

A. Ottou, J. Ema'a, C. Bang

Projet d'ingénieur

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé

Contrôle du mouvement saccadique de l'œil

Contents

1	Description de l'œil et de ses axes	2
1.1	Description des axes	2
1.2	Description de l'œil	4
1.2.1	Modèle de l'œil	4
1.2.2	Équations du mouvement de l'œil et Définition des forces en présence	5
2	Le système oculomoteur	12
2.1	Motivation et compensation de l'omission de la masse des muscles	13
2.2	Les équations et fonction de transfert du système.	13
2.2.1	Équations différentielles du mouvement de l'œil	14
3	Les signaux d'entrée du système	18
3.1	L'entrée neurale	18
4	Présentation des résultats	22
4.1	Présentation des logiciels de visualisation	22
4.2	Résultats obtenus et discussions	23
4.2.1	Résultats en boucle ouverte	23
4.2.2	Choix du type de contrôleur	29
5	Conclusion	31
6	Annexe	31

Introduction

Le corps humain est un système très complexe à comprendre et constitue jusqu'à nos jours un challenge pour les chercheurs qui veulent découvrir son fonctionnement que ce soit pour le système sanguin, ou pour le système nerveux, ou pour le système oculaire. Il existe cinq types de mouvements oculaires: saccades, poursuite en douceur, mouvements oculaires vestibulaires, mouvements oculaires optocinétiques et mouvements oculaires vergents. Le mouvement qui nous intéresse est le mouvement saccadique de l'œil qui est un mouvement rapide et simultané des deux yeux entre deux ou plusieurs phases de fixation dans la même direction. Dans le projet qu'il nous a été assigné il est question d'effectuer une simulation du contrôle du mouvement saccadique de l'œil. Ici il sera question tout d'abord de réaliser un modèle de l'œil, ensuite d'établir les équations qui régissent le mouvement saccadique de l'œil, ensuite de concevoir un contrôleur qui aura pour charge le contrôle de notre système et enfin de visualiser le tout à l'aide de logiciels de visualisation. Ce projet a des applications cliniques notamment le contrôle de la fixation et de la taille de la pupille lors des examens de champ visuel et aussi un vif intérêt en robotique car cela permettrait de réduire drastiquement le temps d'observation d'un robot du fait que les mouvements saccadiques sont rapides.

Notre rapport sera structuré comme suit: La première partie portera sur la description de l'œil et la définition d'un modèle mécanique de l'œil et des muscles qui entrent en jeu lors d'un mouvement saccadique, ensuite nous présenterons les équations qui régissent ce mouvement de l'œil ainsi que les forces qui entrent en jeu, ensuite le contrôleur choisis et enfin les résultats obtenus à l'aide du logiciel de simulation Simulink.

1 Description de l'œil et de ses axes

1.1 Description des axes

Le système de l'œil humain est constitué d'une sphère semi-solide ou globe contenant de la matière vitreuse constituée de lentille et de fluides de soutien. Le globe oculaire peut rotter au sein d'une membrane retenue principalement par six muscles et les tissus membranaires.

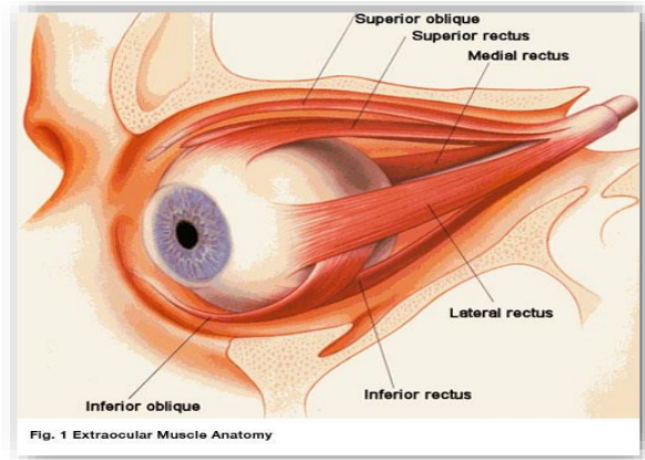


Figure 1: Anatomie de l'œil .

l' image ci-dessous donne un aperçu de l' œil humain. Les muscles pour leur part, sont divisés en trois paires. Chaque paire de muscles est essentiellement responsable d'un mouvement bien déterminé de rotation de l'œil autour de ses axes. En effet, les axes de rotations de l' œil et les muscles dédiés à la rotation autour de ceux-ci sont :

- L' axe des x , cet axe est confondu à l'axe principal du cristallin de l'œil. Les muscles obliques supérieur et inférieur permettent une cyclo rotation de l'œil autour de cet axe ;
- L' axe des y , perpendiculaire à l'axe des x et disposé sur l'horizontale. Les muscles droits supérieur et inférieur permettent la rotation autour de l'axe des y afin de produire des rotations verticales de l'œil.
- L' axe des z , perpendiculaire au deux autres et disposé à la verticale. La rotation autour de ce dernier est assurée par les muscles droits interne et externe. Permettant ainsi de produire des rotations horizontales de l'œil.

La figure ci-dessous décrit les axes sus-cités.

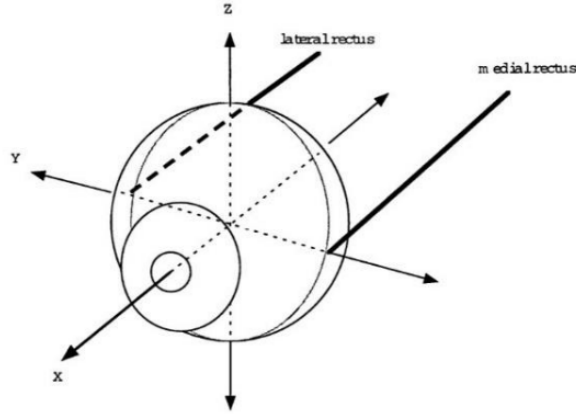


Figure 2: Les axes de rotation de l'œil .

1.2 Description de l'œil

1.2.1 Modèle de l'œil

Nous nous limiterons ici à la description des muscles latéraux pour la production d'un mouvement de rotation horizontal. Il est à noter tout d'abord que lors d'un mouvement, les actions des muscles formant la paire sont antagoniques mais toutefois ils ont une structure identique. Ceci malgré que leurs anatomies diffèrent dans certains détails tels que la position exacte et les dimensions. Nous adopterons la notation suivante :

- 1, sera l'indice du muscle dont l'action est orientée dans le sens du mouvement (muscle agoniste);
- 2 sera l'indice du muscle dont l'action s'oppose au sens du mouvement (muscle antagoniste).

Par exemple, l_{t1} sera la longueur du tendon dont l'action du muscle est orientée dans le sens du mouvement (muscle agoniste) tandis que l_{t2} sera la longueur du tendon du muscle antagoniste. Les muscles ont une masse non nulle que l'on notera M et une longueur primaire l_{mp} qui correspond à la longueur des muscles lorsque l'œil regarde droit devant. La longueur instantanée des muscles 1 et 2 sera noté l_{m1} et l_{m2}

les muscles sont très complexes à leurs extrémités et en général. En effet, les muscles sont rattachés chacun au globe par l'intermédiaire d'un tendon assimilé ici à un ressort. La contraction du muscle produit alors une force de rappel qui est exercée sur le globe via ce tendon. Toutefois, ce tendon

ne sera pas toujours considéré comme un ressort parfait, il peut avoir des caractéristiques non linéaires. En effet, dans la réalité, les tendons sont non linéaires et caractérisés par une constante de raideur de ressort non linéaire K_t qui sera une fonction de la force du tendon F_t .

Les muscles agiront alors sur le globe par le biais des forces F_{t1} et F_{t2} . Notons également que le muscle en lui-même présente une élasticité et viscosité dont les effets sont prépondérants et joue le rôle de rappel et amortisseur lors d'un mouvement.

La viscosité ici sera caractérisée par un coefficient B_{mp} tandis que l'élasticité de l'œil produira une force notée F_{pe} , fonction de la longueur du muscle. Le muscle se contracte lorsqu'un ordre bien précis est émis par le cerveau. Le muscle sera alors soumis à une force d'activation notée F_{act} qui aura pour but la contraction de celui-ci. La nature des forces d'activation des muscles est bien évidemment antagonique lors de notre mouvement.

Le globe lors de son mouvement de rotation est soumis à l'action des couples de rappel l'empêchant de se retourner complètement ou d'effectuer des mouvements trop brusques. Ces couples traduisent l'effet de la viscosité et de l'élasticité de l'ensemble tissus + globe lors du mouvement. Ces effets s'exercent sur le globe afin également de le maintenir dans l'orbite oculaire et sont présents pour chaque mouvement. Les effets de viscosité associés à la suspension des tissus de l'orbite produisent un couple résistif proportionnel à la vitesse de rotation du globe avec un coefficient de proportionnalité noté B_G . De même, l'élasticité associée à l'orbite oculaire produit un couple résistif proportionnel à l'angle de rotation décrit par le globe. Cette élasticité est modélisée ici comme un simple ressort linéaire de constante de raideur K_G . La figure 3 ci-après présente la modélisation mécanique du système de l'œil pour un mouvement de rotation horizontal.

L'amortisseur est mis en parallèle avec le ressort car ce modèle est adapté pour les fibres naturelles et les muscles sont des fibres naturelles [7]. Ce modèle est celui de Kevin Voigt. Nous intégrons les résultats empiriques modernes de la physiologie et de la neurologie du système muscle-tendon.

1.2.2 Équations du mouvement de l'œil et Définition des forces en présence

1. Equations du mouvement

Lors d'un déplacement du globe oculaire d'un angle θ , celui-ci est soumis à une accélération angulaire $\ddot{\theta}$. Du fait de la viscosité de l'ensemble globe/tissus, le mouvement est amorti par le moment d'un couple de torsion, dont le moment est proportionnel à la vitesse de ro-

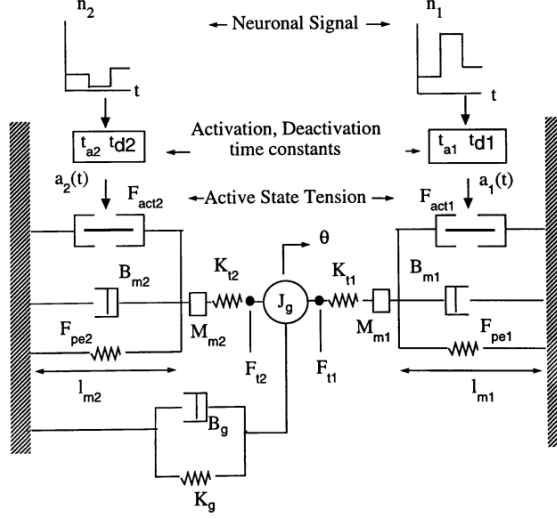


Figure 3: Modèle mécanique de l'œil .

tation $\dot{\theta}$. Soit : $M(f_1) = -B_G \dot{\theta}$; où B_G est le coefficient d'amortissement de l'ensemble globe/tissus. De plus, l'élasticité de l'ensemble globe/tissus produit un couple de rappel dont le moment s'oppose au mouvement de l'œil suivant l'axe considéré. Soit :

$$M(f_2) = -K_G \dot{\theta}$$

où K_G est le coefficient d'élasticité de l'ensemble globe/tissus. Le globe effectue sa rotation suite à l'action des tendons t_1 et t_2 des muscles antagonistes. Lors d'une contraction du muscle 1, celui-ci développe une force F_{t1} dont le moment permet la rotation dans le sens des aiguilles d'une montre. Le muscle 2, antagoniste au muscle 1, développe une force F_{t2} au niveau de son tendon, qui aura pour effet de s'opposer au mouvement du globe. Ainsi, d'après la deuxième loi de Newton appliqué au mouvement de rotation du globe oculaire, on a :

$$\begin{aligned} J_G \ddot{\theta} &= \sum M(F_{ext}) \\ \Rightarrow J_G \ddot{\theta} &= -B_G \dot{\theta} - K_G \dot{\theta} + r F_{t1} - r F_{t2} \\ \Rightarrow J_G \ddot{\theta} + B_G \dot{\theta} + K_G \dot{\theta} &= r F_{t1} - r F_{t2} \quad (1.1) \end{aligned}$$

Où r est le rayon du globe oculaire. Chacun des muscles effectuent un mouvement de translation sur une trajectoire curviligne. Soit noté

$l_{mi}(i = 1, 2)$, la position de l'extrémité du muscle i raccordé au tendon par rapport à l'autre extrémité raccordé au niveau de l'anneau de Zinn¹. l_{mi} est également la longueur du muscle i à un instant t donné. l'application de la loi de Newton au mouvement de chaque muscle nous donne les équations ci-après :

$$M\dot{l}_{m1} + B_{mp}\dot{l}_{m1} = F_{t1} - F_{act1} - F_{pe1}(l_{m1}) \quad (1.2)$$

$$M\dot{l}_{m2} + B_{mp}\dot{l}_{m2} = F_{t2} - F_{act2} - F_{pe2}(l_{m2}) \quad (1.3)$$

Chacune des forces ci-dessus sera décrite plus en détail dans la suite.

2. La force active

F_{act} : Il s'agit de la force qui est produite à la suite d'une stimulation neurale sur le muscle.

$$F_{act} = a(t) F_{max} F_l(l_m) F_v(\dot{l}_m)$$

F_{max} : Force maximale que peut exercer un muscle soumis à une stimulation neurale maximale.

$F_l(l_m)$: Force résultant de l'allongement ou du raccourcissement du muscle, elle dépend de la longueur l_m du muscle

$F_v(\dot{l}_m)$: Force naissant de la vitesse de contraction du muscle

3. La force-longueur

L'approche de [4] est adoptée.

$$F_l(l_m) = 1 - \left(\frac{l_m^- - 1}{\omega}\right)^2 \quad (2.1)$$

$$l_m^- = \frac{l_m}{l_{opt}}, l_{opt} = 4.65cm \text{ (déterminé cliniquement)}$$

l_{opt} : Longueur optimale, longueur du muscle pour laquelle la force produite est maximale.

ω : Largeur relative de la courbe, $\omega = 0.5$ (d'après [1])

¹Anneau situé au niveau du tendon d'origine du droit externe qui n'est autre chose d'ailleurs que le faisceau externe du tendon de Zinn, à travers lequel passent le nerf moteur oculaire commun, le nerf moteur oculaire externe, le nerf nasal et la veine ophtalmique.

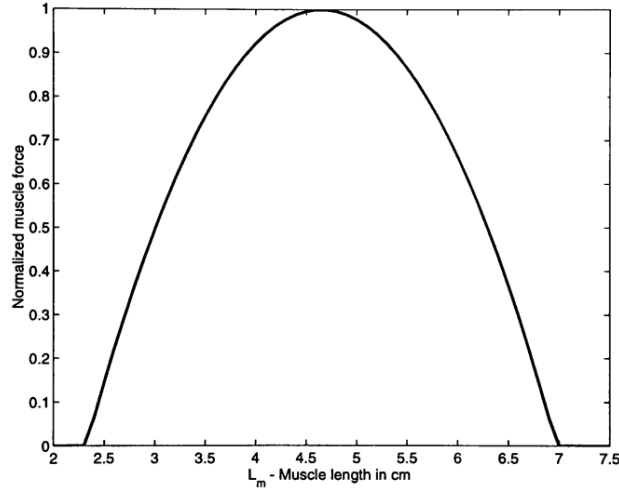


Figure 4: Relation force-longueur .

4. La force-vitesse

F_v : Force dépendant de la vitesse de contraction du muscle.

Il a été montré expérimentalement que la force générée par le muscle décroît quand la vitesse de contraction musculaire augmente

$$F_v(\dot{l}_m) = \sqrt[3]{\dot{l}_m} + 1 \quad (2.2)$$

(d' après [4])

\dot{l}_m : Vitesse de contraction du muscle.

$$\overline{\dot{l}_m} = \frac{\dot{l}_m}{V_{max}}, \quad V_{max} = 5689 \text{ deg/sec}$$

V_{max} : Vitesse maximale de contraction du muscle.

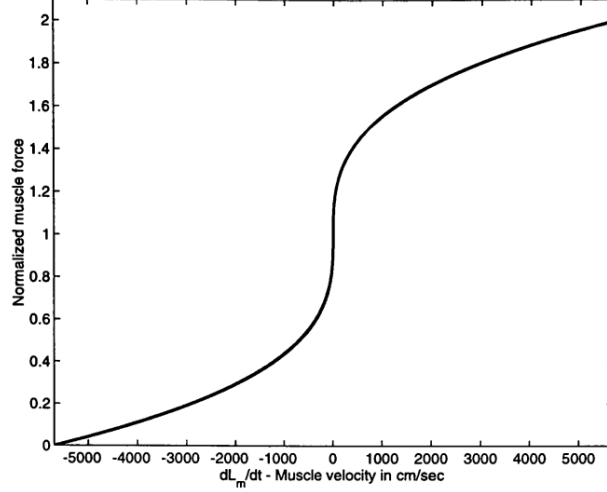


Figure 5: Relation force-vitesse .

5. Dynamique de l'activation neurale

On inclut les délais d'activation et de désactivation pour simuler le temps nécessaire pour le processus électrochimique généré par le signal neural d'entrée pour être converti en activité musculaire. Les délais neuraux sont déterminés par le pourcentage de fibres contractantes rapides qui participent dans une contraction donnée [2].

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{\tau}[n(t) - a(t)] \quad (2.3)$$

$n(t)$: Entrée neurale qui a la forme d'un signal porte

$$n(t) = h(t - t_1) - h(t - t_2), \text{ pour } h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\tau = \begin{cases} \tau_{act} & t \leq t_2 \\ \tau_{deact} & t > t_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

τ_{act}, τ_{deact} sont respectivement les délais d'activation et de désactivation ainsi on a $0 < a(t) < 1$.

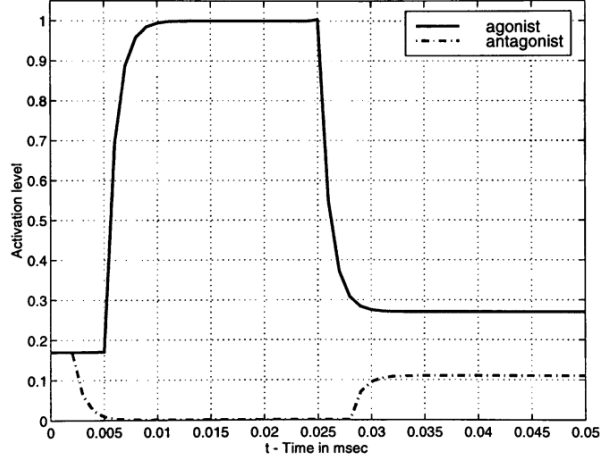


Figure 6: Impulsion neurale .

6. L'élasticité du tendon en série

Les tendons musculaires sont modélisés comme des ressorts non-linéaires en dessous d'un allongement minimal du tendon et linéaires de constante de raideur (constante) k_s au dessus d'une longueur l_{tc} du tendon associée à une force de résistance particulière F_{tc}

$$\dot{F}_t = K_t(F_t) \left(\frac{180}{\pi r} \right) \dot{l}_t \quad (2.6)$$

où

$$K_t(F_t) = \begin{cases} k_{te}F_t + k_{tl} & 0 \leq F_t < F_{tc} \\ k_s & F_t \geq F_{tc} \end{cases} \quad (2.7)$$

En intégrant (2.6) on obtient (2.8)

$$F_t(l_t) = \begin{cases} \left(\frac{k_{tl}}{k_{te}} \right) [\exp(k_{te}(\frac{180}{\pi r})(l_t - l_{ts})) - 1] & l_{ts} \leq l_t < l_{tc} \\ k_s(\frac{180}{\pi r})(l_t - l_{tc}) + F_{tc} & l_t \geq l_{tc} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

l_{ts} : Longueur du tendon relâché

k_s : est déterminé empiriquement et on peut estimer k_{tl} et F_{tc}

En utilisant la propriété de continuité sur (2.8) en $l_t = l_{tc}$ on a

$$F_{tc} = \left(\frac{k_{tl}}{k_{te}} \right) [\exp((\frac{180}{\pi r})k_{te}(l_{tc} - l_{ts})) - 1] \quad (2.9)$$

prenons $\beta = k_{tl}/k_s$. On dérive (2.8) par rapport à l_t et en appliquant la propriété de continuité de la dérivée à $l_t = l_{tc}$ on trouve

$$k_{te} = \frac{-ln\beta}{l_{tc} - l_{ts}} \quad (2.10)$$

(2.10) dans (2.9) nous donne:

$$l_{tc} = l_{ts} - \left(\frac{ln\beta}{1-\beta}\right)\left(\frac{\pi r}{180}\right)\frac{F_{tc}}{k_s} \quad (2.11)$$

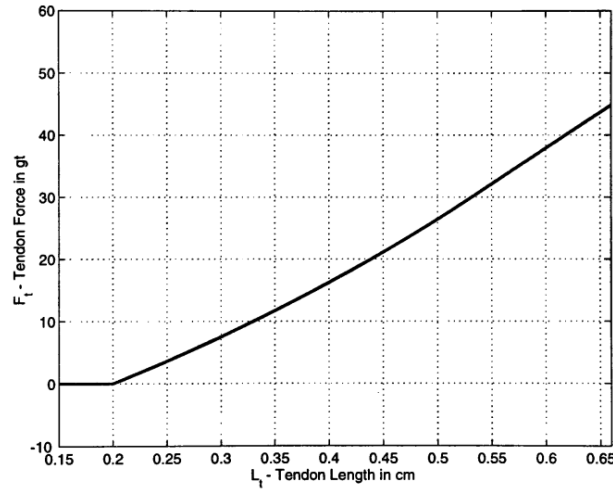


Figure 7: Elasticité du tendon .

7. L'élasticité des muscles parallèles

L'élasticité des muscles parallèles est aussi modélisée comme un ressort non-linéaire.

$$K_{pe}(F_{pe}) = \begin{cases} k_{me}F_{pe} + k_{ml} & 0 \leq F_{pe} < F_{mc} \\ k_{pm} & F_{pe} \geq F_{mc} \end{cases} \quad (2.12)$$

Les paramètres k_{me} , k_{ml} et F_{mc} délimitent les régions linéaires et non-linéaires de l'élasticité, d'après [2] on a :

$$F_{pe}(l_m) = \begin{cases} \left(\frac{k_{ml}}{k_{me}}\right)[\exp(k_{me}(\frac{180}{\pi r})(l_m - l_{ms})) - 1] & l_{ms} \leq l_m < l_{mc} \\ k_{pm}(\frac{180}{\pi r})(l_m - l_{mc}) + F_{mc} & l_m > l_{mc} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13)$$

où

l_{ms} : est la longueur du muscle passif relâché

l_{mc} : est la longueur pour laquelle la force passive devient linéaire

En considérant que F_{pe} et sa dérivée sont continues en $l_m = l_{mc}$ on trouve

$$k_{me} = (k_{pm} - k_{ml})/F_{mc} \quad (2.14)$$

D'après [3] $l_{ms} = 3.7cm$ qui a été déterminé empiriquement de même que $F_{pe} = 3gt$ lorsque $l_m = l_{mp}$ ².

À partir des graphiques présentés dans le même article on peut estimer les paramètres suivants: $l_{mc} = 4.8cm$, $F_{mc} = 20gt$, $k_{pm} = 0.9$ et en utilisant ces valeurs et en substituant l'expression de k_{me} donnée dans (2.14) dans la première partie de l'équation (2.13) on peut obtenir une équation exponentielle en k_{ml} . En résolvant par la méthode numérique de Newton on trouve $k_{ml} = 0.126$

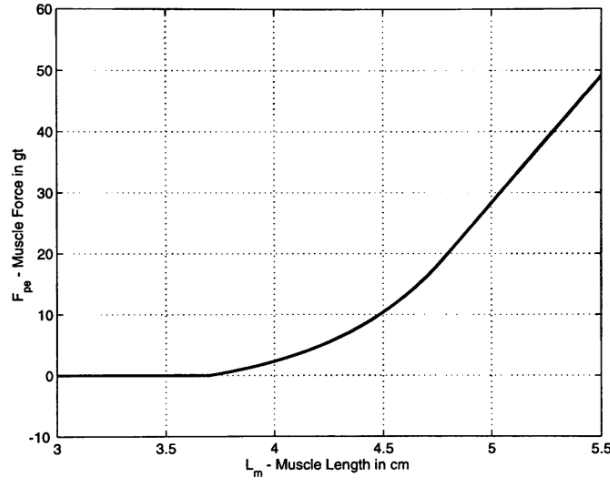


Figure 8: Elasticité des muscles parallèles .

2 Le système oculomoteur

Dans cette partie nous présentons le système adopté et les raisons qui justifient ce choix. Nous avons en effet opté pour l'étude de la saccade oculaire

²Quand l'œil regarde droit devant, on dit qu'il est en position principale et que dans cet état, les muscles sont à leur longueur principale, l_{mp}

avec un modèle réduit dans lequel la masse des muscles a été négligée.

2.1 Motivation et compensation de l'omission de la masse des muscles

Plusieurs facteurs motivent le développement d'un modèle réduit pour la dynamique de mouvement saccadé. Une motivation évidente est la réduction du nombre de variables d'état, ce qui entraîne une diminution des coûts de calcul. Une autre motivation est la minimisation de l'indétermination du modèle. Dans l'approche suivante, la masse musculaire sera exclue du modèle. Cependant, négliger la masse musculaire nécessite l'exclusion de la viscosité musculaire passive qui est un paramètre auquel le modèle est très sensible. Bien qu'une source importante d'indétermination du modèle soit évitée, il faut dériver de nouvelles équations d'état qui sont beaucoup moins intuitives. Le muscle était tout d'abord caractérisé par sa masse et des relations non linéaires traduisant sa viscosité, sera remplacé ici par un coefficient de viscosité B_2 qui nous permettra d'avoir un modèle linéaire du muscle et une simplicité dans les calculs [6].

2.2 Les équations et fonction de transfert du système.

Le système que nous étudions est le modèle réduit de l'œil tiré de [5]. C'est un modèle mécanique très similaire au modèle évoqué dans la partie 1), à la différence que c'est un modèle réduit dans lequel la masse des muscles a été négligé pour les raisons citées dans le paragraphe 2.1). La figure ci-dessous décrit le modèle mécanique retenu.

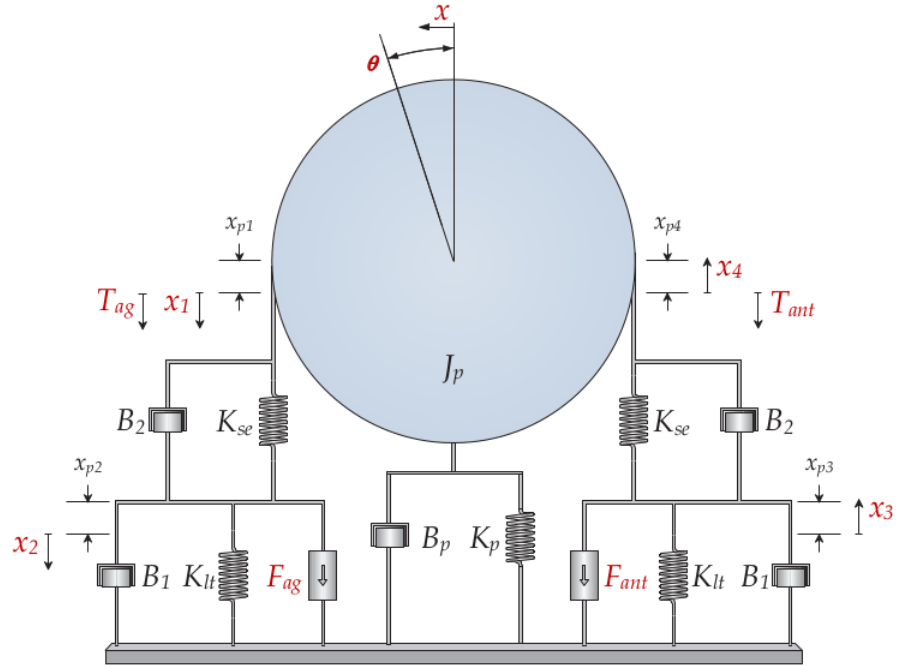


Figure 9: Modèle mécanique réduit du système oculomoteur utilisé pour l'analyse des saccades

2.2.1 Équations différentielles du mouvement de l'œil

Pour amorcer notre analyse de ce modèle, nous supposons :

1. $\dot{x}_2 > \dot{x}_1 = \dot{x} = \dot{x}_4 > \dot{x}_3$
2. L'élasticité K_p est l'élasticité passive pour les muscles autres que le muscle droit latéral et médial et le globe oculaire.
3. L'élément visqueux B_p est dû à la friction du globe oculaire dans l'orbite et pour les muscles autres que le muscle latéral et le muscle droit médial.
4. x_i est mesuré à partir de la position d'équilibre.
5. Les conditions initiales sont nulles.

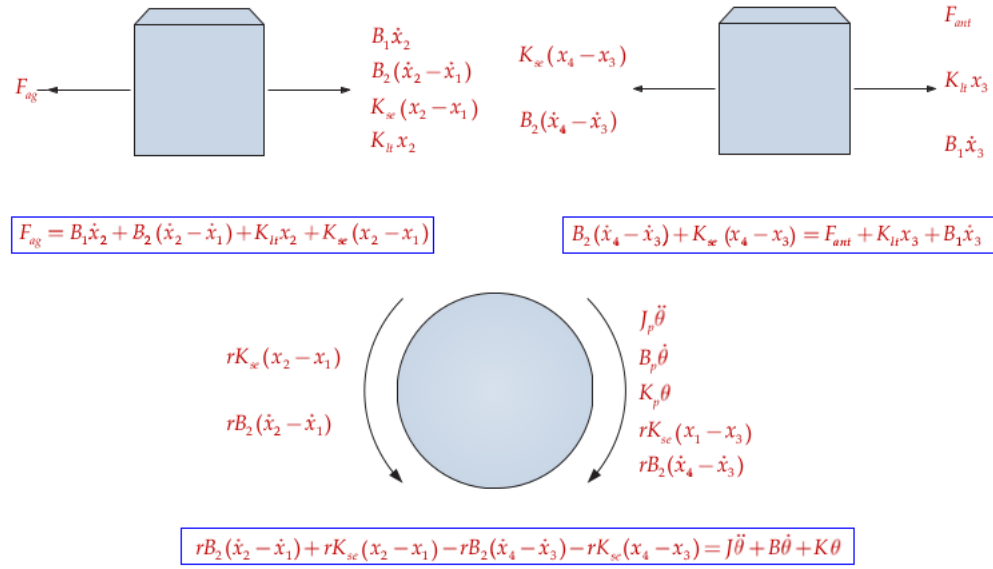


Figure 10: Schémas de corps libre pour le système

Notons que $x = \theta r$ or $\theta = \frac{x}{r} * \frac{180}{\pi} = 5.2087 * 10^3 x$ où x est mesuré en mètre avec $r = 11.8mm$

Les schémas des corps libre présentés à la figure ci-dessus, donnent les équations de nœud pour le système :

- Équation de Newton sur le globe oculaire:

$$rB_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + rK_{se}(x_2 - x_1) - rB_2(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - rK_{se}(x_4 - x_3) = J_p\ddot{\theta} + B_p\dot{\theta} + K_p\theta$$

- Équation de Newton du mouvement du muscle agoniste :

$$F_{ag} - B_1\dot{x}_2 - K_{lt}x_2 - B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - K_{se}(x_2 - x_1) = 0$$

- Équation de Newton du mouvement du muscle antagoniste:

$$F_{ant} + B_1\dot{x}_3 + K_{lt}x_3 - B_2(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - K_{se}(x_4 - x_3) = 0$$

Les entrées du modèle musculaire sont les tensions d'état actif de l'agoniste et de l'antagoniste, qui sont dérivée d'un filtrage passe-bas des signaux d'innervation des neurones saccadés. Comme mentionné précédemment, les

signaux d'innervation neuronale sont typiquement caractérisés comme un signal d'impulsion-pas ou un impulsion-gliss-pas pendant le mouvement oculaire saccadé (Goldstein, H., 1983 ; Optican et Miles, 1985). Notez que T_{ag} et T_{ant} sont les tensions générées par les muscles agonistes et antagonistes avec une direction désignée comme indiqué sur la Figure 10.

$$\begin{aligned} T_{ag} &= B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_{se}(x_2 - x_1) \\ T_{ant} &= B_2(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + K_{se}(x_4 - x_3) \end{aligned}$$

Ensuite nous avons :

$$J = \frac{J_p}{r} * 5.2087 * 10^3, B = \frac{B_p}{r} * 5.2087 * 10^3 \text{ et } K = \frac{K_p}{r} * 5.2087 * 10^3$$

Et nous réécrivons l'équation du mouvement sur le globe oculaire:

$$B_2(\dot{x}_2 + \dot{x}_3 - \dot{x}_1 - \dot{x}_4) + K_{se}(x_2 + x_3 - x_1 - x_4) = J\ddot{x} + B\dot{x} + Kx$$

Nous avons supposé qu'il y a un déplacement initial par rapport à l'équilibre en position primaire pour les ressorts K_{lt} et K_{se} puisque le muscle est $3mm$ plus long c'est-à-dire:

$$x_1 = x - x_{p1}$$

$$x_4 = x + x_{p4}$$

Pour réduire les équations de nœuds à une seule équation différentielle, nous éliminons les variables comme auparavant en utilisant la méthode d'analyse du point de fonctionnement. À cet effet, nous introduisons les variables et constantes suivantes :

$$\hat{x} = x - x(0)$$

$$\hat{\theta} = \theta - \theta(0)$$

$$\hat{x}_1 = x_1 - x_1(0)$$

$$\hat{x}_2 = x_2 - x_2(0)$$

$$\hat{x}_3 = x_3 - x_3(0)$$

$$\hat{x}_4 = x_4 - x_4(0)$$

$$\hat{F}_{ag} = F_{ag} - F_{ag}(0)$$

$$\hat{F}_{ant} = F_{ant} - F_{ant}(0)$$

$$K_{st} = K_{se} + K_{lt}$$

$$B_{12} = B_1 + B_2$$

Il est à noter qu'avec $\hat{x} = \hat{x}_1 = \hat{x}_4$, tous les termes dérivés sont nuls à l'état d'équilibre

En éliminant les termes dérivés dans les équations plus haut et après de multiples développement nous obtenons :

$$(sB_2 + K_{se})(\hat{F}_{ag}(s) - \hat{F}_{ant}(s)) = \hat{X}(C_3s^3 + C_2s^2 + C_1s + C_0)$$

où :

$$C_3 = JB_{12}$$

$$C_2 = JK_{st} + B_{12}B + 2B_1B_2$$

$$C_1 = 2B_1K_{se} + 2B_2K_{lt} + B_{12}K + K_{st}B$$

$$C_0 = K_{st}K + 2K_{lt}K_{se}$$

Nous transformons maintenant dans le domaine temporel en utilisant la transformée de Laplace inverse, ce qui donne :

$$B_2(\hat{F}_{ag} - \hat{F}_{ant}) + K_{se}(\hat{F}_{ag} - \hat{F}_{ant}) = C_3\ddot{\hat{x}} + C_2\ddot{\hat{x}} + C_1\dot{\hat{x}} + C_0\hat{x}$$

on remplaçant x par θ ($x = \frac{\theta}{5208.7}$), l'on obtient l'équation suivante :

$$\delta(B_2(\dot{F}_{ag} - \dot{F}_{ant}) + K_{se}(F_{ag} - F_{ant})) = \ddot{\theta} + P_2\ddot{\theta} + P_1\dot{\theta} + P_0\theta$$

où:

$$\delta = \frac{5208.7}{JB_{12}}$$

$$P_2 = \frac{JK_{st}+B_{12}B+2B_1B_2}{JB_{12}}$$

$$P_1 = \frac{2B_1K_{se}+2B_2K_{lt}+B_{12}K+K_{st}B}{JB_{12}}$$

$$P_0 = \frac{K_{st}K+2K_{lt}K_{se}}{JB_{12}}$$

D'où le diagramme bloqué du système ci-contre :

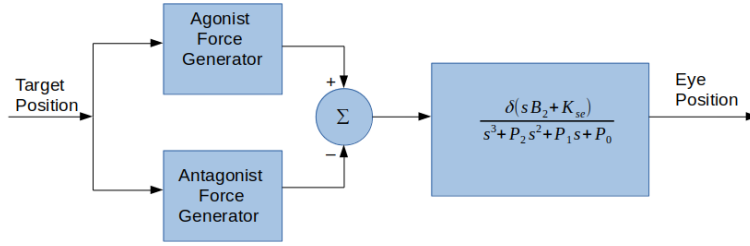


Figure 11: Schéma du modèle linéaire homéomorphique saccadé des mouvements oculaires

3 Les signaux d'entrée du système

3.1 L'entrée neurale

D'habitude l'entrée neurale vers le système saccadique est modélisée par un signal porte. Cette entrée est en général utilisée à cause de sa simplicité. (Bahill et al., 1980;). Pour créer une entrée plus réaliste basée sur des preuves physiologiques, une entrée pulse-slide-step est utilisée comme montré à la figure 12(basé sur les travaux de Goldstein, H.,1983).

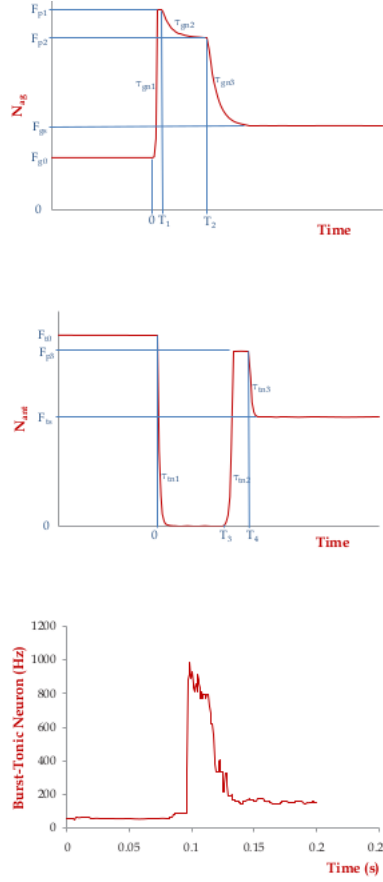


Figure 12: Entrée neurale pour une saccade horizontale

Le glissement est une transition exponentielle de l'impulsion jusqu'au pas. Ce modèle est cohérent avec les données publiées dans la littérature (par exemple la Fig. 4 dans Robinson, D., 1981 et Fig. 2 in Gisbergen et al., 1981). La courbe de la Fig. 12 (Haut) approxime les données montrées dans la courbe de bas pour l'entrée agoniste. À la stabilité (steady-state), l'œil est maintenu stable par les muscles agoniste et antagoniste respectivement par les forces F_{g0} et F_{t0} . Typiquement, on définit l'instant à partir duquel la cible bouge comme origine ($t=0$). C'est une supposition commune car beaucoup de simulations ignore la période latente et se concentre sur le mouvement lui-même. Toute l'impulsion agoniste se produit durant l'intervalle de temps $0 - T_2$

Le début de l'impulsion se produit avec une augmentation exponentielle

du taux de tir initial, F_{g0} , à la magnitude maximale, F_{p1} , avec une constante de temps τ_{gn1} . À T_1 , l'entrée décroît en F_{p2} , avec une constante de temps τ_{gn2} . Le glissement se produit à T_2 , avec une constante de temps τ_{gn3} , pour F_{gs} , la force nécessaire pour maintenir l'œil à sa destination. L'entrée F_{gs} est appliquée pendant la portion escalier de l'entrée. À $t = 0$, l'entrée neuronale antagoniste est complètement inhibée et décroît exponentiellement à zéro de F_{t0} avec la constante de temps τ_{tn1} . Au temps T_3 , l'entrée antagoniste augmente exponentiellement avec le temps constant τ_{tn2} . L'entrée neuronale antagoniste représentée sur la figure 12 (milieu) comprend une impulsion PIRB³ avec durée de $T_4 - T_3$. À T_4 , l'entrée antagoniste décroît exponentiellement en F_{ts} , avec une constante de temps τ_{tn3} . Si aucun PIRB ne se produit dans l'entrée antagoniste, l'entrée monte exponentiellement à F_{ts} avec une constante de temps τ_{tn2} .

L'impulsion agoniste comprend un intervalle (T_1) constant pour les saccades de toutes tailles telles que prises en charge par des preuves physiologiques (Enderle, J., 2002; Zhou et al., 2009). Nous choisissons de modéliser le changement le taux de tir avec une fonction exponentielle car cela semble correspondre assez bien aux données. Après une inhibition complète, l'entrée neuronale antagoniste a une brève impulsion excitatrice commençant à T_3 avec une durée d'environ 10 ms. Enderle a proposé que cette rafale soit générée par PIRB, une propriété qui contribue aux phénomènes post-saccade tels que les dépassements dynamiques et glissadiques (Enderle, J., 2002). Sur la base de la courbe de la figure 12 et en supposant que les termes exponentiels atteignent un état stable à $t = 5\tau$, les équations pour N_{ag} et N_{ant} s'écrivent comme suit:

³post-inhibitory rebound burst

$$\begin{aligned}
N_{ag} &= F_{g0}u(-t) \\
&+ (F_{g0} + (F_{p1} - F_{g0})e^{\frac{t}{\tau_{gn1}} - 5})(u(t) - u(t - 5\tau_{gn1})) \\
&+ F_{p1}(u(t - 5\tau_{gn1}) - u(t - T_1)) \\
&+ (F_{p2} + (F_{p1} - F_{p2})e^{\frac{T_1 - t}{\tau_{gn2}}})(u(t - T_1) - u(t - T_2)) \\
&+ (F_{gs} + (F_{p2} + (F_{p1} - F_{p2})e^{\frac{(T_1 - T_2)}{\tau_{gn2}}} - F_{gs})e^{\frac{(T_2 - t)}{\tau_{gn3}}})u(t - T_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{ant} &= F_{t0}u(-t) \\
&+ F_{t0}e^{\frac{-t}{\tau_{tn1}}}(u(t) - u(t - T_3)) \\
&+ (F_{t0}e^{\frac{-T_3}{\tau_{tn1}}} + (F_{p3} - F_{t0})e^{\frac{-T_3}{\tau_{tn1}}}e^{\frac{(t - T_3)}{\tau_{tn2}} - 5})(u(t - T_3) - u(t - T_3 - 5\tau_{tn2})) \\
&+ F_{p3}(u(t - T_3 - 5\tau_{tn2}) - u(t - T_4)) \\
&+ (F_{ts} + (F_{p3} - F_{ts})e^{\frac{(T_4 - t)}{\tau_{tn3}}})u(t - T_4)
\end{aligned}$$

Comme précédemment, les forces à l'état actif agoniste et antagoniste sont définies comme des entrées neuronales filtrées passe-bas:

$$\dot{F}_{ag} = \frac{N_{ag} - F_{ag}}{\tau_{ag}}$$

$$\dot{F}_{ant} = \frac{N_{ant} - F_{ant}}{\tau_{ant}}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{ag} &= \tau_{gac}(u(t - T_1) - u(t - T_2)) + \tau_{gde}u(t - T_2) \\
\tau_{ant} &= \tau_{tde}(u(t) - u(t - T_3)) + \tau_{tac}(u(t - T_3) - u(t - T_4)) + \tau_{tde}u(t - T_4)
\end{aligned}$$

Les constantes de temps d'activation et de désactivation représentent les différentes caractéristiques dynamiques du muscle sous stimulation croissante et décroissante. La figure 13 montre les tensions à l'état actif agoniste et antagoniste.

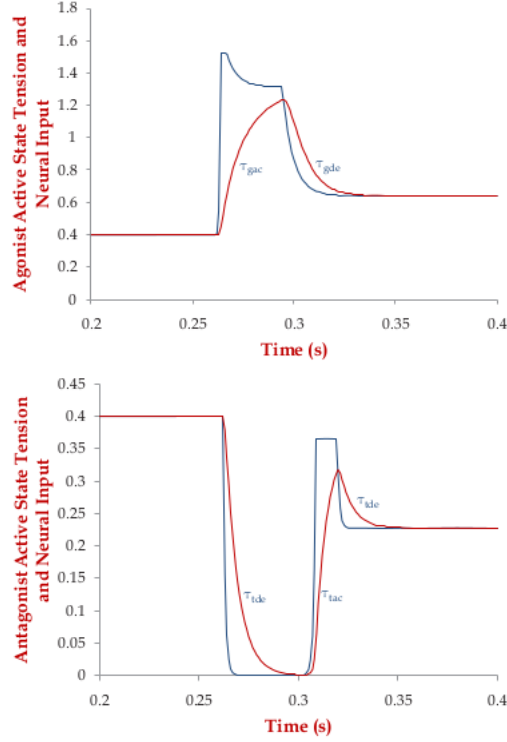


Figure 13: (En haut) Tension de l'état actif agoniste (rouge) et entrée neuronale (bleu). (En bas) Tension de l'état actif de l'antagoniste (rouge) et entrée neuronale (bleue).

4 Présentation des résultats

4.1 Présentation des logiciels de visualisation

Le logiciel que nous avons utilisé tout au long de notre projet pour la modélisation mathématique de notre système. SIMULINK est un environnement de diagramme fonctionnel destiné à la simulation multi domaine et à l'approche de conception par modélisation (Model-Based Design). Il prend en charge la conception et la simulation au niveau système, la génération automatique de code, ainsi que le test et la vérification en continu des systèmes embarqués.

SIMULINK propose un éditeur graphique, un ensemble personnalisable de bibliothèques de blocs et des solveurs pour la modélisation et la simulation de systèmes dynamiques. Il est intégré à MATLAB, ce qui vous permet

d'incorporer les algorithmes MATLAB dans les modèles et d'exporter le résultat des simulations vers MATLAB pour compléter les analyses.

Les principales fonctionnalités de SIMULINK sont :

- Éditeur graphique pour la création et la gestion de diagrammes fonctionnels hiérarchiques.
- Bibliothèques de blocs prédéfinis pour la modélisation de systèmes en temps continu ou en temps discret.
- Moteur de simulation avec des solveurs ODE à pas fixes ou variables.
- Scopes et affichage de données pour la consultation du résultat de la simulation.
- Outils de gestion de données et de projets pour les données et fichiers des modèles.
- Outils d'analyse de modèles pour l'affinage de l'architecture de modèle et l'augmentation de la vitesse de simulation.
- Bloc MATLAB Function pour l'import d'algorithmes MATLAB dans les modèles.
- Outil Legacy Code Tool pour l'import rapide de code C et C++ existant dans les modèles.

Pour la visualisation de nos courbes (position de l'angle, vitesse et accélération) nous avons utilisé les bloc scope.

4.2 Résultats obtenus et discussions

4.2.1 Résultats en boucle ouverte

Les différents blocs permettant de modéliser les signaux de notre système en boucle ouverte sont présentés:

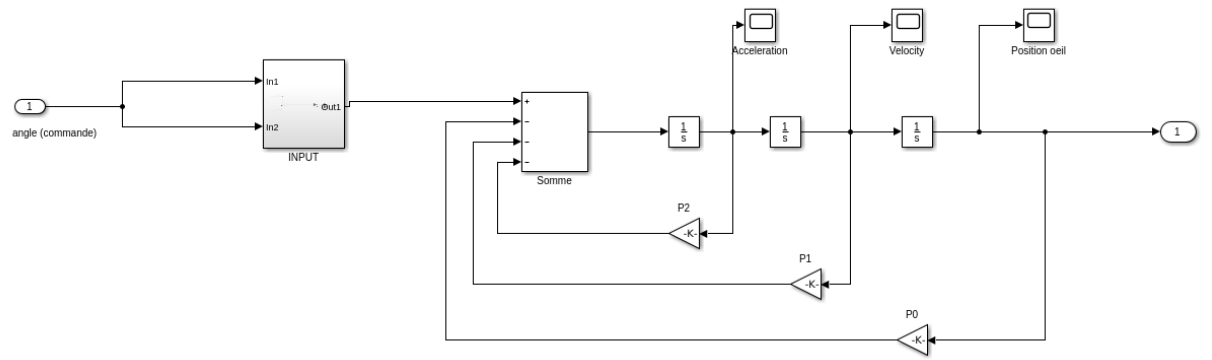


Figure 14: Modèle vue d'ensemble

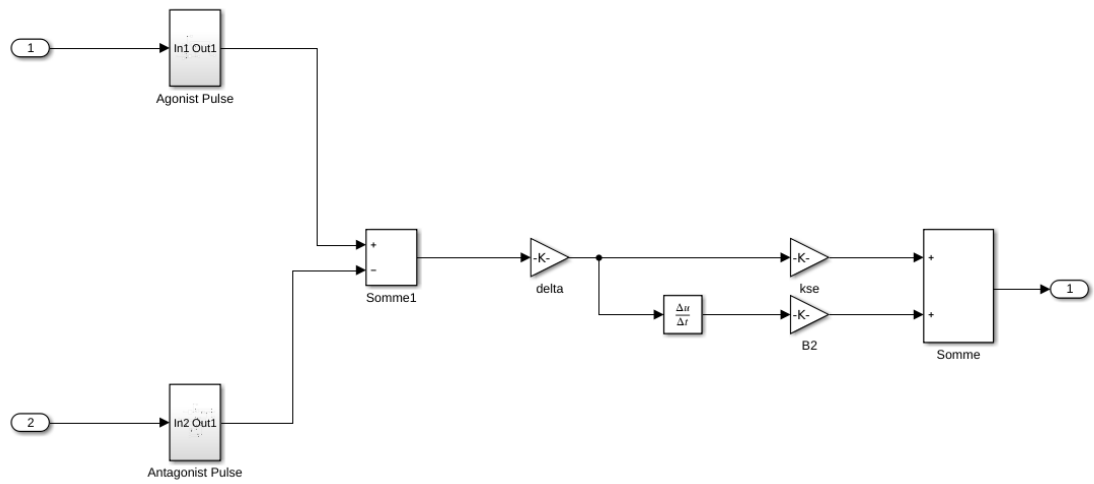


Figure 15: Force agoniste et antagoniste

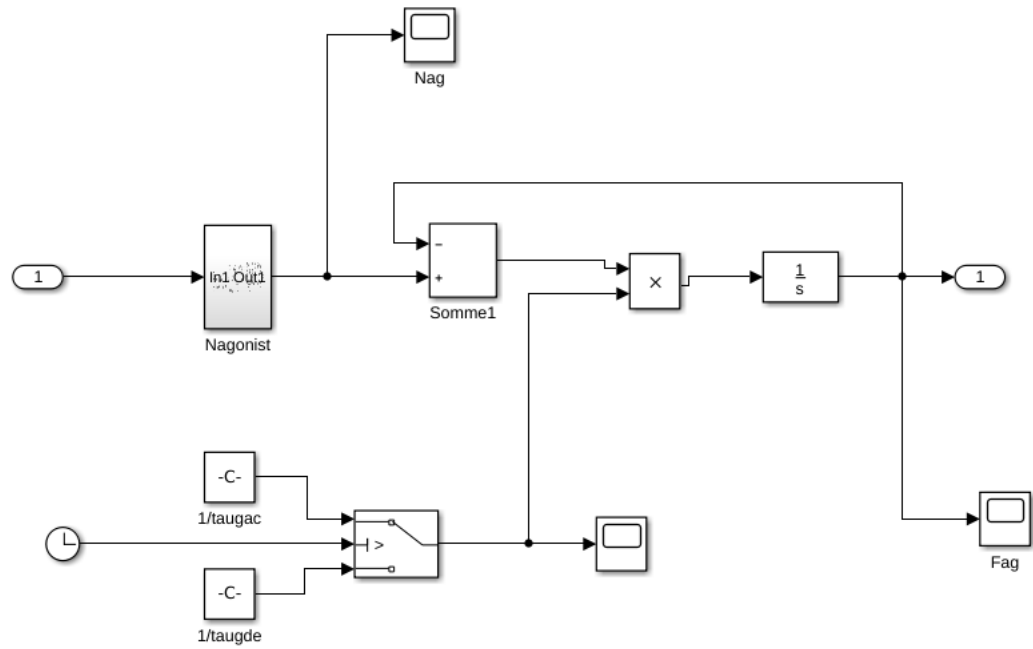


Figure 16: Génération de la force agoniste

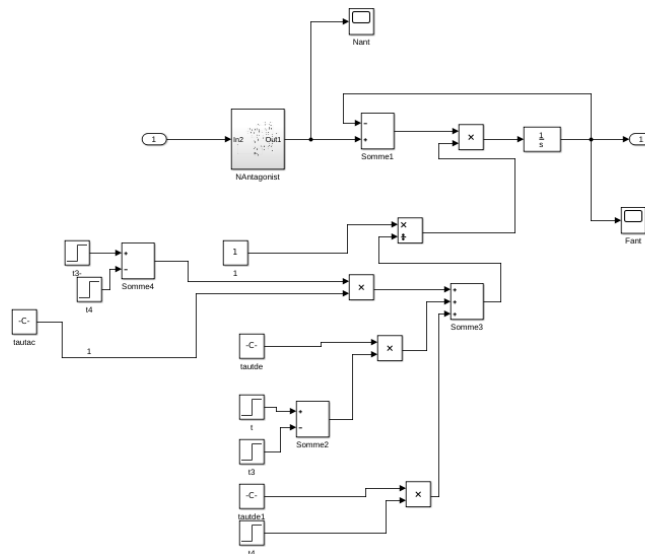


Figure 17: Génération de la force antagoniste

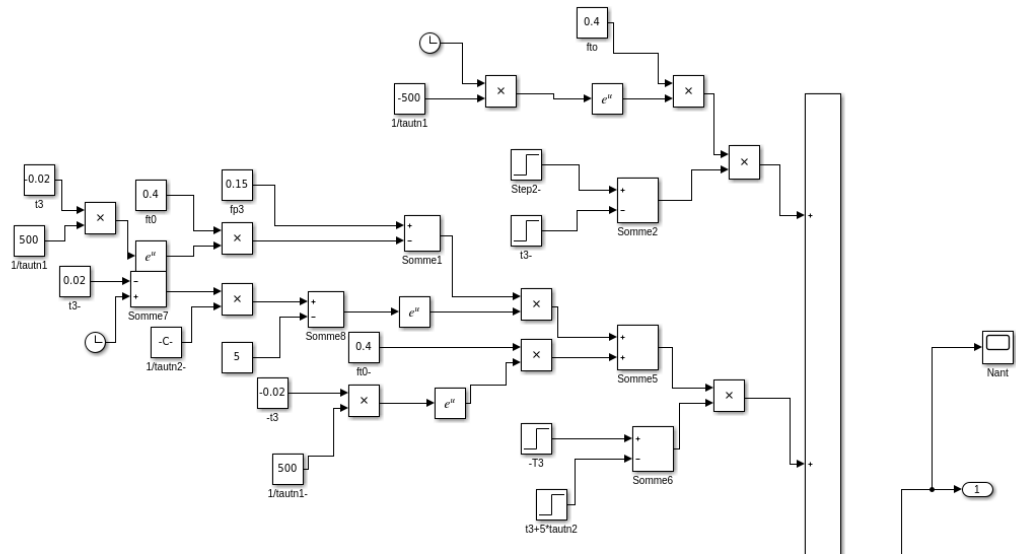


Figure 20: Génération de l'entrée neuronale antagoniste première partie

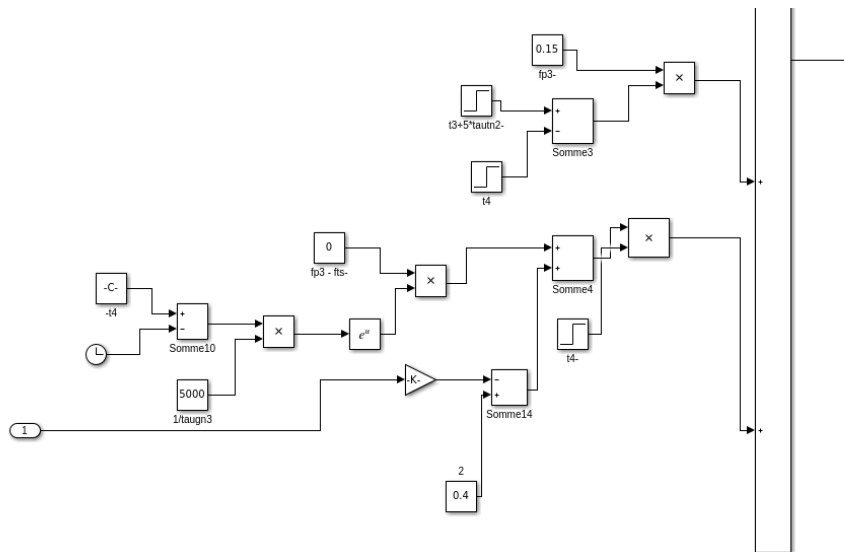


Figure 21: Génération de l'entrée neuronale antagoniste deuxième partie

Analyse de la réponse en boucle ouverte et performances désirées

Nous traçons la réponse du système pour une saccade de référence et nous obtenons la courbe ci-dessous :

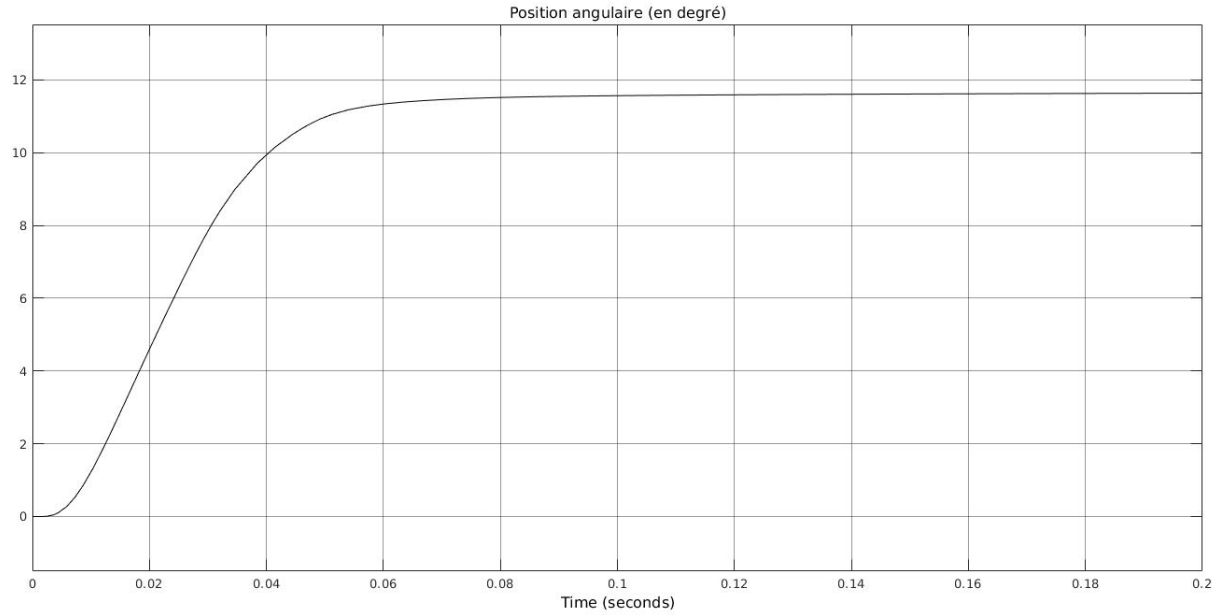


Figure 22: Réponse du système en boucle ouverte (BO) pour une saccade de 10°

Nous notons les performances suivantes en boucle ouverte :

- Un dépassement de 16.67% ;
- Un temps de réponse trop long, ce qui n'est pas acceptable pour notre système ;
- Une grande erreur en régime permanent, soit $e_{ss} = 16.67\%$.

Ces performances ne sont pas satisfaisantes, d'où l'emploi d'un contrôleur afin d'obtenir les performances :

- Un dépassement inférieur à 10%, soit $P.O. \leq 10\%$;
- Un temps de réponse relativement court, soit $T_s \leq 0.1$
- Une erreur en régime permanent relativement petite, soit $e_{ss} \leq 2\%$.

4.2.2 Choix du type de contrôleur

Nous voulons un temps de montée relativement court et une bonne précision lors des saccades. C'est pourquoi notre contrôleur aura une action proportionnelle (P). Nous introduirons alors le paramètre K_p tout en évitant au système d'entrer en instabilité. Afin de réduire l'erreur statique à 2% , nous allons ajouter à notre contrôleur une action intégrale (I). Et enfin, notre contrôleur aura une action dérivée (D), nous permettant ainsi de maintenir le système stable.

Voilà donc ainsi énoncés, les raisons qui nous ont emmenées à choisir un contrôleur de type PID et de forme parallèle.

1. Détermination des paramètres K_p, K_I et K_D de notre contrôleur.

Nous optons pour la méthode du lieu des racines On a:

$$P.O. \leq 10\% \text{ or } P.O. = 1 - \frac{\epsilon}{0.6}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\epsilon}{0.6} \leq 0.1$$

$$\Rightarrow \epsilon \geq 0.54$$

Nous prenons $\epsilon = 0.95$ car nous souhaitons que notre courbe de sortie soit amortie au maximum.

$$T_s \leq 0.1 \text{ or } T_s = \frac{4}{\epsilon \omega_n}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\epsilon \omega_n} \leq 0.1$$

$$\Rightarrow \omega_n \geq \frac{4}{0.1\epsilon}$$

$$\Rightarrow \omega_n \geq 42.11$$

Nous prenons $\omega_n = 47 \text{ rad/s}$ nous permettant de garder notre système stable.

Les zéros vers lesquels nous souhaitons que notre système évolue sont donnés par les relations :

$$s_d = -\epsilon \omega_n + j \omega_n \sqrt{1 - \epsilon^2} \text{ et } \bar{s}_d = -\epsilon \omega_n - j \omega_n \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

soit:

$$s_d = -0.95 \times 47 + j 47 \times \sqrt{1 - 0.95^2},$$

$$\bar{s}_d = -0.95 \times 47 - j 47 \times \sqrt{1 - 0.95^2}$$

On obtient alors :

$s_d = -44.65 + j 14.67, \bar{s}_d = -44.65 - j 14.67$ Notre contrôleur a pour expression :

$$\frac{K_D}{s} (s^2 + \frac{K_P}{K_D} s + \frac{K_I}{K_D})$$

Et on a :

$$(s^2 + \frac{K_P}{K_D}s + \frac{K_I}{K_D}) = (s - s_d)(s - \bar{s}_d)$$

$$\Rightarrow (s^2 + \frac{K_P}{K_D}s + \frac{K_I}{K_D}) = s^2 - 2(s_d + \bar{s}_d)s + s_d\bar{s}_d$$

Par identification on obtient:

$$\frac{K_P}{K_D} = -2 \times R_e(s_d) \text{ et } \frac{K_I}{K_D} = |s_d|^2$$

$$\Rightarrow \frac{K_P}{K_D} = -2 \times R_e(-44.65) \text{ et } \frac{K_I}{K_D} = (-44.65)^2 + (14.67)^2$$

Pour $K_D = 0.02$ on obtient:

$$K_P = 2 \times 44.65 \times 0.02 = 1.786 \text{ et } K_I = 2208.83 \times 0.02 = 44.176$$

Nous obtenons donc les paramètres de notre contrôleur :

$$K_P = 1.786$$

$$K_I = 44.176$$

$$K_D = 0.02$$

2. Analyse de la réponse de l'ensemble contrôleur + système pour une saccade de 10°

Nous simulons une saccade de 10° et nous obtenons la courbe ci-dessous :

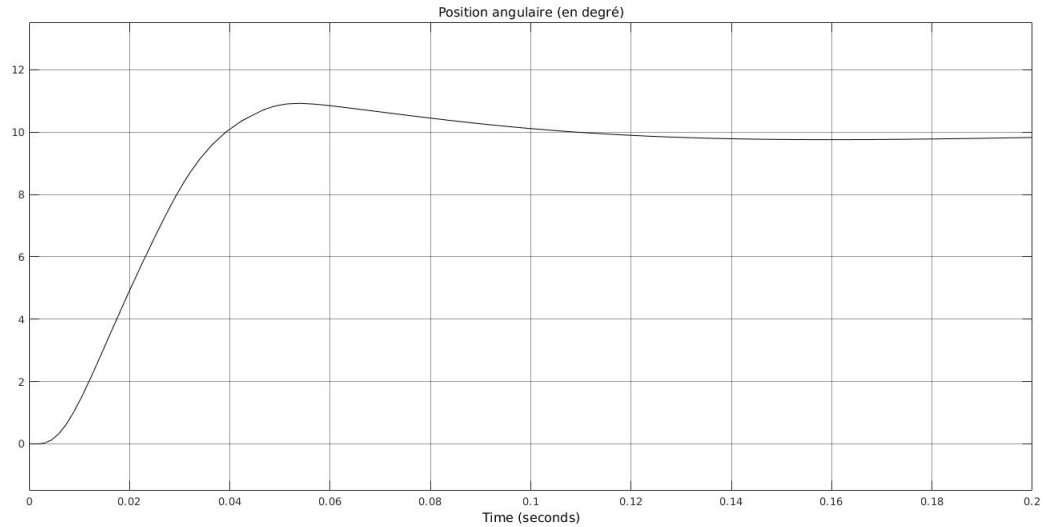


Figure 23: Réponse de l'ensemble Contrôleur PID + système pour une saccade de 10°

Nous pouvons noter une nette amélioration de la qualité de la réponse.

On peut noter entre autre :

- Un dépassement de 8%
- Un temps de réponse $T_s = 0.085s$
- Une erreur statique $e_{ss} = 2\%$

Ces performances respectent le cahier de charge. Toutefois nous restons très proche des limites de performances souhaitées.

5 Conclusion

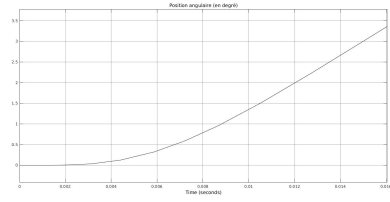
Tout au long de ce projet il était question d'étudier le mouvement saccadique de l'œil ainsi que d'effectuer le contrôle de ce mouvement. Nous avons donc commencé par la définition des concepts permettant de mieux appréhender notre étude en partant de fait plus généraux (physiologie de l'œil) pour converger vers la modélisation mécanique puis mathématiques du mouvement saccadique de l'œil à travers les équations qui régissent ce mouvement. Nous avons ensuite obtenu la fonction de transfert de notre système ce qui nous a permis d'effectuer des simulations à l'aide des logiciels Matlab et Simulink et nous avons obtenus des courbes donnant la position angulaire de l'œil au cours du temps. Ces courbes n'étaient pas satisfaisantes car atteignaient des dépassements au régime permanent de plus de 16% ce qui nous a mené à intégrer à notre système un contrôleur notamment un PID dont nous avons déterminé les paramètres après s'être donné des critères de performances à atteindre ($P.O. \leq 10\%$). Nous notons que pour les saccades proches de 10° nous parvenons à des résultats qui respectent le cahier de charge mais que pour des valeurs de grandes saccades nous n'obtenons pas de très bons résultats (Les autres saccades sont présentées en Annexe).

Ainsi pour améliorer notre système nous notons qu'une piste à suivre serait une meilleure conception de notre contrôleur PID voire même l'éventualité d'explorer d'autres types de contrôleurs.

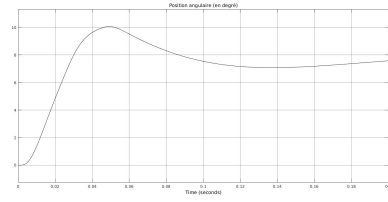
6 Annexe

Dans cet annexe nous présentons les courbes pour diverses saccades notamment 5,8,15,20,25,30,35 et 40 degrés. Et nous notons que pour des valeurs de grandes saccades ($\geq 15^\circ$) la réponse est de moins en moins bonne certainement dû au fait que les saccades habituelles sont de l'ordre 10° .

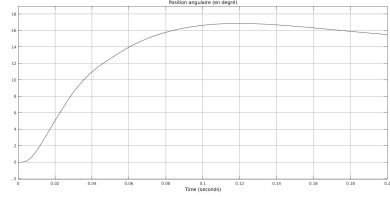
La réponse pour une saccade de 5° n'est pas non plus bonne car le système n'a pas le temps d'atteindre la commande pour améliorer cela il faudrait modifier les valeurs des paramètres notamment en augmentant la valeur de K_P pour obtenir un temps de montée plus court et donc atteindre la commande.



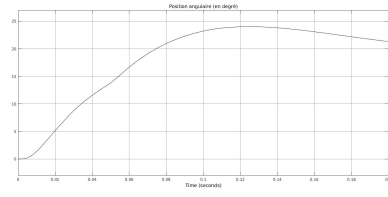
(a) Saccade de 5°



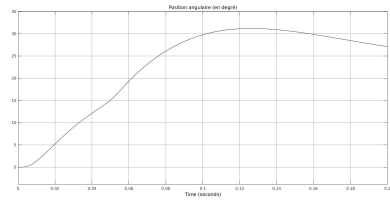
(b) Saccade de 8°



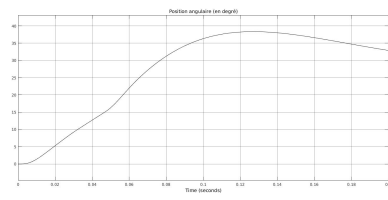
(c) Saccade de 15°



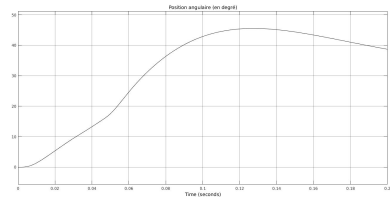
(d) Saccade de 20°



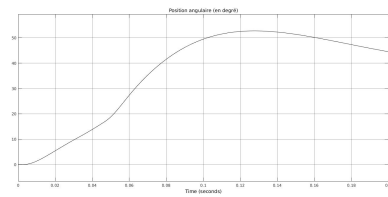
(e) Saccade de 25°



(f) Saccade de 30°



(g) Saccade de 35°



(h) Saccade de 40°

Figure 24: Réponse de l'ensemble Contrôleur PID + système

Parameter	Human	Rhesus Monkey
Radius of eye ball	11 mm (11.8mm in model)	10 mm
K_{se}	125 N/m	125 N/m
K_{lt}	60.7 N/m	77.66 N/m
B_1	5.6 Ns/m	4 Ns/m
B_2	0.5 Ns/m	0.4 Ns/m
F	$F = \begin{cases} 0.4 + 0.0175 \theta , & \text{for } \theta > 0 \\ 0.4 - 0.0125 \theta , & \text{for } \theta \leq 0 \end{cases}$	$F = \begin{cases} 0.55 + 0.0175 \theta , & \text{for } \theta > 0 \\ 0.55 - 0.0125 \theta , & \text{for } \theta \leq 0 \end{cases}$
K	16.34 N/m	10.21 N/m
B	0.327 Ns/m	0.204 Ns/m
J	$2.2 \times 10^{-3} \text{ Ns}^2/\text{m}$	$1.76 \times 10^{-3} \text{ Ns}^2/\text{m}$

Figure 25: Paramètres du système (tous les autres paramètres non présents dans ce tableau proviennent tous du même document) [5]

References

- [1] A. M. Gordon, A. F. Huxley, and F- J. Julian. The variation in isometric tension with sarcomere length in vertebrate muscle fibers. *Journal of Physiology*, 184:170-192, 1966.
- [2] J. He. A feedback control analysis of the neuro-musculo-skeletal system of a cat hindlimb. PhD dissertation. The University of Maryland, 1988.
- [3] D. A. Robinson, D. M. O'Meara, A. B. Scott, and C. C. Collins. Mechanical components of human eye movements. *Journal of Applied Physiology*, Vol. 26, No. 5, pp. 548-553, 1969.
- [4] R. Robleto. An Analysis of the Musculotendon Dynamics of Hill-based Models. Master's thesis, Texas Tech University, 1997.
- [5] Models of Horizontal Eye Movements, Part II: A 3rd Order Linear Saccade Model, John D. Enderle and Wei Zhou
- [6] A Mathematical Model Of Human Saccadic Eye Movement, Albert McSpadden
- [7] <https://en.wikipedia.org/wiki/Viscoelasticity> Section Kelvin-Voigt model