2622 Matematik for Økonomer
Eric Hillebrand

Opgavesæt 10

Opgave 1
Section 5.3 Problem 2

Opgave 2
Section 5.4 Problem 2

Opgave 3
Section 5.4 Problem 6

Opgave 4
Section 5.6 Problem 1

Opgave 5: Et økonomisk eksempel på en DL, hvor indikatorvariablen ikke er tiden
Lad $U : x \mapsto U(x) \in \mathbb{R}$ være en mindst to-gange kontinuert differentiabel nyttefunktion. Elasticiteten for den første afledede U' ift. gode x,

$$-\epsilon_x(U') = -\left.\frac{dU'(x)}{U'(x)}\right/\frac{dx}{x} = -\frac{dU'(x)}{dx}\,\frac{x}{U'(x)} = -\frac{U''(x)x}{U'(x)}$$

hedder **Arrow-Pratt måltal** for relativ risikoaversion. Ved at kræve en konstant relativ risikoaversion (CRR), eller konstant intertemporal substitutionselasticitet (C(I)ES), opstiller man en DL af anden orden for U:

$$-\frac{U''(x)x}{U'(x)} \equiv \theta \iff U''(x) = -\frac{\theta}{x}\,U'(x),\ \theta > 0.$$

Betragt substitutionen $v(x) := U'(x)$. Så gælder

$$v'(x) = -\frac{\theta}{x}\,v(x)$$

Løs denne første-ordens DL for v og integrér v for at få U. Du skal skelne mellem tilfældene $\theta \neq 1$ og $\theta = 1$. Den resulterende klasse af funktioner er familien af CRR eller C(I)ES nyttefunktioner. Jo større θ, desto større er den relative formindskelse i $U'(x)$ når x vokser. Det betyder, at store forandringer i x er mindre velkomne end med en mindre værdi af θ.
Lad $v(x) := U'(x)$. Så følger, at

$$\begin{aligned}
v'(x) &= -\frac{\theta}{x}\,v(x),\\
\int \frac{v'(x)}{v(x)}\,dx &= \int \frac{1}{v(x)}\,dv = -\int \frac{\theta}{x}dx,\\
\log v(x) &= -\theta(\log x + c),\ c \in \mathbb{R},\\
v(x) &= e^{-\theta c}\,x^{-\theta} =: k_0 x^{-\theta}.
\end{aligned}$$

Derved har vi, at

$$
\begin{aligned}
U(x) &= \int U'(x)\,dx = \int v(x)\,dx, \\
&= \int k_0 x^{-\theta}\,dx = \frac{x^{1-\theta}}{1-\theta}k_0 + k_1,\ k_1 \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

for $\theta \neq 1$. For $\theta = 1$,

$$
\int k_0 x^{-1}\,dx = k_0 \log x + k_1.
$$

Det er familien af CRR eller C(I)ES nyttefunktioner.
Måske er det ikke åbenlyst, at det er en separabel ligning. Brug notationen $x(t) := v(x)$, dvs. $x := v$ og $t := x$. Så bliver $v'(x) = -\theta\, v(x)/x$ til

$$
\dot{x}(t) = -\frac{\theta}{t}x(t).
$$

Lad $g(t) = -\theta/t$ og $h(x) = x$. Separation af variablene giver selvfølgelig den samme løsning som ovenfor.

8-minutters foredrag

1. Lineære DL af første orden
2. Separable ligninger, substitution, kvalitativ teori