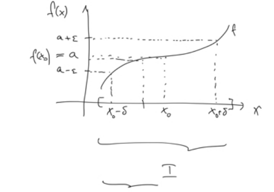


Eks: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$

$(x^2-1):(x-1) = x+1$
$\underline{x^2-x}$
$x-1$
$\underline{x-1}$
0

$f(x) = \frac{1}{x}$

$x=1$ hul

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

$f: I \to \mathbb{R}$
$[a,b]$
(a,b)

Bevis: Lokalt maksimum:

$f(x) \leq f(x_0)$ i en omegn $O = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$
$\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ For alle $h>0$ således, at $x_0+h \in O$:

$$\frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \leq 0$$

Konstruér en sekvens $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ med $h_i > 0$ for alle i, $\lim_{i\to\infty} h_i = 0$ og $x_0 + h_i \in O$.

$$\lim_{i\to\infty} \frac{f(x_0+h_i)-f(x_0)}{h_i} = f'(x)$$

$\Rightarrow$ For alle $h>0$ således, at $x_0 - h \in O$:

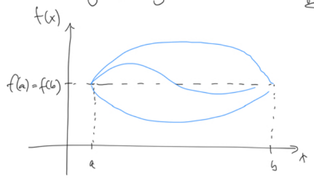
$$\frac{\overbrace{f(x_0-h)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{-h}_{\leq 0}} \geq 0$$

sekvens $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ med $h_i>0$, $\lim_{i\to\infty} h_i = 0$, $x_0 - h_i \in O$.

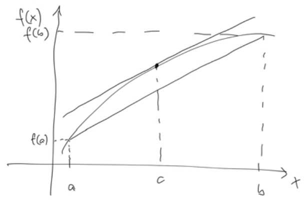
$$\lim_{i\to\infty} \frac{f(x_0-h_i)-f(x_0)}{-h_i} = f'(x)$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = 0$$

fordi den kan konstrueres som grænseværdi af en sekvens af positive tal og af negative tal. ⌑



Bevis: Hvis f konstant på (a,b), så er $f' = 0$ på (a,b).
Hvis f ikke er konstant, så findes et tal $d \in (a,b)$ således, at $f(d) > f(a)$ eller $f(d) < f(a)$. Derfor findes et maks. eller minimum på (a,b). Fra Sætningen 8.1.1. følger påstanden. □



Bevis: Lad

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

F kontinuert og differentiabel på (a,b) med

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Vi har
$F(a) = f(a)$
$F(b) = f(a)$

$\Rightarrow$ (Rolle): Der er et punkt $c \in (a,b)$ så, at $F'(c) = 0$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ □

$$R_{n+1}(x,c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Eks: $f(x) = x^2 + ax + b$
$f^{(1)}(x) = 2x + a$
$f^{(2)}(x) = 2$
$f^{(3)}(x) = 0$

$$f(x) \underset{x_0=0}{=} f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$= b + ax + x^2$$

Eks: $f(x) = e^x$, $f^{(i)}(x) = e^x$ $i > 0$
$x_0 = 0$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$
$$= \sum^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$