# Mathematics for Economists
# Kapitel 2 – Analyse af flere variable

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

## Disposition Kapitel 2

- Indsættelser: Grænseværdier, kontinuitet, optimering af funktioner af en variabel, middelværdisætningen, Taylor formlen for funktioner af en variabel
- Partielle afledede, gradienter (2.1)
- Differentiabilitet (2.9)
- Taylor formlen for funktioner af flere variable (2.6)
- Implicit givne funktioner og inverse funktioner (2.7)
- **Konvekse mængder (2.2)**
- **Konkave og konvekse funktioner (2.3/2.4)**
- Kvasikonkave og -konvekse funktioner (2.5)

## 2.2 Konvekse mængder

# 2.2 Konvekse mængder

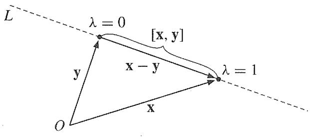



**Figure 2** The closed segment [x, y].

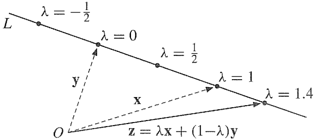



**Figure 3** The straight line through x and y.

Lad $x, y \in \mathbb{R}^n$ og betragt det **lukkede linjestykke**

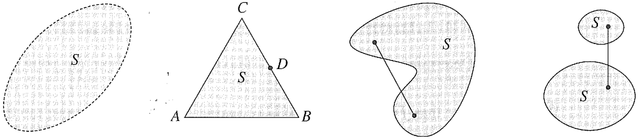
$$[x, y] = \{z : \exists \lambda \in [0,1] \; s.t. \; z = \lambda x + (1-\lambda)y\}$$

## Definition (p. 50, Konveks mængde)

En mængde $S$ i $\mathbb{R}^n$ kaldes for **konveks** hvis for alle $x, y \in S$ gælder, at $[x, y] \subseteq S$. Med andre ord

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S \text{ for alle } x, y \text{ in } S \text{ og alle } \lambda \text{ in } [0,1]$$

# 2.2 Konvekse mængder




(a) Convex (b) Convex (c) Not convex (d) Not convex

Fællesmængden af konvekse mængder er igen konveks:

$$S_1, \ldots, S_m \text{ konvekse mængder i } R^n \Rightarrow S_1 \cap \ldots \cap S_m \text{ er konveks.}$$

Foreningsmængden af konvekse mængder er ikke altid konveks.

# 2.3 Konkave og konvekse funktioner I

# 2.3 Konkave og konvekse funktioner I

En funktion $f$ kaldes for **konkav (konveks)** hvis definitionsmængden er konveks og ethvert punkt på linjestykket der forbinder to vilkårlige punkter på grafen er mindre end eller lige med (større end eller lige med) grafen.

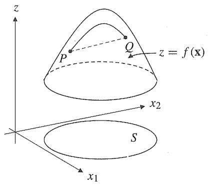



**Figure 1** $f$ is concave; for all points $P$ and $Q$ on the graph of $f$, the line segment $PQ$ lies below the graph.

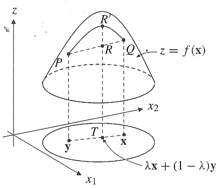



**Figure 2** $TR' = f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \geq TR = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$.

## Definition (p. 54, Konkav/konveks funktion)

En funktion $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ af en konveks mængde $S$ er **konkav** i $S$ hvis

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \qquad (*)$$

for alle $x$ og $y$ i $S$ og alle $\lambda$ in $[0,1]$. En funktion $f(x)$ er **konveks** hvis $(*)$ gælder med $\leq$ i stedet for $\geq$. **Strengt:** $<$ eller hhv. $>$.

# 2.3 Konkave og konvekse funktioner I

**Teorem**

Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et åbent interval og $f : I \to \mathbb{R}$ in $C^2$. Det gælder, at $f$ er konkav (konveks), hvis og kun hvis $f''(x) \leq 0$ $(\geq 0)$ for alle $x \in I$.

# 2.3 Konkave og konvekse funktioner I

## Sætning

Lad $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være en to-gange differentiabel funktion, $X \subset \mathbb{R}^n$ åben mængde. Der gælder, at:

(1) $f(x)$ er konveks i $X \Leftrightarrow \mathrm{Hess}\, f(x)$ er positiv semidefinit i $X$.
(2) $f(x)$ er konkav i $X \Leftrightarrow \mathrm{Hess}\, f(x)$ er negativ semidefinit i $X$.
(3) $\mathrm{Hess}\, f(x)$ er positiv definit i $X \Rightarrow f(x)$ er strengt konveks i $X$.
(4) $\mathrm{Hess}\, f(x)$ er negativ definit i $X \Rightarrow f(x)$ er strengt konkav i $X$.

**Teorem (2.3.1)**

Lad $z = f(x, y)$ være en to gange kontinuert differentiabel funktion med en åben, konveks definitionsmængde $X$ i planet $\mathbb{R}^2$. Der gælder:

(a) $f$ er konveks $\iff f''_{11} \geq 0, f''_{22} \geq 0$, og $f''_{11} f''_{22} - (f''_{12})^2 \geq 0$.

(b) $f$ er konkav $\iff f''_{11} \leq 0, f''_{22} \leq 0$, og $f''_{11} f''_{22} - (f''_{12})^2 \geq 0$.

(c) $f''_{11} > 0$ og $f''_{11} f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0 \Longrightarrow f$ er strengt konveks.

(d) $f''_{11} < 0$ and $f''_{11} f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0 \Longrightarrow f$ er strengt konkav.

# 2.3 Konkave og konvekse funktioner I

**Teorem (2.3.2, Strikt konveksitet/konkavitet: Tilstrækkelige betingelser)**

Antag at $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ er en to gange kontinuert differentiabel funktion på en åben og konveks mængde $X$ i $\mathbb{R}^n$. Lad $D_r(x)$ være de ledende underdeterminanter af Hesse matricen $\mathrm{Hess}\, f(x) = (f''_{ij}(x))_{n \times n}$. Der gælder:

(a) $D_r(x) > 0$ for alle $x$ i $X$ og alle $r = 1, \ldots, n \Longrightarrow f$ er strengt konveks i $X$.

(b) $(-1)^r D_r(x) > 0$ for alle $x$ i $X$ og alle $r = 1, \ldots, n \Longrightarrow f$ er strengt konkav i $X$.

### Eksempel

Betragt den Cobb-Douglas-agtige funktion

$$f(x,\ y) = x^a y^b,$$

med $x, y \in R_+$, $a, b \in [0, 1]$, og $a + b \leq 1$, med Hesse matrix

$$\mathrm{Hess}\, f(x, y) = \begin{bmatrix} a(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-2} \end{bmatrix}$$

Fordi $a, b \in [0, 1]$ gælder der

$$f''_{11} \leq 0,\ \ f''_{22} \leq 0$$

og

$$f''_{11} f''_{22} - (f''_{12})^2 = (1 - a - b)abx^{2(a-1)}y^{2(b-1)} \geq 0.$$

$\Rightarrow$ $f$ er konkav på $\mathbb{R}_+$. Hvis $a + b < 1$, $f$ er strengt konkav.

# 2.3 Konkave og konvekse funktioner I

**Teorem (2.3.4)**

Hvis $f_1, \ldots, f_m$ er funktioner på en konveks mængde $X$ i $\mathbb{R}^n$, så gælder:

(a) $f_1, \ldots, f_m$ er konkave og $a_1 \geq 0, \ldots, a_m \geq 0 \Rightarrow a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$ konkav.

(b) $f_1, \ldots, f_m$ er konvekse og $a_1 \geq 0, \ldots, a_m \geq 0 \Rightarrow a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$ konveks.

**Teorem (2.3.5, Sammensatte funktioner)**

Lad $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ med en konveks definitionsmængde $X$ i $\mathbb{R}^n$ og lad $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(X)$ i definitionsmængden af $F$. Der gælder:

(a) $f(x)$ konkav, $F(u)$ konkav og voksende $\Rightarrow U(x) = F(f(x))$ konkav.

(b) $f(x)$ konveks, $F(u)$ konveks og voksende $\Rightarrow U(x) = F(f(x))$ konveks.

(c) $f(x)$ konkav, $F(u)$ konveks og aftagende $\Rightarrow U(x) = F(f(x))$ konveks.

(d) $f(x)$ konveks, $F(u)$ konkav og aftagende $\Rightarrow U(x) = F(f(x))$ konkav.

# 2.4 Konkave og konvekse funktioner II

# 2.4 Konkave og konvekse funktioner II

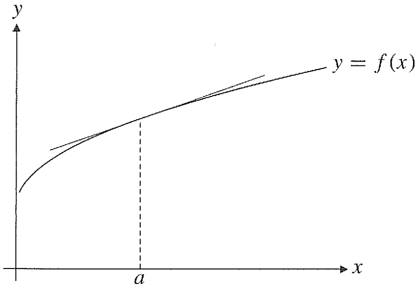



**Figure 1** $f$ is concave. The tangent is above the graph.

# 2.4 Konkave og konvekse funktioner II

## Teorem (2.4.1, Konkavitet for differentiable funktioner)

Antag at $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ er en $C^1$ funktion på en åben og konveks mængde $S$ i $\mathbb{R}^n$. Der gælder:

(a) $f$ er konkav i $S$ hvis og kun hvis

$$f(x) - f(x_0) \leq \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{0,i}) \qquad (*)$$

for alle $x$ og $x_0$ i $S$.

(b) $f$ er strengt konkav hvis og kun hvis uligheden $(*)$ er altid streng for $x \neq x_0$.

(c) Tilsvarende resultater for konvekse (strengt konvekse) funktioner fås ved ombytning af $\leq$ til $\geq$ ($<$ til $>$) i uligheden $(*)$.

**Teorem (2.4.2, Niveaumængder, minima, maxima)**

Lad $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ og $g(x) = g(x_1, \ldots, x_n)$ være defineret på en konveks mængde $S$ i $\mathbb{R}^n$

(a) Hvis $f$ er konkav, så er mængden $P_a = \{x \in S : f(x) \geq a\}$ konveks for alle $a$.

(b) Hvis $f$ er konveks, så er mængden $P^a = \{x \in S : f(x) \leq a\}$ konveks for alle $a$.

(c) $f$ er konkav $\iff M_f = \{(x, y) : x \in S \text{ og } y \leq f(x)\}$ er konveks.

(d) $f$ er konveks $\iff M^f = \{(x, y) : x \in S \text{ og } y \geq f(x)\}$ er konveks.

(e) $f$ og $g$ er konkav $\Longrightarrow h(x) = \min(f(x), g(x))$ er konkav.

(f) $f$ og $g$ er konveks $\Longrightarrow H(x) = \max(f(x), g(x))$ er konveks.

# 2.4 Konkave og konvekse funktioner II

**Teorem (2.4.3, Jensens ulighed, diskret)**

En funktion $f$ er konkav på den konvekse mængde $S$ i $\mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m) \geq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_m f(x_m)$$

gælder for alle $x_1, \ldots, x_m$ i $S$ og alle $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$ med $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$.

**Teorem (2.4.4, Jensens ulighed, kontinuert)**

Lad $x(t)$ og $\lambda(t)$ være kontinuerte funktioner på intervallet $[a, b]$, med $\lambda(t) \geq 0$ og $\int_a^b \lambda(t)dt = 1$. Hvis $f$ er en konkav funktion defineret på værdimængden af $x(t)$, så gælder

$$f\left(\int_a^b \lambda(t)x(t)dt\right) \geq \int_a^b \lambda(t)f(x(t))dt.$$