Mathematics for Economists
Kapitel 5 – Sædvanlige Differentialligninger af Første Orden

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 5

- **Introduktion (5.1)**
- **Retningsfelter (5.2)**
- **Separable DL (5.3)**
- Lineære DL af første orden (5.4)
- Substitution (5.6)
- Kvalitativ Teori (5.7)

5.1 Introduktion

5.1 Introduktion

En differentialligning er en ligning, hvor:

(A) Den ubekendte er en funktion, ikke et tal.

(B) Ligningen involverer en eller flere afledede af funktionen.

Bruges i økonomi for at modellere

- Makroøkonomi: Forbrug, investering, renter, priser osv.
- *Asset pricing*: Aktier, obligationer, godspriser, portefølje-vægte osv.

5.1 Introduktion

Klassifikationer:

- En **sædvanlig differentialligning** (ODE) indeholder kun afledede af en ukendt funktion $x(t)$ af en variabel. Som regel er t tiden:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots) = 0,$$

  hvor F er en funktion af tid t og rum x, for eksempel $\dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t) - 4t = 0$.

- En **partiel differentialligning** (PDE) indeholder partielle afledede. Lad $x \in \mathbb{R}^n$ og

$$F(D_t f(t, x), D_{x_1} f(t, x), \ldots, D_{x_n} f(t, x)) = 0,$$

  hvor F er en funktion af de partielle afledede. Bestem, for eksempel, f sådan at $\ddot{f} - a^2 \partial^2 f / \partial x^2 = 0$.

5.1 Introduktion

Klassifikationer:

- En **lineær** differentialligning:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) = a(t)x(t) + b(t),$$

  hvor F er affin lineær.

- En **ikke-lineær** differentialligning:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)),$$

  hvor F er ikke-lineær, for eksempel $\dot{x}(t) = bx(t)^2 + ax(t)$.

5.1 Introduktion

Klassifikationer:

- En **autonom** eller **tidsuafhængig** differentialligning:

  $$\dot{x}(t) = F(x(t)).$$

  For eksempel $\dot{x}(t) = ax(t)$.

- En **ikke-autonom** eller **tidsafhængig** differentialligning:

  $$\dot{x}(t) = F(t, x(t)).$$

  For eksempel $\dot{x}(t) = 3t\,x(t)$.

5.1 Introduktion

Klassifikationer:

- En **homogen** differentialligning:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t).$$

- En **inhomogen** differentialligning:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

5.1 Introduktion

Klassifikationer:

- En differentialligning **af første orden** :

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

- En differentialligning **af anden orden**:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0.$$

- En differentialligning **af *n*'te orden**:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), x^{(3)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)) = 0.$$

5.1 Introduktion

Klassifikationer:

- En **skalar** differentialligning, for eksempel:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b.$$

- Et **system** af differentialligninger, for eksempel $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t)$, og

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b,$$

  hvor $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og $b \in \mathbb{R}^n$.

5.1 Introduktion

Definition (Løsning)

Betragt den sædvanlige differentialligning af første orden

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{1}$$

hvor F er en givet funktion af to variable, og $x = x(t)$ er den ubekendte funktion. En **løsning** for (1) på et interval $I \subset \mathbb{R}$ er en differentiabel funktion φ defineret på I, således at $x = \varphi(t)$ opfylder (1), dvs. $\dot{\varphi}(t) = F(t, \varphi(t))$ for hvert t i I. Grafen for løsningen hedder **løsningskurve** eller **integralkurve**.

Bemærk

Vi bruger ofte t for den uafhængige variabel, fordi tid optræder som den uafhængige variabel i de fleste differentialligninger. Men teorien om differentialligninger gælder også for uafhængige variabler, der ikke er tid.

Eksempel

Betragt ligningen

$$\dot{x} = x + t.$$

Den er en sædvanlig, lineær, ikke-autonom (tidsafhængig), inhomogen differentialligning af første orden. Løsningen er givet ved

$$x(t) = Ce^{t} - t - 1 \text{ for hvert } C \in \mathbb{R},$$

fordi

$$\dot{x}(t) = Ce^{t} - 1 = x(t) + t.$$

Det gælder endda for $C = 0$, siden $x(t) = -t - 1$ implicerer $\dot{x}(t) = -1 = x(t) + t$.

5.1 Introduktion

Definition (Fuldstændig og partikulær løsning)

Mængden af alle løsninger for en differentialligning hedder **fuldstændig løsning**, hvorimod en specifik løsning, der opfylder differentialligningen, kaldes for **partikulær løsning**.

Bemærk

Den fuldstændige løsning på en differentialligning af første orden afhænger af *én* konstant. Hvis løsningen skal gå igennem et bestemt punkt i (t, x)-planet, så bestemmer punktet — med nogle få undtagelser — løsningen entydigt.

5.1 Introduktion

Definition (Initial-Value Problem)

Hvis $t = 0$ betegner begyndelsestiden, så kaldes $x(0) = x_0$ for **begyndelsesbetingelsen** (**initial condition**), og vi har et **problem med en begyndelsesbetingelse** (**initial-value problem**).

5.1 Introduktion

Eksempel

Differentialligningen

$$\dot{x} = x + t$$

har den fuldstændige løsning

$$x(t) = Ce^t - t - 1 \text{ for hvert } C \in \mathbb{R}.$$

Den partikulære løsning, der opfylder **begyndelsesbetingelsen**

$$x(0) = x_0 = 1,$$

er givet ved

$$x(t) = 2e^t - t - 1.$$

5.2 Retningsfelter

5.2 Retningsfelter

Kvalitativ teori

I mange tilfælde er eksplicitte løsningsformler ikke nødvendige. Teorien om differentialligninger indeholder derfor mange resultater, der beskriver løsningerne kvalitativt (kvalitativ teori). Væsentlige resultater er eksistens- og entydighedsteoremer, sensitivitetsanalyse, og stabilitetsanalyse af ligevægtspunkter.

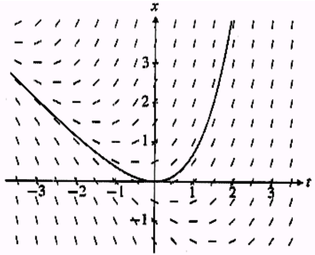

Figure 1 A direction diagram for $\dot{x} = x + t$. The integral curve through $(0, 0)$ is shown.

5.3 Separable Differentialligninger

5.3 Separable Differentialligninger

Klassifikationer:

- En **separabel** differentialligning:

$$\dot{x}(t) = f(t)g(x(t)),$$

  hvor vi kan adskille afhængigheden af tid t og rum x i to forskellige faktorer f og g. For eksempel $\dot{x}(t) = -2t\,x^2$.

- En **ikke-separabel** differentialligning:

$$\dot{x}(t) \neq f(t)g(x(t)).$$

5.3 Separable Differentialligninger

Metode til at løse separable differentialligninger

(A) Skriv DL som
$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \qquad (*)$$

(B) Adskil variablene:
$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$$

(C) Integrér på begge sider:
$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$$

(D) Evaluér begge integraler (hvis muligt) for at få en løsning til $(*)$ (muligvis som en implicit givet funktion). Find en løsning til x, hvis det er muligt.

(E) Derudover er hver rod a af $g(x)$ en konstant løsning $x(t) \equiv a$.

5.3 Separable Differentialligninger

Eksempel (Rentes rente)

Betragt DLen

$$\dot{x}(t) = r(t)\,x(t),$$

med kontinuerlig rentefod $r(t)$ og begyndelsesinvestering $x(0) = x_0$. Separér og integrér:

$$\int \frac{dx}{x} = \int r(t)\,dt.$$

Evaluér:

$$\log x(t) = C + \int r(t)\,dt \ (= C + rt \text{ hvis } r \text{ er konstant}).$$

Derved gælder

$$x(t) = e^{C + \int r(t) dt}.$$

Vi kan sagtens overbevise os om, at $C = \log x_0$ giver en løsning på problemet med begyndelsesbetingelsen og at $x(t) = x_0 e^{rt}$ er en løsning på tilfældet med en konstant rentefod.