Mathematics for Economists
Kapitel 6 – Sædvanlige differentialligninger af anden orden og systemer i planet

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 6

- Introduktion (6.1)
- Lineære ligninger af anden orden (6.2)
- **Anden-ordens ligninger med konstante koefficienter (6.3): inhomogen**
- **Stabilitet for lineære ligninger (6.4)**
- Ligningssystemer i planet (6.5)
- Ligevægtspunkter for lineære systemer (6.6)
- Faseplananalyse (6.7)

6.3 Konstante koefficienter

Betragt den inhomogene DL

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t),$$

med fuldstændig løsning

$$x(t) = u_1(t) + u_2(t) + u^*(t).$$

- $f(t) \equiv A$ (constant): Lad

  $$u^* = c \text{ (constant).}$$

  Der gælder at $\dot{u}^*, \ddot{u}^* = 0$, og

  $$bc = A, \Rightarrow \; c = A/b.$$

- $f(t)$ er polynomium. Antag at løsningen også er et polynomium:

  $$u^* = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0$$

6.3 Konstante koefficienter

- $f(t) = pe^{qt}$. Antag at
$$u^* = Ae^{qt}.$$
Så er
$$u^*(t) = \frac{p}{q^2 + aq + b} e^{qt}.$$
Hvis q er en enkel rod af den karakteristiske ligning, så bruger vi $u^* = Bte^{qt}$.
Hvis q er en dobbelt rod, så bruger vi $u^* = Ct^2 e^{qt}$.

6.3 Konstante koefficienter

- $f(t) = p\sin(rt) + q\cos(rt)$. Antag at

$$u^* = A\sin(rt) + B\cos(rt),$$

og bestem koefficienterne ved sammenligning.

6.3 Konstante koefficienter

Euler's Differential Equation

Betragt **Eulers DL**

$$t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0, \quad t > 0.$$

Ved hjælp af substitutionen $s = \log t$ kan Eulers DL overføres til ligningen

$$\frac{d^2x}{ds^2} + (a-1)\frac{dx}{ds} + bx = 0,$$

med karakteristisk polynomium

$$r^2 + (a-1)r + b = 0.$$

6.3 Konstante koefficienter

Bemærk at løsningen er givet i $s = \log t$:

- $(a-1)^2/4 - b > 0$:

$$x(t) = Ae^{r_1 s} + Be^{r_2 s} = Ae^{r_1 \log t} + Be^{r_2 \log t} = At^{r_1} + Bt^{r_2}.$$

- $(a-1)^2/4 - b = 0$:

$$x(t) = (A + Bs)e^{rs} = (A + B\log t)e^{r \log t} = (A + B\log t)t^r.$$

- $(a-1)^2/4 - b < 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha s}(A\cos(\beta s) + B\sin(\beta s)), \\ &= e^{\alpha \log t}(A\cos(\beta \log t) + B\sin(\beta \log t)), \\ &= t^{\alpha}(A\cos(\beta \log t) + B\sin(\beta \log t)). \end{aligned}$$

6.4 Stabilitet for lineære ligninger

6.4 Stabilitet for lineære ligninger

Hvad er konsekvenserne af små forandringer i begyndelsesbetingelserne når $t \to \infty$? Hvis forandringerne forsvinder med tiden, så kaldes ligningen for **asymptotisk stabilt**.

Betragt den inhomogene DL af anden orden

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \tag{1}$$

Ligning (1) hedder **globalt asymptotisk stabilt** hvis hver løsning $Au_1(t) + Bu_2(t)$ på den tilknyttede homogene ligning konvergerer mod 0 når $t \to \infty$ for hver A og B. Effekten af begyndelsesbetingelsen forsvinder når $t \to \infty$.

6.4 Stabilitet for lineære ligninger

Alle løsninger har formen

$$x(t) = \sum_i A_i(t) e^{(\mathrm{Re}\, r_i)t},$$

hvor $\mathrm{Re}\, r_i$ er realdelene af rødderne af den karakteristiske ligning, og $e^{(\mathrm{Re}\, r_i)t}$ dominerer $A_i(t)$. Derved har vi et kriterium for stabilitet:

Stabilitetskriterium

Ligningen $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$ er globalt asymptotisk stabil hvis og kun hvis begge rødder af den karakteristiske ligning $r^2 + ar + b = 0$ har negative realdele.

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \text{ er global asymptotisk stabil } \iff a > 0 \text{ og } b > 0$$

Eksempel

(1) $t^2\ddot{x} + 3t\dot{x} + \frac{3}{4}x = 3.$

(2) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = e^t.$

(3) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 3t^2 + 2.$

(1): Euler DL med karakteristisk ligning

$$r^2 + (3-1)r + \frac{3}{4} = 0,$$

med reelle rødder $r_1 = -1/2$ and $r_2 = -3/2$. Løsning på den homogene ligning:

$$x(t) = At^{-1/2} + Bt^{-3/2},\ x(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty.$$

(2): Den karakteristiske ligning

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

har rødder $r_1 = -1 + 2i$, $r_2 = -1 - 2i$. Løsning på den homogene ligning

$$x(t) = e^{-t}(A\cos(2t) + B\sin(2t)),\ x(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty.$$

Eksempel

(3): Karakteristisk ligning:

$$r^2 + r - 2 = 0,$$

med rødder $r_1 = -2$, $r_2 = 1$. En rod har positiv realdel, og den tilhørende løsning e^{rt} er eksplosiv.