Mathematics for Economists
Kapitel 2 – Analyse af flere variable

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 2

- Indsættelser: Grænseværdier, kontinuitet, optimering af funktioner af en variabel, middelværdisætningen, Taylor formlen for funktioner af en variabel
- Partielle afledede, gradienter (2.1)
- Differentiabilitet (2.9)
- Taylor formlen for funktioner af flere variable (2.6)
- **Implicit givne funktioner (2.7)**
- Konvekse mængder (2.2)
- Konkave og konvekse funktioner (2.3/2.4)
- Kvasikonkave og -konvekse funktioner (2.5)

2.7 Implicit givne funktioner

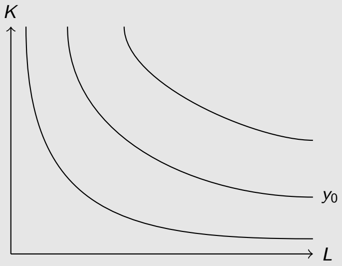
Eksempel

Betragt Cobb-Douglas produktionsfunktionen

$$Y(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}, \quad A, \alpha, \beta > 0, \; L, K > 0,$$

på konstant niveau y_0:

$$Y(L, K) = y_0 \iff \underbrace{Y(L, K) - y_0}_{=:F(L,K)} = 0.$$



Eksempel

På niveau y_0 kan vi tegne isokvantkurven $\{(L, K) | Y(L, K) = y_0\}$ og skrive den som funktion $g : L \longmapsto K$, eller $K = g(L)$. Derved har vi

$$F(L, K) = F(L, g(L)) = Y(L, g(L)) - y_0 = 0 \text{ for alle } L.$$

Hvad er den marginale substitutionsrate dK/dL?

$$\frac{dK}{dL} = \frac{dg(L)}{dL} \overset{IFT}{=} -\frac{D_L F(L, K)}{D_K F(L, K)} = -\frac{A\alpha L^{\alpha-1} K^{\beta}}{A\beta L^{\alpha} K^{\beta-1}} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L}.$$

2.7 Implicit givne funktioner

Vi betragter en niveaukurve for $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på $C \in \mathbb{R}$, med F kontinuert differentiabel:

$$f(x, y) := F(x, y) - C = 0$$

Ligningen bestemmer $y = y(x)$ som en **implicit givet funktion** of x. (I Cobb-Douglas eksemplet, isokvantkurven $K(L)$ er den implicit givne funktion.)

2.7 Implicit givne funktioner

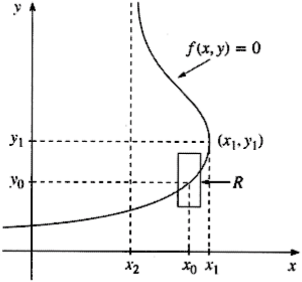


Figure 1 The graph of $f(x, y) = 0$

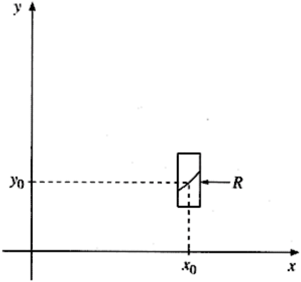


Figure 2 $f(x, y) = 0$ defines y as a function of x in the rectangle R.

Hvis $f(x_0, y_0) = 0$ og $f_2'(x_0, y_0) \neq 0$, så definerer ligningen $f(x, y) = 0$ det andet argument y som implicit givet funktion $y = \varphi(x)$ af det første argument x i nærheden af x_0, med $y_0 = \varphi(x_0)$, og med den afledede givet ved $y' = -f_1'(x, y)/f_2'(x, y)$.

2.7 Implicit givne funktioner

Teorem (Implicit givne funktioner i et punkt)

Lad $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^m$, $k, m \in \mathbb{N}$, and $r_1, r_2 > 0$. Lad

$$X_1 := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x - a\| < r_1\},$$
$$Y_1 := \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - b\| < r_2\},$$

og lad

$$\begin{aligned} F : X_1 \times Y_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y), \\ F(a, b) &= 0. \end{aligned}$$

I punktet (a, b), lad F være differentiabel og den $m \times m$ matrix $D_y F(a, b)$ være invertibel.

Teorem (Implicit givne funktioner i et punkt)

Lad

$$
\begin{aligned}
g : X_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\
x &\longmapsto g(x), \\
g(a) &= b,
\end{aligned}
$$

være en kontinuert funktion således, at $g(X_1) \subset Y_1$ og

$$F(x,\, g(x)) = 0 \text{ for enhver } x \in X_1.$$

Så er g differentiabel i $a \in \mathbb{R}^k$ og Jacobi matricen er givet ved

$$D_x g(a) = -D_y F(a,\, b)^{-1} D_x F(a,\, b).$$

2.7 Implicit givne funktioner

Bemærk, at vi kun antager, at g er kontinuert. Det følger fra teoremet om implicit givne funktioner, at g også er differentiabel. De afledede matricer nævnt i teoremet er eksplicite

$$D_x g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times k},$$

$$D_x F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times k},$$

$$D_y F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

I tilfældet $k = m = 1$,

$$D_x g = \frac{dg}{dx},\ D_x F = \frac{\partial F}{\partial x},\ D_y F = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

2.7 Implicit givne funktioner

Hvis vi forstærker antagelserne for teoremet til kontinuert differentiabilitet af F i (a, b), så får vi, at g ikke kun er differentiabel i et punkt, men i en omegn af punktet.

Teorem (Implicit givne funktioner i en omegn, 2.7.2)

Lad F være kontinuert differentiabel i $(a, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Så er der omegne X_2, Y_2 af $a \in \mathbb{R}^k$ og $b \in \mathbb{R}^m$ således, at

$$\begin{aligned} X_2 &\subset X_1, \\ Y_2 &\subset Y_1, \\ g : X_2 &\longrightarrow Y_2 \end{aligned}$$

og

$$F(x, g(x)) = 0 \text{ for all } x \in X_2.$$

Generaliseringen virker fordi den invertible matrix $D_y F(a, b)$ indeholder kontinuerte funktioner $\partial F_i / \partial y_j$. Det betyder, at $D_y F$ ikke kun er invertibel i (a, b), men i en omegn, fordi hvis det $D_y F(a, b) \neq 0$ og denne matrix kun indeholder kontinuerte funktioner, så er det $D_y F(x, y) \neq 0$ for $(x, y) \in (X_2, Y_2)$ omegn af (a, b), fordi determinanten også er en kontinuert funktion.