计算方法实验

2022 年 4 月 22 日

数据显示结果已保留 4 位小数。

1 实验题目 1：拉格朗日（Lagrange）插值

1.1 问题分析

准确描述并总结出实验题目（摘要），并准确分析原题的目的和意义。

1.1.1 方法概要

给定平面上 $n+1$ 个不同的数据点 $(x_k, f(x_k)), k = 0, 1, \cdots, n, x_i \neq x_j, i \neq j$ 则满足条件

$$P_n(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, \cdots, n$$

的 n 次拉格朗日插值多项式

$$P_n(x) = \Sigma_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

是存在唯一的。若 $x_k \in [a, b], k = 0, 1, \cdots, n$，且函数 $f(x)$ 充分光滑，则当 $x \in [a, b]$ 时，有误差估计式

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \xi \in [a, b]$$

1.1.2 实验目的

利用拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$ 求 $f(x)$ 的近似值。

输入： $n+1$ 个数据点 $x_k, f(x_k), k = 0, 1, \cdots, n$、插值点 x

输出： $f(x)$ 在插值点 x 的近似值 $P_n(x)$

1.2 数学原理

数学原理表达清晰且书写准确。

1.2.1 证明 $P_n(x)$ 存在且唯一

证明：使用归纳法证明。

当 $n=0$，一定存在 $P_0(x)=C=f_0(x)$ 满足要求。

假设当 $n=k-1$ 时，存在满足要求的 $P_{k-1}(x)$，则当 $n=k$，有

$$P_k(x)=P_{k-1}(x)+c(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_k),\ \text{c 为系数}$$

则 $\because P_n(x_n)=f(x_n),\therefore$ 参数 c 是可求的，故 $P_n(x)$ 是存在的。

由多项式基本定理，$\because P_n(x)$的次数 $\leq n,\therefore P_n(x)$ 是唯一存在的。

1.2.2 计算方法

对平面上 $n+1$ 个点 $(x_k,f(x_k)),k=0,1,\cdots,n,x_i\neq x_j,i\neq j$ 定义 n 次多项式：

$$L_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

则 $L_k(x_k)=1,L_k(x_m)=0,m\neq k$。

定义：

$$P_n(x)=f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+\cdots+f(x_n)L_n(x)=\Sigma_{k=0}^{n}f(x_k)L_x(x)$$

为 $f(x)$ 的 n 次拉格朗日插值多项式。

1.3 程序设计流程

编译通过，根据输入能得到正确输出。

[11]:
```python
# 引入需要的包
import numpy as np
```

```python
from pandas import DataFrame
from matplotlib import pyplot as plt
```

[12]:
```python
# L_k(x)
def L(k, x_list: np.ndarray):
    def l(x: float):
        x_k = x_list[k]
        slice = np.array([*x_list[:k], *x_list[k+1:]])
        repeat = np.array([x, ] * (len(x_list) - 1))
        repeat_k = np.array([x_k, ] * (len(x_list) - 1))
        return np.prod(repeat - slice) / np.prod(repeat_k - slice)
    return l

# 拉格朗日多项式 P_n(x)
def P(f, x_list: np.ndarray, x: float):
    return np.sum([f(x_list[k]) * L(k, x_list)(x) for k in range(len(x_list))])

# 获得 x_list
def linspace(r: int, n: int):
    return [-r + k * (2 * r / n) for k in range(0, n + 1)]
```

1.3.1 问题一

[13]:
```python
def problem1():
    print("问题 1: 拉格朗日插值多项式的次数 n 越大越好吗? ")

    def sub(targets_x, targets_n, solve):
        return DataFrame({n: {x: solve(n, x) for x in targets_x} for n in␣
↪targets_n}).round(4)

    print("(1) 考虑 f(x) = 1 / (1 + x^2) in [-5, 5]")
    targets_x_1 = [0.75, 1.75, 2.75, 3.75, 4.75]
    targets_n = [5, 10, 20]
    print(sub(
        targets_x=targets_x_1,
        targets_n=targets_n,
```

```python
    solve=lambda n_i, x: P(
        lambda x_i: 1 / (1 + x_i ** 2), linspace(5, n_i), x
    )
))
print("差值: ")
print(sub(
    targets_x=targets_x_1,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: ((1 / (1 + x ** 2)) - P(
        lambda x_i: 1 / (1 + x_i ** 2), linspace(5, n_i), x
    ))
))

print("(2) 考虑 f(x) = e^x in [-1, 1]")
targets_x_2 = [-0.95, -0.05, 0.05, 0.95]
print(sub(
    targets_x=targets_x_2,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: P(lambda x_i: np.e ** x_i,
                           linspace(5, n_i), x)
))
print("差值: ")
print(sub(
    targets_x=targets_x_2,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: (np.e ** x - P(lambda x_i: np.e ** x_i,
                                        linspace(5, n_i), x))
))
print("画出两个函数以及其拉格朗日多项式的图像: ")
slice_fluent_size = 1000
x_linespace_2 = np.linspace(-1, 1, slice_fluent_size)
x_linespace_10 = np.linspace(-5, 5, slice_fluent_size)
y1 = 1 / (1 + x_linespace_10**2)
Ls1 = {n_i: np.array([P(lambda x_i: np.e ** x_i, linspace(5, n_i), x)
                      for x in x_linespace_10]) for n_i in targets_n}
plt.figure(dpi=150)
```

```python
    plt.title("(1) Consider $f(x) = 1 / (1 + x^2)$")
    plt.legend(handles=plt.plot(x_linespace_10, y1, label="$f(x) = 1 / (1 +␣
↪x^2)$"), loc='best')
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(1) Consider $f(x) = 1 / (1 + x^2)$, select n")
    plt.legend(handles=[*[plt.plot(x_linespace_10, Ls1[n_i],␣
↪label=f"$P_n(x),n={n_i}$")[0] for n_i in Ls1],
                        plt.plot(x_linespace_10, y1, label="$f(x) = 1 / (1 +␣
↪x^2)$")[0]], loc='best')
    y2 = np.e**x_linespace_2
    Ls2 = {n_i: np.array([P(lambda x_i: np.e ** x_i, linspace(5, n_i), x)
                        for x in x_linespace_2]) for n_i in targets_n}
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(2) Consider $f(x) = e^x$")
    plt.legend(handles=plt.plot(x_linespace_2, y2, label="$f(x) = e^x$"),␣
↪loc='best')
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(2) Consider $f(x) = e^x$, select n")
    plt.legend(handles=[*[plt.plot(x_linespace_2, Ls2[n_i],␣
↪label=f"$P_n(x),n={n_i}$")[0] for n_i in Ls2],
                        plt.plot(x_linespace_2, y2, label="$f(x) = e^x$")[0]],␣
↪loc='best')



problem1()
```

```
问题 1: 拉格朗日插值多项式的次数 n 越大越好吗?
(1) 考虑 f(x) = 1 / (1 + x^2) in [-5, 5]
          5        10        20
0.75   0.5290   0.6790    0.6368
1.75   0.3733   0.1906    0.2384
2.75   0.1537   0.2156    0.0807
3.75  -0.0260  -0.2315   -0.4471
4.75  -0.0157   1.9236  -39.9524
差值:
```

```
          5       10       20
0.75  0.1110 -0.0390   0.0032
1.75 -0.1272  0.0556   0.0077
2.75 -0.0369 -0.0988   0.0361
3.75  0.0923  0.2979   0.5134
4.75  0.0582 -1.8812  39.9949
```

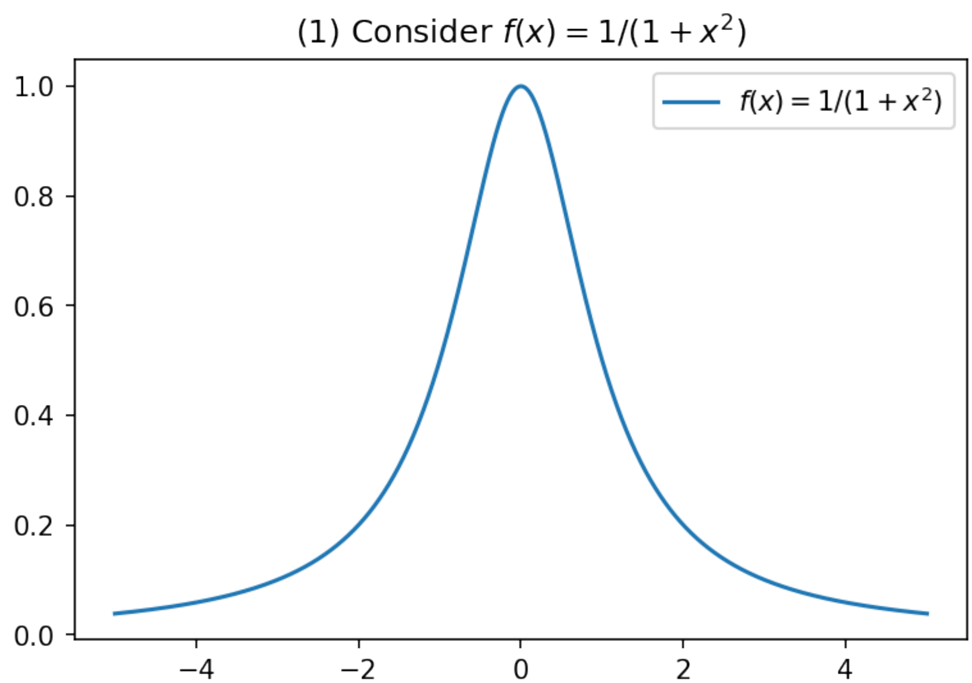
(2) 考虑 f(x) = e^x in [-1, 1]

```
           5       10       20
-0.95  0.4306  0.3867  0.3867
-0.05  1.5272  0.9512  0.9512
 0.05  1.6345  1.0513  1.0513
 0.95  2.6414  2.5857  2.5857
```

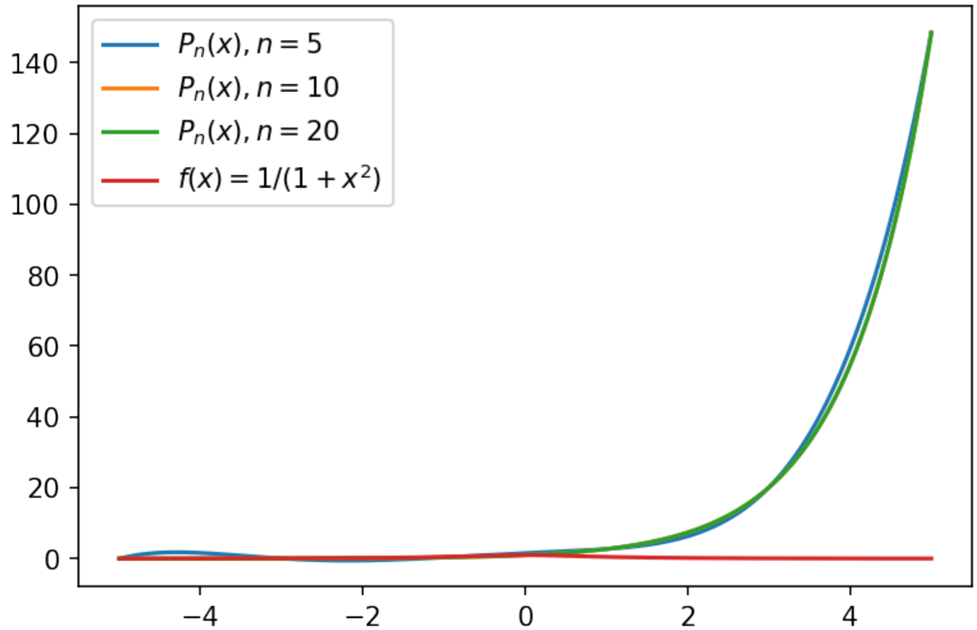
差值：

```
           5    10   20
-0.95 -0.0439  0.0  0.0
-0.05 -0.5760  0.0 -0.0
 0.05 -0.5832 -0.0  0.0
 0.95 -0.0557 -0.0 -0.0
```

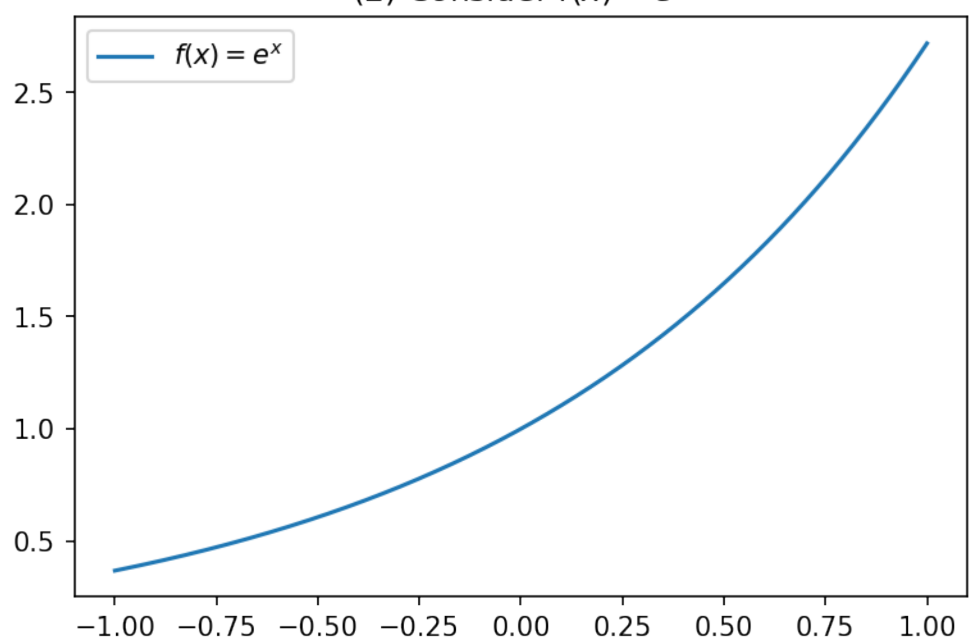
画出两个函数以及其拉格朗日多项式的图像：

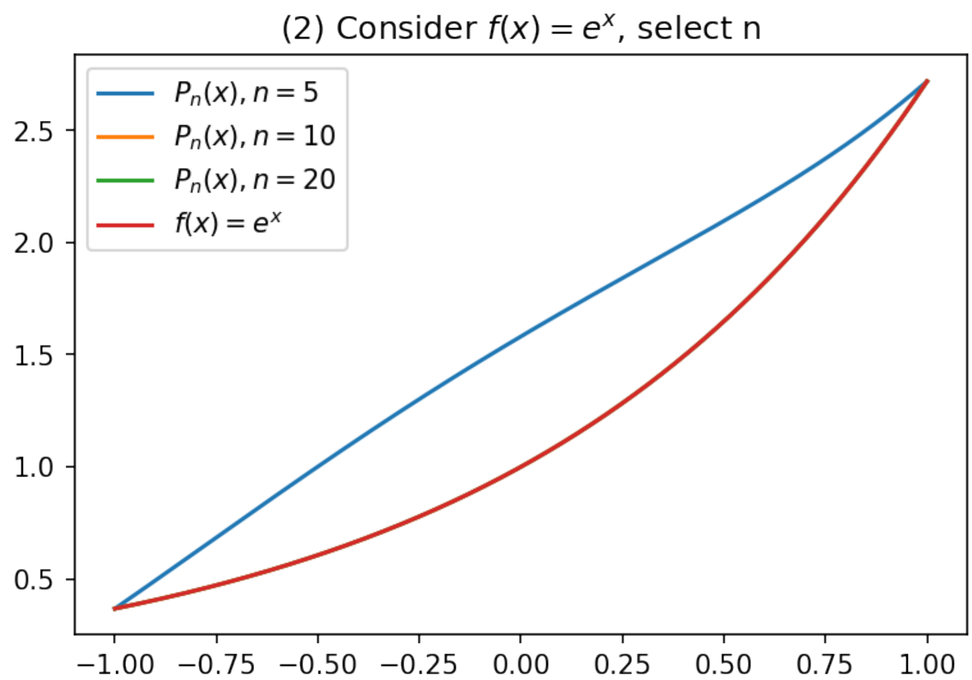


(1) Consider $f(x) = 1/(1+x^2)$, select n



(2) Consider $f(x) = e^x$





1.3.2 问题二

[14]:
```
def problem2():
    print("问题 2: 插值区间越小越好吗? ")

    def sub(targets_x, targets_n, solve):
        return DataFrame({n: {x: solve(n, x) for x in targets_x} for n in␣
 ↪targets_n}).round(4)

    print("(1) 考虑 f(x) = 1 / (1 + x^2) in [-1, 1]")
    targets_x_1 = [-0.95, -0.05, 0.05, 0.95]
    targets_n = [5, 10, 20]
    print(sub(
        targets_x=targets_x_1,
        targets_n=targets_n,
        solve=lambda n_i, x: P(
            lambda x_i: 1 / (1 + x_i ** 2), linspace(1, n_i), x
```

```
    )
))
print("差值: ")
print(sub(
    targets_x=targets_x_1,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: ((1 / (1 + x ** 2)) - P(
        lambda x_i: 1 / (1 + x_i ** 2), linspace(1, n_i), x
    ))
))

print("(2) 考虑 f(x) = e^x in [-5, 5]")
targets_x_2 = [0.75, 1.75, 2.75, 3.75, 4.75]
print(sub(
    targets_x=targets_x_2,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: P(lambda x_i: np.e ** x_i,
                           linspace(5, n_i), x)
))
print("差值: ")
print(sub(
    targets_x=targets_x_2,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: (np.e ** x - P(lambda x_i: np.e ** x_i,
                                        linspace(5, n_i), x))
))
print("画出两个函数以及其拉格朗日多项式的图像: ")
slice_fluent_size = 1000
x_linespace_2 = np.linspace(-1, 1, slice_fluent_size)
x_linespace_10 = np.linspace(-5, 5, slice_fluent_size)
y1 = 1 / (1 + x_linespace_2**2)
Ls1 = {n_i: np.array([P(lambda x_i: np.e ** x_i, linspace(5, n_i), x)
                    for x in x_linespace_2]) for n_i in targets_n}
plt.figure(dpi=150)
plt.title("(1) Consider $f(x) = 1 / (1 + x^2)$")
```

```
    plt.legend(handles=plt.plot(x_linespace_2, y1, label="$f(x) = 1 / (1 +␣
↪x^2)$"), loc='best')
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(1) Consider $f(x) = 1 / (1 + x^2)$, select n")
    plt.legend(handles=[*[plt.plot(x_linespace_2, Ls1[n_i],␣
↪label=f"$P_n(x),n={n_i}$")[0] for n_i in Ls1],
                        plt.plot(x_linespace_2, y1, label="$f(x) = 1 / (1 +␣
↪x^2)$")[0]], loc='best')
    y2 = np.e**x_linespace_10
    Ls2 = {n_i: np.array([P(lambda x_i: np.e ** x_i, linspace(5, n_i), x)
                        for x in x_linespace_10]) for n_i in targets_n}
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(2) Consider $f(x) = e^x$")
    plt.legend(handles=plt.plot(x_linespace_10, y2, label="$f(x) = e^x$"),␣
↪loc='best')
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(2) Consider $f(x) = e^x$, select n")
    plt.legend(handles=[*[plt.plot(x_linespace_10, Ls2[n_i],␣
↪label=f"$P_n(x),n={n_i}$")[0] for n_i in Ls2],
                        plt.plot(x_linespace_10, y2, label="$f(x) = e^x$")[0]],␣
↪loc='best')



problem2()
```

```
问题 2: 插值区间越小越好吗?
(1) 考虑 f(x) = 1 / (1 + x^2) in [-1, 1]
            5       10       20
-0.95  0.5171  0.5264  0.5256
-0.05  0.9928  0.9975  0.9975
 0.05  0.9928  0.9975  0.9975
 0.95  0.5171  0.5264  0.5256
差值:
            5       10   20
-0.95  0.0085 -0.0008  0.0
```

```
-0.05  0.0047 -0.0000 -0.0
 0.05  0.0047 -0.0000 -0.0
 0.95  0.0085 -0.0008  0.0
```

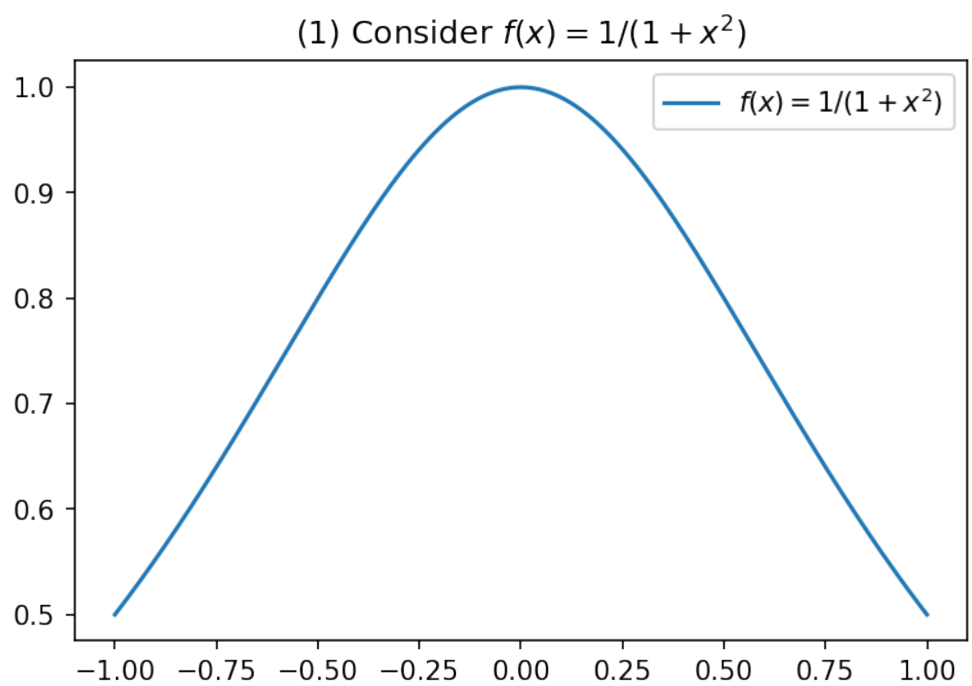
(2) 考虑 f(x) = e^x in [-5, 5]

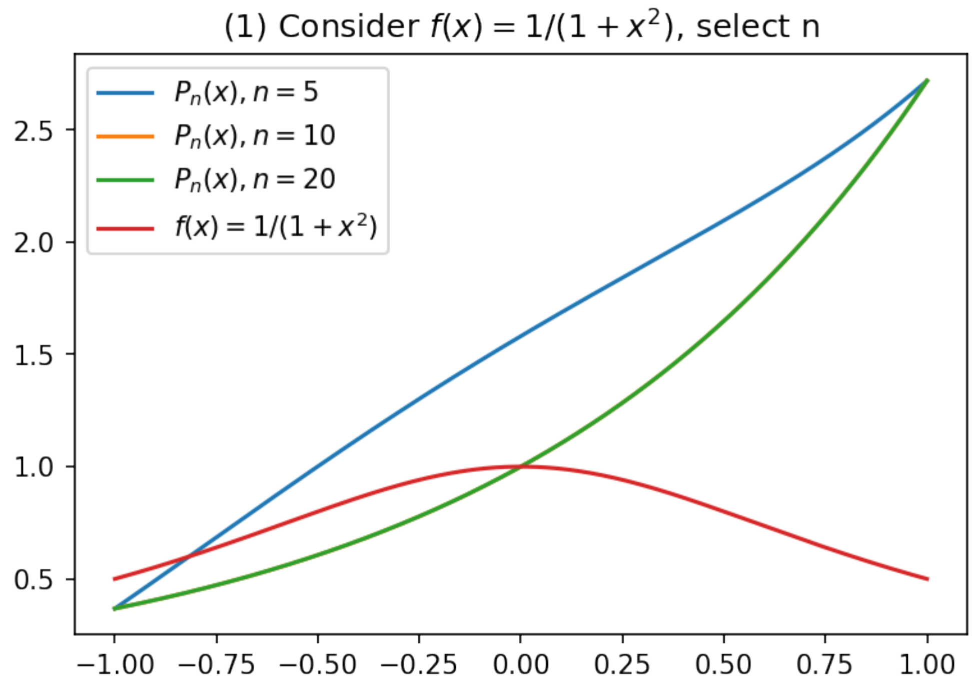
	5	10	20
0.75	2.3740	2.1171	2.1170
1.75	4.8716	5.7544	5.7546
2.75	15.0081	15.6432	15.6426
3.75	45.8623	42.5184	42.5211
4.75	119.6210	115.6074	115.5843

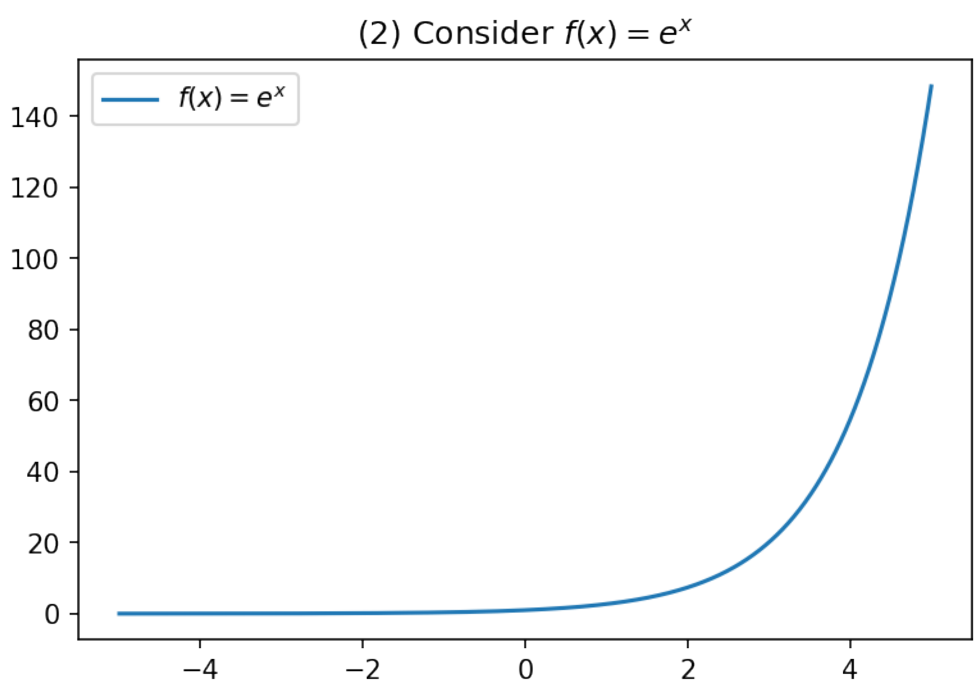
差值：

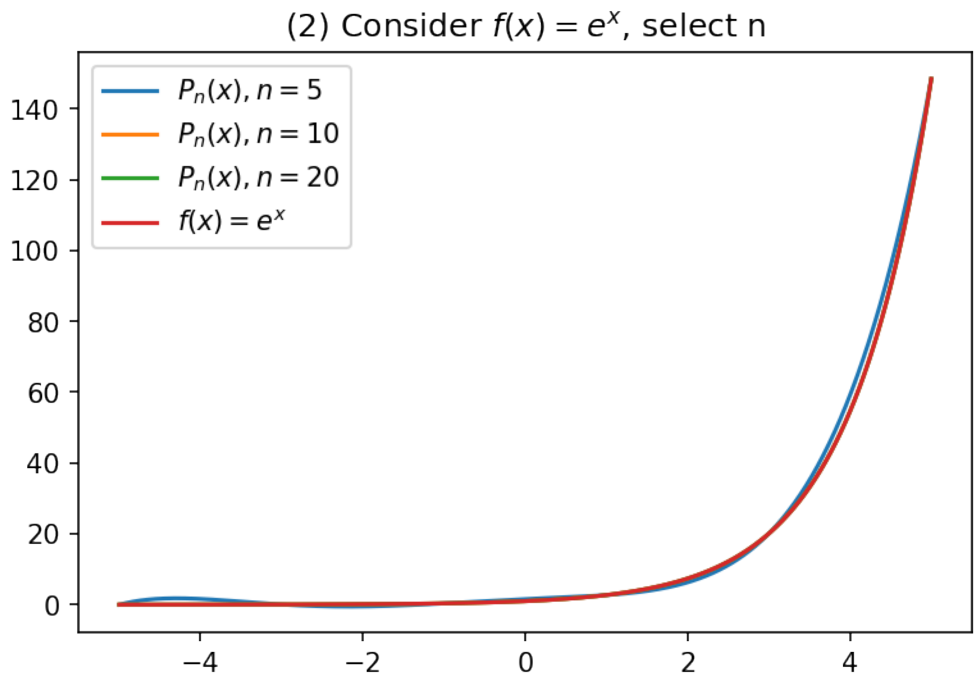
	5	10	20
0.75	-0.2570	-0.0001	-0.0
1.75	0.8830	0.0002	-0.0
2.75	0.6346	-0.0006	-0.0
3.75	-3.3412	0.0027	-0.0
4.75	-4.0367	-0.0231	-0.0

画出两个函数以及其拉格朗日多项式的图像：




(1) Consider $f(x) = 1/(1+x^2)$, select n
$P_n(x), n = 5$
$P_n(x), n = 10$
$P_n(x), n = 20$
$f(x) = 1/(1+x^2)$


(2) Consider $f(x) = e^x$
$f(x) = e^x$



1.3.3 问题四

[15]:

```
def problem4():
    print("问题 4: 考虑拉格朗日插值问题，内插比外推更可靠吗？")

    def f(x: float):
        return np.sqrt(x)

    target_x = [5, 50, 115, 185]

    print("考虑函数 f(x) = sqrt(x)")

    def do_by_node(index: int, nodes: list):
        print(f"({index}) 考虑以", ", ".join(
            [f"x_{i} = {nodes[i]}" for i in range(3)]), "为节点的拉格朗日插值多项式 P_2(x)")
        print(DataFrame({
            "函数值": {x: P(f, nodes, x) for x in target_x},
```

```python
            "f(x)": {x: f(x) for x in target_x},
            "差值": {x: f(x) - P(f, nodes, x) for x in target_x}
        }).round(4))
        mean = np.mean([f(x) - P(f, nodes, x) for x in target_x])
        print(f"平均差值: {mean:.4f}")
        return mean

    nodes_data = [
        [(i + 1) ** 2 for i in range(3)],
        [(i + 5) ** 2 for i in range(3)],
        [(i + 9) ** 2 for i in range(3)],
        [(i + 12) ** 2 for i in range(3)]
    ]
    means = [do_by_node(i + 1, nodes=nodes_data[i])
             for i in range(len(nodes_data))]
    return DataFrame({
        "x_0,x_1,x_2": [",".join([str(n) for n in nodes_data[i]]) for i in␣
↪range(len(nodes_data))],
        "平均差值": [means[i] for i in range(len(nodes_data))]
    }).round(4)


problem4()
```

```
问题 4: 考虑拉格朗日插值问题, 内插比外推更可靠吗?
考虑函数 f(x) = sqrt(x)
(1) 考虑以 x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 9 为节点的拉格朗日插值多项式 P_2(x)
          函数值      f(x)        差值
5       2.2667    2.2361    -0.0306
50    -20.2333    7.0711    27.3044
115 -171.9000   10.7238   182.6238
185 -492.7333   13.6015   506.3348
平均差值: 179.0581
(2) 考虑以 x_0 = 25, x_1 = 36, x_2 = 49 为节点的拉格朗日插值多项式 P_2(x)
        函数值      f(x)       差值
5     2.8205    2.2361 -0.5844
```

```
50   7.0688   7.0711  0.0023
115  9.0385  10.7238  1.6853
185  5.6527  13.6015  7.9488
平均差值: 2.2630
(3) 考虑以 x_0 = 81, x_1 = 100, x_2 = 121 为节点的拉格朗日插值多项式 P_2(x)
          函数值      f(x)       差值
5      4.0952   2.2361 -1.8592
50     7.1742   7.0711 -0.1031
115   10.7256  10.7238 -0.0018
185   13.3659  13.6015  0.2356
平均差值: -0.4321
(4) 考虑以 x_0 = 144, x_1 = 169, x_2 = 196 为节点的拉格朗日插值多项式 P_2(x)
          函数值      f(x)       差值
5      5.1411   2.2361 -2.9050
50     7.6026   7.0711 -0.5316
115   10.7508  10.7238 -0.0270
185   13.6026  13.6015 -0.0012
平均差值: -0.8662
```

[15]:

	x_0,x_1,x_2	平均差值
0	1,4,9	179.0581
1	25,36,49	2.2630
2	81,100,121	-0.4321
3	144,169,196	-0.8662

1.4 实验结果

准确规范地给出各个实验题目的结果，并对相应的思考题给出正确合理的回答与说明。

由题目（1）代码、数据和图像可知：

1. 对 $f(x) = 1/(1+x^2)$ 函数而言，在 $[-5,5]$ 范围内，并不是 n 越大越好，n 越大反而误差增大。
2. 对 $f(x) = e^x$ 函数而言，在 $[-1,1]$ 范围内，n 越大拟合效果越好。

所以不是 n 越大越好，需要结合具体函数考虑。

由题目（2）代码、数据和图像，并且结合题目（1）的数据可知：

1. 对 $f(x) = 1/(1+x^2)$ 函数而言，$[-1,1]$ 差值区间效果要比 $[-5,5]$ 好。
2. 对 $f(x) = e^x$ 函数而言，$[-5,5]$ 差值区间效果要比 $[-1,1]$ 好。

所以不是差值区间越小越好，需要结合具体函数考虑。

由题目（4）代码、数据和图像，对函数 $f(x)=\sqrt{x}$，内插确实比外推可靠。

思考题

对问题一存在的问题，应该如何解决？

问题一中，$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[-5,5]$ 的差值区间、$n\in\{10,20\}$ 的情况下拟合效果并不好，$n=10, n=20$ 的时候多项式在 x 较大的时候明显偏大。

由实验数据可知不应选择过大的插值多项式次数，n 应该 <10。

对问题二中存在的问题的回答，试加以说明。

插值区间不是越小越好，如这两个函数：$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 和 $f(x)=e^x$，前者在 $[-1,1]$ 上插值效果较好而在 $[-5,5]$ 上效果不好；后者在 $[-1,1]$ 上效果不好而在 $[-5,5]$ 上效果较好。

如何理解插值问题中的内插和外推？

内插即只对已知数据集内部范围的点的插值运算，外推即对已知数据集外部范围的点进行插值运算。

内插运算比外推更可靠，偏差更小的原因是内插能够更加有效地利用已知数据集的限制条件，尽量利用已知的信息进行计算推测，故更加可靠。

2 实验题目 2：龙贝格积分法

2.1 问题分析

准确描述并总结出实验题目（摘要），并准确分析原题的目的和意义。

2.1.1 方法概要

利用复化梯形求积公式、复化辛普生求积公式、复化柯特斯求积公式的误差估计式计算积分 $\int_a^b f(x)dx$。

2.1.2 实验目的

用龙贝格积分法求函数 $f(x)$ 从 a 到 b 的积分，即 $\int_a^b f(x)$。

输入： a,b,ε,f

输出： 龙贝格 T 数表

2.2 数学原理

数学原理表达清晰且书写准确。

利用复化梯形求积公式、复化辛普生求积公式、复化柯特斯求积公式的误差估计式计算积分 $\int_a^b f(x)dx$，记 $h = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k \times h, k = 0, 1, \cdots, n$，其计算公式：

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{2}h\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1} + f(x_k))] \\
T_{2n} &= \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}h\sum_{k=1}^{n}f(x_k - \frac{1}{2}h) \\
S_n &= \frac{1}{3}(4T_{2n} - T_n) \\
C_n &= \frac{1}{15}(16S_{2n} - S_n) \\
R_n &= \frac{1}{63}(64C_{2n} - C_n)
\end{aligned}
$$

或者：

$$
\begin{aligned}
T_0(h) &= T(h) \\
T_m(h) &= \frac{T_{m-1}(\frac{h}{2}) - (\frac{1}{2})^{2m}T_{m-1}(h)}{1 - (\frac{1}{2})^{2m}} \\
&= \frac{4^m T_{m-1}(\frac{h}{2}) - T_{m-1}(h)}{4^m - 1}
\end{aligned}
$$

2.3 程序设计流程

编译通过，根据输入能得到正确输出。

[2]:
```python
# 添加需要的库


import numpy as np
from pandas import DataFrame
from typing import *
```

[3]:
```python
def romberg(
        f: Callable[[float], float],
        a: float, b: float, epsilon: float,
        *args,
        get_steps: bool = False, max_len: int = 32, **kwargs):
    max_len: int = 32
```

```python
    h = b - a
    i = 1
    T = np.array([[0.0 for _ in range(max_len)] for _ in range(max_len)])
    T[0][0] = (f(a) + f(b)) * h / 2
    # print(T[0][0])

    def get_slice():
        return np.array(T[0:(i+1), 0:(i+1)])
    while True:
        ii = 2**(i-1)
        # print(f"i = {i}, ii = {ii}")
        T[0][i] = T[0][i-1] / 2 + h * \
            sum([f(a + (0.0 + k - 1 / 2) * h) for k in range(1, ii + 1)]) / 2
        # print(f"T[0][i] = {T[0][i]}")
        for m in range(1, i + 1):
            k = i - m
            T[m][k] = (4**m * T[m-1][k+1] - T[m-1][k]) / (4**m - 1)
        # print(f"T[i][0] - T[i-1][0] = {T[i][0]} - {T[i-1][0]} = {T[i][0] - T[i-1][0]}")
        # print(f"T[i][0] - T[i-1][0] = {T[i][0] - T[i-1][0]}")
        if abs(T[i][0] - T[i-1][0]) < epsilon:
            if get_steps:
                return True, i
            else:
                return True, get_slice()
        h = h / 2
        i = i + 1
    if get_steps:
        return False, i
    else:
        return False, get_slice()
```

[4]:

```python
# 使用 Romberg 计算积分

global_args = [
    [lambda x: x**2 * np.exp(x), 0, 1, 1e-6],
```

```python
    [lambda x: np.sin(x) * np.exp(x), 1, 3, 1e-6],
    [lambda x: 4 / (1 + x**2), 0, 1, 1e-6],
    [lambda x: 1 / (1 + x), 0, 1, 1e-6]
]



def run_once(*args, show_result: bool = True, show_T: bool = True, **kwargs):
    res, T = romberg(*args, **kwargs)
    # print(T)
    if res:
        if not isinstance(T, int):
            if show_T:
                print(DataFrame(T))
            if show_result:
                print(f"result = {T[-1][0]}")
            return T[-1][0]
        else:
            return T
    else:
        print("Error")
        return None



def run(index: int, data_source=global_args, **kwargs):
    return run_once(*data_source[index], **kwargs)
```

[5]:
```python
# 第 (1) 问
run(0)
```

```
          0         1         2         3         4
0  1.359141  0.885661  0.760596  0.728890  0.720936
1  0.727834  0.718908  0.718321  0.718284  0.000000
2  0.718313  0.718282  0.718282  0.000000  0.000000
3  0.718282  0.718282  0.000000  0.000000  0.000000
4  0.718282  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
result = 0.7182818284623739
```

[5]: 0.7182818284623739

[6]:
```
# 第 (2) 问
run(1)
```

	0	1	2	3	4	5
0	5.121826	9.279763	10.520554	10.842043	10.923094	10.943398
1	10.665742	10.934151	10.949207	10.950111	10.950167	0.000000
2	10.952045	10.950210	10.950171	10.950170	0.000000	0.000000
3	10.950181	10.950170	10.950170	0.000000	0.000000	0.000000
4	10.950170	10.950170	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	10.950170	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

```
result = 10.950170314683838
```

[6]: 10.950170314683838

[7]:
```
# 第 (3) 问
run(2)
```

	0	1	2	3	4	5
0	3.000000	3.100000	3.131176	3.138988	3.140942	3.14143
1	3.133333	3.141569	3.141593	3.141593	3.141593	0.00000
2	3.142118	3.141594	3.141593	3.141593	0.000000	0.00000
3	3.141586	3.141593	3.141593	0.000000	0.000000	0.00000
4	3.141593	3.141593	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000
5	3.141593	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000

```
result = 3.141592653638244
```

[7]: 3.141592653638244

[8]:
```
# 第 (4) 问
run(3)
```

	0	1	2	3	4
0	0.750000	0.708333	0.697024	0.694122	0.693391
1	0.694444	0.693254	0.693155	0.693148	0.000000
2	0.693175	0.693148	0.693147	0.000000	0.000000
3	0.693147	0.693147	0.000000	0.000000	0.000000

```
4  0.693147  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
result = 0.6931471819167452
```

[8]: 0.6931471819167452

2.4 实验结果

准确规范地给出各个实验题目的结果，并对相应的思考题给出正确合理的回答与说明。

[9]:
```
DataFrame([run(i, show_T=False, show_result=False)
           for i in range(3)], ["(1)", "(2)", "(3)"])
```

[9]:

	0
(1)	0.718282
(2)	10.950170
(3)	3.141593

实验题目 1 中各个小问的结果如上表格所示。

思考题：*在实验 1 中二分次数和精度的关系如何？*

我们使用更高的精度要求进行进一步测试：

[10]:
```
def test_epsilon():

    def get_data(e: float):  # -> List[List[float]]:
        return [[*item[:-1], e] for item in global_args]

    def get_once(epsilon: float):
        return [run(i, data_source=get_data(epsilon), get_steps=True) for i in␣
 ↪range(3)]

    epsilon_list = [1e-5, 1e-6, 1e-9, 1e-12, 1e-14, 1e-16]
    print(DataFrame([get_once(e) for e in epsilon_list], epsilon_list))


test_epsilon()
```

```
              0  1  2
1.000000e-05  4  5  4
```

```
1.000000e-06  4   5   5
1.000000e-09  5   6   6
1.000000e-12  6   7   7
1.000000e-14  6   7   8
1.000000e-16  6  11  13
```

由数据可知，随着要求精度的提高，二分次数也在随之升高。

3 实验题目 3：四阶龙格——库塔方法

3.1 问题分析

准确描述并总结出实验题目（摘要），并准确分析原题的目的和意义。

给定常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, & h = \dfrac{b-a}{N} \end{cases}$$

求其数值解 $y_n, n = 1, 2, \cdots, N$。

3.1.1 实验目的

输入： a, b, α, N

输出：初值问题的数值解 $x_n, y_n, n = 0, 1, 2, \cdots, N$

3.2 数学原理

数学原理表达清晰且书写准确。

记 $x_n = a + n \times h$, $n = 0, 1, \cdots, N$，利用四阶龙格——库塔方法：

$$
\begin{aligned}
K_1 &= hf(x_n, y_n) \\
K_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2} + y_n + \frac{K_1}{2}) \\
K_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}) \\
K_4 &= hf(x_n + h, y_n + K_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
\end{aligned}
$$

$$n = 0, 1, \cdots, N-1$$

即可逐次求出微分方程初值问题的数值解 $x_n, y_n, n = 0, 1, 2, \cdots, N$。

3.3 程序设计流程

编译通过，根据输入能得到正确输出。

[126]:

```
# 引入需要的包


from typing import *
import numpy as np
from pandas import DataFrame
```

[127]:

```
# 四阶龙格——库塔方法
def runge_kutta(
        f: Callable[[float, float], float],
        a: float, b: float, alpha: float, N: int):
    x_list, y_list = [], []
    h = (b - a) / N
    x, y = a, alpha
    x_list.append(x)
    y_list.append(y)
    for _ in range(N):
        k_1 = h*f(x, y)
        k_2 = h*f(x+h/2, y+k_1/2)
        k_3 = h*f(x+h/2, y+k_2/2)
        k_4 = h*f(x+h, y+k_3)
        x = x + h
        y = y + (k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4) / 6
```

```python
        x_list.append(x)
        y_list.append(y)
    return x_list, y_list
```

[128]:
```python
# 运行测试参数
global_args = [
    [lambda x, y: x + y, 0, 1, -1, [5, 10, 20], lambda x: -x-1, "问题 1 (1)"],
    [lambda x, y: -y**2, 0, 1, 1, [5, 10, 20],
        lambda x: 1 / (x + 1), "问题 1 (2)"],
    [lambda x, y: 2 * y / x + x**2 +
        np.exp(x), 1, 3, 0, [5, 10, 20], lambda x: x**2 * (np.exp(x) - np.e),␣
 ↪"问题 2 (1)"],
    [lambda x, y: (y + y**2) / x, 1, 3, -2, [5, 10, 20],
     lambda x: 2 * x / (1 - 2 * x), "问题 2 (2)"],
    [lambda x, y: -20 * (y-x*2) + 2 * x, 0, 1, 1.0 / 3,
     [5, 10, 20], lambda x: x**2 + np.exp(-20*x)/3, "问题 3 (1)"],
    [lambda x, y: -20 * y + 20 *
        np.sin(x) + np.cos(x), 0, 1, -1, [5, 10, 20], lambda x: np.exp(-20*x) +␣
 ↪np.sin(x), "问题 3 (2)"],
    [lambda x, y: -20*(y-np.exp(x)*np.sin(x)) + np.exp(x)*(np.sin(x) + np.
 ↪cos(x)),
     0, 1, 0, [5, 10, 20], lambda x: np.exp(x)*np.sin(x), "问题 3 (3)"]
]
```

[129]:
```python
# 求数据的均方误差
def get_error(f: Callable[[float], float], data):
        x, y = data
        standard = np.array([f(x_i) for x_i in x])
        return sum((y - standard) ** 2) / len(x)
```

[130]:
```python
# 运行一次
def run(index: int):
    res = []
    for n in global_args[index][-3]:
        data = runge_kutta(*[
            *global_args[index][:-3], n
```

```python
        ])
        error = get_error(global_args[index][-2], data)
        res.append({
            "N": n,
            "标号": global_args[index][-1],
            "均方误差": error,
            "x": data[0],
            "y": data[1],
        })
    return res
```

[131]:
```python
# 运行所有并且返回结果表格
def run_all():
    all_data = [run(i) for i in range(len(global_args))]
    all = []
    for d in all_data:
        all.extend(d)
    return DataFrame(all)



run_all()
```

[131]:

	N	…	y
0	5	…	[-1, -1.2, -1.4, -1.5999999999999999, -1.79999…
1	10	…	[-1, -1.1, -1.2000000000000002, -1.30000000000…
2	20	…	[-1, -1.05, -1.1, -1.1500000000000001, -1.2000…
3	5	…	[1, 0.8333390356230387, 0.7142921304635431, 0…
4	10	…	[1, 0.9090911863322196, 0.8333337288430721, 0…
5	20	…	[1, 0.9523809630269818, 0.9090909268125394, 0…
6	5	…	[0, 2.6076891538492872, 8.124196625549118, 17…
7	10	…	[0, 1.0055508321940254, 2.613659182614748, 4.9…
8	20	…	[0, 0.434963271851454, 1.0058077554774965, 1.7…
9	5	…	[-2, -1.5539889980952382, -1.3836172899114931,…
10	10	…	[-2, -1.7142451804511538, -1.5555228848496192,…
11	20	…	[-2, -1.8333328294259301, -1.7142851698413297,…
12	5	…	[0.3333333333333333, 2.5066666666666677, 11.69…
13	10	…	[0.3333333333333333, 0.2511111111111111, 0.363…

```
14  20  …  [0.3333333333333333, 0.16437499999999997, 0.16…
15   5  …  [-1, -4.802661893779973, -24.623829295619263, …
16  10  …  [-1, -0.2335276701694724, 0.0874382457825747, …
17  20  …  [-1, -0.32502148139805487, -0.0407937778694009…
18   5  …  [0, 0.2986462127501341, 0.927219870027348, 2.8…
19  10  …  [0, 0.11205510913037421, 0.2451165144244346, 0…
20  20  …  [0, 0.05259503995574239, 0.11040898628183947, …

[21 rows x 5 columns]
```

为防止输出 PDF 时表格格式被破坏，在此放入上方表格的图片。

	N	标号	均方误差	x	y
0	5	问题 1 (1)	2.465190e-32	[0, 0.2, 0.4, 0.6000000000000001, 0.8, 1.0]	[-1, -1.2, -1.4, -1.5999999999999999, -1.79999...
1	10	问题 1 (1)	3.182337e-31	[0, 0.1, 0.2, 0.30000000000000004, 0.4, 0.5, 0...	[-1, -1.1, -1.2000000000000002, -1.30000000000...
2	20	问题 1 (1)	2.206932e-31	[0, 0.05, 0.1, 0.15000000000000002, 0.2, 0.25,...	[-1, -1.05, -1.1, -1.1500000000000001, -1.2000...
3	5	问题 1 (2)	2.569560e-11	[0, 0.2, 0.4, 0.6000000000000001, 0.8, 1.0]	[1, 0.8333390356230387, 0.7142921304635431, 0....
4	10	问题 1 (2)	1.282857e-13	[0, 0.1, 0.2, 0.30000000000000004, 0.4, 0.5, 0...	[1, 0.9090911863322196, 0.8333337288430721, 0....
5	20	问题 1 (2)	5.366889e-16	[0, 0.05, 0.1, 0.15000000000000002, 0.2, 0.25,...	[1, 0.9523809630269818, 0.9090909268125394, 0....
6	5	问题 2 (1)	2.023870e+03	[1, 1.4, 1.7999999999999998, 2.1999999999999999...	[0, 2.6076891538492872, 8.124196625549118, 17....
7	10	问题 2 (1)	1.541237e+03	[1, 1.2, 1.4, 1.5999999999999999, 1.7999999999...	[0, 1.0055508321940254, 2.613659182614748, 4.9...
8	20	问题 2 (1)	1.315425e+03	[1, 1.1, 1.2000000000000002, 1.300000000000000...	[0, 0.434963271851454, 1.0058077554774965, 1.7...
9	5	问题 2 (2)	7.459298e-07	[1, 1.4, 1.7999999999999998, 2.1999999999999999...	[-2, -1.5539889980952382, -1.3836172899114931,...
10	10	问题 2 (2)	4.401675e-10	[1, 1.2, 1.4, 1.5999999999999999, 1.7999999999...	[-2, -1.7142451804511538, -1.5555228848496192,...
11	20	问题 2 (2)	8.946298e-14	[1, 1.1, 1.2000000000000002, 1.300000000000000...	[-2, -1.8333328294259301, -1.7142851698413297,...
12	5	问题 3 (1)	3.263086e+05	[0, 0.2, 0.4, 0.6000000000000001, 0.8, 1.0]	[0.3333333333333333, 2.5066666666666677, 11.69...
13	10	问题 3 (1)	4.889478e-01	[0, 0.1, 0.2, 0.30000000000000004, 0.4, 0.5, 0...	[0.3333333333333333, 0.2511111111111111, 0.363...
14	20	问题 3 (1)	4.815643e-01	[0, 0.05, 0.1, 0.15000000000000002, 0.2, 0.25,...	[0.3333333333333333, 0.16437499999999997, 0.16...
15	5	问题 3 (2)	1.697642e+06	[0, 0.2, 0.4, 0.6000000000000001, 0.8, 1.0]	[-1, -4.802661893779973, -24.623829295619263, ...
16	10	问题 3 (2)	3.852943e-01	[0, 0.1, 0.2, 0.30000000000000004, 0.4, 0.5, 0...	[-1, -0.2335276701694724, 0.0874382457825747, ...
17	20	问题 3 (2)	2.209629e-01	[0, 0.05, 0.1, 0.15000000000000002, 0.2, 0.25,...	[-1, -0.32502148139805487, -0.0407937778694009...
18	5	问题 3 (3)	3.617925e+02	[0, 0.2, 0.4, 0.6000000000000001, 0.8, 1.0]	[0, 0.2986462127501341, 0.927219870027348, 2.8...
19	10	问题 3 (3)	9.913683e-06	[0, 0.1, 0.2, 0.30000000000000004, 0.4, 0.5, 0...	[0, 0.11205510913037421, 0.2451165144244346, 0...
20	20	问题 3 (3)	1.212561e-08	[0, 0.05, 0.1, 0.15000000000000002, 0.2, 0.25,...	[0, 0.05259503995574239, 0.11040898628183947, ...

3.4 实验结果

准确规范地给出各个实验题目的结果，并对相应的思考题给出正确合理的回答与说明。

实验数据结果如上表所示。

思考题：

1. 对实验 1，数值解和解析解相同吗？为什么？试加以说明。

在误差范围内基本可以认为相同。由上表可知，对问题 1，当 $N = 20$ 时，其结果和标准值的

均方误差均小于 10^{-15}，都是非常小的，所以在误差范围内可以认为数值解和解析解相同。

2. 对实验 2，N 越大越精确吗？试加以说明。

   在实验 2 的数据中，随着 N 的增大，其均方误差越来越小，所以对实验二，N 越大越精确。

3. 对实验 3，N 较小会出现什么现象？试加以说明。

   在实验 3 的数据中，当 N 较小时，其均方误差非常大，达到 10^2 甚至 10^6。

4 实验题目 4：牛顿迭代法

4.1 问题分析

准确描述并总结出实验题目（摘要），并准确分析原题的目的和意义。

4.1.1 方法概要

已知非线性方程 $f(x)=0$，求其根 x^*。

4.1.2 实验目的

利用牛顿迭代法求 $f(x)=0$ 的根。

输入：初值 α，精度 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，最大迭代次数 N

输出：方程 $f(x)=0$ 根 x^* 的近似值或计算失败标志

4.2 数学原理

数学原理表达清晰且书写准确。

4.2.1 牛顿迭代法

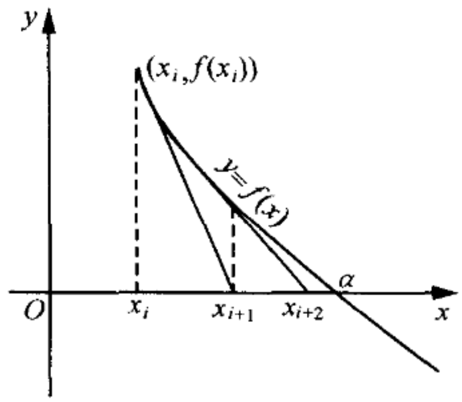
求非线性方程 $f(x)=0$ 的根 x^*，牛顿分析法计算公式：

$$x_0=\alpha,\ x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,1,\cdots$$

一般地，牛顿迭代法具有局部收敛性，为了保证迭代收敛，要求，对充分小的 $\delta,\alpha\in O(x^*,\delta)$。如果 $f(x)\in C^2[a,b],f(x^*)=0,f'(x^*)\neq 0$，那么，对充分小的 $\delta>0$，当 $\alpha\in O(x^*,\delta)$ 时，由牛顿迭代法计算出的 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*，且收敛速度是 2 阶的；如果 $f(x)\in C^m[a,b],f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=$

$f^{(m-1)}(x^*)=0$，$f^{(m)}(x^*)\neq 0(m>1)$，那么，对充分小的 $\delta>0$，当 $\alpha\in O(x^*,\delta)$ 时，由牛顿迭代法计算出的 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*，且收敛速度是 1 阶的。

4.2.2 牛顿迭代法的几何意义



由上图所示，方程 $f(x)=0$ 的根 α 是曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$ 的交点的横坐标。牛顿迭代法是取过 $(x_i,f(x_i))$ 点的切线方程

$$y=f(x_i)=f'(x_i)(x-x_i)$$

与 $y=0$ 的交点的横坐标

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

作为根的新的近似值。由此往复，只要初值取得接近根 α，$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 会很快收敛于 α。

4.3 程序设计流程

编译通过，根据输入能得到正确输出。

[52]:
```python
# 引入需要的包
import numpy as np
from pandas import DataFrame
from matplotlib import pyplot as plt
from typing import *
```

[53]:
```python
def newton(
        f: Callable[[float], float],
        f_: Callable[[float], float],
        alpha: float,
        N: int,
        epsilon_1: float,
        epsilon_2: float,
        *args,
        **kwargs):# -> Optional[float]:
    history: List[float] = []
    n = 1
    x = alpha
    while n <= N:
        history.append(x)
        v, v_ = f(x), f_(x)
        if abs(v) < epsilon_1:
            return x, history
        if abs(v_) < epsilon_2:
            return None, history
        x_ = x - v / v_
        if abs(x_ - x) < epsilon_1:
            history.append(x_)
            return x_, history
        n = n + 1
        x = x_
    return None, history
```

[54]:
```python
def show_history(title: str, history: List[float]):
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title(title)
    plt.plot(range(len(history)), history)
```

[55]:
```python
def run_question(*args, **kwargs):
    res, history = newton(*args, **kwargs)
    if res is None:
        print("拟合失败!")
    else:
```

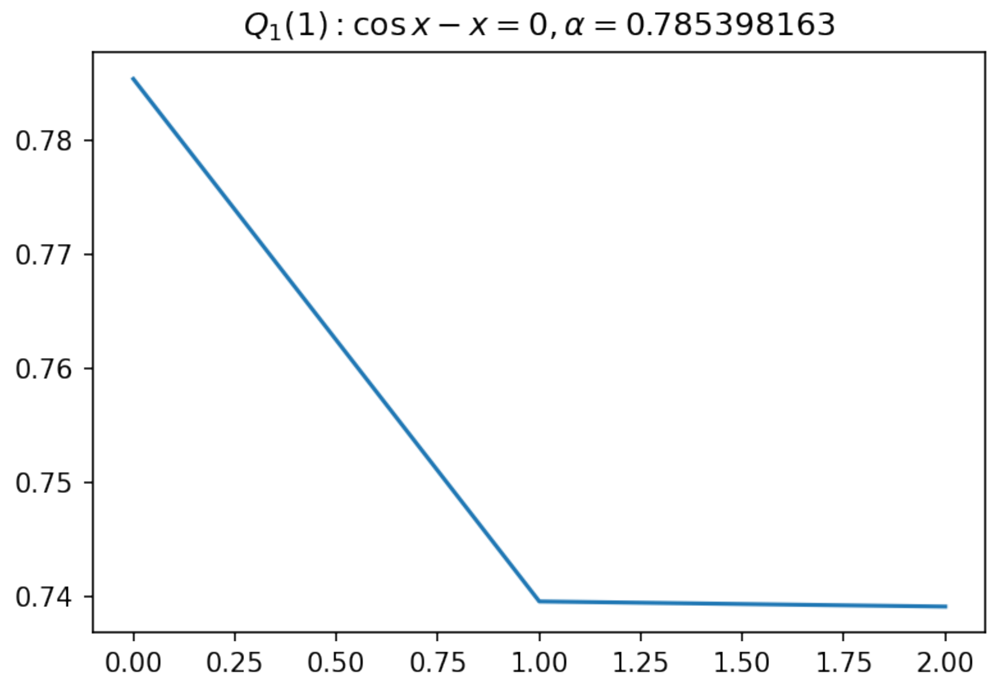
```
        print(f"x^* = {res:.4f}")
    show_history(kwargs.get('title', ''), history)
```

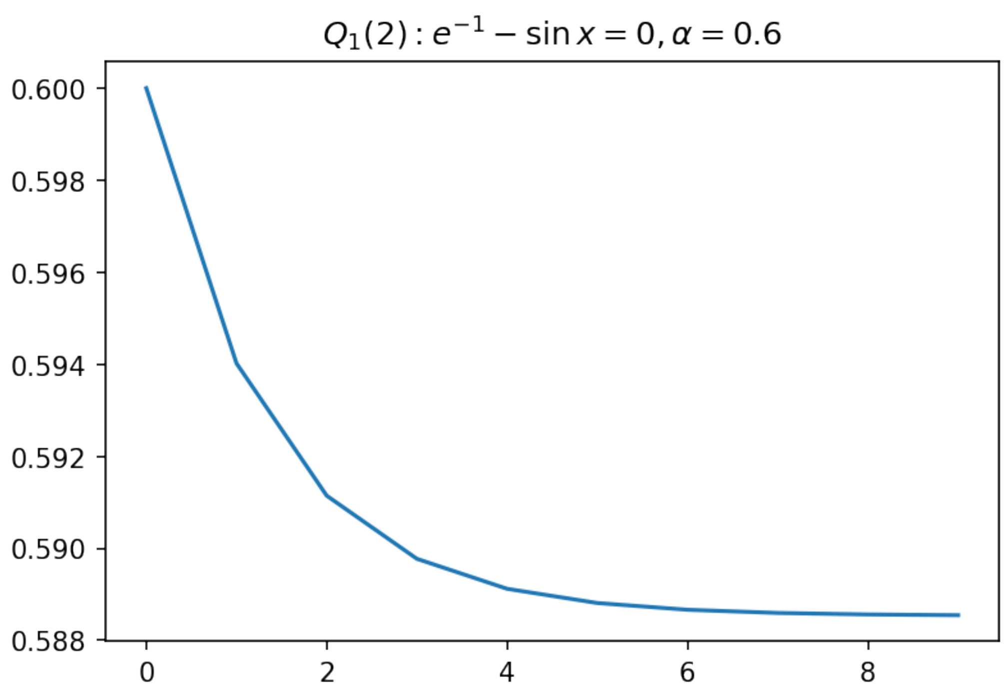
[56]:

```
# 问题一
def question_1():
    print("问题 1 (1)")
    run_question(
        f=lambda x: np.cos(x) - x,
        f_=lambda x: -np.sin(x) - 1,
        alpha=np.pi / 4,
        N=10,
        epsilon_1=1e-6,
        epsilon_2=1e-4,
        title="$Q_1 (1): \\cos{x} - x = 0, \\alpha = " + f"{np.pi / 4:.9f}" +␣
 ↪"$")
    print("问题 1 (2)")
    run_question(
        f=lambda x: np.exp(-x) - np.sin(x),
        f_=lambda x: -np.exp(x) - np.cos(x),
        alpha=0.6,
        N=10,
        epsilon_1=1e-6,
        epsilon_2=1e-4,
        title="$Q_1 (2): e^{-1}-\\sin{x} = 0, \\alpha = 0.6$")


question_1()
```

```
问题 1 (1)
x^* = 0.7391
问题 1 (2)
拟合失败!
```

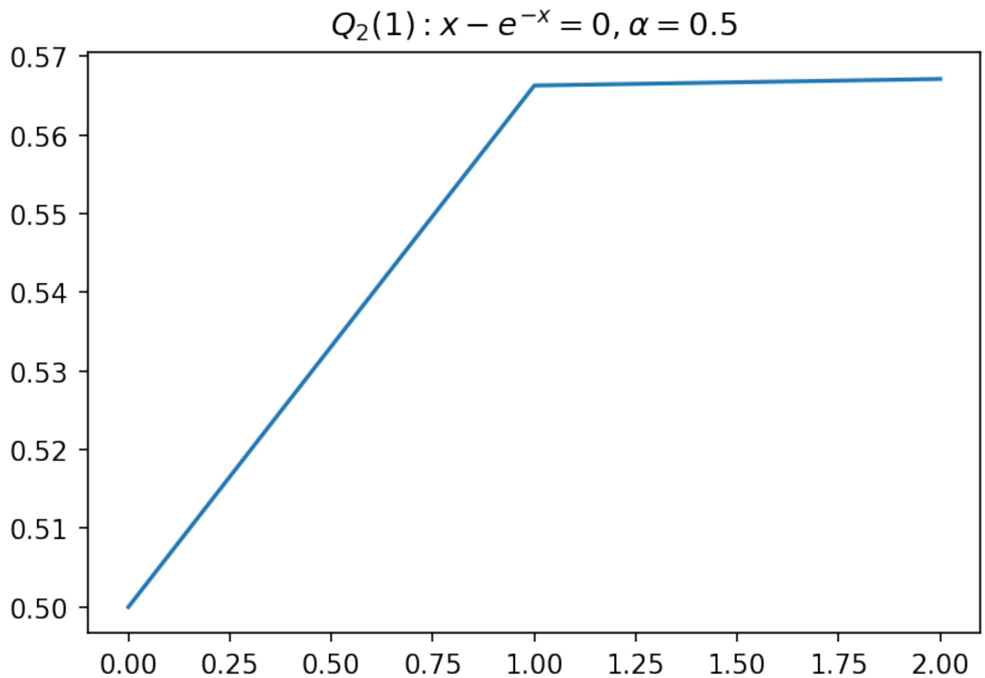

$Q_1(1) : \cos x - x = 0, \alpha = 0.785398163$
0.78
0.77
0.76
0.75
0.74
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

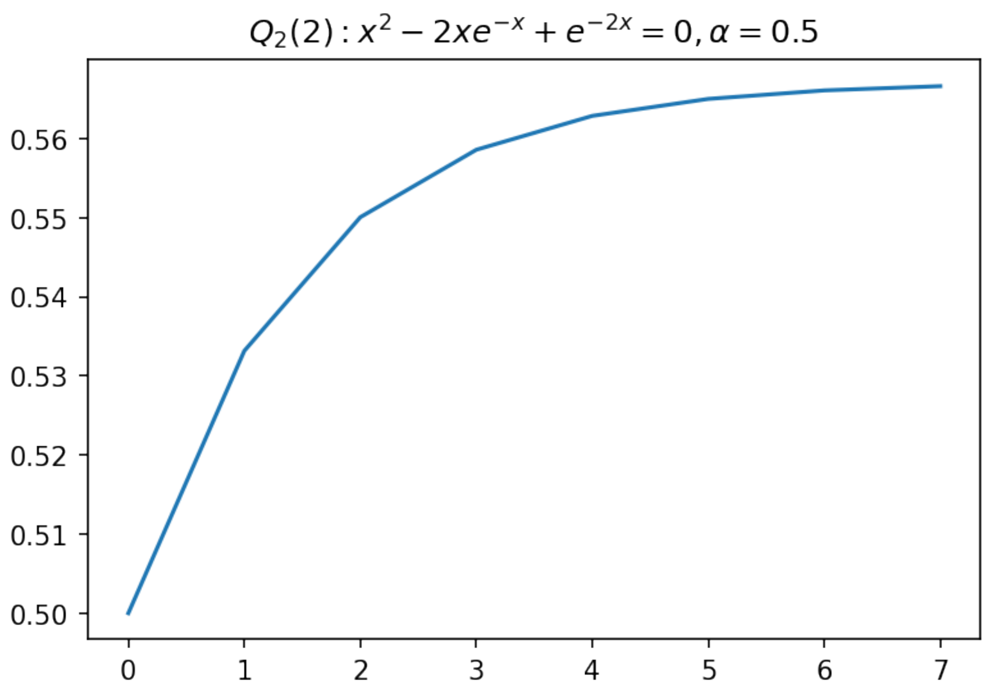

$Q_1(2) : e^{-1} - \sin x = 0, \alpha = 0.6$
0.600
0.598
0.596
0.594
0.592
0.590
0.588
0
2
4
6
8

[57]:
```python
# 问题二
def question_2():
    print("问题 2 (1)")
    run_question(
        f=lambda x: x - np.exp(-x),
        f_=lambda x: 1 + np.exp(-x),
        alpha=0.5,
        N=10,
        epsilon_1=1e-6,
        epsilon_2=1e-4,
        title="$Q_2 (1): x-e^{-x}=0, \\alpha = 0.5$")
    print("问题 2 (2)")
    run_question(
        f=lambda x: x**2 - 2 * x * np.exp(-x) + np.exp(-2 * x),
        f_=lambda x: -2*np.exp(-2*x) - 2*np.exp(-x) + 2*x + 2*np.exp(-x)*x,
        alpha=0.5,
        N=10,
        epsilon_1=1e-6,
        epsilon_2=1e-4,
        title="$Q_2 (2): x^2-2xe^{-x}+e^{-2x} = 0, \\alpha = 0.5$")


question_2()
```

```
问题 2 (1)
x^* = 0.5671
问题 2 (2)
x^* = 0.5666
```


$Q_2(1): x - e^{-x} = 0, \alpha = 0.5$
0.57
0.56
0.55
0.54
0.53
0.52
0.51
0.50
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00


$Q_2(2): x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0, \alpha = 0.5$
0.56
0.55
0.54
0.53
0.52
0.51
0.50
0
1
2
3
4
5
6
7

4.4 实验结果

准确规范地给出各个实验题目的结果，并对相应的思考题给出正确合理的回答与说明。

由问题 1 输出、图像可知：

1. 第一问在第二次迭代即收敛到目标精度，得结果 $x^* = 0.7391$（保留四位小数）
2. 第二问在 N 次数内收敛失败

由问题 2 输出、图像可知：

1. 第一问在第二次迭代即收敛到目标精度，得结果 $x^* = 0.5671$（保留四位小数）
2. 第一问在第七次迭代才收敛到目标精度，得结果 $x^* = 0.5666$（保留四位小数）

思考题：

1. 对实验 1，确定初值的原则是什么？实际计算中应如何解决？初值如果选择得偏离根太远，很可能出现迭代次数过多或者发散的情况。因此，初值最好选择在靠近根的位置。在实际计算中，如果仅仅使用牛顿迭代法收敛定理来选择初始值，往往比较复杂，一般使用简化方法：

   对方程 $f(x) = 0$，如果
   $$f''(x_0) \neq 0, |f'(x_0)|^2 > |\frac{f(x_0)f''(x_0)}{2}|$$
   则可以保证大多数情况下的牛顿迭代法的收敛性。

2. 对实验 2，如何解释在计算中出现的现象？试加以说明由于牛顿迭代法的收敛阶都是 2，而第二问所求函数是第一问的平方，即 $f_2(x) = f_1^2(x)$，平方后的函数的斜率相对原来小许多，所以第二问中收敛就比第一问慢。