Mathematics for Economists
Kapitel 12 – Optimering i Diskret Tid

Eric Hillebrand

Institut for økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 12

- **Dynamisk programmering (12.1)**
- Euler ligningen (12.2)
- Ubegrænset periode (12.3)
- Maksimumsprincippet (12.4)

12.1 Dynamisk Programmering

12.1 Dynamisk Programmering

Betragt problemet

$$\max_{u_t \in U} \sum_{t=0}^{T} f(t, x_t, u_t), \tag{1}$$

under bibetingelser

$$x_{t+1} = g(t, x_t, u_t), \quad x_0 \in \mathbb{R} \text{ givet.} \tag{2}$$

Vælg værdier $\{u_0, u_1, \ldots, u_{T-1}\}$ for at maksimere objektfunktionen. Der gælder, at

$$\begin{aligned} x_1 &= g(0, x_0, u_0), \\ x_2 &= g(1, x_1, u_1), \\ &\ldots \\ x_T &= g(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}). \end{aligned}$$

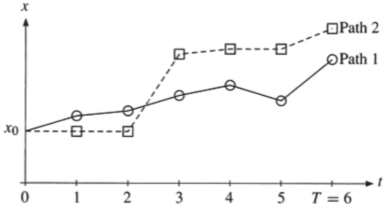

Figure 1 Different evolutions of system (1)

12.1 Dynamisk Programmering

- $(\{x_t\}_{t=0}^T, \{u_t\}_{t=0}^T)$ der opfylder (2): **tilladt sekvenspar**
- $(\{x_t^*\}_{t=0}^T, \{u_t^*\}_{t=0}^T)$ der opfylder (1), (2): **optimalt sekvenspar**,
- $\{u_t^*\}_{t=0}^T$ **optimal kontrolsekvens**,
- $\{x_t^*\}_{t=0}^T$ **optimal tilstandssekvens**.

12.1 Dynamisk Programmering

- Lad tilstandsvariablen $x_t = x_s \in \mathbb{R}$ være givet i perioden $t = s$.
- Vælg $\{u_s, u_{s+1}, \ldots, u_T\}$ og derved $\{x_s, x_{s+1}, \ldots, x_T\}$ for at maksimere

$$\sum_{t=s}^{T} f(t, x_t, u_t).$$

- Definér den **optimale værdifunktion**

$$J_s(x_s) = \max_{u_s, \ldots, u_T \in U} \sum_{t=s}^{T} f(t, x_t, u_t),$$

hvor

$$x_{t+1} = g(t, x_t, u_t), \; t > s.$$

12.1 Dynamisk Programmering

- Ved sluttidspunktet T,

$$J_T(x_T) = \max_{u_T \in U} f(T, x_T, u_T).$$

- I perioden $t = s$ er systemet i tilstand x_s. Hvad er det optimale valg for u_s? Den umiddelbare gavn af valget u_s er

$$f(s, x_s, u_s)$$

og

$$x_{s+1} = g(s, x_s, u_s).$$

- Så er den højstmulige gavn i restperioden $t = s+1, \dots, T$

$$\sum_{t=s+1}^{T} f(t, x_t, u_t)$$

per definition lig med

$$J_{s+1}(x_{s+1}) = J_{s+1}(g(s, x_s, u_s)).$$

12.1 Dynamisk Programmering

- Derfor maksimerer den optimale kontrolvariabel u_s i perioden s summen

$$f(s, x_s, u_s) + J_{s+1}(g(s, x_s, u_s)).$$

Teorem (12.1.1, Fundamentalligningerne i dynamisk programmering)

For hvert $s = 0, 1, \dots, T-1, T$, lad $J_s(x_s)$ være værdifunktionen for problemet

$$\max \sum_{t=0}^{T} f(t, x_t, u_t) \quad \text{således at} \quad x_{t+1} = g(t, x_t, u_t), \quad u_t \in U,$$

med x_0 givet. Så opfylder sekvensen $\{J_s(x_s)\}_{s=0,1,\dots,T}$ af værdifunktionerne de følgende lingninger:

$$J_s(x_s) = \max_{u_s \in U} \left[f(s, x_s, u_s) + J_{s+1}(g(s, x_s, u_s)) \right], \quad s = 0, 1, \dots, T-1,$$

$$J_T(x_T) = \max_{u_T \in U} f(T, x_T, u_T).$$