimă, fie aceasta $X_{rq} = \theta$. Variabila X_{rq} iese din bază. Se scade $X_{rq} = \theta$ din valorile variabilelor ciclului situate în căsuţe de rang par şi se adună la valorile variabilelor ciclului situate în căsuţele de rang impar. Noua bază va fi: B $\cup \{X_{kp}\} - \{X_{rq}\}$ şi noii indici bazici corespunzători vor fi:

$I_B \cup \{(k,p)\} - \{(r, q)\}$.

Se reia algoritmul de la Pasul 3.

Observaţii

1. Dacă prin scăderea valorii minime θ din valorile variabilelor ciclului situate în căsuţe de rang par s-au obţinut mai multe variabile de bază de valoare zero, atunci una dintre ele iese din bază, iar celelalte vor face parte din bază cu valoarea zero, deci vom avea o soluţie de bază degenerată, fiind mai puţin de m + n – 1 componente pozitive.

2. Dacă în Pasul 3 la testarea dacă soluţia este optimă avem:

$Z_{ij} < 0$, $(\forall)(i, j) \in I_{NB}$,

atunci problema de transport are optim unic.

3. Dacă în Pasul 3 la testarea dacă soluţia este optimă avem:

$Z_{ij} \le 0$, $(\forall)(i, j) \in I_{NB}$, deci soluţia X este optimă, notată cu X^1_{optim} , există $Z_{kp} = 0$, $(k, p) \in I_{NB}$, problema de transport are optim multiplu, dublu dacă există o singură pereche de indici (k, p), iar a doua soluţie optimă X^2_{optim} se obţine introducând în bază pe X_{kp} şi iese din bază cine rezultă din ciclul lui X_{kp} .

4. Dacă problema de transport are optim dublu şi cele două soluţii optime sunt:

$X^1_{optim} = (X^1_{ij})$, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n;
$X^2_{optim} = (X^2_{ij})$, , i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n;

, atunci, problema are o infinitate de soluţii optime obţinute prin scrierea combinaţiei convexe a celor două soluţii optime,

$X_{optim} = \lambda \,.\, X^1_{optim} + (1 - \lambda) \,.\, X^2_{optim}$, $\lambda \in [0, 1]$.

5. Dacă problema de transport are optim triplu şi cele trei soluţii optime sunt:

$X^1_{optim} = (X^1_{ij})$, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n;
$X^2_{optim} = (X^2_{ij})$, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n;
$X^3_{optim} = (X^3_{ij})$, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n;

, atunci, problema are o infinitate de soluţii optime obţinute prin scrierea combinaţiei convexe a celor trei soluţii optime,

$$X_{optim} = \lambda_1 \cdot X^1_{optim} + \lambda_2 \cdot X^2_{optim} + \lambda_3 \cdot X^3_{optim} , \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

6. Calculele se fac in tabele, cate un nou tabel al problemei de transport la fiecare iteratie, se completeaza in pasul 4.
7. Din ultimul tabel, cel al soluţiei optime X_{optim} , se calculează min f = f(X_{optim}).

8. Determinarea solu ţiei defavorabile

Dacă se rezolvă problema de transport de miniizare, obţinându-se soluţia optimă

$$X^{min} = (X_{ij}^{min}) , i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n;$$

şi valoarea minimă a funcţiei obiectiv este f_{min} , apoi considerăm problema de transport de maximizare obţinută din aceleasi relaţii , dar se cere max f şi i se determină soluţia optimă (de maximizare, nedorită)

$$X^{max} = (X_{ij}^{max}) , i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n;$$

cu valoarea maximă a funcţiei obiectiv f_{max} , se obţine intervalul de încadrare a costului total f,

$$f \in [\mathbf{f_{min}} , f_{max}]$$

Evident că este preferabilă soluţia optimă f_{min} , dar în situaţia cea mai nefavorabilă costul total este f_{max} .

Exemplul nr. 4.2. – Laborator CO - L10- 2019

Un produs se află în diverse cantităţi în depozitele A_1, A_2, A_3 şi trebuie transportat în punctele de consum B_1, B_2, B_3 , B_4. Oferta, cererea şi costurile unitare de transport sunt date în tabelul nr. 4. 2.

Tabelul nr.4. 2.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3	2	1	1	140
A_2	2	1	3	1	180
A_3	1	2	3	1	80
Cererea b_j	90	110	115	85	S = 400

Ce cantitate trebuie transportată din fiecare depozit în fiecare punct de consum, astfel încât costul total al transportului să fie minim.

a) Ecuaţiile problemei de transport de minimizare (modelul matematic);
b) Solutia de baza;
c) **<u>Solutia optimă. - Laborator CO - L11- 2019</u>**

a) Se vor scrie ecuaţiile problemei de transport de minimizare, apoi se va determina o soluţie de bază prin cele patru metode prezentate.

Modelul matematic:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 140$$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 180$

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 80$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 90$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 110$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 115$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 85$

$X_{ij} \geq 0$, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4;

$f = 3.X_{11} + 2.X_{12} + 1.X_{13} + 1.X_{14} + 2.X_{21} + 1.X_{22} + 3.X_{23} + 1.X_{24} +$

$+ 1.X_{31} + 2 .X_{32} + 3.X_{33} + 1.X_{34}$

min f

b) Soluţia de bază prin cele patru metode prezentate

b1) Metoda colţului Nord-Vest

Tabelul nr.4.3

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3 90	2 50	1 0	1 0	140, 50, 0
A_2	2 0	1 60	3 115	1 5	180, 120,5, 0
A_3	1 0	2 0	3 0	1 80	80, 0
Cererea b_j	90 0	110 60 0	115 0	85 80 0	S = 400

Variabilele de bază sunt: VB = $\{X_{11} , X_{12} , X_{22} , X_{23} , X_{24} , X_{34} \}$

Sunt şase variabile pozitive şi m + n – 1 = 3 + 4 – 1 = 6 , deci este soluţie de bază nedegenerată. Valoarea funcţiei obiectiv f pe soluţia de bază obţinută este:

f = 3. 90 + 2. 50 + 1. 60 + 3.115 + 1. 5 + 1. 80 = 860 unităţi monetare (u. m.)

b2) Metoda costului minim pe linie

Tabelul nr.4. 4

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3 0	2 0	1 115	1 25	140, 25, 0

A_2	2 10	1 110	3 0	1 60	180, 70, 10, 0
A_3	1 80	2 0	3 0	1 0	80, 0
Cererea b_j	90 80 0	110 0	115 0	85 60 0	S = 400

Variabilele de bază sunt: VB = $\{X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{24}, X_{31}\}$

Sunt şase variabile pozitive şi m + n – 1 = 3 + 4 – 1 = 6 , deci este soluţie de bază nedegenerată.

Valoarea funcţiei obiectiv f pe soluţia de bază obţinută este:

f = 1. 115 + 1. 25 + 2. 10 + 1. 110 + 1. 60 + 1. 80 = 410 u. m.

b3)Metoda costului minim pe coloană

Tabelul nr. 4.5

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3 0	2 0	1 115	1 25	140, 25, 0
A_2	2 10	1 110	3 0	1 60	180, 170, 60, 0
A_3	1 80	2 0	3 0	1 0	80, 0
Cererea b_j	90 10 0	110 0	115 0	85 60 0	S = 400

Variabilele de bază sunt: VB = $\{X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{24}, X_{31}\}$

Sunt şase variabile pozitive şi m + n – 1 = 3 + 4 – 1 = 6 , deci este soluţie de bază nedegenerată.

Valoarea funcţiei obiectiv f pe soluţia de bază obţinută este:

f = 1. 115 + 1. 25 + 2. 10 + 1. 110 + 1. 60 + 1. 80 = 410 u. m.

b4)Metoda costului minim pe ansamblu matrice costuri

Tabelul nr. 4.6

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3 10	2 0	1 115	1 15	140, 25, 10, 0
A_2	2	1	3	1	180, 70, 0

	0	110	0	70	
A_3	1 80	2 0	3 0	1 0	80, 0
Cererea b_j	90 10 0	110 0	115 0	85 15 0	S = 400

Variabilele de bază sunt: $VB = \{ X_{11} , X_{13} , X_{14} , X_{22} , X_{24} , X_{31} \}$

Sunt şase variabile pozitive şi $m + n – 1 = 3 + 4 – 1 = 6$, deci este soluţie de bază nedegenerată.

Valoarea funcţiei obiectiv f pe soluţia de bază obţinută este:

$f = 3. 10 + 1. 115 + 1. 15 + 1. 110 + 1. 70 + 1. 80 = 420$ u. m.

Se observă că pentru soluţia de bază determinată prin metoda costului minim pe linie sau pe coloană f = 410 u. m. , deci este mult mai convenabilă decât cea determinată prin metoda colţului nord-vest pentru care f = 860 u. m.

d) <u>Solutia optimă. - Laborator CO - L11- 2019</u>

Exemplul nr.4.3. - Algoritmul potenţialelor L10 – <u>L11 -2019</u>

Se reia problema de transport din exemplul nr.4.2, în tabelul nr.4.7 este soluţia de bază determinată prin metoda costului minim pe ansamblu matrice costuri.

$f = 3. 10 + 1. 115 + 1. 15 + 1. 110 + 1. 70 + 1. 80 = 420$ u. m.

Se va utiliza algoritmul potenţialelor pentru determinarea soluţiei optime.

Tabelul nr. 4.7

A_i / B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3 10	2 0	1 115	1 15	140, 25, 10, 0
A_2	2 0	1 110	3 0	1 70	180, 70, 0
A_3	1 80	2 0	3 0	1 0	80, 0
Cererea b_j	90 10 0	110 0	115 0	85 15 0	S = 400

Variabilele de bază sunt:

$VB = \{ X_{11} , X_{13} , X_{14} , X_{22} , X_{24} , X_{31} \}$

Sunt şase variabile pozitive şi $m + n – 1 = 3 + 4 – 1 = 6$, deci este soluţie de bază nedegenerată.

Indicii bazici sunt: $I_B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 1)\}$

Se rezolvă sistemul de ecuaţii:

$$u_i + v_j = c_{ij} , \ (i, j)\in I_B$$

Rezultă:

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 3$$

$$u_1 + v_3 = c_{13} = 1$$

$$u_1 + v_4 = c_{14} = 1$$

$$u_2 + v_2 = c_{22} = 1$$

$$u_2 + v_4 = c_{24} = 1$$

$$u_3 + v_1 = c_{31} = 1$$

Se rezolvă sistemul, se pune $u_1 = 0$, rezultă

$u_1 = 0$, $v_1 = 3$, $v_3 = 1$, $v_4 = 1$, $u_2 = 0$, $v_2 = 1$, $u_3 = -2$

Se calculează:

$$Z_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad , \quad (i, j) \in I_{NB}$$

Rezultă:

$$Z_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 1 - 2 = -1$$

$$Z_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 0 + 3 - 2 = 1 > 0$$

$$Z_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 1 - 3 = -2$$

$$Z_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 1 - 2 = -3$$

$$Z_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -2 + 1 - 3 = -4$$

$$Z_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -2 + 1 - 1 = -2$$

Soluţia nu este optimă, deoarece $Z_{21} = 1 > 0$, fiind singura valoare Z_{ij} pozitivă.

$\text{Max}\{ Z_{ij} > 0, (i, j) \in I_{NB} \} = \max\{1\} = 1 = Z_{21}$

Va intra în bază X_{21} , se va construi ciclul variabilei X_{21} .

Iese din bază X_{11} , $\theta = \min \{X_{24} , X_{11} \} = \min \{70, 10\} = X_{11} = 10$ se va scădea din valorile variabilelor de rang par din ciclu şi se adună la valorile variabilelor de rang impar din ciclu. Rezultă un nou tabel al problemei de transport. Se renunţă în calcul la căsuţele tabelului nr. 4.7 care nu se modifică, doar îi dau structura.

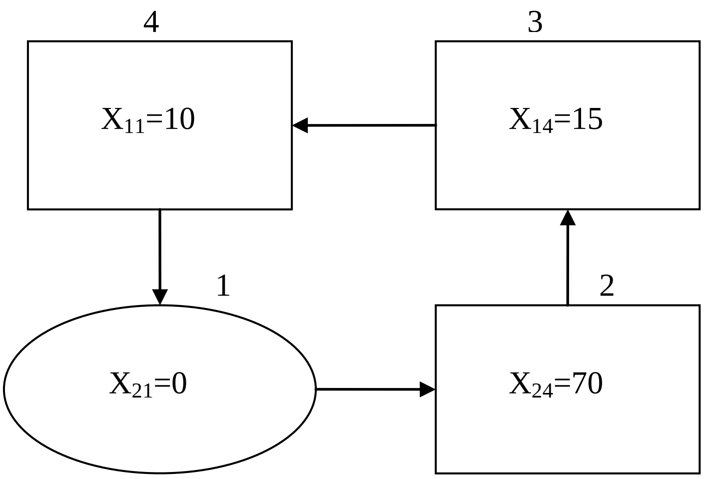

Figura nr. 2

Tabelul nr. 4.8

3 0	2 0	1 115	1 25
2 10	1 110	3 0	1 60
1 80	2 0	3 0	1 0

Valoarea funcţiei obiectiv f în noua soluţie va fi : f = 1. 115 + 1. 25 + 2.10 + 1. 110 + +1. 60 + 1. 80 = 410 u. m.

Variabilele de bază sunt: VB = $\{X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{24}, X_{31}\}$

Indicii bazici ai actualei iteraţiii sunt: $I_B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1)\}$

Se rezolvă sistemul de ecuaţii:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i, j) \in I_B$$

Rezultă:

$$u_1 + v_3 = c_{13} = 1$$
$$u_1 + v_4 = c_{14} = 1$$
$$u_2 + v_1 = c_{21} = 2$$
$$u_2 + v_2 = c_{22} = 1$$
$$u_2 + v_4 = c_{24} = 1$$
$$u_3 + v_1 = c_{31} = 1$$

Se rezolvă sistemul, se pune $u_1 = 0$, rezultă

$u_1 = 0$, $v_3 = 1$, $v_4 = 1$, $u_2 = 0$, $v_2 = 1$, $v_1 = 2$, $u_3 = -1$

Se calculează:

$$Z_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \quad (i, j) \in I_{NB}$$

Rezultă:

$$Z_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 2 - 3 = -1$$
$$Z_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 1 - 2 = -1$$
$$Z_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 1 - 3 = -2$$
$$Z_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -1 + 1 - 2 = -2$$
$$Z_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -1 + 1 - 3 = -3$$
$$Z_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -1 + 1 - 1 = -1$$

Soluţia din tabelul nr. 4.8 este optimă şi unică, deoarece $Z_{ij} < 0$, $(\forall)$ $(i, j) \in I_{NB}$

min f = 410 unităţi monetare.

Se va determina cu programul Qsb soluţia defavorabilă, considerând pentru problema de transport dată de tabelul nr.4. 7 obiectivul max f. Soluţia problemei de transport de maximizare în acest caz este în tabelul nr. 4.9 şi max f = 920 u. m.

Tabelul nr. 4.9

3 90	2 50	1 0	1 0
2 0	1 0	3 115	1 65
1 0	2 60	3 0	1 20

$f \in [\ \mathbf{f_{min}}\ ,\ f_{max}\ ]$

Rezultă $f \in [\ \mathbf{410},\ 920]$

Evident că este preferabilă soluţia optimă f_{min} = 410 unităţi monetare, dar în situaţia cea mai nefavorabilă costul total al transportului este f_{max} = 920 unităţi monetare.

4. 4. PROBLEMA DE TRANSPORT DE MAXIMIZARE

Există probleme practice al căror model matematic este acelaşi cu al problemei de transport de minimizare, dar care cer maximizarea funcţiei obiectiv.

Dacă în problema de transport considerată în relaţiile (4.8) – (4.11) se consideră ca şi criteriu de optimizare criteriul de maximizare a funcţiei obiectiv f, se obţine modelul matematic al problemei de transport de maximizare, dată de relaţiile (4.20).

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_{ij} = a_i}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{X_{ij} = b_j}\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathbf{X_{ij}} \geq \mathbf{0}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \mathbf{(4.20)}$$

$$\mathbf{f(X) =} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_{ij} . X_{ij}}$$

$$\mathbf{max\ f(X)}$$

unde: $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$, $X = (X_{ij})$, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n;

Se presupune că problema de transport de maximizare (4.20) este echilibrată, este adevărată relaţia (4.21).

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \mathbf{(4.\ 21)}$$

Problema de transport de maximizare (4.20) se rezolvă asemănător cu problema de transport de minimizare, în două etape. În prima etapă se determină o soluţie de bază a problemei (4.20) cu una din metodele:

- metoda colţului nord-vest, care este aceeaşi cu cea analizată la problema de transport de minimizare;

- metodele costului minim pe linie, pe coloană sau pe ansamblu matrice costuri, se înlocuiesc cu metodele profitului (venitului) maxim pe linie, pe coloană sau pe ansamblu matrice a profitului (venitului), deci se alege profitul (venitul) maxim pe linie, pe coloană sau pe ansamblu matrice, pentru a determina variabila cu care se începe găsirea soluţiei de bază.

În etapa a doua se utilizează soluţia de bază determinată în prima etapă, aplicând algoritmul potenţialelor pentru problema de maximizare.

Observaţie.

Dacă se rezolvă problema de transport de maximizare (4.20), obţinându-se soluţia optimă

$$X^{max} = (X_{ij}^{max}) , i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n;$$

şi valoarea maximă a funcţiei obiectiv este f_{max} , apoi considerăm problema de transport de minimizare obţinută din relaţiile (4.20), dar se cere min f şi i se determină soluţia optimă (de minimizare, nedorită)

$$X^{min} = (X_{ij}^{min}) , i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n;$$

cu valoarea minimă a funcţiei obiectiv f_{min} , se obţine intervalul de încadrare a profitului (venitului) total f,

$$f \in [f_{min} \mathbf{, f_{max}}]$$

Evident că este preferabilă soluţia optimă f_{max} , dar în situaţia cea mai nefavorabilă profitul (venitul) total este f_{min} .