第二章作业

1、（20分） 用O、Ω、Θ表示函数f与g之间阶的关系，并分别指出下列函数中阶最低和最高的函数：（该题考察阶的关系，20分）

1. $f(n)=100,\ g(n)=n^{\frac{1}{100}}$

$$f(n)=\Theta(1),\quad g(n)=\Theta(n^{\frac{1}{100}})\\ \therefore f(n)=O(g(n)).\\ \text{阶最低}:f(n),\text{阶最高}:g(n).$$

2. $f(n)=6n+n\lfloor\log n\rfloor,\ g(n)=3n$

$$f(n)=6n+n\lfloor\log n\rfloor,\text{设}\ \exists c_1,c_2>0,n_0,\forall n>n_0,\\ s.t.\quad c_1 n\log n\le 6n+n\lfloor\log n\rfloor\le c_2 n\log n\\ \because n_0>0\therefore c_1\log n\le 6+\lfloor\log n\rfloor\le c_2\log n,\\ \text{当}\ n_0=100,\ c_1=1,\ c_2=7\ \text{时成立，}\ \therefore f(n)=\Theta(n\log n)\\ \text{又}\because g(n)=\Theta(n)\therefore g(n)=O(f(n)).\\ \text{阶最低}:g(n),\text{阶最高}:f(n).$$

3. $f(n)=\frac{n}{\log n}-1,\ g(n)=2\sqrt{n}$

$$\because \log n=O(\sqrt{n})\\ \therefore \frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}=O(\frac{n}{\log n})\\ \because f(n)=\Theta(\frac{n}{\log n}),\ g(n)=\Theta(\sqrt{n})\\ \therefore g(n)=O(f(n)).\\ \text{阶最低}:g(n),\text{阶最高}:f(n).$$

4. $f(n)=2^n+n^2,\ g(n)=3^n$

$$f(n)=\Theta(2^n),\ g(n)=\Theta(3^n)\\ \therefore f(n)=O(g(n)).\\ \text{阶最低}:f(n),\text{阶最高}:g(n).$$

5. $f(n)=\log_3 n,\ g(n)=\log_2 n$

$$f(n)=O(g(n)),\ \text{阶最低}:f(n),\text{阶最高}:g(n).$$

2、（20分）（该题考察和式求和，20分）

证明：$\sum\limits_{k=1}\frac{1}{k^2}$有常数上界。

证明：

$$\because \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}}=(1-\frac{1}{k+1})^2\le\frac{1}{4}=r\\ \therefore \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\le\sum_{k=1}^{\infty}a_1 r^k=\sum_{k=1}^{\infty}1\times(\frac{1}{4})^k=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\\ \therefore \text{得证}.$$

3、（20分） 给出下列各式中$T(n)$的渐近上下界，假设当$n\le 10$，$T(n)$为常数，尽可能保证给出的界限是紧的，并验证给出的答案。（该题考察递归方程解法，20分）

1. $T(n)=3T(\frac{n}{5})+\lg^2 n$

$$f(n)=\lg^2 n=O(n^{\log_5 3})\\ \therefore \text{由}Master\text{定理},T(n)=O(n^{\log_5 3})=\Omega(n^{\log_5 3})=\Theta(n^{\log_5 3})$$

2. $T(n)=T(\sqrt{n})+\Theta(\lg\lg n)$

$$\text{令}m=\lg\lg n,\text{则}n=2^{2^m},T(2^{2^m})=T(2^{\frac{2^m}{2}})+\Theta(m)=T(2^{2^{m-1}})+\Theta(m)\\ \text{令}S(m)=T(2^{2^m}),\text{则}S(m-1)=T(2^{2^{m-1}})\\ \therefore S(m)=S(m-1)+\Theta(m)\therefore\text{由}Master\text{定理},S(m)=\Theta(m)\\ \therefore T(n)=\Theta(\lg\lg n)$$

3. $T(n)=10T(\frac{n}{3})+17n^{1.2}$

$$f(n)=17n^{1.2}=O(n^{\log_3 10})\\ \therefore \text{由}Master\text{定理},T(n)=O(n^{\log_3 10})=\Omega(n^{\log_3 10})=\Theta(n^{\log_3 10})$$

4. $T(n)=7T(\frac{n}{2})+n^3$

$$\because \log_2 7\approx 2.8<3\therefore f(n)=n^3\ne O(n^{\log_2 7})\\ \therefore \text{由}Master\text{定理},T(n)=\Theta(f(n))=\Theta(n^3)=O(n^3)=\Omega(n^3)$$

5. $T(n)=T(\frac{n}{2}+\sqrt{n})+\sqrt{6046}$

$$
\text{对} T_1(n)=T_1(\frac{n}{2})+\frac{\sqrt{6046}}{2}, \because f_1(n)=\frac{\sqrt{6046}}{2}=\Theta(n^{\log_2 1}) \therefore T_1(n)=\Theta(\lg n)
$$
$$
\text{对} T_2(n)=T_2(\sqrt{n})+\frac{\sqrt{6046}}{2}, \text{设} m=\lg n, \text{则} n=2^m; \text{令} S(m)=T(2^m),
$$
$$
\because T_2(2^m)=T_2(2^{\frac{m}{2}})+\frac{\sqrt{6046}}{2} \therefore S(m)=S(\frac{m}{2})+\frac{\sqrt{6046}}{2}
$$
$$
\therefore S(m)=\Theta(\lg m) \therefore T_2(n)=\Theta(\lg m)=\Theta(\lg\lg n)
$$
$$
\therefore T(n)=T_1(n)+T_2(n)=\Theta(\lg n)
$$

4、（20分）运用主定理求解下面方程，假设T为$O(1)$作为基本情况：（该题考察主定理，20分）

1. $T(n)=25T(\frac{n}{5})+n^{2.1}$

$$
\because f(n)=n^{2.1}\neq O(n^{\log_5 25})=O(n^2), 2.1>2
$$
$$
\therefore T(n)=\Theta(n^{2.1})
$$

2. $T(n)=25T(\frac{n}{5})+n^{1.5}$

$$
\because f(n)=n^{1.5}=O(n^{\log_5 25})=O(n^2)
$$
$$
\therefore T(n)=\Theta(n^2)
$$

3. $T(n)=25T(\frac{n}{5})+n^2$

$$
\because f(n)=n^2=\Theta(n^{\log_5 25})=\Theta(n^2)
$$
$$
\therefore T(n)=\Theta(f(n)\lg n)=\Theta(n^2\lg n)
$$

5、（20分）对递归式$T(n)=3T(\frac{n}{4})+cn^2$，用递归法确定一个渐进上界，并画出递归树。可能会用到的公式：$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$（该题考察递归树，20分）

由递归树可得：

$$
\begin{aligned}
T(n)&=cn^2+\frac{3}{16}cn^2+(\frac{3}{16})^2cn^2+\cdots+(\frac{3}{16})^{\log_4^{n-1}}cn^2+\Theta(n^{\log_4^3})\\
&=\sum_{i=0}^{\log_4^{n-1}}(\frac{3}{16})^i cn^2+\Theta(n^{\log_4^2})\\
&=\frac{(\frac{3}{16})^{\log_4^n}-1}{\frac{3}{16}-1}cn^2+\Theta(n^{\log_4^3})
\end{aligned}
$$
$$
\therefore T(n)=O(n^2)
$$