

## 2622 Matematik for Økonomer

Eric Hillebrand

### Opgavesæt 5

#### Opgave 1

1. Lad  $f(x) = \sin(x)$ . Brug Taylor-formlen for at vise, at

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(Husk, at  $\sin'(x) = \cos(x)$  og  $\cos'(x) = -\sin(x)$ .)

Udvikl  $\sin x$  i  $x_0 = 0$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

2. Find et tilsvarende udtryk for  $\cos(x)$ .

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

3. Brug 2.1 og 2.2 for at vise, at

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x),$$

hvor  $i$  er den imaginære enhed.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \dots \end{aligned}$$

#### Opgave 2

Antag, at vi har en output funktion  $Y$  af arbejdsstyrke  $L$  og kapital  $K$ , som er to gange kontinuert differentiabel. Lad  $w$  betegne prisen per enhed arbejdsstyrke, og lad  $i$  betegne prisen per enhed kapital. Hvis vi minimerer omkostningerne for arbejde og kapital

$$C(L, K) = wL + iK,$$

således, at outputniveauet er konstant lig med  $Y_0$ ,

$$Y(L, K) = Y_0 \in \mathbb{R}_+,$$

så finder vi første-ordens betingelserne

$$\frac{w}{i} = \frac{D_L Y(L^*, K^*)}{D_K Y(L^*, K^*)} = -\text{marginalrate af teknisk substitution.} \quad (1)$$

(Vi skal komme tilbage til det i Kapitel 3.)

Betragt Cobb-Douglas produktionsfunktionen

$$Y(L, K) = AL^\alpha K^\beta.$$

1. Bestem gradienten og Hesse matricen.

$$\nabla Y(L, K) = \begin{bmatrix} a\alpha L^{\alpha-1} K^\beta \\ a\beta L^\alpha K^{\beta-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Hess } Y(L, K) = \begin{bmatrix} a\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^\beta & a\alpha\beta L^{\alpha-1}K^{\beta-1} \\ a\alpha\beta L^{\alpha-1}K^{\beta-1} & a\beta(\beta-1)L^\alpha K^{\beta-2} \end{bmatrix}$$

2. Vis at Cobb-Douglas funktionen er homogen (af første grad, dvs. lineær i  $K$  og i  $L$ ) hvis  $\beta = 1 - \alpha$ .

$$\begin{aligned} Y(\lambda L, \lambda K) &= a(\lambda L)^\alpha (\lambda K)^\beta, \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} a L^\alpha K^\beta, \\ &= \lambda Y(L, K), \text{ if } \beta = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

3. For en produktionsfunktion  $Y(x)$ ,  $x = (K, L)'$ , betragt kvotienten

$$\frac{Y(\lambda x)}{\lambda Y(x)}, \quad \lambda > 1.$$

Hvis kvotienten er lig med 1, så siges funktionen at implicere konstante skalaafkast; hvis kvotienten er større end 1, så implicerer funktionen voksende skalaafkast; hvis kvotienten er mindre end 1, aftagende skalaafkast. Vis at Cobb-Douglas funktionen implicerer konstant skalaafkast hvis  $\beta = 1 - \alpha$ , voksende skalaafkast hvis  $\alpha + \beta > 1$  og aftagende skalaafkast hvis  $\alpha + \beta < 1$ .

$$\frac{Y(\lambda x)}{\lambda Y(x)} = \lambda^{\alpha+\beta-1}$$

$\lambda^{\alpha+\beta-1}$  er lig med nul hvis  $\beta = 1 - \alpha$ , større end 1 hvis  $\alpha + \beta > 1$  og mindre end 1 hvis  $\alpha + \beta < 1$ .

4. Vis at forholdet mellem arbejde  $L$  og kapital  $C$ , der opfylder den første-ordens betingelse for optimalitet (1), er konstant.

$$\begin{aligned}\frac{D_L Y(L, K)}{D_K Y(L, K)} &= \frac{\alpha K}{\beta L} \stackrel{!}{=} \frac{\omega}{i} \\ \Rightarrow \frac{L^*}{K^*} &= \frac{\alpha i}{\beta \omega} = \text{konstant}\end{aligned}$$

5. Vis at

$$Y = K D_K Y(L, K) + L D_L Y(L, K),$$

dvs. hver inputfaktor betales beløbet af dens marginalprodukt, hvis  $\beta = 1 - \alpha$ . Nogle gang betegnes dette forhold som “Eulers teorem” indenfor økonomien.

6. Vis at substitutionselasticiteten

$$ES = \frac{\frac{d\left(\frac{L^*}{K^*}\right)}{\frac{L^*}{K^*}}}{\frac{d\left(\frac{i}{w}\right)}{\frac{i}{w}}}$$

der opfylder den første-ordens betingelse for optimalitet (1), er konstant.

$$ES = \frac{d\left(\frac{L^*}{K^*}\right)}{d\left(\frac{i}{w}\right)} \frac{i/\omega}{L^*/K^*} = \frac{\alpha \beta}{\beta \alpha} = 1$$

7. Vis at de relative andele af faktorerne af produktet  $Y$  er givet ved

$$\frac{L D_L Y}{Y} = \alpha, \quad \frac{K D_K Y}{Y} = \beta.$$

### Opgave 3 (Ramsey Model)

1. Vis at Cobb-Douglas produktionsfunktionen  $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$  kan skrives i per-capita formen

$$y = Ak^\alpha,$$

hvor  $y = Y/L$  og  $k = K/L$ .

2. Vis at de steady-state ligevægtsværdier i Ramsey-modellen er givne ved

$$\begin{aligned}k^* &= \left[ \frac{1}{\alpha A} (\delta + \rho + \theta \alpha_T) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}, \\ c^* &= A(k^*)^\alpha - (\delta + \alpha_L + \alpha_T)k^*.\end{aligned}$$

3. Vis at Jacobi matricen for

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \begin{bmatrix} \log k \\ \log c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} Ak^{\alpha-1} - \frac{c}{k} - (\delta + \alpha_L + \alpha_T) \\ \frac{1}{\theta} (\alpha Ak^{\alpha-1} - (\delta + \rho + \theta \alpha_T)) \end{bmatrix},$$

evalueret i  $(\log k^*, \log c^*)$  er givet ved

$$J_f(\log k^*, \log c^*) = \begin{bmatrix} \rho - \alpha_L - (1 - \theta)\alpha_T & \delta + \alpha_L + \alpha_T - \frac{1}{\alpha}(\delta + \rho + \theta \alpha_T) \\ \frac{\alpha-1}{\theta}(\delta + \rho + \theta \alpha_T) & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Vis at

$$f(\log k^*, \log c^*) = (0, 0)^T.$$

Omskriv funktionen  $f$  til

$$\begin{bmatrix} \log k \\ \log c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} Ae^{(\alpha-1)\log k} - e^{\log \frac{c}{k}} - (\delta + \alpha_L + \alpha_T) \\ \frac{1}{\theta} (\alpha Ae^{(\alpha-1)\log k} - (\delta + \rho + \theta \alpha_T)) \end{bmatrix}$$

Jacobi-matricen:

$$J_f = \begin{bmatrix} A(\alpha-1)k^{\alpha-1} + \frac{c}{k} & -\frac{c}{k} \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\theta}Ak^{\alpha-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Hvis du evaluerer i  $(\log k^*, \log c^*)$  finder du værdierne for  $J_f$  og  $f$  som påstået i opgaven.

#### Opgave 4

Section 2.7 Exercise 3

Løs med Teoremet om Implicit Givne Funktioner, som vi har behandlet det. (Det er lidt anderledes end løsningen i bogen.)

$$F : X_1 \times Y_1 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X_1, Y_1 \subset \mathbb{R}^3 \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{=:s}, \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{=:g(s)} \mapsto \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 - z + u - v - w^3 + 1 \\ -2x + y - z^2 + u + v^3 - w + 3 \\ x^2 + z - u - v + w^3 - 3 \end{bmatrix}$$

I punktet  $P$  har vi, at

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bestem

$$D_s g(s) = D \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$$

i punktet  $P$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ifølge Teoremet om Implicit Givne Funktioner gælder det i dette punkt, at

$$D_s g(s)|_P = -D_g F \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} D_s F \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Jacobi matricen af  $g(s)$  er givet ved

$$D_g F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3w^2 \\ 1 & 3v^2 & -1 \\ -1 & -1 & 3w^2 \end{bmatrix}$$

og i punktet  $P$

$$D_g F \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

med invers matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Jacobi matricen af  $F$  i forhold til  $s$  er givet ved

$$D_s F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2y & -1 \\ -2 & 1 & -2z \\ 2x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og i punktet  $P$

$$D_s F \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Derved følger, at

$$D_s g(s)|_P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Svaret til 2.7.3 er den første søjle

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right)' = \left( \frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)'.$$

### **8-minutters foredrag**

1. Taylor-formlen
2. Teorem om Implicit Givne Funktioner