Mathematics for Economists
Kapitel 3 – Statisk Optimering

Eric Hillebrand

Institut for økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 3

- Ekstremumspunkter (3.1)
- Lokale ekstremumspunkter (3.2)
- Bibetingelser givet ved ligheder (3.3)
- **Bibetingelser givet ved uligheder (3.5)**
- **Tilstrækkelige betingelser (3.6)**

3.5 Bibetingelser givet ved uligheder

3.5 Bibetingelser givet ved uligheder

Standardproblemet er:

$$\max f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{således, at} \quad \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1, \\ \quad \cdots, \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq b_m, \end{cases} \tag{1}$$

med $b_1, \ldots, b_m$ konstante. En vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ der opfylder alle bibetingelser kaldes for **tilladt**. Mængden af alle tilladte vektorer kaldes for den **tilladte mængde**. Lagrange-funktionen er:

$$\mathcal{L}(x) = f(x) - \lambda_1(g_1(x) - b_1) - \cdots - \lambda_m(g_m(x) - b_m)$$

3.5 Bibetingelser givet ved uligheder

Kuhn-Tucker Betingelser

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

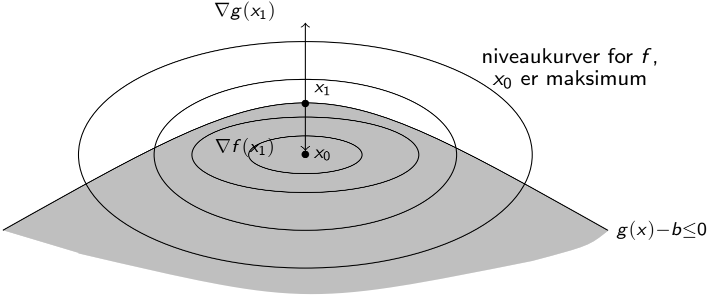
$$\lambda_j \geq 0, \quad \text{og} \quad \lambda_j = 0 \text{ hvis } g_j(x) < b_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

(a) De to uligheder $\lambda_j \geq 0$ og $g_j(x) \leq b_j$ er **komplementært slække** i den forstand at højst én kan være slæk—dvs. højst én kan holde med streng ulighed. Med andre ord skal mindst en holde som lighed. Vi kan kort skrive

$$\lambda_j(g_j(x) - b_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

(b) Hvis $g_j(x^*) = b_j$, så kaldes bibetingelsen $g_j(x) \leq b_j$ for **aktiv** eller **bindende** i x^*.

3.5 Bibetingelser givet ved uligheder



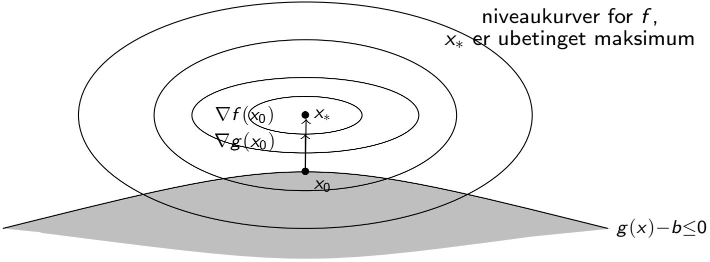
bibetingelsen er **ikke aktiv**

Bibetingelsen er ikke aktiv i x_0 og derfor er $\nabla f(x_0) = 0$. I Lagrange-multiplikator ligningen

$$\nabla f(x_0) = \lambda \, \nabla g(x_0),$$

hvis $\nabla f(x_0) = 0$ og $\nabla g(x_0) \neq 0$, så følger at $\lambda = 0$. (En bibetingelse der ikke er aktiv implicerer ingen alternativomkostninger.)

3.5 Bibetingelser givet ved uligheder



bibetingelsen **aktiv**

Bibetingelsen er aktiv i x_0, dvs. $g(x_0) - b = 0$, og

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

er den nødvendige betingelse, med $\lambda \neq 0$. Vi kan kortfattet udtrykke betingelsen om komplementær slæk som

$$\lambda(g(x_0) - b) = 0.$$

Eksempel (Constraint qualification)

Betragt

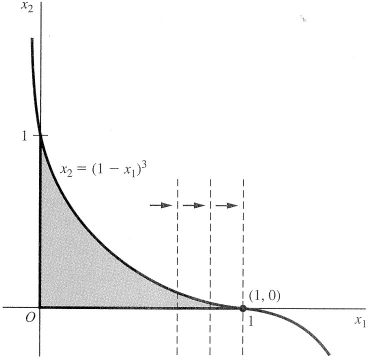
$$\max_{x,y} f(x,y) = x \qquad \text{således at}$$

$$g_1(x,y) = y - (1-x)^3 \leq 0,$$
$$g_2(x,y) = -x \leq 0,$$
$$g_3(x,y) = -y \leq 0.$$

I $(1,0)$ er g_2 slæk: $\lambda_2 = 0$. Gradienterne er:

$$\nabla f(1,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_1(1,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla g_2(1,0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_3(1,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\nabla f(1,0) \neq \lambda_1 \nabla g_1(1,0) + \lambda_3 \nabla g_3(1,0) \text{ men } \nabla g_3(1,0) = -\nabla g_1(1,0).$$


x_2
1
$x_2 = (1 - x_1)^3$
(1, 0)
O
1
x_1

3.5 Bibetingelser givet ved uligheder

Teorem (3.5.1, Kuhn-Tucker Nødvendige Betingelser)

Antag at $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ løser problemet (1), hvor f og $g_1, \dots, g_m$ er C^1 funktioner på en mængde S i $\mathbb{R}^n$ og x^* er et indre punkt i S. Antag derudover at betingelsen om **constraint qualification** er opfyldt:

CQ: Gradientvektorerne $\nabla g_j(x^*)$, $1 \leq j \leq m$, *tilsvarende til de aktive bibetingelser i* x^* er lineært uafhængige.

I dette tilfælde findes tal $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ således at Kuhn-Tucker betingelserne (2)–(3) er opfyldte i $x = x^*$.

Constraint Qualification

For at finde alle mulige kandidatløsninger følges opskriften:

(I) Find alle tilladte punkter, hvor Kuhn-Tucker betingelserne er opfyldte.

(II) Find alle tilladte punkter, hvor CQ betingelsen ikke holder.

3.6 Tilstrækkelige Betingelser

3.6 Tilstrækkelige betingelser

Kuhn-Tucker betingelserne er nødvendige, men ikke tilstrækkelige.

Hvis Lagrange funktionen er konkav, så er KT-betingelserne også tilstrækkelige.

Teorem (3.6.1, Tilstrækkelige betingelser I)

Betragt standardproblemet (1) med tilhørende Lagrange funktion $\mathcal{L}(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - b_j)$. Antag, at x^* er tilladt og, in forbindelsen med vektoren $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, opfylder Kuhn-Tucker betingelserne. Hvis Lagrange-funktionen er konkav, så er x^* optimal.

Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(x) = f(x) - \lambda_1 (g_1(x) - b_1) - \ldots - \lambda_m (g_m(x) - b_m)$$

er konkav, hvis $f(x)$ er konkav og $\lambda_1 g_1, \ldots, \lambda_m g_m$ er konvekse, fordi summer af konkave funktioner er konkav.

3.6 Tilstrækkelige betingelser

Vi kan generalisere:

Teorem (3.6.3, Tilstrækkelige betingelser for kvasikonkav optimering)

Betragt standardproblemet (1), hvor objektfunktionen f er C^1 og kvasikonkav. Antag at der findes tal $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ og en vektor x^* således, at

(a) x^* er tilladt og opfylder Kuhn-Tucker betingelserne (3.5.2)–(3.5.3);

(b) $\nabla f(x^*) \neq 0$;

(c) $\lambda_j g_j(x)$ er kvasikonveks for $j = 1, \dots, m$.

Så er x^* optimal.