

## 2622 Matematik for Økonomer

Eric Hillebrand

### Opgavesæt 5

#### Opgave 1

1. Lad  $f(x) = \sin(x)$ . Brug Taylor-formlen for at vise, at

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(Husk, at  $\sin'(x) = \cos(x)$  og  $\cos'(x) = -\sin(x)$ .)

2. Find et tilsvarende udtryk for  $\cos(x)$ .
3. Brug 2.1 og 2.2 for at vise, at

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x),$$

hvor  $i$  er den imaginære enhed.

#### Opgave 2

Antag, at vi har en output funktion  $Y$  af arbejdsstyrke  $L$  og kapital  $K$ , som er to gange kontinuert differentiabel. Lad  $w$  betegne prisen per enhed arbejdsstyrke, og lad  $i$  betegne prisen per enhed kapital. Hvis vi minimerer omkostningerne for arbejde og kapital

$$C(L, K) = wL + iK,$$

således, at outputniveauet er konstant lig med  $Y_0$ ,

$$Y(L, K) = Y_0 \in \mathbb{R}_+,$$

så finder vi første-ordens betingelserne

$$\frac{w}{i} = \frac{D_L Y(L^*, K^*)}{D_K Y(L^*, K^*)} = -\text{marginalrate af teknisk substitution.} \quad (1)$$

(Vi skal komme tilbage til det i Kapitel 3.)

Betragt Cobb-Douglas produktionsfunktionen

$$Y(L, K) = AL^\alpha K^\beta.$$

1. Bestem gradienten og Hesse matricen.
2. Vis at Cobb-Douglas funktionen er homogen (af første grad, dvs. lineær i  $K$  og i  $L$ ) hvis  $\beta = 1 - \alpha$ .

3. For en produktionsfunktion  $Y(x)$ ,  $x = (K, L)'$ , betragt kvotienten

$$\frac{Y(\lambda x)}{\lambda Y(x)}, \quad \lambda > 1.$$

Hvis kvotienten er lig med 1, så siges funktionen at implicere konstante skalaafkast; hvis kvotienten er større end 1, så implicerer funktionen voksende skalaafkast; hvis kvotienten er mindre end 1, aftagende skalaafkast. Vis at Cobb-Douglas funktionen implicerer konstant skalaafkast hvis  $\beta = 1 - \alpha$ , voksende skalaafkast hvis  $\alpha + \beta > 1$  og aftagende skalaafkast hvis  $\alpha + \beta < 1$ .

4. Vis at forholdet mellem arbejde  $L$  og kapital  $C$ , der opfylder den første-ordens betingelse for optimalitet (1), er konstant.

5. Vis at

$$Y = K D_K Y(L, K) + L D_L Y(L, K),$$

dvs. hver inputfaktor betales beløbet af dens marginalprodukt, hvis  $\beta = 1 - \alpha$ . Nogle gang betegnes dette forhold som "Eulers teorem" indenfor økonomien.

6. Vis at substitutionselasticiteten

$$ES = \frac{\frac{d\left(\frac{L^*}{K^*}\right)}{\frac{L^*}{K^*}}}{\frac{d\left(\frac{i}{w}\right)}{\frac{i}{w}}}$$

der opfylder den første-ordens betingelse for optimalitet (1), er konstant.

7. Vis at de relative andele af faktorerne af produktet  $Y$  er givet ved

$$\frac{L D_L Y}{Y} = \alpha, \quad \frac{K D_K Y}{Y} = \beta.$$

### Opgave 3 (Ramsey Model)

1. Vis at Cobb-Douglas produktionsfunktionen  $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$  kan skrives i per-capita formen

$$y = Ak^\alpha,$$

hvor  $y = Y/L$  og  $k = K/L$ .

2. Vis at de steady-state ligevægtsværdier i Ramsey-modellen er givne ved

$$k^* = \left[ \frac{1}{\alpha A} (\delta + \rho + \theta \alpha_T) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$c^* = A(k^*)^\alpha - (\delta + \alpha_L + \alpha_T)k^*.$$

3. Vis at Jacobi matricen for

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \begin{bmatrix} \log k \\ \log c \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} Ak^{\alpha-1} - \frac{c}{k} - (\delta + \alpha_L + \alpha_T) \\ \frac{1}{\theta} (\alpha Ak^{\alpha-1} - (\delta + \rho + \theta \alpha_T)) \end{bmatrix},$$

evalueret i  $(\log k^*, \log c^*)$  er givet ved

$$J_f(\log k^*, \log c^*) = \begin{bmatrix} \rho - \alpha_L - (1 - \theta)\alpha_T & \delta + \alpha_L + \alpha_T - \frac{1}{\alpha}(\delta + \rho + \theta \alpha_T) \\ \frac{\alpha-1}{\theta}(\delta + \rho + \theta \alpha_T) & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Vis at

$$f(\log k^*, \log c^*) = (0, 0)^T.$$

#### Opgave 4

Section 2.7 Exercise 3

Løs med Teoremet om Implicit Givne Funktioner, som vi har behandlet det. (Det er lidt anderledes end løsningen i bogen.)

#### 8-minutters foredrag

1. Taylor-formlen
2. Teorem om Implicit Givne Funktioner