

# 计算方法实验（实验 3）

2022 年 4 月 23 日

数据显示结果已保留 4 位小数。

## 1 实验题目 3：四阶龙格——库塔方法

### 1.1 问题分析

准确描述并总结出实验题目（摘要），并准确分析原题的目的和意义。

给定常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, & h = \frac{b-a}{N} \end{cases}$$

求其数值解  $y_n, n = 1, 2, \dots, N$ 。

#### 1.1.1 实验目的

输入：  $a, b, \alpha, N$

输出：初值问题的数值解  $x_n, y_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$

### 1.2 数学原理

数学原理表达清晰且书写准确。

记  $x_n = a + n \times h, n = 0, 1, \dots, N$ ，利用四阶龙格——库塔方法：

$$\begin{aligned}
K_1 &= hf(x_n, y_n) \\
K_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}) \\
K_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}) \\
K_4 &= hf(x_n + h, y_n + K_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
n &= 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

即可逐次求出微分方程初值问题的数值解  $x_n, y_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ 。

### 1.3 程序设计流程

编译通过，根据输入能得到正确输出。

[43]: # 引入需要的包

```
from typing import *
import numpy as np
from pandas import DataFrame
```

[44]: # 四阶龙格——库塔方法

```
def runge_kutta(
    f: Callable[[float, float], float],
    a: float, b: float, alpha: float, N: int):
    x_list, y_list = [], []
    h = (b - a) / N
    x, y = a, alpha
    x_list.append(x)
    y_list.append(y)
    for _ in range(N):
        k_1 = h*f(x, y)
        k_2 = h*f(x+h/2, y+k_1/2)
        k_3 = h*f(x+h/2, y+k_2/2)
        k_4 = h*f(x+h, y+k_3)
        x = x + h
        y = y + (k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4) / 6
```

```

    x_list.append(x)
    y_list.append(y)
    return x_list, y_list

```

[45]: # 运行测试参数

```

global_args = [
    [lambda x, y: x + y, 0, 1, -1, [5, 10, 20], lambda x: -x-1, "问题 1 (1)"],
    [lambda x, y: -y**2, 0, 1, 1, [5, 10, 20],
     lambda x: 1 / (x + 1), "问题 1 (2)"],
    [lambda x, y: 2 * y / x + x**2 +
     np.exp(x), 1, 3, 0, [5, 10, 20], lambda x: x**2 * (np.exp(x) - np.e),
     ↪ "问题 2 (1)"],
    [lambda x, y: (y + y**2) / x, 1, 3, -2, [5, 10, 20],
     lambda x: 2 * x / (1 - 2 * x), "问题 2 (2)"],
    [lambda x, y: -20 * (y-x**2) + 2 * x, 0, 1, 1.0 / 3,
     [5, 10, 20], lambda x: x**2 + np.exp(-20*x)/3, "问题 3 (1)"],
    [lambda x, y: -20 * y + 20 *
     np.sin(x) + np.cos(x), 0, 1, -1, [5, 10, 20], lambda x: np.exp(-20*x) +
     ↪ np.sin(x), "问题 3 (2)"],
    [lambda x, y: -20*(y-np.exp(x)*np.sin(x)) + np.exp(x)*(np.sin(x) + np.
     ↪ cos(x)),
     0, 1, 0, [5, 10, 20], lambda x: np.exp(x)*np.sin(x), "问题 3 (3)"]
]

```

[46]: # 求数据的均方误差

```

def get_error(f: Callable[[float], float], data):
    x, y = data
    standard = np.array([f(x_i) for x_i in x])
    return sum((y - standard) ** 2) / len(x)

```

[47]: # 运行一次

```

def run(index: int):
    res = []
    for n in global_args[index][-3]:
        data = runge_kutta(*[
            *global_args[index][: -3], n

```

```

    ])
    error = get_error(global_args[index][-2], data)
    res.append({
        "N": n,
        "标号": global_args[index][-1],
        "均方误差": error,
        "x": data[0],
        "y": data[1],
    })
    return res

```

[48]: # 运行所有并且返回结果表格

```

def run_all():
    all_data = [run(i) for i in range(len(global_args))]
    all = []
    for d in all_data:
        all.extend(d)
    # 重新格式化为字符串
    all = [{
        'N': d['N'],
        '标号': d['标号'],
        '均方误差': d['均方误差'],
        'x': [f"{x:.4g}" for x in d['x']],
        'y': [f"{x:.4g}" for x in d['y']],
    } for d in all]
    return DataFrame(all)

run_all()

```

[48]:

	N	标号	均方误差 \
0	5	问题 1 (1)	2.465190e-32
1	10	问题 1 (1)	3.182337e-31
2	20	问题 1 (1)	2.206932e-31
3	5	问题 1 (2)	2.569560e-11
4	10	问题 1 (2)	1.282857e-13
5	20	问题 1 (2)	5.366889e-16

6	5	问题 2 (1)	2.023870e+03
7	10	问题 2 (1)	1.541237e+03
8	20	问题 2 (1)	1.315425e+03
9	5	问题 2 (2)	7.459298e-07
10	10	问题 2 (2)	4.401675e-10
11	20	问题 2 (2)	8.946298e-14
12	5	问题 3 (1)	3.263086e+05
13	10	问题 3 (1)	4.889478e-01
14	20	问题 3 (1)	4.815643e-01
15	5	问题 3 (2)	1.697642e+06
16	10	问题 3 (2)	3.852943e-01
17	20	问题 3 (2)	2.209629e-01
18	5	问题 3 (3)	3.617925e+02
19	10	问题 3 (3)	9.913683e-06
20	20	问题 3 (3)	1.212561e-08

x \

0	[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]
1	[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0...
2	[0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4...
3	[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]
4	[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0...
5	[0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4...
6	[1, 1.4, 1.8, 2.2, 2.6, 3]
7	[1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3]
8	[1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1...
9	[1, 1.4, 1.8, 2.2, 2.6, 3]
10	[1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3]
11	[1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1...
12	[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]
13	[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0...
14	[0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4...
15	[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]
16	[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0...
17	[0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4...
18	[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]

19	[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0...
20	[0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4...

  

	y
0	[-1, -1.2, -1.4, -1.6, -1.8, -2]
1	[-1, -1.1, -1.2, -1.3, -1.4, -1.5, -1.6, -1.7,...
2	[-1, -1.05, -1.1, -1.15, -1.2, -1.25, -1.3, -1...
3	[1, 0.8333, 0.7143, 0.625, 0.5556, 0.5]
4	[1, 0.9091, 0.8333, 0.7692, 0.7143, 0.6667, 0...
5	[1, 0.9524, 0.9091, 0.8696, 0.8333, 0.8, 0.769...
6	[0, 2.608, 8.124, 17.66, 32.55, 54.5]
7	[0, 1.006, 2.614, 4.947, 8.138, 12.33, 17.68, ...
8	[0, 0.435, 1.006, 1.727, 2.614, 3.682, 4.948, ...
9	[-2, -1.554, -1.384, -1.293, -1.238, -1.2]
10	[-2, -1.714, -1.556, -1.455, -1.385, -1.333, -...
11	[-2, -1.833, -1.714, -1.625, -1.556, -1.5, -1...
12	[0.3333, 2.507, 11.69, 55.95, 275.5, 1372]
13	[0.3333, 0.2511, 0.3637, 0.5412, 0.7404, 0.946...
14	[0.3333, 0.1644, 0.1666, 0.2331, 0.3237, 0.423...
15	[-1, -4.803, -24.62, -124.5, -624.7, -3126]
16	[-1, -0.2335, 0.08744, 0.2583, 0.3767, 0.4748,...
17	[-1, -0.325, -0.04079, 0.0967, 0.1789, 0.24, 0...
18	[0, 0.2986, 0.9272, 2.835, 10.71, 47.94]
19	[0, 0.1121, 0.2451, 0.4018, 0.5841, 0.7938, 1...
20	[0, 0.0526, 0.1104, 0.1737, 0.2427, 0.3178, 0...

为防止输出 PDF 时表格格式被破坏,在此放入上方表格的图片。

N	标号	均方误差	x	y
0	5 问题 1 (1)	2.465190e-32	[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]	[-1, -1.2, -1.4, -1.6, -1.8, -2]
1	10 问题 1 (1)	3.182337e-31	[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0....]	[-1, -1.1, -1.2, -1.3, -1.4, -1.5, -1.6, -1.7, ...]
2	20 问题 1 (1)	2.206932e-31	[0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4...	[-1, -1.05, -1.1, -1.15, -1.2, -1.25, -1.3, -1...
3	5 问题 1 (2)	2.569560e-11	[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]	[1, 0.8333, 0.7143, 0.625, 0.5556, 0.5]
4	10 问题 1 (2)	1.282857e-13	[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0....]	[1, 0.9091, 0.8333, 0.7692, 0.7143, 0.6667, 0....]
5	20 问题 1 (2)	5.366889e-16	[0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4...	[1, 0.9524, 0.9091, 0.8696, 0.8333, 0.8, 0.769...
6	5 问题 2 (1)	2.023870e+03	[1, 1.4, 1.8, 2.2, 2.6, 3]	[0, 2.608, 8.124, 17.66, 32.55, 54.5]
7	10 问题 2 (1)	1.541237e+03	[1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3]	[0, 1.006, 2.614, 4.947, 8.138, 12.33, 17.68, ...]
8	20 问题 2 (1)	1.315425e+03	[1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1....]	[0, 0.435, 1.006, 1.727, 2.614, 3.682, 4.948, ...]
9	5 问题 2 (2)	7.459298e-07	[1, 1.4, 1.8, 2.2, 2.6, 3]	[-2, -1.554, -1.384, -1.293, -1.238, -1.2]
10	10 问题 2 (2)	4.401675e-10	[1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3]	[-2, -1.714, -1.556, -1.455, -1.385, -1.333, -...
11	20 问题 2 (2)	8.946298e-14	[1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1....]	[-2, -1.833, -1.714, -1.625, -1.556, -1.5, -1....]
12	5 问题 3 (1)	3.263086e+05	[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]	[0.3333, 2.507, 11.69, 55.95, 275.5, 1372]
13	10 问题 3 (1)	4.889478e-01	[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0....]	[0.3333, 0.2511, 0.3637, 0.5412, 0.7404, 0.946...
14	20 问题 3 (1)	4.815643e-01	[0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4...	[0.3333, 0.1644, 0.1666, 0.2331, 0.3237, 0.423...
15	5 问题 3 (2)	1.697642e+06	[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]	[-1, -4.803, -24.62, -124.5, -624.7, -3126]
16	10 问题 3 (2)	3.852943e-01	[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0....]	[-1, -0.2335, 0.08744, 0.2583, 0.3767, 0.4748, ...]
17	20 问题 3 (2)	2.209629e-01	[0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4...	[-1, -0.325, -0.04079, 0.0967, 0.1789, 0.24, 0...
18	5 问题 3 (3)	3.617925e+02	[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]	[0, 0.2986, 0.9272, 2.835, 10.71, 47.94]
19	10 问题 3 (3)	9.913683e-06	[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0....]	[0, 0.1121, 0.2451, 0.4018, 0.5841, 0.7938, 1....]
20	20 问题 3 (3)	1.212561e-08	[0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4...	[0, 0.0526, 0.1104, 0.1737, 0.2427, 0.3178, 0....]

## 1.4 实验结果

准确规范地给出各个实验题目的结果，并对相应的思考题给出正确合理的回答与说明。

实验数据结果如上表所示。

思考题：

1. 对实验 1，数值解和解析解相同吗？为什么？试加以说明。

在误差范围内基本可以认为相同。由上表可知，对问题 1，当  $N = 20$  时，其结果和标准值的均方误差均小于  $10^{-15}$ ，都是非常小的，所以在误差范围内可以认为数值解和解析解相同。

2. 对实验 2， $N$  越大越精确吗？试加以说明。

在实验 2 的数据中，随着  $N$  的增大，其均方误差越来越小，所以对实验二， $N$  越大越精确。

3. 对实验 3， $N$  较小会出现什么现象？试加以说明。

在实验 3 的数据中，当  $N$  较小时，其均方误差非常大，达到  $10^2$  甚至  $10^6$ 。