

# 计算方法实验指导

姓名\_\_\_\_\_

学号\_\_\_\_\_

院系\_\_\_\_\_

专业\_\_\_\_\_

哈尔滨工业大学（深圳）

# 计算方法实验指导

根据实际问题建立的数学模型，一般不能求出所谓的解析解，必须针对数学模型的特点确定适当的计算方法，编制出计算机能够执行的计算程序，输入计算机，进行调试，完成运算，如果计算结果存在问题或不知是否正确，还需要重新确定新的计算方法，再编制出计算程序，输入计算机，重新调试，完成运算，直至获得正确的计算结果，这就是数值计算的全部过程。

学生在学习“计算方法”和“高级语言”等课程时普遍存在的问题是：只会套用教科书中的标准程序进行数值计算，很少有人能够独立地将学过的数值算法编制成计算机程序，至于灵活应用已经掌握的算法求解综合性较大的课题，则更是困难的事情。

编写《计算方法实验指导》的目的是：突出数值计算程序结构化的思想。提高学生的编程能力，加深对“计算方法”课程内容的理解和掌握，为“计算方法”课程的教学服务，进一步奠定从事数值计算工作的基础。具体地

1.根据“计算方法”课程内容的特点，给出五个典型算法的分析流程，学生可以利用所掌握的“高级语言”顺利地编制出计算机程序，上机实习，完成实验环节的教学要求。

2.所有的计算实习题目都经过任课教师逐一检验，准确无误。

3.充分利用循环的思想、迭代的思想，给出算法结构描述和程序语言的对应关系，有利于学生编制相应的程序。

4.结合实习题目，提出实验要求，要求学生按规范格式写出相应的实验报告，实验报告成绩记入期末总成绩。需要提醒学生：不能简单地套用现成的标准程序完成实验题目，应当把重点放在对算法的理解、程序的优化设计、上机调试和计算结果分析上，否则就失去实验课的目的啦。

5. 五个具体的实验题目是：

实验题目 1 拉格朗日(Lagrange)插值

实验题目 2 龙贝格(Romberg)积分法

实验题目 3 四阶龙格—库塔(Runge—Kutta)方法

实验题目 4 牛顿(Newton)迭代法

实验题目 5 高斯(Gauss)列主元消去法

要求必须完成其中四个（如果全部完成更好）。

## 实验题目 1 拉格朗日(Lagrange)插值

方法概要:

给定平面上  $n+1$  个不同的数据点  $(x_k, f(x_k))$ ,  $k=0,1,\dots,n$ ,  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ ;

则满足条件

$$P_n(x_k) = f(x_k), \quad k=0,1,\dots,n$$

的  $n$  次拉格朗日插值多项式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x)$$

是存在唯一的。若  $x_k \in [a,b], k=0,1,\dots,n$ , 且函数  $f(x)$  充分光滑, 则当  $x \in [a,b]$  时,

有误差估计式

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \quad \xi \in [a,b]$$

拉格朗日插值算法实验

实验目的: 利用拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$  求  $f(x)$  的近似值

输入:  $n+1$  个数据点  $(x_k, f(x_k))$ ,  $k=0,1,\dots,n$ ; 插值点  $x$

输出:  $f(x)$  在插值点  $x$  的近似值  $P_n(x)$

程序流程:

- 1 置  $y=0.0$ ;  $k=0$
- 2 当  $k \leq n$  时, 做 2.1—2.4
  - 2.1 置  $l=1.0$ ;
  - 2.2 对  $j=0,1,\dots,k-1,k+1,\dots,n$ , 置  $l=l \cdot (x-x_j)/(x_k-x_j)$
  - 2.3 置  $y=y+l \cdot f(x_k)$
  - 2.4 置  $k=k+1$
- 3 输出  $x, y$
- 4 停机

问题 1 拉格朗日插值多项式的次数  $n$  越大越好吗?

考虑下面两个拉格朗日插值问题：

(1) 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in [-5, 5]$ , 考虑等距节点的拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$ , 即将区间  $[-5, 5]$  进行  $n$  等分, 记  $h = \frac{10.0}{n}$ ,  $x_k = -5.0 + k \cdot h$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , 构造  $P_n(x)$ , 利用拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$  作为  $f(x)$  的近似值。分别取  $n = 5$ ,  $n = 10$ ,  $n = 20$ , 同时计算  $P_n(x)$  在  $x = 0.75$ ,  $x = 1.75$ ,  $x = 2.75$ ,  $x = 3.75$ ,  $x = 4.75$  处的函数值。

(2) 设  $f(x) = e^x$ ,  $x \in [-1, 1]$ , 考虑等距节点的拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$ , 即将区间  $[-1, 1]$  进行  $n$  等分, 记  $h = \frac{2.0}{n}$ ,  $x_k = -1.0 + k \cdot h$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , 构造  $P_n(x)$ , 利用拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$  作为  $f(x)$  的近似值。分别取  $n = 5$ ,  $n = 10$ ,  $n = 20$ , 同时计算  $P_n(x)$  在  $x = -0.95$ ,  $x = -0.05$ ,  $x = 0.05$ ,  $x = 0.95$  处的函数值。

问题 2 插值区间越小越好吗？

考虑下面两个拉格朗日插值问题：

(1) 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , 考虑等距节点的拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$ , 即将区间  $[-1, 1]$  进行  $n$  等分, 记  $h = \frac{2.0}{n}$ ,  $x_k = -1.0 + k \cdot h$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , 构造  $P_n(x)$ , 利用拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$  作为  $f(x)$  的近似值。分别取  $n = 5$ ,  $n = 10$ ,  $n = 20$ , 同时计算  $P_n(x)$  在  $x = -0.95$ ,  $x = -0.05$ ,  $x = 0.05$ ,  $x = 0.95$  处的函数值。

(2) 设  $f(x) = e^x$ ,  $x \in [-5, 5]$ , 考虑等距节点的拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$ , 即将区间  $[-5, 5]$  进行  $n$  等分, 记  $h = \frac{10.0}{n}$ ,  $x_k = -5.0 + k \cdot h$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , 构造  $P_n(x)$ , 利用拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$  作为  $f(x)$  的近似值。分别取  $n = 5$ ,  $n = 10$ ,  $n = 20$ , 同时计算  $P_n(x)$  在  $x = -4.75$ ,  $x = -0.25$ ,  $x = 0.25$ ,  $x = 4.75$  处的函数值。

**问题 3** 在区间  $[-1,1]$  考虑拉格朗日插值问题，为了使得插值误差较小，应如何选取插值节点？

考虑下面两个拉格朗日插值问题：

(1) 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in [-1,1]$ , 考虑非等距节点的拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$ ,

记  $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ ,  $k=0,1,\dots,n$ , 构造  $P_n(x)$ , 利用拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$  作

为  $f(x)$  的近似值。分别取  $n=5$ ,  $n=10$ ,  $n=20$ , 同时计算  $P_n(x)$  在  $x=-0.95$ ,  $x=-0.05$ ,  $x=0.05$ ,  $x=0.95$  处的函数值。

(2) 设  $f(x) = e^x$ ,  $x \in [-1,1]$ , 考虑非等距节点的拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$ ,

记  $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ ,  $k=0,1,\dots,n$ , 构造  $P_n(x)$ , 利用拉格朗日插值多项式  $P_n(x)$  作

为  $f(x)$  的近似值。分别取  $n=5$ ,  $n=10$ ,  $n=20$ , 同时计算  $P_n(x)$  在  $x=-0.95$ ,  $x=-0.05$ ,  $x=0.05$ ,  $x=0.95$  处的函数值。

**问题 4** 考虑拉格朗日插值问题，内插比外推更可靠吗？

考虑下面两个拉格朗日插值问题：

(1) 设  $f(x) = \sqrt{x}$ , 关于以  $x_0=1$ ,  $x_1=4$ ,  $x_2=9$  为节点的拉格朗日插值多项式  $P_2(x)$ , 利用拉格朗日插值多项式  $P_2(x)$  作为  $f(x)$  的近似值。同时计算  $P_2(x)$  在  $x=5$ ,  $x=50$ ,  $x=115$ ,  $x=185$  处的函数值。

(2) 设  $f(x) = \sqrt{x}$ , 关于以  $x_0=36$ ,  $x_1=49$ ,  $x_2=64$  为节点的拉格朗日插值多项式  $P_2(x)$ , 利用拉格朗日插值多项式  $P_2(x)$  作为  $f(x)$  的近似值。同时计算  $P_2(x)$  在  $x=5$ ,  $x=50$ ,  $x=115$ ,  $x=185$  处的函数值。

(3) 设  $f(x) = \sqrt{x}$ , 关于以  $x_0=100$ ,  $x_1=121$ ,  $x_2=144$  为节点的拉格朗日插值多项式  $P_2(x)$ , 利用拉格朗日插值多项式  $P_2(x)$  作为  $f(x)$  的近似值。同时计算  $P_2(x)$

在  $x=5$ ， $x=50$ ， $x=115$ ， $x=185$  处的函数值。

(4) 设  $f(x)=\sqrt{x}$ ，关于以  $x_0=169$ ， $x_1=196$ ， $x_2=225$  为节点的拉格朗日插值多项式  $P_2(x)$ ，利用拉格朗日插值多项式  $P_2(x)$  作为  $f(x)$  的近似值。同时计算  $P_2(x)$  在  $x=5$ ， $x=50$ ， $x=115$ ， $x=185$  处的函数值。

思考题：

1. 对实验 1 存在的问题，应如何解决？
2. 对实验 2 存在的问题的回答，试加以说明
3. 对实验 3 存在的问题的回答，试加以说明
4. 如何理解插值问题中的内插和外推？

写出实验报告

## 实验题目 2 龙贝格(Romberg)积分法

方法概要：利用复化梯形求积公式、复化辛普生求积公式、复化柯特斯求积公式的误差估计式计算积分  $\int_a^b f(x)dx$ 。记  $h = \frac{b-a}{n}$ ， $x_k = a + k \cdot h$ ， $k = 0, 1, \dots, n$ ，其计算公式：

$$T_n = \frac{1}{2}h \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}h \sum_{k=1}^n f(x_k - \frac{1}{2}h)$$

$$S_n = \frac{1}{3}(4T_{2n} - T_n)$$

$$C_n = \frac{1}{15}(16S_{2n} - S_n)$$

$$R_n = \frac{1}{63}(64C_{2n} - C_n)$$

一般地，利用龙贝格算法计算积分，要输出所谓的  $T$ -数表

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & & & & & & \\ T_2 & S_1 & & & & & \\ T_4 & S_2 & C_1 & & & & \\ T_8 & S_4 & C_2 & R_1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

龙贝格(Romberg)积分法实验

实验目的：利用龙贝格(Romberg)积分法计算积分  $\int_a^b f(x)dx$

输入：  $a, b, N, \varepsilon$

输出： 龙贝格  $T$ -数表

程序流程：

1 置  $h = \frac{b-a}{n}$ ， $m = 1$

$$T_1 = \frac{1}{2}h[f(a) + f(b)]$$

2 输出  $T_1$

3 对  $i = 2, 3, \dots, N$ ，做 3.1—3.5

3.1 置  $ii = 2^{i-1}$

$$\text{置 } T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}h \sum_{k=1}^{ii} f(a + (k - \frac{1}{2})h)$$

输出  $T_2$

3.2 置  $S_2 = \frac{1}{3}(4T_2 - T_1)$

输出  $S_2$

3.3 对  $m \neq 1$ , 置  $C_2 = \frac{1}{15}(16S_2 - S_1)$

输出  $C_2$ , 转 3.6

3.4 对  $m \neq 2$ , 置  $R_2 = \frac{1}{63}(64C_2 - C_1)$

输出  $R_2$ , 转 3.6

3.5 对  $m \neq 3$ , 置  $tol = |R_2 - R_1|$

如果  $tol < \varepsilon$ , 则停机, 否则转 3.6

3.6 置  $R_1 = R_2$ ,  $C_1 = C_2$ ,  $S_1 = S_2$ ,  $T_1 = T_2$ ,  $h = \frac{h}{2}$ ,  $m = m + 1$

4 停机

问题 1: 利用龙贝格(Romberg)积分法计算积分

(1)  $\int_0^1 x^2 e^x dx$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$

(2)  $\int_1^3 e^x \sin x dx$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$

(3)  $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$

(4)  $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$

问题 2: 被积函数无界, 如何处理?

(1)  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$



提示:  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2)  $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-6}$

提示: 引进变换  $t = \sqrt{1-x}$

(3)  $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-6}$

提示: 利用等式  $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_0^1 \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} dx$ , 第一个积分值等于 2, 第

二个积分, 利用  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} = 0$ ;

也可以考虑利用分部积分  $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 \cos x d(\sqrt{x})$

(4)  $\int_{-1}^1 \frac{x \sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-6}$

提示: 利用第一类 Gauss-Chebyshev 求积公式

问题 3: 积分区间无限, 如何处理?

(1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad \varepsilon = 10^{-6}$

提示: 利用  $\int_{-10}^{+10} e^{-x^2} dx$  作近似

(2)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-6}$

提示: 利用变换  $t = \sqrt{x^{-1}}$

(3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos^3 x dx, \quad \varepsilon = 10^{-6}$

提示: Gauss-Hermite 求积公式

(4)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx, \quad \varepsilon = 10^{-6}$

提示: Gauss-Lagurre 求积公式

思考题：

1. 输入的参数  $N$  有什么意义？
2. 在实验 1 中二分次数和精度的关系如何？
3. 在实验 2 中给出的提示具有普遍性吗？存在其它的方法吗？试加以说明。
4. 在实验 3 中给出的提示具有普遍性吗？存在其它的方法吗？试加以说明。

写出实验报告

### 实验题目 3 四阶龙格—库塔(Runge—Kutta)方法

方法概要:

给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \quad h = \frac{b-a}{N} \end{cases}$$

记  $x_n = a + n \cdot h$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , 利用四阶龙格—库塔方法

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_n, y_n) \\ K_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}) \\ K_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}) \\ K_4 &= hf(x_n + h, y_n + K_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

可逐次求出微分方程初值问题的数值解  $y_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ 。

四阶龙格—库塔(Runge—Kutta)方法实验

实验目的: 利用四阶龙格—库塔(Runge—Kutta)方法求解微分方程初值问题

输入:  $a, b, \alpha, N$

输出: 初值问题的数值解  $x_n, y_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ 。

程序流程:

1 置  $x_0 = a, y_0 = \alpha, h = \frac{b-a}{N}$

2 对  $n = 1, 2, \dots, N$ , 做 2.1—2.4

2.1 置

$$K_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$K_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2})$$

$$K_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2})$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3)$$

2.2 置  $x_1 = x_0 + h$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

2.3 输出  $x_1, y_1$

2.4 置  $x_0 = x_1, y_0 = y_1$

3 停机

问题 1

(1)

$$\frac{dy}{dx} = x + y, 0 \leq x \leq 1, N = 5, 10, 20$$

$$y(0) = -1 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = -x - 1$$

(2)

$$\frac{dy}{dx} = -y^2, 0 \leq x \leq 1, N = 5, 10, 20$$

$$y(0) = 1 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = \frac{1}{x+1}$$

问题 2

(1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y + x^2 e^x, 1 \leq x \leq 3, N = 5, 10, 20$$

$$y(1) = 0 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = x^2 (e^x - e)$$

(2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(y^2 + y), 1 \leq x \leq 3, N = 5, 10, 20$$

$$y(1) = -2 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = \frac{2x}{1-2x}$$

问题 3

(1)

$$\frac{dy}{dx} = -20(y - x^2) + 2x, 0 \leq x \leq 1, N = 5, 10, 20$$

$$y(0) = \frac{1}{3} \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = x^2 + \frac{1}{3}e^{-20x}$$

(2)

$$\frac{dy}{dx} = -20y + 20\sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 1 \quad N = 5, 10, 20$$

$$y(0) = 1 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = e^{-20x} + \sin x$$

(3)

$$\frac{dy}{dx} = -2.0 (y - e^x \sin x) + e^x (\sin x + \cos x), 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 0 \quad N = 5, 10, 20, h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = e^x \sin x$$

思考题:

1. 对实验 1, 数值解和解析解相同吗? 为什么? 试加以说明。
2. 对实验 2,  $N$  越大越精确吗? 试加以说明。
3. 对实验 3,  $N$  较小会出现什么现象? 试加以说明

写出实验报告

## 实验题目 4 牛顿(Newton)迭代法

方法概要:

求非线性方程  $f(x)=0$  的根  $x^*$ , 牛顿迭代法计算公式

$$\begin{aligned}x_0 &= \alpha \\x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\n &= 0, 1, \dots\end{aligned}$$

一般地, 牛顿迭代法具有局部收敛性, 为保证迭代收敛, 要求, 对充分小的  $\delta > 0$ ,  $\alpha \in O(x^*, \delta)$ 。如果  $f(x) \in C^2[a, b]$ ,  $f(x^*) = 0$ ,  $f'(x^*) \neq 0$ , 那么, 对充分小的  $\delta > 0$ , 当  $\alpha \in O(x^*, \delta)$  时, 由牛顿迭代法计算出的  $\{x_n\}$  收敛于  $x^*$ , 且收敛速度是 2 阶的; 如果  $f(x) \in C^m[a, b]$ ,  $f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$ ,  $f^{(m)}(x^*) \neq 0 (m > 1)$ , 那么, 对充分小的  $\delta > 0$ , 当  $\alpha \in O(x^*, \delta)$  时, 由牛顿迭代法计算出的  $\{x_n\}$  收敛于  $x^*$ , 且收敛速度是 1 阶的;

牛顿(Newton)迭代法实验

实验目的: 利用牛顿迭代法求  $f(x)=0$  的根

输入: 初值  $\alpha$ , 精度  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , 最大迭代次数  $N$

输出: 方程  $f(x)=0$  根  $x^*$  的近似值或计算失败标志

程序流程:

1 置  $n=1$

2 当  $n \leq N$  时, 做 2.1—2.4

2.1 置  $F = f(x_0)$ ,  $DF = f'(x_0)$

如果  $|F| < \varepsilon_1$ , 输出  $x_0$ ; 停机

如果  $|DF| < \varepsilon_2$ , 输出失败标志; 停机

2.2 置  $x_1 = x_0 - F / DF$

2.3 置  $Tol = |x_1 - x_0|$

如果  $|Tol| < \varepsilon_1$ ，输出  $x_1$ ；停机

2.4 置  $n = n + 1$ ， $x_0 = x_1$

3 输出失败标志

4 停机

问题 1: (1)  $\cos x - x = 0$ ， $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ ， $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ ， $N = 10$ ， $x_0 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398163$

(2)  $e^{-x} - \sin x = 0$ ， $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ ， $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ ， $N = 10$ ， $x_0 = 0.6$

问题 2: (1)  $x - e^{-x} = 0$ ， $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ ， $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ ， $N = 10$ ， $x_0 = 0.5$

(2)  $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0$ ， $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ ， $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ ， $N = 20$ ， $x_0 = 0.5$

问题 3: (1) 由下面的递推公式可以生成勒让德 (Legendre) 多项式

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

.....

$$P_{n+2}(x) = \frac{2n+3}{n+2} x P_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2} P_n(x), n \geq 0$$

①试确定  $P_2(x), P_3(x), P_4(x)$  和  $P_5(x)$

②确定  $P_6(x)$ ，求  $P_6(x)$  得所有零点，精度  $\varepsilon = 10^{-6}$

$\pm 0.9324695142$ ， $\pm 0.6612093865$ ， $\pm 0.2386191861$

(2) 由下面的递推公式可以生成切比雪夫勒让德 (Chebyshev) 多项式

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

.....

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x), n \geq 0$$



①试确定  $T_2(x), T_3(x), T_4(x)$  和  $T_5(x)$

②确定  $T_6(x)$ ，求  $T_6(x)$  得所有零点，精度  $\varepsilon = 10^{-6}$

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right), \quad j=0,1,\cdots,n$$

(3) 由下面的递推公式可以生成拉盖尔 (Laguerre) 多项式

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1-x$$

.....

$$L_{n+2}(x) = (2n+3-x)L_{n+1}(x) - (n+1)^2 L_n(x), n \geq 0$$

①试确定  $L_2(x), L_3(x), L_4(x)$  和  $L_5(x)$

②求  $L_5(x)$  得所有零点，精度  $\varepsilon = 10^{-6}$

0.2635603197, 1.4134030591, 3.5964257710, 7.0858100059, 12.6408008443

(4) 由下面的递推公式可以生成埃尔米特 (Hermite) 多项式

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

.....

$$H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x), n \geq 0$$

①试确定  $H_2(x), H_3(x), H_4(x)$  和  $H_5(x)$

②确定  $H_6(x)$ ，求  $H_6(x)$  得所有零点，精度  $\varepsilon = 10^{-6}$

$\pm 2.3506049737, \pm 1.3358490740, \pm 0.4360774119$

思考题:

1. 对实验 1 确定初值的原则是什么？实际计算中应如何解决？
2. 对实验 2 如何解释在计算中出现的现象？试加以说明
3. 对实验 3 存在的问题的回答，试加以说明

写出实验报告

## 实验题目 5 高斯(Gauss)列主元消去法

方法概要：

高斯（Gauss）列主元消去法：对给定的  $n$  阶线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ，首先进行列主元消元过程，然后进行回代过程，最后得到解或确定该线性方程组是奇异的。

如果系数矩阵的元素按绝对值在数量级方面相差很大，那么，在进行列主元消元过程前，先把系数矩阵的元素进行行平衡：系数矩阵的每行元素和相应的右端向量元素同除以该行元素绝对值最大的元素。这就是所谓的平衡技术。然后再进行列主元消元过程。

如果真正进行运算去确定相对主元，则称为显式相对 Gauss 列主元消去法；如果不进行运算，也能确定相对主元，则称为隐式相对 Gauss 列主元消去法。

显式相对 Gauss 列主元消去法：对给定的  $n$  阶线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ，首先进行列主元消元过程，在消元过程中利用显式平衡技术，然后进行回代过程，最后得到解或确定该线性方程组是奇异的。

隐式相对 Gauss 列主元消去法：对给定的  $n$  阶线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ，首先进行列主元消元过程，在消元过程中利用隐式平衡技术，然后进行回代过程，最后得到解或确定该线性方程组是奇异的。

实验目的：利用 Gauss 列主元消去法、显式相对 Gauss 列主元消去法、隐式相对 Gauss 列主元消去法求解线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 。

输入：  $n$ ；  $a_{ij}$ ，  $b_i$ ，  $i, j = 1, 2, \dots, n$

输出：线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的近似解  $x_i$ ，  $i = 1, 2, \dots, n$

程序流程：

### 一、 Gauss 列主元消去法

1 对  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ，做 1.1—1.3，消元过程

1.1 寻找最小的正整数  $p$ ，  $k \leq p \leq n$  和  $|a_{pk}| = \max_{k \leq j \leq n} |a_{jk}|$ 。如果  $a_{pk} = 0$ ，输

出奇异标志，停机；

1.2 如果  $p \neq k$ ，那么交换  $p, k$  两行；

1.3 对  $i = k+1, \dots, n$ ，记  $m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$ ，计算

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ij} - a_{kj}m_{ik} \\ i = k+1, \dots, n \\ j = k+1, \dots, n \\ b_i = b_i - b_k m_{ik} \\ i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

2. 如果  $a_{nn} = 0$  输出奇异标志，停机；

3. 置  $x_n = b_n / a_{nn}$ ，回代过程

4. 对  $k = n-1, \dots, 2, 1$ ，置  $x_k = (b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j) / a_{kk}$

## 二、显式相对 Gauss 列主元消去法

1. 对  $k=1, 2, \dots, n-1$ ，做 1.1—1.4，消元过程

1.1 对  $i=k, k+1, \dots, n$ ，计算  $s_i = \max_{k \leq j \leq n} |a_{ij}|$ ，如果  $s_i = 0$ ，输出奇异标志，停

机；计算  $a_{ij} = a_{ij} / s_i$ ， $j = k, k+1, \dots, n$ ；

1.2 寻找最小的正整数  $p$ ， $k \leq p \leq n$  和  $|a_{pk}| = \max_{k \leq j \leq n} |a_{jk}|$ ，如果  $a_{pk} = 0$ ，输出奇异标志，停机；

1.3 如果  $p \neq k$ ，那么交换  $p, k$  两行；

1.4 对  $i = k+1, \dots, n$ ，记  $m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$ ，计算

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ij} - a_{kj}m_{ik} \\ i = k+1, \dots, n \\ j = k+1, \dots, n \\ b_i = b_i - b_k m_{ik} \\ i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

2. 如果  $a_{nn} = 0$  输出奇异标志，停机；

3. 置  $x_n = b_n / a_{nn}$ ，回代过程

4. 对  $k = n-1, \dots, 2, 1$ , 置  $x_k = (b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j) / a_{kk}$

### 三、隐式相对 Gauss 列主元消去法

1. 对  $k=1, 2, \dots, n-1$ , 做 1.1—1.3 消元过程

1.1 对  $i = k, k+1, \dots, n$ , 计算  $s_i = \max_{k \leq j \leq n} |a_{jk}|$ , 如果  $s_i = 0$ , 输出奇异标志, 停

机; 寻找最小的正整数  $p$ ,  $k \leq p \leq n$  和  $|a_{pk}| / s_p = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}| / s_i$ ;

1.2 如果  $p \neq k$ , 那么交换  $p, k$  两行;

1.3 对  $i = k+1, \dots, n$ , 记  $m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$ , 计算

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ij} - a_{kj}m_{ik} \\ i = k+1, \dots, n \\ j = k+1, \dots, n \\ b_i = b_i - b_k m_{ik} \\ i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

2. 如果  $a_{nn} = 0$  输出奇异标志, 停机;

3. 置  $x_n = b_n / a_{nn}$ , 回代过程

4. 对  $k = n-1, \dots, 2, 1$ , 置  $x_k = (b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j) / a_{kk}$

问题 1 实验题目:

$$(1) \begin{bmatrix} 0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 \\ 0.2246 & 0.3872 & 0.4015 & 0.1129 \\ 0.3645 & 0.1920 & 0.3781 & 0.0643 \\ 0.1784 & 0.4002 & 0.2786 & 0.3927 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1951 \\ 1.1262 \\ 0.9989 \\ 1.2499 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 136.01 & 90.860 & 0 & 0 \\ 90.860 & 98.810 & -67.590 & 0 \\ 0 & -67.590 & 132.01 & 46.260 \\ 0 & 0 & 46.260 & 177.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 226.87 \\ 122.08 \\ 110.68 \\ 223.43 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/12 \\ 77/60 \\ 57/60 \\ 319/420 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

实验题目的准确结果：

$$(1) \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1, 1, 1, 1)^T;$$

$$(2) \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1, 1, 1, 1)^T;$$

$$(3) \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1, 1, 1, 1)^T;$$

$$(4) \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1, 1, 1, 1)^T。$$

问题 2

$$(1) \begin{bmatrix} 197 & 305 & -206 & -804 \\ 46.8 & 71.3 & -47.4 & 52.0 \\ 88.6 & 76.4 & -10.8 & 802 \\ 1.45 & 5.90 & 6.13 & 36.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136 \\ 11.7 \\ 25.1 \\ 6.60 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0.5398 & 0.7161 & -0.5554 & -0.2982 \\ 0.5257 & 0.6924 & 0.3565 & -0.6255 \\ 0.6465 & -0.8187 & -0.1872 & 0.1291 \\ 0.5814 & 0.9400 & -0.7779 & -0.4042 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2058 \\ -0.0503 \\ 0.1070 \\ 0.1859 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix}$$

思考题：

1. 计算实验 1、实验 2 的各个题目说明：对什么类型的线性方程组三种方法是一致的？
2. 用三种方法计算实验 1、实验 2 的各个题目，哪种方法最好？试加以说明。
3. 综合上述两种结论，总结三种方法的关系，试加以说明。

写出实验报告

## 说 明

1 本课程给出五类实验题目，供学生选用，要求必须完成其中四个实验。

2 实验课的目的是为了让学生深入理解和掌握“计算方法”课程的基本内容，同时有助于培养学生的上机调试程序进行数值计算的动手能力，进一步提高利用数值方法求解数学问题、分析计算结果、选择算法的综合能力。

3 为了顺利完成实验教学的规定内容，建议学生按下面方法准备实验、进行实验、写出实验报告：

(1) 应明确实验的目的，清楚实验的内容，包括算法和误差分析；

(2) 写出内容摘要，包括算法的理论基础和对算法的初步认识；

(3) 上机前，编写好计算程序；

(4) 上机调试程序要做到快速、准确；

(5) 记录计算结果要做到真实、准确；

(6) 课后，认真写好实验报告，包括对算法的新认识和体会，要特别注意对计算结果的分析 and 讨论，当然包括对计算结果的误差分析。