Mathematics for Economists
Kapitel 4 – Integration

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 4

- Integration af funktioner på et interval (4.1)
- Leibnizformel (4.2)
- **Integraler af funktioner af flere variable på produktmængder (4.4)**
- **Planintegral over begrænsede mængder (4.5)**
- Riemann integral af funktioner af flere variable (4.6)
- Substitution for planintegraler (4.7)

4.4 Integraler af funktioner af flere variable på produktmængder

4.4 Integraler på produktmængder

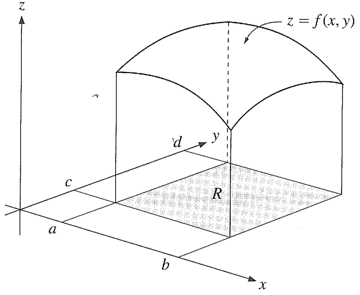

Figure 1

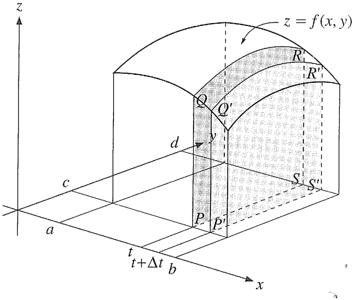

Figure 2

Produktmængde: $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

$$PQRS = A(t) = \int_c^d f(t, y) dy.$$

Rumfang mellem arealerne $PQRS$ og $P'Q'R'S'$:

$$V(t + \Delta t) - V(t) \approx A(t)\Delta t.$$

4.4 Integraler på produktmængder

Betragt grænseværdien $\Delta t \to dt$:

$$dV(t) = A(t)dt.$$

Ved fundamentalsætningen

$$V(t+h) - V(t) = \int_t^{t+h} A(\tau)d\tau = \int_t^{t+h} \left(\int_c^d f(\tau, y)dy \right) d\tau.$$

Derfor fås rumfanget

$$V(b) - V(a) = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, y)dy \right) dt.$$

Teorem (4.4.1 Fubini)

Lad $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ kontinuert. Der gælder at

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t, y) dy \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, y) dt \right) dy.$$

4.4 Integraler på produktmængder

Denne fremgangsmåde generaliseres umiddelbart til $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$, og

$$S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

Hvis f kontinuert, sådefinerer vi

$$\int_S f(x)dx = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

4.5 Planintegral over begrænsede mængder

4.5 Planintegral over begrænsede mængder

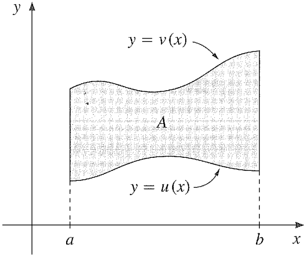

Figure 1

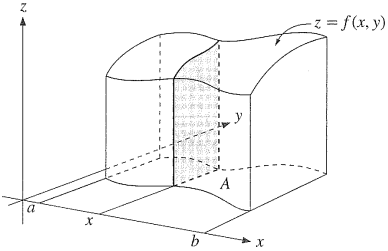

Figure 2

Vi beskriver nu integration på mængder

$$S = [a, b] \times [u(x), v(x)],\ x \in [a, b].$$

Et skæringsareal af integralet (rumfanget) i punktet $x \in [a, b]$ er givet ved

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy.$$

4.5 Planintegral over begrænsede mængder

Analogt med definitionen for produktmængder kan vi integrere for at få rumfanget

$$V(b) - V(a) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

4.5 Planintegral over begrænsede mængder

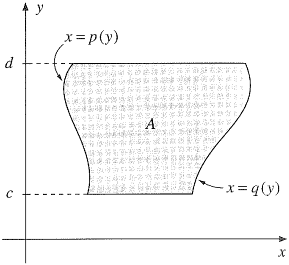

Figure 4

Hvis vi betragter kontinuerte funktioner, så kan vi (ved Fubini) sagtens generalisere integrationen til situationer hvor x-koordinaten er givet som funktion af y-koordinaten:

$$V = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

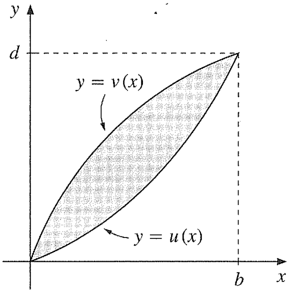

Figure 5

Hvis der ingen rektangulære grænser er, men funktionerne er monotone og kontinuerte, med kontinuerte inverse funktioner, så kan vi definere integralet af en ikke-negativ funktion på en af to måder:

$$\int_0^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_0^d \left(\int_{v^{-1}(y)}^{u^{-1}(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

4.5 Planintegral over begrænsede mængder

Sætning

Lad $f(x, y)$ være en kontinuert funktion på rektanglet $[a, b] \times [c, d]$, og lad

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

for hvert $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Der gælder

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).$$