Mathematics for Economists
Kapitel 6 – Sædvanlige differentialligninger af anden orden og systemer i planet

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 6

- **Introduktion (6.1)**
- **Lineære ligninger af anden orden (6.2)**
- **Anden-ordens ligninger med konstante koefficienter (6.3): homogen**
- Stabilitet for lineære ligninger (6.4)
- Ligningssystemer i planet (6.5)
- Ligevægtspunkter for lineære systemer (6.6)
- Faseplananalyse (6.7)

6.1 Introduktion

6.1 Introduktion

En DL af anden orden har formen

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0.$$

hvor F er en givet funktion. En **løsning** på et interval I er en to-gange differentiabel funktion der opfylder ligningen.

6.1 Introduktion

Eksempel

1. $\ddot{x} = k$ er ækvivalent med $\dot{x} = \int k dt + A = kt + A$, $A \in \mathbb{R}$. Derved fås $x = kt^2/2 + At + B$, $B \in \mathbb{R}$.
2. $\ddot{x} = -x$ har løsningerne $x(t) = \sin t$ og $x(t) = \cos t$.

6.1 Introduktion

DL uden x eller uden t

Hvis enten t eller x (eller begge to) ikke indgår i DL'en,

$$\text{(a) } \ddot{x} = F(t, \dot{x}) \qquad \text{(b) } \ddot{x} = F(x, \dot{x}),$$

så kan den reduceres til en ligning af første-orden ved substitutionen $u = \dot{x}$

$$\dot{u} = F(t, u).$$

(I tilfældet (b) er ligningen **autonom**. Exercise 6 viser hvordan man kan bytte om på t og x for at overføre problemet til formen (a).)

6.1 Introduktion

Eksempel

DL'en

$$\ddot{x} = \dot{x} + t$$

bliver til

$$\dot{u} = u + t$$

efter substitutionen $u = \dot{x}$. Det integreres til

$$u = A\,e^{t} - t - 1 = \dot{x},\ A \in \mathbb{R},$$

og derved

$$x = \int (A\,e^{t} - t - 1)dt = Ae^{t} - t^2/2 - t + B,\ B \in \mathbb{R}.$$

Begyndelsesbetingelser som $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$ implicerer at

$$x(0) = A + B = 1, \quad \dot{x}(0) = u(0) = A - 1 = 2.$$

Vi kan løse de to ligninger i to ubekendte for at få $A = 3$ og $B = -2$.

6.2 Lineære ligninger af anden orden

6.2 Lineære ligninger af anden orden

Den almindelige lineære DL af anden orden har formen

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \tag{1}$$

hvor $a(t), b(t)$, og $f(t)$ er kontinuerte funktioner af t på et interval I.

6.2 Lineære ligninger af anden orden

Teorem (6.2.1)

(a) Løsningen på den **homogene DL**

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \quad \text{er} \quad x = Au_1(t) + Bu_2(t),$$

hvor $u_1(t)$ og $u_2(t)$ er to løsninger der ikke er proportionale ($u_1 \neq ru_2 \, \forall \, r \in \mathbb{R}$), og A og B er vilkårlige konstante.

(b) Den fuldstændige løsning på den **inhomogene DL**

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \quad \text{er} \quad x = Au_1(t) + Bu_2(t) + u^*(t),$$

med $Au_1(t) + Bu_2(t)$ løsningen på den tilknyttede homogene DL (med $f(t)$ sat til nul), og $u^*(t)$ en **partikulær løsning** på den inhomogene DL.

Sætning

Betragt den homogene DL

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0.$$

Antag at u_1 and u_2 er løsninger. Hver linearkombination

$$Au_1(t) + Bu_2(t)$$

af u_1 og u_2 er også en løsning.

6.2 Lineære ligninger af anden orden

Betragt den inhomogene DL

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t).$$

Hvis vi har en løsning u^* på den inhomogene DL, og en løsning u på den homogene DL, så er

$$x = u + u^*$$

også en løsning på den inhomogene DL.

Eksempel

Betragt DL'en

$$\ddot{x} - x = 5.$$

Den homogene DL $\ddot{x} - x = 0$ er løst ved funktioner der er invariant under differentiation, såsom $u_1 = Ae^t$. Bemærk at

$$\frac{d^2}{dt^2} Be^{-t} = Be^{-t},$$

og derfor er $u_2 = Be^{-t}$ en yderlig løsning af den homogene DL. En partikulær løsning af den inhomogene DL er

$$u^*(t) \equiv -5,$$

og så får vi den fuldstændige løsning af den inhomogene DL som

$$x(t) = u_1(t) + u_2(t) + u^*(t) = Ae^t + Be^{-t} - 5.$$

6.3 Konstante koefficienter

6.3 Konstante koefficienter

Teorem (6.3.1)

Den **fuldstændige løsning** på

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

afhænger af rødderne af den karakteristiske ligning $r^2 + ar + b = 0$:

(I) Hvis $\frac{a^2}{4} - b > 0$, hvor der er to distinkte reelle rødder, så gælder

$$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad \text{hvor} \quad r_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

(II) Hvis $\frac{a^2}{4} - b = 0$, hvor der er en dobbelt rod, så gælder

$$x = (A + Bt)e^{rt}, \quad \text{hvor} \quad r = -\frac{a}{2}$$

(III) Hvis $\frac{a^2}{4} - b < 0$, hvor der er to komplekse rødder, så gælder

$$x = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t), \quad \alpha = -\frac{a}{2}, \ \beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

6.3 Konstante koefficienter

Eksempel

Betragt DL'en

(a) $\ddot{x} - 3x = 0$.

(b) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$.

(c) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 13x = 0$.

(a): Den karakteristiske ligning er

$$r^2 - 3 = 0,$$

med rødder $\pm\sqrt{3}$, og den fuldstændige løsning er

$$x(t) = Ae^{-\sqrt{3}t} + Be^{\sqrt{3}t}.$$

(b):Den karakteristiske ligning er

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0,$$

med dobbelt rod $r = 2$. Den fuldstændige løsning er

$$x(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t}.$$

Eksempel

(c): Den karakteristiske ligning er

$$r^2 - 6r + 13 = 0$$

med komplekse rødder

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta = 3 \pm i\sqrt{13 - 36/4} = 3 \pm 2i.$$

Den fuldstændige løsning er

$$x(t) = e^{3t}(A\cos(2t) + B\sin(2t)).$$