2622 Matematik for Økonomer
Eric Hillebrand

Opgavesæt 10

Opgave 1
Section 5.4 Problem 6

Opgave 2
Section 5.6 Problem 1

Opgave 3: Et økonomisk eksempel på en DL, hvor indikatorvariablen ikke er tiden
Lad $U : x \mapsto U(x) \in \mathbb{R}$ være en mindst to-gange kontinuert differentiabel nyttefunktion. Elasticiteten for den første afledede U' ift. gode x,

$$-\epsilon_x(U') = -\left. \frac{dU'(x)}{U'(x)} \middle/ \frac{dx}{x} \right. = -\frac{dU'(x)}{dx} \frac{x}{U'(x)} = -\frac{U''(x)x}{U'(x)}$$

hedder **Arrow-Pratt måltal** for relativ risikoaversion. Ved at kræve en konstant relativ risikoaversion (CRR), eller konstant intertemporal substitutionselasticitet (C(I)ES), opstiller man en DL af anden orden for U:

$$-\frac{U''(x)x}{U'(x)} \equiv \theta \iff U''(x) = -\frac{\theta}{x} U'(x),\ \theta > 0.$$

Betragt substitutionen $v(x) := U'(x)$. Så gælder

$$v'(x) = -\frac{\theta}{x} v(x)$$

Løs denne første-ordens DL for v og integrér v for at få U. Du skal skelne mellem tilfældene $\theta \neq 1$ og $\theta = 1$. Den resulterende klasse af funktioner er familien af CRR eller C(I)ES nyttefunktioner. Jo større θ, desto større er den relative formindskelse i $U'(x)$ når x vokser. Det betyder, at store forandringer i x er mindre velkomne end med en mindre værdi af θ.
Lad $v(x) := U'(x)$. Så følger, at

$$\begin{aligned} v'(x) &= -\frac{\theta}{x} v(x), \\ \int \frac{v'(x)}{v(x)}\, dx = \int \frac{1}{v(x)}\, dv &= -\int \frac{\theta}{x} dx, \\ \log v(x) &= -\theta(\log x + c),\ c \in \mathbb{R}, \\ v(x) &= e^{-\theta c}\, x^{-\theta} =: k_0 x^{-\theta}. \end{aligned}$$

Derved har vi, at

$$\begin{aligned} U(x) &= \int U'(x)\, dx = \int v(x)\, dx, \\ &= \int k_0 x^{-\theta}\, dx = \frac{x^{1-\theta}}{1-\theta} k_0 + k_1,\ k_1 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

for $\theta \neq 1$. For $\theta = 1$,

$$\int k_0 x^{-1}\, dx = k_0 \log x + k_1.$$

Det er familien af CRR eller C(I)ES nyttefunktioner.
Måske er det ikke åbenlyst, at det er en separabel ligning. Brug notationen $x(t) := v(x)$, dvs. $x := v$ og $t := x$. Så bliver $v'(x) = -\theta\, v(x)/x$ til

$$\dot{x}(t) = -\frac{\theta}{t} x(t).$$

Lad $g(t) = -\theta/t$ og $h(x) = x$. Separation af variablene giver selvfølgelig den samme løsning som ovenfor.

Opgave 4: The global carbon budget and the airborne fraction
En almindelig antagelse indenfor klimaforskning er, at havet og planterne optager CO2 i atmosfæren lineært ved

$$S_{OCN}(t) = \frac{1}{\tau_{OCN}} C(t) = \beta_1 C(t),$$
$$S_{LND}(t) = \frac{1}{\tau_{LND}} C(t) = \beta_2 C(t),$$

hvor $S_{OCN,LND}$ står for optagelsen (S-sink, OCN-ocean, LND-land), og de positive tal τ_{OCN} og τ_{LND} beskriver den gennemsnitlige tid, det tager for havet og planterne, at optage en enhed $C(t)$ af atmosfærisk CO2-koncentration på tidspunkt t.
Fordi CO2 udledninger fra økonomisk aktivitet $E(t)$ optages enten af havet, planterne, eller atmosfæren, kan vi skrive, at den øjeblikkelige forandring i atmosfærisk CO2 er givet ved

$$\dot{C}(t) = E(t) - \left(\frac{1}{\tau_{OCN}} + \frac{1}{\tau_{LND}}\right) C(t) = E(t) - (\beta_1 + \beta_2) C(t),$$

en differentialligning der hedder "global carbon budget".

1. Løs differentialligningen.

2. Vis at, hvis vi antager, at CO2 udledningerne er eksponentielle:

   $$E(t) = E_0 e^{\alpha t},\ \alpha > 0,$$

   så konvergerer kvotienten

   $$AF = \frac{\dot{C}(t)}{E(t)}$$

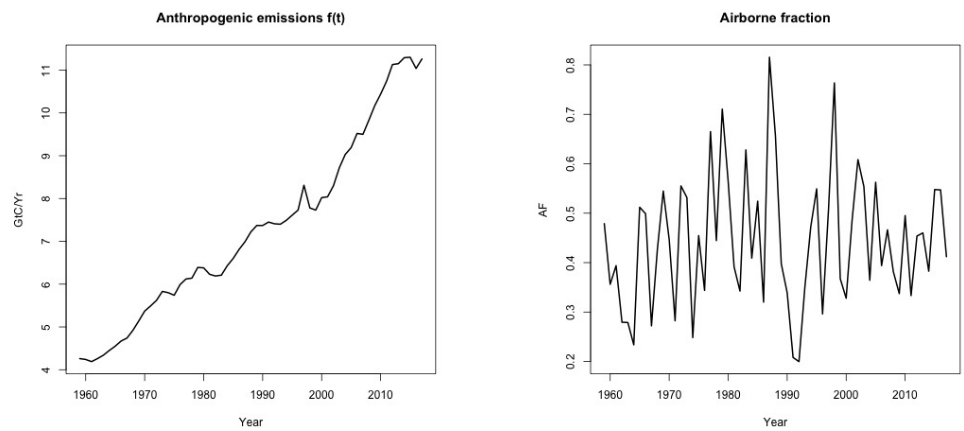
   mod et konstant tal. Kvotienten "AF" kaldes for "airborne fraction", andelen af CO2 udledningerne, der forbliver i atmosfæren.

Gloor, Sarmiento, and Gruber, 2010, "What can be learned about carbon cycle climate feedbacks from the CO2 airborne fraction", *Atmospheric Chemistry and Physics*, 10:7739–7751.

Data: Le Quéré et al., 2018, "Global Carbon Budget 2018", *Earth System Science Data*, 10:2141-2194.

Figure 1: Globale CO2 udledninger fra industriel aktivitet og landbrug; andelen af udledningerne, der forbliver i atmosfæren (airborne fraction), 1959–2017

(a) CO2 udledninger (b) Airborne Fraction



Løsningen er givet ved den almindelige formel for tidsafhængige koefficienter:

$$C(t) = C_0 e^{-(\beta_1+\beta_2)t} + e^{-(\beta_1+\beta_2)t} \int e^{(\beta_1+\beta_2)s} E(s) ds.$$

Hvis

$$E(t) = E_0 e^{\alpha t},$$

bliver integralet

$$\int e^{(\beta_1+\beta_2)s} E_0 e^{\alpha s} ds = \frac{E_0}{\alpha+\beta_1+\beta_2} e^{(\alpha+\beta_1+\beta_2)t}$$

og

$$e^{-(\beta_1+\beta_2)t} \int e^{(\beta_1+\beta_2)s} E_0 e^{\alpha s} ds = \frac{E_0}{\alpha+\beta_1+\beta_2} e^{\alpha t}$$

Så er løsningen givet ved

$$C(t) = C_0 e^{-(\beta_1+\beta_2)t} + \frac{E_0}{\alpha+\beta_1+\beta_2} e^{\alpha t}.$$

AF er givet ved

$$AF = \frac{\dot{C}}{E} = 1 - (\beta_1+\beta_2)\frac{C}{E}.$$

Brøken er

$$\frac{C}{E} = \frac{C_0}{E_0} e^{-(\alpha+\beta_1+\beta_2)t} + \frac{1}{\alpha+\beta_1+\beta_2},$$

og

$$AF = \frac{\alpha}{\alpha+\beta_1+\beta_2} + \frac{C_0(\beta_1+\beta_2)}{E_0} e^{-(\alpha+\beta_1+\beta_2)t},$$

som konvergerer mod

$$AF \to_{t\to\infty} \frac{\alpha}{\alpha + \beta_1 + \beta_2}.$$

8-minutters foredrag

1. Lineære DL af første orden
2. Separable ligninger, substitution, kvalitativ teori