2622 Matematik for Økonomer
Eric Hillebrand

Opgavesæt 3

Opgave 1
Bestem egenværdier og egenvektorer og derved egenværdi-dekompositionen $A = P\Lambda P^{-1}$ for følgende matricer.
Fremgangsmåde:

1. Find rødderne af det karakteristiske polynomium
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$
Disse tal er egenværdierne.

2. For egenværdierne λ_i, $i = 1, \ldots, n$, find ikke-nul løsningerne til
$$(A - \lambda_i I)x = 0.$$
Disse vektorer er egenvektorerne.

3. Saml egenværdierne på diagonalen af en matrix
$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

4. Saml egenvektorerne i søjlerne af en matrix
$$P = [v_1, \ldots, v_n].$$

5. Skriv
$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

1.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = (-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$
Dette er et standard eksempel, men bemærk at A ikke har fuld rang, men rang 2: En af egenværdierne er nul og søjlerne af A er lineær afhængige.

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = (1-\lambda)(\lambda-i)(\lambda+i)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -i & i \end{bmatrix}^{-1}$$

Dette er et eksempel på, at reelle matricer kan have komplekse egenværdier. Især i data analyse, hvor vi ikke kan vælge pæne tal, støder vi tit på komplekse egenværdier.

3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (3-\lambda)^2(1-\lambda)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Dette er et eksempel på en gentaget egenværdi. 3 er en dobbelt rod af det karakteristiske polynomium (algebraisk multiplicitet), og egenrummet af 3 har dimension 2 (geometrisk multiplicitet).

4.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (3-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Egenværdierne er 3 (2 gange) og 1 igen, men denne gang findes kun en egenvektor til egenværdi 3: $(0,1,0)'$. Egenrummet af 1 dannes af $(0,1,1)'$. Det er et tilfælde, hvor algebraisk og geometrisk multiplicitet ikke er de samme.

Prøv lige, om det passer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Det er Jordan-dekompositionen (vi behandler ikke i dette kursus, hvordan man finder den). Bemærk at matricen i midten ikke er diagonal.

5.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -15 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda - 2 - 3i)(\lambda - 2 + 3i)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{135}{90} + \frac{1}{2}i & \frac{135}{90} - \frac{1}{2}i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{135}{90} + \frac{1}{2}i & \frac{135}{90} - \frac{1}{2}i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Dette er bare et eksempel for at regne lidt mere med komplekse tal og bruge, at hvis z er en egenværdi med egenvektor v, så er $\overline{z}$ en egenværdi med egenvektor $\overline{v}$.

Opgave 2
Section 1.7 Exercise 5

Opgave 3
I portefølje teorien er afkastet for en portefølje givet ved

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i,$$

hvor n er antallet af værdipapirer, w_i er fraktionen af porteføljeværdien investeret i værdipapir i (som er antaget at være konstant), og r_i er afkastet på værdipapir i. Bemærk at $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Markowitz (1952) middelværdi-varians metode for portefølje optimering er baseret på de første to momenter af sandsynlighedsfordelingen for r_i.

$$\mathbb{E}r_p = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}r_i, \tag{1}$$

$$V(r_p) = \mathbb{E}(r_p - \mathbb{E}r_p)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \mathbb{E}r_i)\right)^2. \tag{2}$$

Varianser og kovarianser for de n værdipapirer

$$\sigma_i^2 := \mathbb{E}(r_i - \mathbb{E}r_i)^2, \quad \sigma_{ij} := \mathbb{E}[(r_i - \mathbb{E}r_i)(r_j - \mathbb{E}r_j)] \tag{3}$$

samles i kovariansmatricen

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

1. Vis at kovariansmatricen Ω er symmetrisk.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \mathbb{E}[(r_i - \mathbb{E}r_i)(r_j - \mathbb{E}r_j)] \\ &= \mathbb{E}[(r_j - \mathbb{E}r_j)(r_i - \mathbb{E}r_i)] \\ &= \sigma_{ji} \end{aligned}$$

2. Vis at variansen $V(r_p)$ for porteføljeafkastet er en symmetrisk kvadratisk form givet ved matricen Ω:

$$V(r_p) = w^T \Omega w.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \omega_i (r_i - \mathbb{E}r_i)\right]^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i \mathbb{E}[(r_i - \mathbb{E}r_i)(r_j - \mathbb{E}r_j)]\omega_j \\ &= \omega^T \Omega \omega\end{aligned}$$

3. Ω må være positivt semidefinit. Hvorfor?

   For enhver linearkombination af aktier givet ved ω (dvs. for enhver portefølje) må variansen være et ikke-negativt tal.

4. For en portefølje $(1/5, 2/5, 2/5)$, hvor de tre værdipapirer $i = 1, 2, 3$ har kovariansmatrix

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{16}{25} \end{bmatrix},$$

   bestem variansen $V(r_p)$ for porteføljeafkastet.

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{16}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = 0.4988$$