2622 Matematik for Økonomer

Eric Hillebrand

Opgavesæt 2

Opgave 1

Du vil gerne beregne korrelationen mellem daglige priser for to aktier. Du har elleve datapunkter $p_{1,t}$ and $p_{2,t}$.

Dag t	$p_{1,t}$	$p_{2,t}$
1	100.00	100.00
2	101.75196	99.02018
3	102.05262	98.95108
4	102.64926	99.10753
5	102.07722	100.87813
6	100.99975	100.24103
7	100.40538	101.68745
8	96.95554	100.43030
9	96.07364	103.07275
10	96.06832	103.65973
11	97.09132	103.60093

1. Beregn daglige afkasttidsrækker
$$r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$$
for begge aktier.

2. Beregn og fortolk kovariansen og korrelationen for denne stikprøve af to afkasttidsrækker. Hvilke to vektorer i beregningen af kovariansen er ortogonale?

Kovariansen og korrelationen er meget små tal, der kan anses som nul. Derfor er der ingen korrelation mellem prisbevægelser af aktie 1 og 2; priserne bevæger sig uafhængige.
Kovariansen beregnes
$$\mathrm{cov}(r_1, r_2) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left[(r_{1,i} - \overline{r_1})(r_{2,i} - \overline{r_2}) \right],$$
hvor
$$\overline{r_k} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} r_{k,i}.$$
Vektorerne $(r_{1,i} - \overline{r_1})_{i=1,\dots,10}$ og $(r_{2,i} - \overline{r_2})_{i=1,\dots,10}$ er ortogonale.

Opgave 2

Beregn $\|x\|$, $\|y\|$, $\langle x, y \rangle$ og bestem en vektor z der er ortogonal til x og y, $\|z\| = 1$.

1. $x = (1,\ -2,\ 3), \quad y = (7,\ -3,\ 5),$

   Der er mange mulige veje, at finde frem til en vektor, der er ortogonal til x og y, men du kan med fordel bruge vort skema for lineære ligningsystemer, og du skriver:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 5 & 0 \end{array}$$

   Så omformer du til en ledende identitetsmatrix ved hjælp af fundamentale rækkeoperationer:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{11} & 0 \end{array}$$

   Nu står der

$$\tilde{z}_1 + \frac{1}{11}\tilde{z}_3 = 0,$$
$$\tilde{z}_2 - \frac{16}{11}\tilde{z}_3 = 0,$$

   og når du sætter $\tilde{z}_3 = 1$, får du:

   $\tilde{z} = (-\frac{1}{11}, \frac{16}{11}, 1)'$.

   $\tilde{z}$ er ortogonal til x og y, men den har ikke længde lig med 1. Der er mange andre vektorer (uendelig mange) ortogonal til x og y, afhængig af, hvilken værdi for $\tilde{z}_3$ du vælger.

   Den sidste betingelse, at $\|z\| = 1$, giver en tredje ligning for de tre ubekendte z_1, z_2, z_3, og derfor er $z = \tilde{z}/\|\tilde{z}\|$ med enhedslængde entydigt bestemt. Men fordi den sidste betingelse er en ikke-lineær ligning, kan vi ikke bare indbygge den i vores skema og løse samtidigt med de første to ligninger. Derfor er det bedre, at løse problemet på denne to-trin måde.

2. $x = (2,\ -1,\ -1), \quad y = (1,\ -3,\ -3),$

   $\tilde{z} = (0, -1, 1)'$, $z = \tilde{z}/\|\tilde{z}\|$.

3. $x = (3,\ 4,\ -4), \quad y = (2,\ -2,\ 5).$

   $\tilde{z} = (-\frac{6}{7}, \frac{23}{14}, 1)'$, $z = \tilde{z}/\|\tilde{z}\|$.

Hvorfor har $z = \tilde{z}/\|\tilde{z}\|$ længde lig med 1? Husk fra skalarproduktet, at for en vektor $x \in \mathbb{R}^n$ og et tal $r \in \mathbb{R}$, der gælder

$$\|rx\|^2 =< rx, rx >= r < x, rx >= r^2 < x, x >= r^2\|x\|^2$$

og derfor

$$\|rx\| = |r|\|x\|,$$

hvor absolutværdien $|r|$ dækker tilfældet at $r < 0$. Derfor har vi, at

$$\left\|\frac{\tilde{z}}{\|\tilde{z}\|}\right\| = \left\|\underbrace{\frac{1}{\|\tilde{z}\|}}_{r}\underbrace{\tilde{z}}_{x}\right\|,$$
$$= \frac{1}{\|\tilde{z}\|}\|\tilde{z}\| = 1,$$

hvor $r = 1/\|\tilde{z}\| > 0$.

Opgave 3
Bestem determinanten af matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -480.$$

Opgave 4
Lad Y være produktion og, i ligevægten, forbrugsudgifter. Lad r betegne rentesatsen. Stephen Hicks IS-LM analyse er en model for ligevægtskoordinaterne (Y_0, r_0) som skæringspunkt af to funktioner: IS kurven, der beskriver ligevægten i markedet for goder ($I = S$), og LM kurven, der beskriver ligevægten i pengemarkedet ($M_D = M_S$). Vi har definitionerne

$$C = bY$$
$$I = I_m - ar,$$

hvor b er den marginale forbrugstilbøjelighed, I_m er den maksimale investering når rentesatsen er nul, a er den marginale kapitaleffektivitet. Ligevægtsbetingelsen er

$$Y = C + I + G = C + S + G.$$

Når vi indsætter definitionerne i ligevægtsbetingelsen og rydder op på leddene får vi IS kurven

$$sY + ar = I_m + G,$$

hvor $s = 1 - b$ er den marginale opsparingstilbøjelighed.
På pengemarkedet er pengeefterspørgslen givet ved transaktionsefterspørgslen og spekulationsefterspørgslen

$$M_D = M_t + M_s.$$

Transaktionsefterspørgslen er en del af indtægterne,

$$M_t = mY,$$

spekulationsefterspørgslen er en funktion der afhænger negativt af rentesatsen,

$$M_s = M_m - hr,$$

hvor M_m er det maksimale beløb allokeret til spekulation i tilfældet af nulrenten (dvs. nul alternativomkostninger). Ligevægtsbetingelsen er $M_S = M_D$, hvor pengeudbuddet M_S er sat eksogent ved centralbanken. Derved gælder at

$$M_S = M_D = mY + M_m - hr,$$

eller (LM):

$$mY - hr = M_S - M_m.$$

Den simultane ligevægt i markedet for goder og i pengemarkedet er derved givet som løsning af det følgende system af lineære ligninger, som kaldes for IS-LM,

$$\begin{aligned} sY + ar &= I_m + G \\ mY - hr &= M_S - M_m. \end{aligned}$$

Løs systemet for Y_0 og r_0 ved hjælp af Cramers regel.[1] Diskutér afhængigheden af Y og r af parametrene.

$$\begin{bmatrix} s & a \\ m & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

hvor

$$\begin{aligned} b_1 &= I_m + G, \\ b_2 &= M_S - M_m. \end{aligned}$$

Derfor,

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{-sh - am} \det \begin{bmatrix} b_1 & a \\ b_2 & -h \end{bmatrix}, \\ &= \frac{(I_m + G)h + a(M_S - M_m)}{sh + am}, \\ r_0 &= \frac{1}{-sh - am} \det \begin{bmatrix} s & b_1 \\ m & b_2 \end{bmatrix}, \\ &= \frac{(I_m + G)m - s(M_S - M_m)}{sh + am}, \end{aligned}$$

[1] Typisk fungerer Cramers regel bedre end Gaussisk elimination for små matricer der indeholder parameter. For tal og store matricer anbefales Gaussisk elimination.