Mathematics for Economists
Kapitel 1 – Lineær Algebra

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 1

- Ligningssystemer / Lineære uafhængighed
- Funktioner / Rangen af en matrix / Rangen og lineære ligningssystemer / Skalarprodukt
- Determinanter
- **Egenværdier**
- Symmetriske bilineære former

1.5 Egenværdier

1.5 Egenværdier

Vi betragter afbildninger $f : V \to V$, med V et n-dimensionalt reelt eller komplekst vektorrum. Funktionen f er givet ved multiplikation med en $n \times n$ matrix A.

Definition (Egenværdier og Egenvektorer)

En n-dimensional vektor v, $v \neq 0$, der opfylder

$$Av = \lambda v, \ \lambda \text{ et reellt eller komplekst tal,}$$

kaldes for **egenvektor** for A med tilhørende **egenværdi** λ for A.

Bemærkning (Komplekse Egenværdier)

Komplekse egenværdier er mulige, selv for matricer som kun har reelle indgange.

1.5 Egenværdier

Eksempel

1. Betragt
$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$
$v_1 = (1,\ 1)^T$ er en egenvektor med tilhørende egenværdi $\lambda_1 = 2$, og
$v_2 = (-1,\ 1)^T$ er en egenvektor med tilhørende egenværdi $\lambda_2 = 3$.

2. Betragt
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$
$v_1 = (1,\ -3/5 + i/5)^T$ er en egenvektor med tilhørende egenværdi $\lambda_1 = 1 + i$ og
$v_2 = (1,\ -3/5 - i/5)^T$ er en egenvektor med tilhørende egenværdi $\lambda_2 = 1 - i$.

1.5 Egenværdier

Egenværdier kan have en eller flere tilhørende egenvektorer.

Definition

Lad λ være en egenværdi for $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ givet ved multiplikation med $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Egenrummet $E(\lambda)$ er givet ved

$$E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = \lambda x\}$$

Betingelsen $Ax = \lambda x$ svarer til $(A - \lambda I)x = 0$. Egenrummet er derfor løsningsrummet til systemet af lineære ligninger

$$(A - \lambda I)x = 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Hvis systemet har ikke-nul løsninger x, så betyder det, at $A - \lambda I$ ikke har fuld rang, og derfor

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matricen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ har to egenværdier, $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = 2$. De tilhørende egenvektorer er

$$E(\lambda_1) = E(3) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$E(\lambda_2) = E(2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definition

Determinanten af $n \times n$ matricen $A - \lambda I$,

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

er et polynomium i λ, som kaldes det **karakteristiske polynomium**.

Korollar

Vi får et konstruktivt kriterium for egenværdier:

$$\lambda \text{ egenværdi for } A \iff \lambda \text{ rod i } p(\lambda).$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}, \\
&= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}, \\
&= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \\
&= \lambda^2 - \operatorname{trace}(A)\lambda + \det A.
\end{aligned}
$$

1.5 Egenværdier

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\implies p(\lambda) = (6-\lambda)(2-\lambda) - 5 = \lambda^2 - 8\lambda + 7.$$

Rødderne i $p(\lambda)$, dvs. de værdier af λ, der opfylder $p(\lambda) = 0$, er $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 7$.

1.5 Egenværdier

Egenrummene $E(\lambda_i)$ bestemmes som løsningsrummet til $A - \lambda_i I = 0$ når egenværdierne λ_i er kendte.

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(A - I)x = 0,$$

$$E(\lambda_1) = E(1) = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix} s \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
&(A - 7I)x = 0, \\
&E(\lambda_2) = E(7) = \left\{ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] s \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}
$$

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2-\lambda)[(3-\lambda)(-2-\lambda)+4] \\ &\quad - 2[(-2-\lambda)+1] \\ &\quad - 1[4-(3-\lambda)], \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3, \\ &= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3). \end{aligned}$$

Egenværdierne til A er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$.

Eksempel

$$(A - I)x = 0,$$

$$E(\lambda_1) = E(1) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
&(A+I)x = 0, \\
&E(\lambda_2) = E(-1) = \left\{ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right] s \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}
$$

Eksempel

$$(A - 3I)x = 0,$$

$$E(\lambda_3) = E(3) = \left\{ \left[\begin{array}{c} -2 \\ -3 \\ 1 \end{array} \right] s \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.5 Egenværdier

Bemærkning (Komplekse egenværdier)

Lad polynomiummet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ for $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ have rødderne $\lambda_j = a + bi$ med a, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Vi har

$$0 = p(\lambda_j) = a_n \lambda_j^n + a_{n-1} \lambda_j^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda_j + a_0,$$

med reelle koefficienter a_j, $j = 0, \ldots, n$. Den komplekst konjugerede til 0 er igen 0, og derfor

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} &= \overline{a_n \lambda_j^n} + \overline{a_{n-1} \lambda_j^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 \lambda_j} + \overline{a_0}, \\ &= a_n \overline{\lambda_j}^n + a_{n-1} \overline{\lambda_j}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{\lambda_j} + a_0. \end{aligned}$$

Vi ser, at $\overline{\lambda_j} = a - bi$ også er en rod i det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$.
Den komplekst konjugerede til komplekse vektorer og matricer defineres elementvist. Alle egenskaber af addition og multiplikation forbliver de samme. Således bliver argumentet endda kortere:

$$A\overline{z} = \overline{A\, z} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\, \overline{z}.$$

Den komplekst konjugerede til egenvektoren tilhører den komplekst konjugerede egenværdi.

1.5 Egenværdier

Sætning

Lad $f : V \to V$ være givet ved multiplikation med den $n \times n$-dimensionale matrix A. Hvis $(v_1, \dots, v_k)$ er egenvektorer for k forskellige egenværdier $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, så er $(v_1, \dots, v_k)$ lineært uafhængige.

Definition (Diagonaliserbare Matricer)

En afbildning $f : V \to V$ givet ved multiplikation med den $n \times n$-dimensionale matrix A kaldes **diagonaliserbar**, hvis der findes en invertibel $n \times n$ matrix P, således at matricen

$$D = P^{-1}AP$$

er diagonal. Den resulterende repræsentation

$$A = PDP^{-1}$$

kaldes for **egenværdi dekompositionen** af A.

1.5 Egenværdier

Hvis $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ har n forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ med tilknyttede egenvektorer $v_1, v_2, \dots, v_n$, så kan man forme

$$P = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n].$$

Idet egenvektorerne er lineært uafhængige, så er matricen P regulær (har rangen n). Da $Av_i = \lambda_i v_i$, så har vi at

$$AP = [\lambda_1 v_1\ \ \lambda_2 v_2\ \ \dots\ \ \lambda_n v_n] = PD,$$

hvor $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Det følger, at hvis en $n \times n$ matrix A har n forskellige egenværdier, så er den diagonaliserbar.

Eksempel

I eksemplet

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

har vi fundet, at $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 7$ med tilhørende egenvektorer $v_1 = (-\frac{1}{5},\ 1)'$ og $v_2 = (1,\ 1)'$. A er diagonaliserbar med egenværdi dekomposition

$$\begin{aligned} A = PDP^{-1} &= [v_1\ v_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [v_1\ v_2]^{-1}, \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Eksempel

I eksemplet

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

har vi bestemt egenværdierne som $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$, henholdsvis, med egenvektorer $v_1' = (-1,\ 1,\ 0)$, $v_2' = (0,\ 1,\ -1)$ og $v_3' = (-2,\ -3,\ 1)$. Egenværdi dekompositionen er derfor

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Eksempel

Nogle gange findes en diagonalisering selv om, at der er gentagne egenværdier. Betragt eksemplet

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

hvor der er to egenværdier, $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = 2$ med tilhørende egenvektorer

$$E(\lambda_1) = E(3) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$E(\lambda_2) = E(2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eksempel

Definér

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

og tjek at

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D.$$

1.5 Egenværdier

Eksempel

Men ikke alle gentagne egenværdier har flere tilhørende egenvektorer. Et modeksempel er den ikke-diagonaliserbare matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Konceptet af diagonaliseringen i disse tilfælde generaliseres til teorien om **Jordan dekompositionen**. Generaliseringen til ikke-kvadratiske matricer behandles i **singulærværdi dekompositionen**, som er vigtig til numerisk analyse og informatik.