计算方法实验（实验 1）

2022 年 4 月 23 日

数据显示结果已保留 4 位小数。

1 实验题目 1：拉格朗日（Lagrange）插值

1.1 问题分析

准确描述并总结出实验题目（摘要），并准确分析原题的目的和意义。

1.1.1 方法概要

给定平面上 $n+1$ 个不同的数据点 $(x_k, f(x_k)), k=0,1,\cdots,n, x_i \neq x_j, i \neq j$ 则满足条件

$$P_n(x_k) = f(x_k), k = 0,1,\cdots,n$$

的 n 次拉格朗日插值多项式

$$P_n(x) = \Sigma_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

是存在唯一的。若 $x_k \in [a,b], k=0,1,\cdots,n$，且函数 $f(x)$ 充分光滑，则当 $x \in [a,b]$ 时，有误差估计式

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \xi \in [a,b]$$

1.1.2 实验目的

利用拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$ 求 $f(x)$ 的近似值。

输入： $n+1$ 个数据点 $x_k, f(x_k), k=0,1,\cdots,n$、插值点 x

输出： $f(x)$ 在插值点 x 的近似值 $P_n(x)$

1.2 数学原理

数学原理表达清晰且书写准确。

1.2.1 证明 $P_n(x)$ 存在且唯一

证明： 使用归纳法证明。

当 $n=0$，一定存在 $P_0(x)=C=f_0(x)$ 满足要求。

假设当 $n=k-1$ 时，存在满足要求的 $P_{k-1}(x)$，则当 $n=k$，有

$$P_k(x)=P_{k-1}(x)+c(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_k),\ \text{c 为系数}$$

则 $\because P_n(x_n)=f(x_n),\therefore$ 参数 c 是可求的，故 $P_n(x)$ 是存在的。

由多项式基本定理，$\because P_n(x)$的次数 $\leq n,\therefore P_n(x)$ 是唯一存在的。

1.2.2 计算方法

对平面上 $n+1$ 个点 $(x_k,f(x_k)),k=0,1,\cdots,n,x_i\neq x_j,i\neq j$ 定义 n 次多项式：

$$L_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

则 $L_k(x_k)=1,L_k(x_m)=0,m\neq k$。

定义：

$$P_n(x)=f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+\cdots+f(x_n)L_n(x)=\Sigma_{k=0}^{n}f(x_k)L_x(x)$$

为 $f(x)$ 的 n 次拉格朗日插值多项式。

1.3 程序设计流程

编译通过，根据输入能得到正确输出。

[11]:
```
# 引入需要的包
import numpy as np
```

```python
from pandas import DataFrame
from matplotlib import pyplot as plt
```

[12]:
```python
# L_k(x)
def L(k, x_list: np.ndarray):
    def l(x: float):
        x_k = x_list[k]
        slice = np.array([*x_list[:k], *x_list[k+1:]])
        repeat = np.array([x, ] * (len(x_list) - 1))
        repeat_k = np.array([x_k, ] * (len(x_list) - 1))
        return np.prod(repeat - slice) / np.prod(repeat_k - slice)
    return l

# 拉格朗日多项式 P_n(x)
def P(f, x_list: np.ndarray, x: float):
    return np.sum([f(x_list[k]) * L(k, x_list)(x) for k in range(len(x_list))])

# 获得 x_list
def linspace(r: int, n: int):
    return [-r + k * (2 * r / n) for k in range(0, n + 1)]
```

1.3.1 问题一

[13]:
```python
def problem1():
    print("问题 1: 拉格朗日插值多项式的次数 n 越大越好吗? ")

    def sub(targets_x, targets_n, solve):
        return DataFrame({n: {x: solve(n, x) for x in targets_x} for n in␣
 ↪targets_n}).round(4)

    print("(1) 考虑 f(x) = 1 / (1 + x^2) in [-5, 5]")
    targets_x_1 = [0.75, 1.75, 2.75, 3.75, 4.75]
    targets_n = [5, 10, 20]
    print(sub(
        targets_x=targets_x_1,
        targets_n=targets_n,
```

```
    solve=lambda n_i, x: P(
        lambda x_i: 1 / (1 + x_i ** 2), linspace(5, n_i), x
    )
))
print("差值: ")
print(sub(
    targets_x=targets_x_1,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: ((1 / (1 + x ** 2)) - P(
        lambda x_i: 1 / (1 + x_i ** 2), linspace(5, n_i), x
    ))
))

print("(2) 考虑 f(x) = e^x in [-1, 1]")
targets_x_2 = [-0.95, -0.05, 0.05, 0.95]
print(sub(
    targets_x=targets_x_2,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: P(lambda x_i: np.e ** x_i,
                           linspace(5, n_i), x)
))
print("差值: ")
print(sub(
    targets_x=targets_x_2,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: (np.e ** x - P(lambda x_i: np.e ** x_i,
                                        linspace(5, n_i), x))
))
print("画出两个函数以及其拉格朗日多项式的图像: ")
slice_fluent_size = 1000
x_linespace_2 = np.linspace(-1, 1, slice_fluent_size)
x_linespace_10 = np.linspace(-5, 5, slice_fluent_size)
y1 = 1 / (1 + x_linespace_10**2)
Ls1 = {n_i: np.array([P(lambda x_i: np.e ** x_i, linspace(5, n_i), x)
                      for x in x_linespace_10]) for n_i in targets_n}
plt.figure(dpi=150)
```

```
    plt.title("(1) Consider $f(x) = 1 / (1 + x^2)$")
    plt.legend(handles=plt.plot(x_linespace_10, y1, label="$f(x) = 1 / (1 +␣
 ↪x^2)$"), loc='best')
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(1) Consider $f(x) = 1 / (1 + x^2)$, select n")
    plt.legend(handles=[*[plt.plot(x_linespace_10, Ls1[n_i],␣
 ↪label=f"$P_n(x),n={n_i}$")[0] for n_i in Ls1],
                        plt.plot(x_linespace_10, y1, label="$f(x) = 1 / (1 +␣
 ↪x^2)$")[0]], loc='best')
    y2 = np.e**x_linespace_2
    Ls2 = {n_i: np.array([P(lambda x_i: np.e ** x_i, linspace(5, n_i), x)
                        for x in x_linespace_2]) for n_i in targets_n}
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(2) Consider $f(x) = e^x$")
    plt.legend(handles=plt.plot(x_linespace_2, y2, label="$f(x) = e^x$"),␣
 ↪loc='best')
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(2) Consider $f(x) = e^x$, select n")
    plt.legend(handles=[*[plt.plot(x_linespace_2, Ls2[n_i],␣
 ↪label=f"$P_n(x),n={n_i}$")[0] for n_i in Ls2],
                        plt.plot(x_linespace_2, y2, label="$f(x) = e^x$")[0]],␣
 ↪loc='best')



problem1()
```

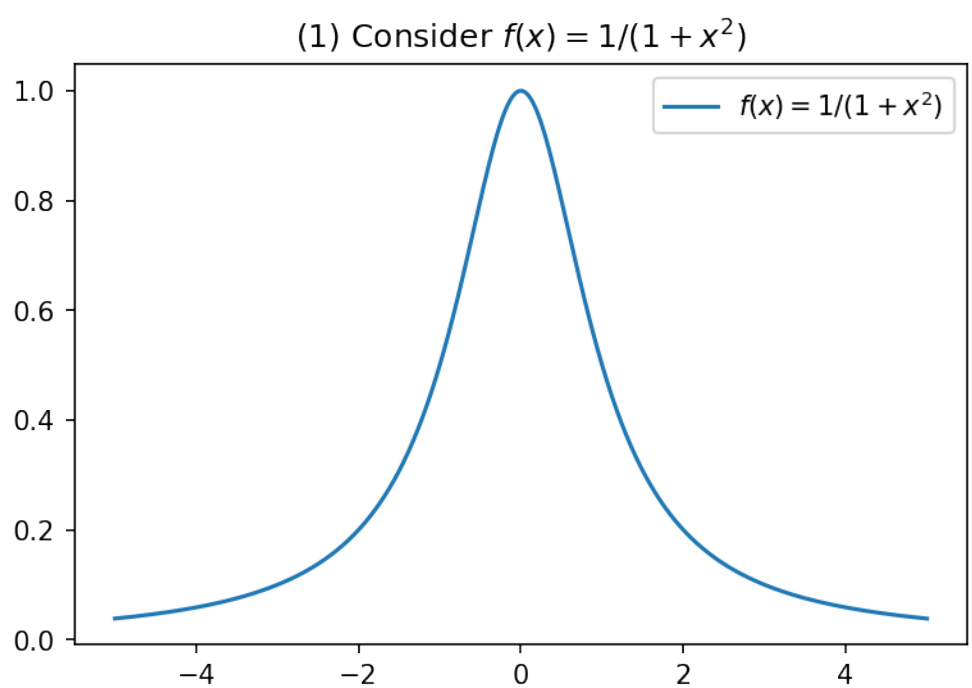
```
问题 1: 拉格朗日插值多项式的次数 n 越大越好吗?
(1) 考虑 f(x) = 1 / (1 + x^2) in [-5, 5]
          5       10       20
0.75   0.5290  0.6790   0.6368
1.75   0.3733  0.1906   0.2384
2.75   0.1537  0.2156   0.0807
3.75  -0.0260 -0.2315  -0.4471
4.75  -0.0157  1.9236 -39.9524
差值:
```

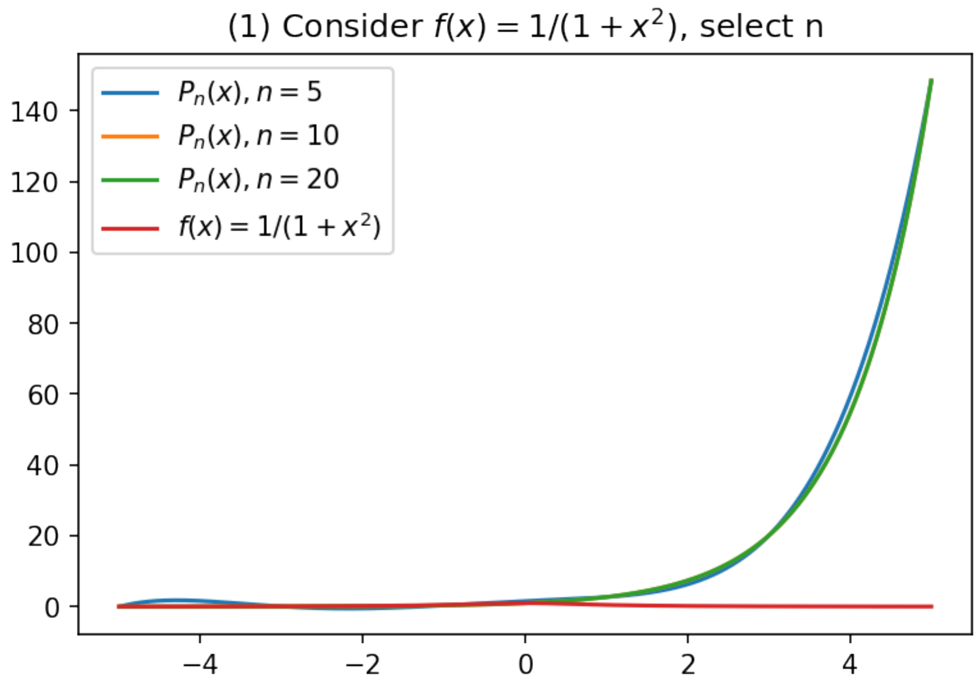
```
           5        10        20
0.75   0.1110 -0.0390   0.0032
1.75 -0.1272  0.0556   0.0077
2.75 -0.0369 -0.0988   0.0361
3.75  0.0923  0.2979   0.5134
4.75  0.0582 -1.8812  39.9949
(2) 考虑 f(x) = e^x in [-1, 1]
            5        10       20
-0.95  0.4306  0.3867  0.3867
-0.05  1.5272  0.9512  0.9512
 0.05  1.6345  1.0513  1.0513
 0.95  2.6414  2.5857  2.5857
```

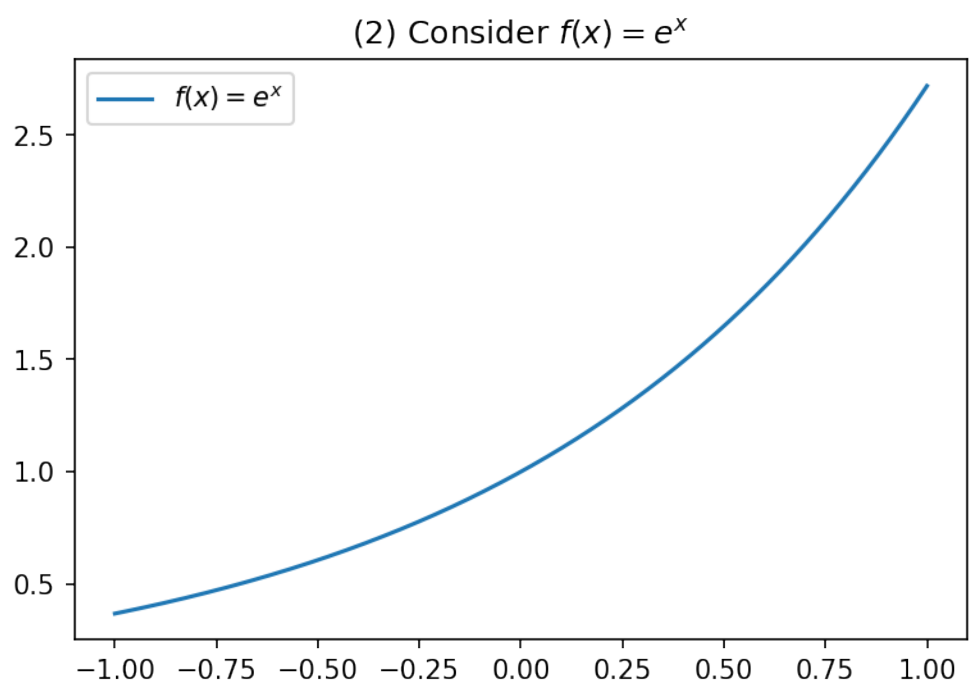
差值：

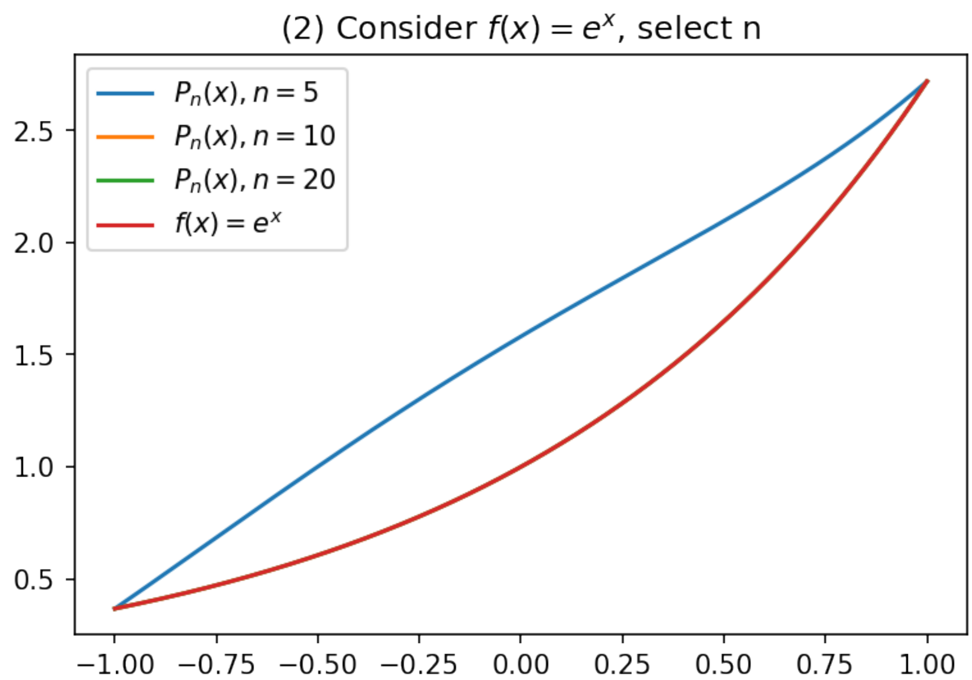
```
            5    10   20
-0.95 -0.0439  0.0  0.0
-0.05 -0.5760  0.0 -0.0
 0.05 -0.5832 -0.0  0.0
 0.95 -0.0557 -0.0 -0.0
```

画出两个函数以及其拉格朗日多项式的图像：




(1) Consider $f(x) = 1/(1+x^2)$, select n
$P_n(x), n = 5$
$P_n(x), n = 10$
$P_n(x), n = 20$
$f(x) = 1/(1+x^2)$
140
120
100
80
60
40
20
0
−4
−2
0
2
4


(2) Consider $f(x) = e^x$
$f(x) = e^x$
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00



1.3.2 问题二

[14]:
```
def problem2():
    print("问题 2: 插值区间越小越好吗? ")

    def sub(targets_x, targets_n, solve):
        return DataFrame({n: {x: solve(n, x) for x in targets_x} for n in␣
↪targets_n}).round(4)

    print("(1) 考虑 f(x) = 1 / (1 + x^2) in [-1, 1]")
    targets_x_1 = [-0.95, -0.05, 0.05, 0.95]
    targets_n = [5, 10, 20]
    print(sub(
        targets_x=targets_x_1,
        targets_n=targets_n,
        solve=lambda n_i, x: P(
            lambda x_i: 1 / (1 + x_i ** 2), linspace(1, n_i), x
```

```
    )
))
print("差值: ")
print(sub(
    targets_x=targets_x_1,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: ((1 / (1 + x ** 2)) - P(
        lambda x_i: 1 / (1 + x_i ** 2), linspace(1, n_i), x
    ))
))

print("(2) 考虑 f(x) = e^x in [-5, 5]")
targets_x_2 = [0.75, 1.75, 2.75, 3.75, 4.75]
print(sub(
    targets_x=targets_x_2,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: P(lambda x_i: np.e ** x_i,
                           linspace(5, n_i), x)
))
print("差值: ")
print(sub(
    targets_x=targets_x_2,
    targets_n=targets_n,
    solve=lambda n_i, x: (np.e ** x - P(lambda x_i: np.e ** x_i,
                                        linspace(5, n_i), x))
))
print("画出两个函数以及其拉格朗日多项式的图像: ")
slice_fluent_size = 1000
x_linespace_2 = np.linspace(-1, 1, slice_fluent_size)
x_linespace_10 = np.linspace(-5, 5, slice_fluent_size)
y1 = 1 / (1 + x_linespace_2**2)
Ls1 = {n_i: np.array([P(lambda x_i: np.e ** x_i, linspace(5, n_i), x)
                    for x in x_linespace_2]) for n_i in targets_n}
plt.figure(dpi=150)
plt.title("(1) Consider $f(x) = 1 / (1 + x^2)$")
```

```
    plt.legend(handles=plt.plot(x_linespace_2, y1, label="$f(x) = 1 / (1 +␣
↪x^2)$"), loc='best')
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(1) Consider $f(x) = 1 / (1 + x^2)$, select n")
    plt.legend(handles=[*[plt.plot(x_linespace_2, Ls1[n_i],␣
↪label=f"$P_n(x),n={n_i}$")[0] for n_i in Ls1],
                        plt.plot(x_linespace_2, y1, label="$f(x) = 1 / (1 +␣
↪x^2)$")[0]], loc='best')
    y2 = np.e**x_linespace_10
    Ls2 = {n_i: np.array([P(lambda x_i: np.e ** x_i, linspace(5, n_i), x)
                        for x in x_linespace_10]) for n_i in targets_n}
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(2) Consider $f(x) = e^x$")
    plt.legend(handles=plt.plot(x_linespace_10, y2, label="$f(x) = e^x$"),␣
↪loc='best')
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title("(2) Consider $f(x) = e^x$, select n")
    plt.legend(handles=[*[plt.plot(x_linespace_10, Ls2[n_i],␣
↪label=f"$P_n(x),n={n_i}$")[0] for n_i in Ls2],
                        plt.plot(x_linespace_10, y2, label="$f(x) = e^x$")[0]],␣
↪loc='best')



problem2()
```

```
问题 2: 插值区间越小越好吗?
(1) 考虑 f(x) = 1 / (1 + x^2) in [-1, 1]
            5       10       20
-0.95  0.5171  0.5264  0.5256
-0.05  0.9928  0.9975  0.9975
 0.05  0.9928  0.9975  0.9975
 0.95  0.5171  0.5264  0.5256
差值:
            5       10    20
-0.95  0.0085 -0.0008  0.0
```

```
-0.05  0.0047 -0.0000 -0.0
 0.05  0.0047 -0.0000 -0.0
 0.95  0.0085 -0.0008  0.0
```

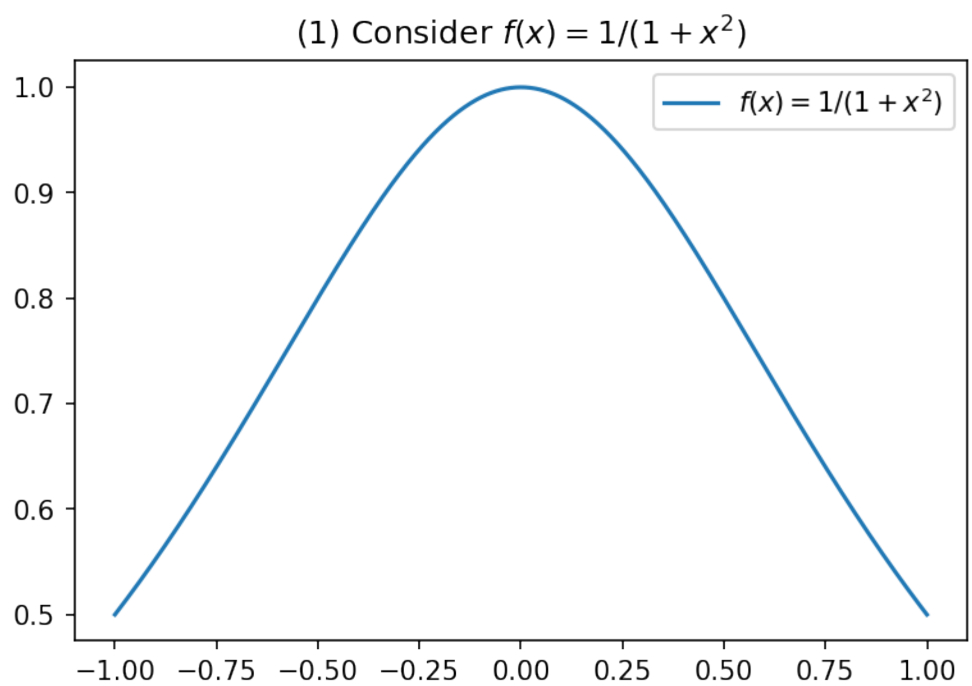
(2) 考虑 f(x) = e^x in [-5, 5]

```
            5          10         20
0.75    2.3740    2.1171    2.1170
1.75    4.8716    5.7544    5.7546
2.75   15.0081   15.6432   15.6426
3.75   45.8623   42.5184   42.5211
4.75  119.6210  115.6074  115.5843
```

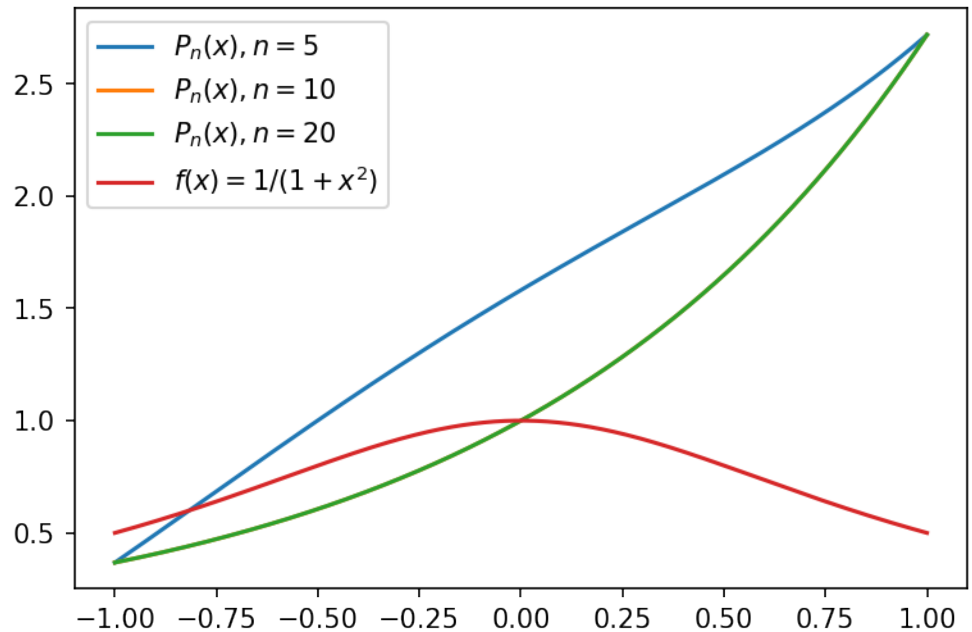
差值：

```
          5        10   20
0.75 -0.2570 -0.0001 -0.0
1.75  0.8830  0.0002 -0.0
2.75  0.6346 -0.0006 -0.0
3.75 -3.3412  0.0027 -0.0
4.75 -4.0367 -0.0231 -0.0
```

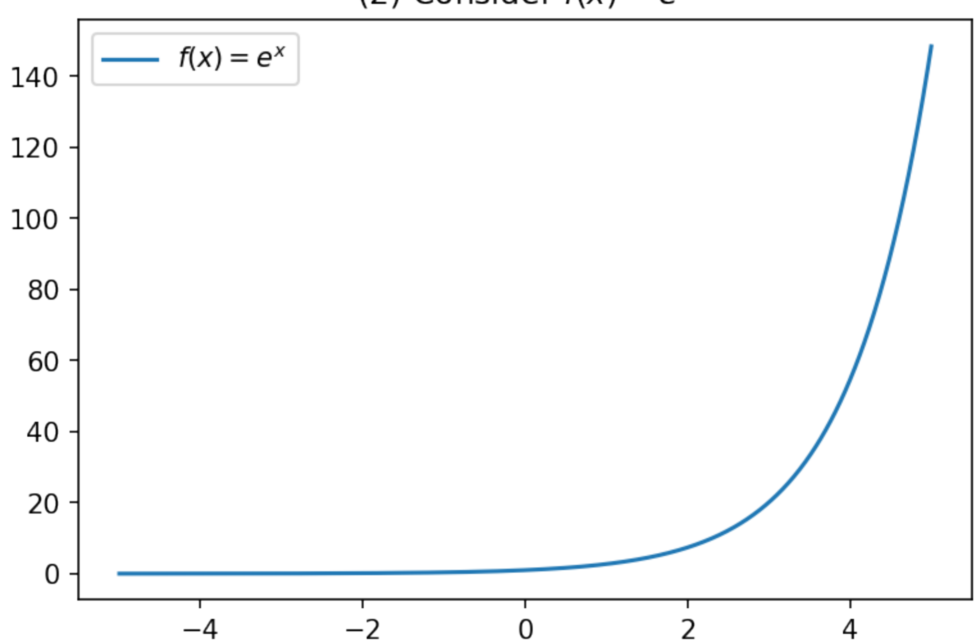
画出两个函数以及其拉格朗日多项式的图像：

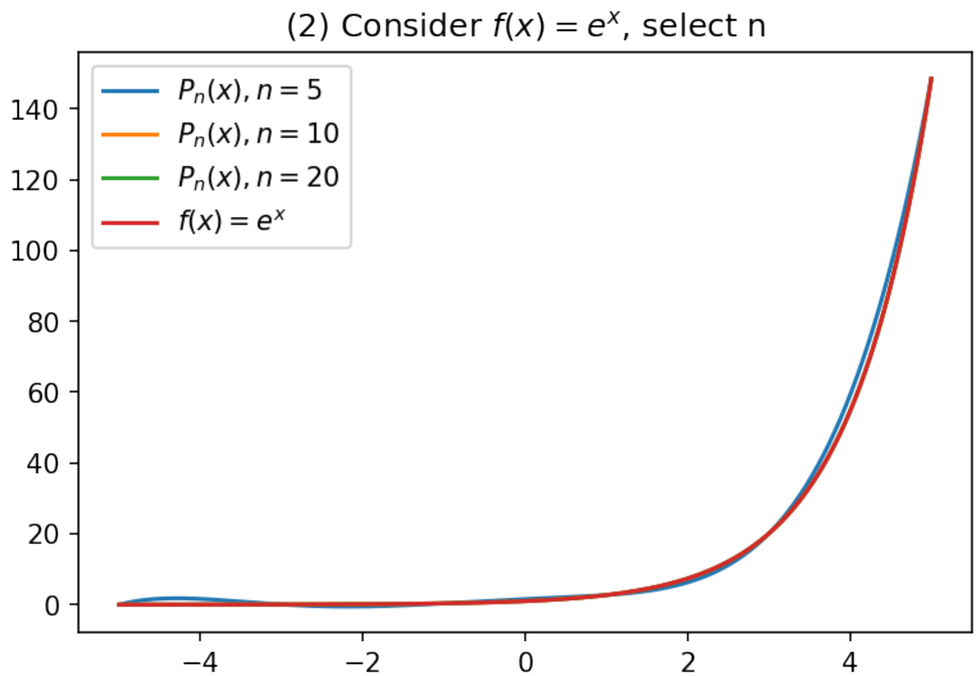


(1) Consider $f(x) = 1/(1 + x^2)$, select n



(2) Consider $f(x) = e^x$





1.3.3 问题四

[15]:
```python
def problem4():
    print("问题 4: 考虑拉格朗日插值问题, 内插比外推更可靠吗? ")

    def f(x: float):
        return np.sqrt(x)

    target_x = [5, 50, 115, 185]

    print("考虑函数 f(x) = sqrt(x)")

    def do_by_node(index: int, nodes: list):
        print(f"({index}) 考虑以", ", ".join(
            [f"x_{i} = {nodes[i]}" for i in range(3)]), "为节点的拉格朗日插值多项
式 P_2(x)")
        print(DataFrame({
            "函数值": {x: P(f, nodes, x) for x in target_x},
```

```python
            "f(x)": {x: f(x) for x in target_x},
            "差值": {x: f(x) - P(f, nodes, x) for x in target_x}
        }).round(4))
        mean = np.mean([f(x) - P(f, nodes, x) for x in target_x])
        print(f"平均差值: {mean:.4f}")
        return mean

    nodes_data = [
        [(i + 1) ** 2 for i in range(3)],
        [(i + 5) ** 2 for i in range(3)],
        [(i + 9) ** 2 for i in range(3)],
        [(i + 12) ** 2 for i in range(3)]
    ]
    means = [do_by_node(i + 1, nodes=nodes_data[i])
             for i in range(len(nodes_data))]
    return DataFrame({
        "x_0,x_1,x_2": [",".join([str(n) for n in nodes_data[i]]) for i in␣
↪range(len(nodes_data))],
        "平均差值": [means[i] for i in range(len(nodes_data))]
    }).round(4)


problem4()
```

```
问题 4: 考虑拉格朗日插值问题，内插比外推更可靠吗?
考虑函数 f(x) = sqrt(x)
(1) 考虑以 x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 9 为节点的拉格朗日插值多项式 P_2(x)
          函数值      f(x)        差值
5      2.2667    2.2361    -0.0306
50    -20.2333    7.0711    27.3044
115 -171.9000   10.7238   182.6238
185 -492.7333   13.6015   506.3348
平均差值: 179.0581
(2) 考虑以 x_0 = 25, x_1 = 36, x_2 = 49 为节点的拉格朗日插值多项式 P_2(x)
        函数值      f(x)       差值
5     2.8205    2.2361 -0.5844
```

```
50   7.0688   7.0711  0.0023
115  9.0385  10.7238  1.6853
185  5.6527  13.6015  7.9488
平均差值: 2.2630
(3) 考虑以 x_0 = 81, x_1 = 100, x_2 = 121 为节点的拉格朗日插值多项式 P_2(x)
          函数值      f(x)       差值
5      4.0952   2.2361 -1.8592
50     7.1742   7.0711 -0.1031
115   10.7256  10.7238 -0.0018
185   13.3659  13.6015  0.2356
平均差值: -0.4321
(4) 考虑以 x_0 = 144, x_1 = 169, x_2 = 196 为节点的拉格朗日插值多项式 P_2(x)
          函数值      f(x)       差值
5      5.1411   2.2361 -2.9050
50     7.6026   7.0711 -0.5316
115   10.7508  10.7238 -0.0270
185   13.6026  13.6015 -0.0012
平均差值: -0.8662
```

[15]:

	x_0,x_1,x_2	平均差值
0	1,4,9	179.0581
1	25,36,49	2.2630
2	81,100,121	-0.4321
3	144,169,196	-0.8662

1.4 实验结果

准确规范地给出各个实验题目的结果，并对相应的思考题给出正确合理的回答与说明。

由题目（1）代码、数据和图像可知：

1. 对 $f(x) = 1/(1+x^2)$ 函数而言，在 $[-5, 5]$ 范围内，并不是 n 越大越好，n 越大反而误差增大。
2. 对 $f(x) = e^x$ 函数而言，在 $[-1, 1]$ 范围内，n 越大拟合效果越好。

所以不是 n 越大越好，需要结合具体函数考虑。

由题目（2）代码、数据和图像，并且结合题目（1）的数据可知：

1. 对 $f(x) = 1/(1+x^2)$ 函数而言，$[-1, 1]$ 差值区间效果要比 $[-5, 5]$ 好。
2. 对 $f(x) = e^x$ 函数而言，$[-5, 5]$ 差值区间效果要比 $[-1, 1]$ 好。

所以不是差值区间越小越好，需要结合具体函数考虑。

由题目（4）代码、数据和图像，对函数 $f(x)=\sqrt{x}$，内插确实比外推可靠。

思考题

对问题一存在的问题，应该如何解决？

问题一中，$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[-5,5]$ 的差值区间、$n\in\{10,20\}$ 的情况下拟合效果并不好，$n=10,n=20$ 的时候多项式在 x 较大的时候明显偏大。

由实验数据可知不应选择过大的插值多项式次数，n 应该 <10。

对问题二中存在的问题的回答，试加以说明。

插值区间不是越小越好，如这两个函数：$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 和 $f(x)=e^x$，前者在 $[-1,1]$ 上插值效果较好而在 $[-5,5]$ 上效果不好；后者在 $[-1,1]$ 上效果不好而在 $[-5,5]$ 上效果较好。

如何理解插值问题中的内插和外推？

内插即只对已知数据集内部范围的点的插值运算，外推即对已知数据集外部范围的点进行插值运算。

内插运算比外推更可靠，偏差更小的原因是内插能够更加有效地利用已知数据集的限制条件，尽量利用已知的信息进行计算推测，故更加可靠。