Mathematics for Economists
Kapitel 9 – Ramsey III

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Notation

Ramsey-modellen har følgende objekter:

$\mathsf{L}(t) = e^{\alpha_L t}$	arbejdsstyrke i den repræsentative husholdning
$\alpha_L > 0$	fertilitetsraten (populationsvækst)
$C(t)$	den repræsentative husholdnings forbrug
$\mathsf{c}(t) = \frac{C(t)}{\mathsf{L}(t)}$	per-capita forbrug
$u(x)$	CRRA, CES nyttefunktion
$\rho > 0$	tidspræferenceraten (diskonteringssats)
$A(t)$	summen af aktiver i den repræsentative husholdning
$\mathtt{a}(t) = \frac{A(t)}{\mathsf{L}(t)}$	per-capita aktiver
$r(t)$	aktivernes afkast
$\mathtt{w}(t)$	lønrate per arbejdsenhed

Per-capita / per effektive arbejdsenheder

Bemærk at man skelner mellem per-capita enheder (nævner L) og enheder for effektiv arbejde (nævner L):

- Output per effektiv arbejde / per capita

$$y = \frac{Y}{L}, \qquad \mathtt{y} = \frac{Y}{\mathsf{L}}$$

- Forbrug per effektiv arbejde / per capita

$$c = \frac{C}{L}, \qquad \mathtt{c} = \frac{C}{\mathsf{L}}, \qquad c = \mathtt{c}e^{-\alpha_T t}$$

- Kapitalapparat per effektiv arbejde / per capita

$$k = \frac{K}{L}, \qquad \mathtt{k} = \frac{K}{\mathsf{L}}, \qquad k = \mathtt{k}e^{-\alpha_T t}$$

- Aktiver betragtes kun i per-capita versionen:

$$\mathtt{a} = \frac{A}{\mathsf{L}}$$

Firmaets optimeringsproblem

I en opgave til Kapitel 3 har vi set, at firmaets profitfunktion

$$\begin{aligned}\Pi &= F(K, L) - (r+\delta)K - \mathtt{w}L, \\ &= Lf(k) - (r+\delta)Lk - \mathtt{w}Le^{-\alpha_T t}, \\ &= L\left(f(k) - (r+\delta)k - \mathtt{w}\, e^{-\alpha_T t}\right).\end{aligned}$$

giver anledning til en første-ordens betingelse for et maksimum

$$r(t) = f'(k(t)) - \delta = \frac{\alpha A}{k(t)^{1-\alpha}} - \delta.$$

Husholdningens optimeringsproblem

I Ramsey II-videoen har vi set, at husholdningens optimeringsproblem er

$$\operatorname*{maks}_{\mathtt{c(t)}} J(t, \mathtt{a}, \mathtt{c}) = \int_{t_0}^{\infty} u(\mathtt{c}(s))\mathsf{L}(s)e^{-\rho s}ds,$$

hvor den øjeblikkelige nyttefunktion er givet ved

$$u(x) = \frac{x^{1-\theta} - 1}{1-\theta},$$

og budgetbibetingelsen er

$$\dot{\mathtt{a}}(t) = r(t)\mathtt{a}(t) + \mathtt{w}(t) - \mathtt{c}(t) - \alpha_L \mathtt{a}(t).$$

(Bemærk, at vi betragter problemet for ubegrænset periode nu.)

Husholdningens optimeringsproblem

Vi kan nu løse husholdningens problem ved maksimumsprincippet:

- Hamilton funktion

$$H(t, \mathtt{a}, \mathtt{c}, \nu) = u(\mathtt{c})e^{-(\rho-\alpha_L)t} + \nu[\mathtt{w} + (r - \alpha_L)\mathtt{a} - \mathtt{c}]$$

- $$\frac{\partial H}{\partial \mathtt{c}} = 0$$

- $$\dot{\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \mathtt{a}}$$

- Resulterer i differentialligningen

$$\frac{\dot{\mathtt{c}}}{\mathtt{c}} = (r(t) - \rho)\frac{1}{\theta}$$

Husholdningens transversalitetsbetingelse

Transversalitetsbetingelsen fra Teorem 9.1.1 (d)

$$\lim_{t\to\infty} p(t)(x(t) - x^*(t)) \geq 0$$

for alle tilladte x skrives som

$$\lim_{t\to\infty} \nu(t)\mathtt{a}(t) = 0$$

for alle tilladte $\mathtt{a}(t)$, især $\mathtt{a}^*(t)$.

"No-Ponzi condition"

Ligevægtsbetingelser

1. Lønsatsen $\mathtt{w}(t)$ skal være lig med marginalproduktet af arbejde i ligevægten:

$$\mathtt{w}(t) = e^{\alpha_T t}(f(k) - f'(k)k).$$

2. Formuen er lig med kapitalen:

$$\mathtt{a}(t) = \mathtt{k}(t)$$

Resultatet

Løsningen af firmaets og husholdningens optimeringsproblemer, sammen med ligevægtsbetingelserne, resulterer i et system af differentialligninger

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\log k(t) &= Ak^{\alpha-1} - \frac{c}{k} - (\delta + \alpha_L + \alpha_T),\\ \frac{d}{dt}\log c(t) &= \frac{1}{\theta}\left(\alpha A k^{\alpha-1} - (\delta + \rho + \theta\alpha_T)\right).\end{aligned}$$

som lineariseres til (Kapitel 2):

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\log k \\ \frac{d}{dt}\log c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho - \alpha_L - (1-\theta)\alpha_T & \delta + \alpha_L + \alpha_T - \frac{1}{\alpha}(\delta + \rho + \theta\alpha_T) \\ \frac{\alpha-1}{\theta}(\delta + \rho + \theta\alpha_T) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log\frac{k}{k^*} \\ \log\frac{c}{c^*} \end{bmatrix}.$$