$A^T = A$

$$A_1 = \begin{bmatrix}1&5\\5&3\end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix}1&5&4\\5&2&6\\4&6&3\end{bmatrix}$$

	$1 \quad 5$	y_1	x_1
	$5 \quad 3$	y_2	x_2
$x_1 \quad x_2$	$x_1+5x_2 \quad 5x_1+3x_2$		

$$y_1(x_1+5x_2) + y_2(5x_1+3x_2)$$
$$= x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 + 3x_2y_2$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_iy_j$$

$$(x^TAy)^T = y^TA^Tx$$
$$x^TAy = y^TAx$$

$$x_1(x_1+5x_2) + x_2(5x_1+3x_2)$$
$$= x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$$
$$= x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2$$

Bevis (direkte):

Tag to forskellige egenværdier $\lambda_i \neq \lambda_j$ med tilhørende egenvektorer v_i, v_j

gang $Av_i = \lambda_i v_i$

med v_j^T fra den venstre side:

$$v_j^TAv_i = v_j^T\lambda_i v_i = \lambda_i v_j^Tv_i$$

På samme måde gælder

$$v_i^TAv_j = v_i^T\lambda_j v_j = \lambda_j v_i^Tv_j$$

Fordi A symmetrisk:

$$v_j^TAv_i = v_i^TAv_j$$

og derfor:

$$\lambda_i v_j^Tv_i = \lambda_j v_i^Tv_j$$

eller

$$\underbrace{(\lambda_i-\lambda_j)}_{\neq 0}\ \underbrace{v_i^Tv_j}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow \quad v_i \perp v_j$ □

Bevis (direkte):

I ligningen

$$Av = \lambda v$$

kan både λ og v være komplekse. Så er

$$(\overline{Av})^T(Av) = \|Av\|^2 \geq 0 \quad \in \mathbb{R}$$

A er reell og symmetrisk:

$$\bar{A} = A \quad \text{og} \quad A^T = A$$

$$\Rightarrow 0 \leq (\overline{Av})^T(Av) = \bar{v}^T\bar{A}^TAv$$
$$= \bar{v}^TA\underbrace{(Av)}_{\lambda v}$$
$$= \lambda\bar{v}^T(Av)$$
$$= \lambda^2\bar{v}^Tv$$
$$= \lambda^2\underbrace{\|v\|^2}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \lambda^2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 \geq 0$

$\lambda = a + ib$

$\Rightarrow \lambda^2 = (a+ib)^2 = a^2 + i2ab - b^2$

$\Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow$ enten a eller b er nul

$\lambda^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$

$\Rightarrow b = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ □

Bevis:

De n forskellige egenværdier λ_i har tilhørende egenvektorer $\tilde{v}_i$. Normeringen

$$v_i = \frac{\tilde{v}_i}{\|\tilde{v}_i\|}$$

giver ortonormale vektorer. Definér

$$P = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n],$$

så er P ortonormal: $P^TP = I$.

$$\Rightarrow A = PDP^{-1} = PDP^T$$

□