# Mathematics for Economists
# Kapitel 12 – Optimering i Diskret Tid

Eric Hillebrand

Institut for økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

## Disposition Kapitel 12

- Dynamisk programmering (12.1)
- **Euler ligningen (12.2)**
- Ubegrænset periode (12.3)
- Maksimumsprincippet (12.4)

## 12.2 Euler ligningen

# 12.2 Euler ligningen

Det dynamiske optimeringsproblem

$$\max_{u} \sum_{t=0}^{T} f(t, x_t, u_t)$$

kan tit omformuleres således: Vi lader

$$x_{t+1} = g(t, x_t, u_t)$$

have en entydig løsning

$$u_t = \phi(t, x_t, x_{t+1}).$$

Lad

$$F(t, x_t, x_{t+1}) := f(t, x_t, \phi(t, x_t, x_{t+1})).$$

# 12.2 Euler ligningen

Betragt nu problemet

$$\max \sum_{t=0}^{T} F(t, x_t, x_{t+1}), \quad x_0 \text{ givet og } x_1, x_2, \ldots, x_T, x_{T+1} \text{ er frie i } \mathbb{R}$$

I perioden $t = T$ og for hvert givet fikseret $x_T$, bestem

$$x^*_{T+1}(x_T) = \operatorname{argmax} F(T, x_T, x_{T+1})$$

med første-ordens betingelse

$$D_3 F(T, x_T, x_{T+1}) = 0.$$

Derefter, bestem

$$x^*_T(x_{T-1}) = \operatorname{argmax} \left\{ F(T-1, x_{T-1}, x_T) + F(T, x_T, x^*_{T+1}(x_T)) \right\}$$

# 12.2 Euler ligningen

med første-ordens betingelse

$$D_3F(T-1, x_{T-1}, x_T) + D_2F(T, x_T, x^*_{T+1}) = 0.$$

Derefter, bestem

$$x^*_{T-1}(x_{T-2}) = \text{argmax } \left\{F(T-2, x_{T-2}, x_{T-1}) + F(T-1, x_{T-1}, x^*_T)\right\}$$

med første-ordens betingelse

$$D_3F(T-2, x_{T-2}, x_{T-1}) + D_2F(T-1, x_{T-1}, x^*_T) = 0,$$

og så videre.

# 12.2 Euler ligningen

Vi får **Euler ligningen**

$$
\begin{aligned}
D_2F(t, x_t, x_{t+1}) + D_3F(t-1, x_{t-1}, x_t) &= 0, \quad t = 1, \dots, T, \\
D_3F(t-1, x_{t-1}, x_t) &= 0, \quad t = T+1.
\end{aligned}
$$