计算方法实验（实验 4）

2022 年 4 月 19 日

数据显示结果已保留 4 位小数。

1 实验题目 4：牛顿迭代法

1.1 问题分析

准确描述并总结出实验题目（摘要），并准确分析原题的目的和意义。

1.1.1 方法概要

求非线性方程 $f(x)=0$ 的根 x^*，牛顿分析法计算公式：

$$x_0=\alpha,\ x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,1,\cdots$$

一般地，牛顿迭代法具有局部收敛性，为了保证迭代收敛，要求，对充分小的 $\delta,\alpha\in O(x^*,\delta)$。如果 $f(x)\in C^2[a,b],f(x^*)=0,f'(x^*)\neq 0$，那么，对充分小的 $\delta>0$，当 $\alpha\in O(x^*,\delta)$ 时，由牛顿迭代法计算出的 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*，且收敛速度是 2 阶的；如果 $f(x)\in C^m[a,b],f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0$，$f^{(m)}(x^*)\neq 0(m>1)$，那么，对充分小的 $\delta>0$，当 $\alpha\in O(x^*,\delta)$ 时，由牛顿迭代法计算出的 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*，且收敛速度是 1 阶的。

1.1.2 实验目的

利用牛顿迭代法求 $f(x)=0$ 的根。

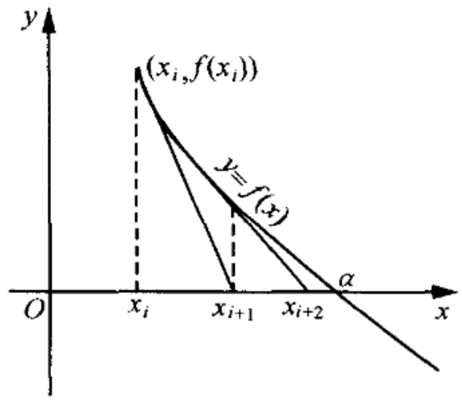
输入： 初值 α，精度 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，最大迭代次数 N

输出： 方程 $f(x)=0$ 根 x^* 的近似值或计算失败标志

1.2 数学原理

数学原理表达清晰且书写准确。

1.2.1 牛顿迭代法的几何意义



由上图所示，方程 $f(x) = 0$ 的根 α 是曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0$ 的交点的横坐标。牛顿迭代法是取过 $(x_i, f(x_i))$ 点的切线方程

$$y = f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

与 $y = 0$ 的交点的横坐标

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

作为根的新的近似值。由此往复，只要初值取得接近根 α，$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 会很快收敛于 α。

1.3 程序设计流程

编译通过，根据输入能得到正确输出。

[52]:
```python
# 引入需要的包
import numpy as np
from pandas import DataFrame
from matplotlib import pyplot as plt
from typing import *
```

[53]:

```python
def newton(
        f: Callable[[float], float],
        f_: Callable[[float], float],
        alpha: float,
        N: int,
        epsilon_1: float,
        epsilon_2: float,
        *args,
        **kwargs):# -> Optional[float]:
    history: List[float] = []
    n = 1
    x = alpha
    while n <= N:
        history.append(x)
        v, v_ = f(x), f_(x)
        if abs(v) < epsilon_1:
            return x, history
        if abs(v_) < epsilon_2:
            return None, history
        x_ = x - v / v_
        if abs(x_ - x) < epsilon_1:
            history.append(x_)
            return x_, history
        n = n + 1
        x = x_
    return None, history
```

[54]:

```python
def show_history(title: str, history: List[float]):
    plt.figure(dpi=150)
    plt.title(title)
    plt.plot(range(len(history)), history)
```

[55]:

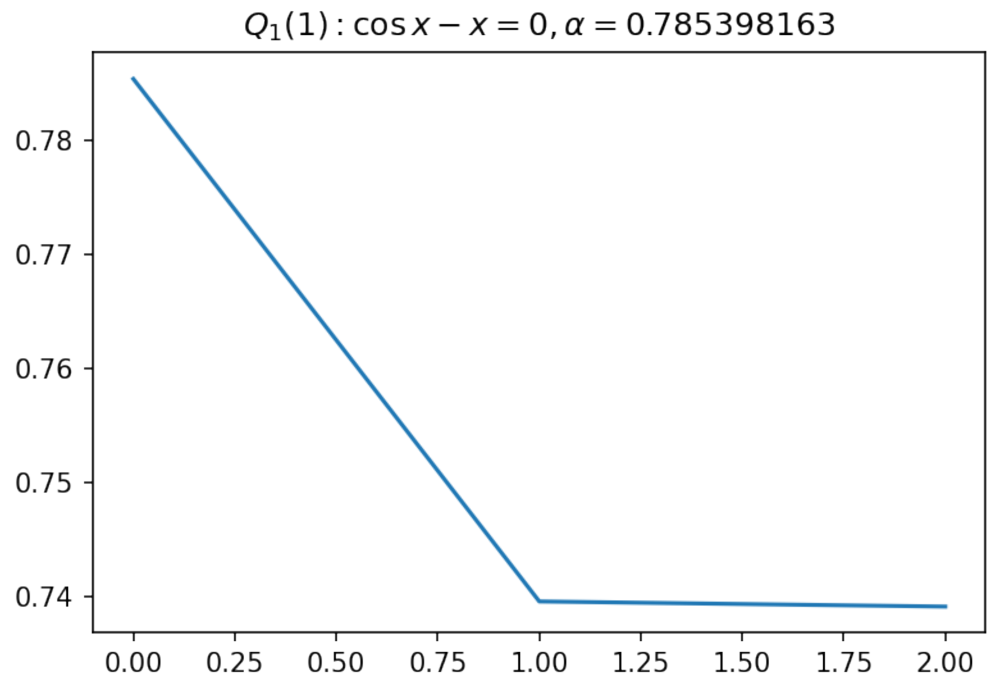
```python
def run_question(*args, **kwargs):
    res, history = newton(*args, **kwargs)
    if res is None:
        print("拟合失败!")
    else:
```

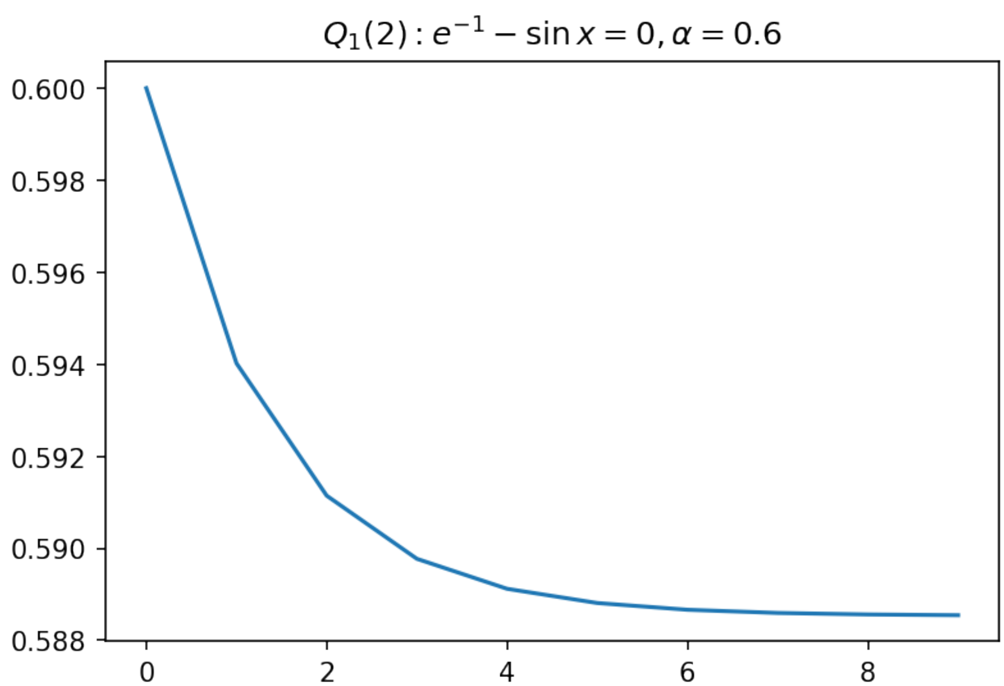
```python
        print(f"x^* = {res:.4f}")
    show_history(kwargs.get('title', ''), history)
```

[56]:
```python
# 问题一
def question_1():
    print("问题 1 (1)")
    run_question(
        f=lambda x: np.cos(x) - x,
        f_=lambda x: -np.sin(x) - 1,
        alpha=np.pi / 4,
        N=10,
        epsilon_1=1e-6,
        epsilon_2=1e-4,
        title="$Q_1 (1): \\cos{x} - x = 0, \\alpha = " + f"{np.pi / 4:.9f}" + "$")
    print("问题 1 (2)")
    run_question(
        f=lambda x: np.exp(-x) - np.sin(x),
        f_=lambda x: -np.exp(x) - np.cos(x),
        alpha=0.6,
        N=10,
        epsilon_1=1e-6,
        epsilon_2=1e-4,
        title="$Q_1 (2): e^{-1}-\\sin{x} = 0, \\alpha = 0.6$")


question_1()
```

```
问题 1 (1)
x^* = 0.7391
问题 1 (2)
拟合失败!
```


$Q_1(1) : \cos x - x = 0, \alpha = 0.785398163$
0.78
0.77
0.76
0.75
0.74
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

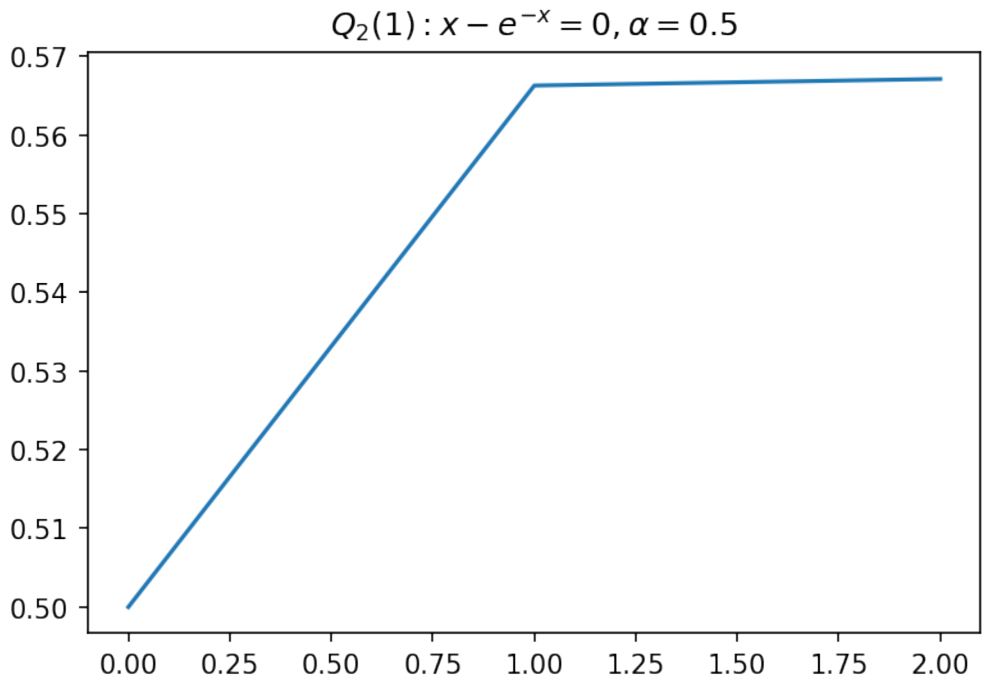

$Q_1(2) : e^{-1} - \sin x = 0, \alpha = 0.6$
0.600
0.598
0.596
0.594
0.592
0.590
0.588
0
2
4
6
8

[57]:

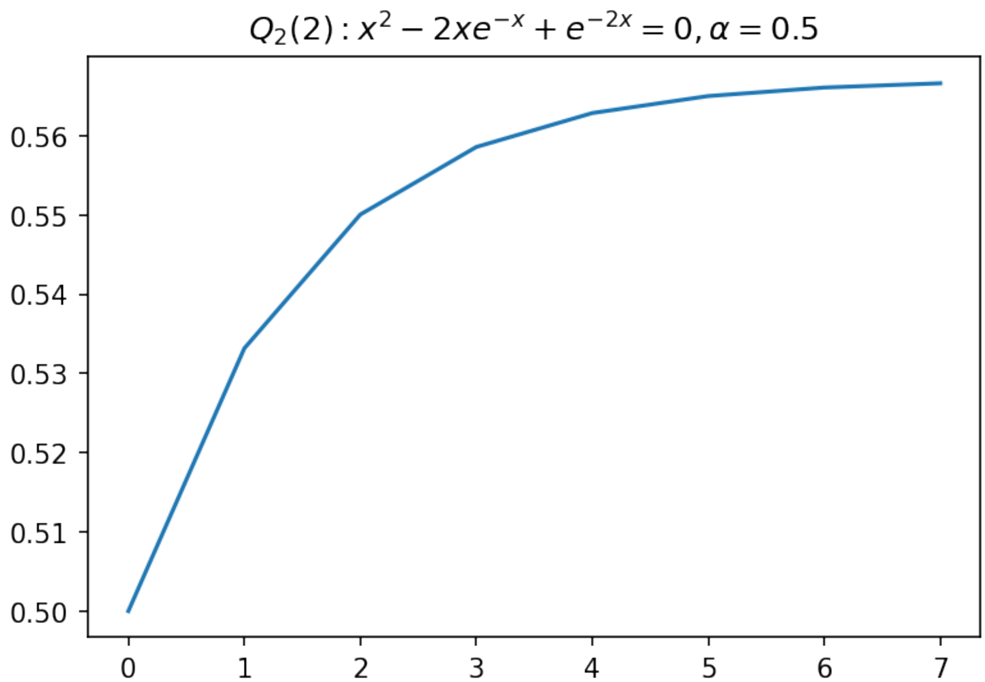
```python
# 问题二
def question_2():
    print("问题 2 (1)")
    run_question(
        f=lambda x: x - np.exp(-x),
        f_=lambda x: 1 + np.exp(-x),
        alpha=0.5,
        N=10,
        epsilon_1=1e-6,
        epsilon_2=1e-4,
        title="$Q_2 (1): x-e^{-x}=0, \\alpha = 0.5$")
    print("问题 2 (2)")
    run_question(
        f=lambda x: x**2 - 2 * x * np.exp(-x) + np.exp(-2 * x),
        f_=lambda x: -2*np.exp(-2*x) - 2*np.exp(-x) + 2*x + 2*np.exp(-x)*x,
        alpha=0.5,
        N=10,
        epsilon_1=1e-6,
        epsilon_2=1e-4,
        title="$Q_2 (2): x^2-2xe^{-x}+e^{-2x} = 0, \\alpha = 0.5$")


question_2()
```

```
问题 2 (1)
x^* = 0.5671
问题 2 (2)
x^* = 0.5666
```



$Q_2(1): x - e^{-x} = 0, \alpha = 0.5$
0.57
0.56
0.55
0.54
0.53
0.52
0.51
0.50
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00



$Q_2(2): x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0, \alpha = 0.5$
0.56
0.55
0.54
0.53
0.52
0.51
0.50
0
1
2
3
4
5
6
7

1.4 实验结果

准确规范地给出各个实验题目的结果，并对相应的思考题给出正确合理的回答与说明。

由问题 1 输出、图像可知：

1. 第一问在第二次迭代即收敛到目标精度，得结果 $x^* = 0.7391$（保留四位小数）
2. 第二问在 N 次数内收敛失败

由问题 2 输出、图像可知：

1. 第一问在第二次迭代即收敛到目标精度，得结果 $x^* = 0.5671$（保留四位小数）
2. 第一问在第七次迭代才收敛到目标精度，得结果 $x^* = 0.5666$（保留四位小数）

思考题：

1. 对实验 1，确定初值的原则是什么？实际计算中应如何解决？初值如果选择得偏离根太远，很可能出现迭代次数过多或者发散的情况。因此，初值最好选择在靠近根的位置。在实际计算中，如果仅仅使用牛顿迭代法收敛定理来选择初始值，往往比较复杂，一般使用简化方法：

   对方程 $f(x) = 0$，如果
   $$f''(x_0) \neq 0, |f'(x_0)|^2 > |\frac{f(x_0)f''(x_0)}{2}|$$
   则可以保证大多数情况下的牛顿迭代法的收敛性。

2. 对实验 2，如何解释在计算中出现的现象？试加以说明由于牛顿迭代法的收敛阶都是 2，而第二问所求函数是第一问的平方，即 $f_2(x) = f_1^2(x)$，平方后的函数的斜率相对原来小许多，所以第二问中收敛就比第一问慢。