

# 计算方法实验（实验 2）

2022 年 4 月 19 日

数据显示结果已保留 4 位小数。

## 1 实验题目 2：龙贝格积分法

### 1.1 问题分析

准确描述并总结出实验题目（摘要），并准确分析原题的目的和意义。

#### 1.1.1 方法概要

利用复化梯形求积公式、复化辛普生求积公式、复化柯特斯求积公式的误差估计式计算积分  $\int_a^b f(x)dx$ ，记  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_k = a + k \times h, k = 0, 1, \dots, n$ ，其计算公式：

$$\begin{aligned}T_n &= \frac{1}{2}h \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \\T_{2n} &= \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}h \sum_{k=1}^n f(x_k - \frac{1}{2}h) \\S_n &= \frac{1}{3}(4T_{2n} - T_n) \\C_n &= \frac{1}{15}(16S_{2n} - S_n) \\R_n &= \frac{1}{63}(64C_{2n} - C_n)\end{aligned}$$

或：

$$\begin{aligned}T_0(h) &= T(h) \\T_m(h) &= \frac{T_{m-1}(\frac{h}{2}) - (\frac{1}{2})^{2m}T_{m-1}(h)}{1 - (\frac{1}{2})^{2m}} \\&= \frac{4^m T_{m-1}(\frac{h}{2}) - T_{m-1}(h)}{4^m - 1}\end{aligned}$$

### 1.1.2 实验目的

用龙贝格积分法求函数  $f(x)$  从  $a$  到  $b$  的积分，即  $\int_a^b f(x)$ 。

输入：  $a, b, \varepsilon, f$

输出：龙贝格 T 数表

## 1.2 数学原理

数学原理表达清晰且书写准确。

利用复化梯形求积公式、复化辛普生求积公式、复化柯特斯求积公式的误差估计式可求得龙贝格积分法的公式：

$$\begin{aligned} T_0(h) &= T(h) \\ T_m(h) &= \frac{T_{m-1}(\frac{h}{2}) - (\frac{1}{2})^{2m} T_{m-1}(h)}{1 - (\frac{1}{2})^{2m}} \\ &= \frac{4^m T_{m-1}(\frac{h}{2}) - T_{m-1}(h)}{4^m - 1} \end{aligned}$$

## 1.3 程序设计流程

编译通过，根据输入能得到正确输出。

[226]: # 添加需要的库

```
import numpy as np
from pandas import DataFrame
from typing import *
```

```
[227]: def romberg(
    f: Callable[[float], float],
    a: float, b: float, epsilon: float,
    *args,
    get_steps: bool = False, max_len: int = 32, **kwargs):
    max_len: int = 32
    h = b - a
    i = 1
    T = np.array([[0.0 for _ in range(max_len)] for _ in range(max_len)])
```

```

T[0][0] = (f(a) + f(b)) * h / 2
# print(T[0][0])

def get_slice():
    return np.array(T[0:(i+1), 0:(i+1)])
while True:
    ii = 2**(i-1)
    # print(f"i = {i}, ii = {ii}")
    T[0][i] = T[0][i-1] / 2 + h * \
        sum([f(a + (0.0 + k - 1 / 2) * h) for k in range(1, ii + 1)]) / 2
    # print(f"T[0][i] = {T[0][i]}")
    for m in range(1, i + 1):
        k = i - m
        T[m][k] = (4**m * T[m-1][k+1] - T[m-1][k]) / (4**m - 1)
        # print(f"T[i][0] - T[i-1][0] = {T[i][0]} - {T[i-1][0]} = {T[i][0] -
↪T[i-1][0]}")
        # print(f"T[i][0] - T[i-1][0] = {T[i][0] - T[i-1][0]}")
    if abs(T[i][0] - T[i-1][0]) < epsilon:
        if get_steps:
            return True, i
        else:
            return True, get_slice()
    h = h / 2
    i = i + 1
if get_steps:
    return False, i
else:
    return False, get_slice()

```

[228]: # 使用 Romberg 计算积分

```

global_args = [
    [lambda x: x**2 * np.exp(x), 0, 1, 1e-6],
    [lambda x: np.sin(x) * np.exp(x), 1, 3, 1e-6],
    [lambda x: 4 / (1 + x**2), 0, 1, 1e-6],
    [lambda x: 1 / (1 + x), 0, 1, 1e-6]
]

```

```

]

def run_once(*args, show_result: bool = True, show_T: bool = True, **kwargs):
    res, T = romberg(*args, **kwargs)
    # print(T)
    if res:
        if not isinstance(T, int):
            if show_T:
                print(DataFrame(T))
            if show_result:
                print(f"result = {T[-1][0]}")
            return T[-1][0]
        else:
            return T
    else:
        print("Error")
        return None

def run(index: int, data_source=global_args, **kwargs):
    return run_once(*data_source[index], **kwargs)

```

```

[229]: # 第 (1) 问
run(0)

```

	0	1	2	3	4
0	1.359141	0.885661	0.760596	0.728890	0.720936
1	0.727834	0.718908	0.718321	0.718284	0.000000
2	0.718313	0.718282	0.718282	0.000000	0.000000
3	0.718282	0.718282	0.000000	0.000000	0.000000
4	0.718282	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

result = 0.7182818284623739

```

[229]: 0.7182818284623739

```

[230]: # 第 (2) 问

```
run(1)
```

	0	1	2	3	4	5
0	5.121826	9.279763	10.520554	10.842043	10.923094	10.943398
1	10.665742	10.934151	10.949207	10.950111	10.950167	0.000000
2	10.952045	10.950210	10.950171	10.950170	0.000000	0.000000
3	10.950181	10.950170	10.950170	0.000000	0.000000	0.000000
4	10.950170	10.950170	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	10.950170	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

result = 10.950170314683838

[230]: 10.950170314683838

[231]: # 第 (3) 问

```
run(2)
```

	0	1	2	3	4	5
0	3.000000	3.100000	3.131176	3.138988	3.140942	3.14143
1	3.133333	3.141569	3.141593	3.141593	3.141593	0.00000
2	3.142118	3.141594	3.141593	3.141593	0.000000	0.00000
3	3.141586	3.141593	3.141593	0.000000	0.000000	0.00000
4	3.141593	3.141593	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000
5	3.141593	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000

result = 3.141592653638244

[231]: 3.141592653638244

## 1.4 实验结果

准确规范地给出各个实验题目的结果，并对相应的思考题给出正确合理的回答与说明。

```
DataFrame([run(i, show_T=False, show_result=False)
            for i in range(3)], ["(1)", "(2)", "(3)"])
```

[232]:

0
(1) 0.718282
(2) 10.950170

(3) 3.141593

实验题目 1 中各个小问的结果如上表格所示。

思考题：在实验 1 中二分次数和精度的关系如何？

我们使用更高的精度要求进行进一步测试：

```
[233]: def test_epsilon():  
  
    def get_data(e: float): # -> List[List[float]]:  
        return [[*item[:-1], e] for item in global_args]  
  
    def get_once(epsilon: float):  
        return [run(i, data_source=get_data(epsilon), get_steps=True) for i in  
↪ range(3)]  
  
    epsilon_list = [1e-5, 1e-6, 1e-9, 1e-12, 1e-14, 1e-16]  
    print(DataFrame([get_once(e) for e in epsilon_list], epsilon_list))  
  
test_epsilon()
```

	0	1	2
1.000000e-05	4	5	4
1.000000e-06	4	5	5
1.000000e-09	5	6	6
1.000000e-12	6	7	7
1.000000e-14	6	7	8
1.000000e-16	6	11	13

由数据可知，随着要求精度的提高，二分次数也在随之升高。