$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x^*) = 0, \quad f''(x^*) < 0$

$\Rightarrow \; x^*$ maksimumspunkt

x^* maksimumspunkt

$\Rightarrow \; f'(x^*) = 0, \quad f''(x^*) \leq 0$

$x^T \operatorname{Hen} f(x^*) x > 0$

(a) Hvis $\operatorname{Hen} f(x^*)$ er positivt def., så er de ledende underdeterminanter

$$D_k(x^*) > 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Determinanten er en kontinuert afbildning.

$\Rightarrow$ Der findes en kugle $B(x^*, r)$, $r > 0$, hvor $\operatorname{Hen} f(x)$ pos. def., $x \in B(x^*, r)$.

Fra Teorem 2.3.2 følger, at f streng konveks på $B(x^*, r)$.

Fra Teorem 3.1.2 følger, at x^* er minimum på $B(x^*, r)$.

(b) Analogt for $-f$.

(c) $\operatorname{Hen} f(x^*)$ indefinit $\Rightarrow$ Der findes positive og negative egenværdier af $\operatorname{Hen} f(x^*)$.

$u, v \in \mathbb{R}^n$ og $x \in B(x^*, r)$, $r > 0$ således, at

$$u^T \operatorname{Hen} f(x)\, u = \alpha > 0,$$
$$v^T \operatorname{Hen} f(x)\, v = \beta < 0,$$

For $r > 0$ tilstrækkeligt lille:

$$\begin{aligned} f(x^* + ru) &= f(x^*) + \tfrac{1}{2}(ru)^T \operatorname{Hen} f(x)(ru) \\ &= f(x^*) + \tfrac{\alpha}{2} r^2 > f(x^*) \\ f(x^* + rv) &= f(x^*) + \tfrac{1}{2}(rv)^T \operatorname{Hen} f(x)(rv) \\ &= f(x^*) + \tfrac{\beta}{2} r^2 < f(x^*) \end{aligned}$$

$\square$

Betragt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$

x^* lokalt maksimum i en omegn $S \subset \mathbb{R}^n$.

Definér $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x^* + th) = f(x_1^* + th_1, \dots, x_n^* + th_n),$$

$h \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\|h\| = 1$.

x^* lokalt maksimum i S $\Rightarrow$ Der findes et $r > 0$ således, at

$$B(x^*, r) \subset S$$

Med $\|h\| = 1$ og $t \in (-r, r)$ gælder

$$\|(x^* + th) - x^*\| = \|th\| = |t| < r$$

$$\Rightarrow \quad x^* + th \in B(x^*, r)$$

Derfor gælder

$$f(x^* + th) \leq f(x^*)$$
$$\Leftrightarrow \quad g(t) \leq g(0)$$

$\Rightarrow$ $g(t)$ har et lokalt maksimum i $t = 0$ med nødvendige betingelser

$$g'(0) = 0, \quad g''(0) \leq 0$$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n f_i'(x^* + th) h_i = \langle \nabla f(x^* + th), h \rangle$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}''(x^* + th) h_i h_j \\ &= h^T \operatorname{Hen} f(x^* + th)\, h \end{aligned}$$

$$g'(0) = \langle \nabla f(x^*), h \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \nabla f(x^*) = 0$$

$$g''(0) = h^T \operatorname{Hen} f(x^*) h \leq 0$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Hen} f(x^*)$ neg. semidef.

$\square$