Mathematics for Economists
Kapitel 9 – Kontrolteori: Grundlæggende metoder

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 9

- Introduktion (9.1, 9.2)
- **Regularitetsbetingelser (9.3)**
- Standardproblemet (9.4)
- Skyggepriser og den adjungerede funktion (9.6)
- Tilstrækkelige betingelser (9.7)
- Problemer udtrykt i nutidsværdi (9.9)
- Ubegrænset periode (9.11)

9.3 Regularitetsbetingelser

9.3 Regularitetsbetingelser

- I mange anvendelser er kontrolfunktionerne på en måde begrænset.
- Lad $u(t)$ antage værdier i en fikserede delmængde U der kaldes for **kontrolregionen**.
- Vi betragter følgende regularitetsbetingelser:
  - Kontinuitet af $u(t)$.
  - Et spring i $u(t)$: F.eks.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \text{ i } [t_0, t'] \\ 0 & \text{for } t \text{ i } (t', t_1] \end{cases}$$

  der involverer et enkelt skift i t'. Funktionen $u(t)$ er **stykvis kontinuert**, med en diskontinuitet i $t = t'$.

9.3 Regularitetsbetingelser

Ensidige grænseværdier

Vi siger at **grænseværdien for** $f(x)$ **når** x **går mod** a **fra venstre** er B, og vi skriver

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = B.$$

I analogi defineres **grænseværdien for** $f(x)$ **når** x **går mod** a **fra højre** som A, hvis

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = A.$$

Grænseværdierne fra højre og venstre er **ensidige grænseværdier**.

Ensidig kontinuitet

Hvis $f(a) = B$, så er f **kontinuert fra venstre** i a, men en grænseværdi A fra højre findes (càglàd). Hvis $f(a) = A$, så er f **kontinuert fra højre** i a, men en grænseværdi B fra venstre findes (càdlàg). Hvis $A = B$, så er f **kontinuert** i a.

9.3 Regularitetsbetingelser

- En funktion udfører et **begrænset spring** i et punkt, hvor funktionen er diskontinuert, hvis der er begrænsede ensidige grænserværdier fra venstre og højre i punktet.
- En funktion er **stykvis kontinuert**, hvis der er et begrænset antal spring i hvert begrænset interval.
- Vi vælger værdien for $u(t)$ i et diskontinuert punkt t' som grænseværdi fra venstre. Så er $u(t)$ kontinuert fra venstre med grænseværdi fra højre (càglàd), som illustreret i Fig. 1.
- En **løsning** $x(t)$ er en **kontinuert** funktion, der har afledede som opfylder ligningen, undtaget i punkter hvor $u(t)$ er diskontinuert. Grafen for $x(t)$ vil som regel have "knæk" i diskontinuitetspunkter for $u(t)$, og $x(t)$ vil som regel ikke være differentiabel, men kontinuert, i disse punkter.