2622 Matematik for Økonomer
Eric Hillebrand

Opgavesæt 7

Opgave 1
Section 3.1 Exercise 5

Opgave 2
Section 3.2 Exercise 1

Opgave 3
Section 3.3 Exercise 2

Opgave 4
Firmaets problem i Ramsey modellen. Produktionsfunktionen har Cobb-Douglas form, hvor teknologi forbedrer arbejdsproduktivitet

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = AL(t)^{1-\alpha}K(t)^{\alpha} = A(\mathtt{L}(t)\mathtt{T}(t))^{1-\alpha}K(t)^{\alpha},$$

så at indflydelsen af teknologien på arbejdsproduktivitet er $A(\mathtt{T}(t))^{1-\alpha}$. Teknologien er $\mathtt{T}(t) = e^{\alpha_T t}$ med en fremskridtsrate α_T. Se videoen Ramsey I for forklaringen af modellen og notationen. I enheder af effektiv arbejde:

$$y = \frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right),$$

fordi F er homogen af grad 1. Lad

$$k = \frac{K}{L}$$

være kapitalapparatet i enheder af effektiv arbejde. Så kan vi skrive

$$y = \frac{Y}{L} = F(k, 1) = Ak^{\alpha} =: f(k).$$

(Hvor "=:" betyder, at notationen på den højre side defineres på dette sted at være objektet på den venstre side.) Firmaet betaler afkastet på kapital (til dets ejer, som er husholdningen), taber afskrivningen for kapitalapparatet, og betaler løn. Prisen for output-godet er normaliseret til 1. Så får vi profitfunktionen

$$\begin{aligned}\Pi &= F(K, L) - (r+\delta)K - \mathtt{wL},\\ &= Lf(k) - (r+\delta)Lk - \mathtt{w}Le^{-\alpha_T t},\\ &= L\left(f(k) - (r+\delta)k - \mathtt{w}\, e^{-\alpha_T t}\right).\end{aligned}$$

At maksimere denne profitfunktion på ethvert givet tidsinterval er ensbetydende med at maksimere den i hvert tidspunkt, fordi der ingen tilstandsvariable er, som kunne overføre beløb til fremtiden eller låne beløb fra fremtiden. (Vi studerer tilstandsvariable i Kapitel 9.)

Find første-ordens betingelsen for et maksimum af profitfunktionen i forhold til kapitalapparatet i enheder af effektive arbejde k. Hvad siger denne betingelse om bestemmelsen af afkastet r på produktivkapital? Hvad kan man sige om tilstrækkelige betingelser?

Differentiering ift. k giver første-ordens betingelsen

$$r(t) = f'(k(t)) - \delta = \frac{\alpha A}{k(t)^{1-\alpha}} - \delta,$$

der bestemmer afkastet på produktivkapital intuitivt som dens marginale produkt minus afskrivning.
Π består af en konkav funktion i k for $0 < \alpha < 1$ og et lineært led i k, derfor er Π konkav i k, og derfor er et kritisk punkt et maksimum ifølge Teorem 3.1.2.

8-minutters foredrag

1. Globale og lokale ekstrema, envelope-teoremet
2. Optimering under bibetingelser givet ved ligheder