2622 Matematik for Økonomer

Eric Hillebrand

Opgavesæt 5

Opgave 1

1. Lad $f(x) = \sin(x)$. Brug Taylor-formlen for at vise, at

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(Husk, at $\sin'(x) = \cos(x)$ og $\cos'(x) = -\sin(x)$.)

2. Find et tilsvarende udtryk for $\cos(x)$.

3. Brug dine resultater fra 1. og 2. for at vise, at

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x),$$

hvor i er den imaginære enhed.

Opgave 2

Antag, at vi har en output funktion Y af arbejdsstyrke L og kapital K, som er to gange kontinuert differentiabel. Lad w betegne prisen per enhed arbejdsstyrke, og lad i betegne prisen per enhed kapital. Hvis vi minimerer omkostningerne for arbejde og kapital

$$C(L, K) = wL + iK,$$

således, at outputniveauet er konstant lig med Y_0,

$$Y(L, K) = Y_0 \in \mathbb{R}_+,$$

så finder vi første-ordens betingelserne

$$\frac{w}{i} = \frac{D_L Y(L^*, K^*)}{D_K Y(L^*, K^*)} = -\text{marginalrate af teknisk substitution.} \tag{1}$$

(Vi skal komme tilbage til det i Kapitel 3.)

Betragt Cobb-Douglas produktionsfunktionen

$$Y(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}.$$

1. Bestem gradienten og Hesse matricen.

2. Vis at Cobb-Douglas funktionen er homogen (af første grad, dvs. lineær i K og i L) hvis $\beta = 1 - \alpha$.

3. For en produktionsfunktion $Y(x)$, $x = (K, L)'$, betragt kvotienten

$$\frac{Y(\lambda x)}{\lambda Y(x)}, \quad \lambda > 1.$$

Hvis kvotienten er lig med 1, så siges funktionen at implicere konstante skalaafkast; hvis kvotienten er større end 1, så implicerer funktionen voksende skalaafkast; hvis kvotienten er mindre end 1, aftagende skalaafkast. Vis at Cobb-Douglas funktionen implicerer konstant skalaafkast hvis $\beta = 1 - \alpha$, voksende skalaafkast hvis $\alpha + \beta > 1$ og aftagende skalaafkast hvis $\alpha + \beta < 1$.

4. Vis at forholdet mellem arbejde L og kapital C, der opfylder den første-ordens betingelse for optimalitet (1), er konstant.

5. Vis at

$$Y = K\ D_K Y(L, K) + L\ D_L Y(L, K),$$

dvs. hver inputfaktor betales beløbet af dens marginalprodukt, hvis $\beta = 1 - \alpha$. Nogle gang betegnes dette forhold som "Eulers teorem" indenfor økonomien.

6. Vis at substitutionselasticiteten

$$ES = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{L^*}{K^*}\right)}{L^*/K^*}}{\dfrac{d\left(\dfrac{i}{w}\right)}{i/w}}$$

der opfylder den første-ordens betingelse for optimalitet (1), er konstant.

7. Vis at de relative andele af faktorerne af produktet Y er givet ved

$$\frac{LD_L Y}{Y} = \alpha, \ \frac{KD_K Y}{Y} = \beta.$$

Opgave 3 (Ramsey Model)

1. Vis at Cobb-Douglas produktionsfunktionen $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ kan skrives i per-capita formen

$$y = Ak^\alpha,$$

hvor $y = Y/L$ og $k = K/L$.

2. Vis at de steady-state ligevægtsværdier i Ramsey-modellen er givne ved

$$k^* = \left[\frac{1}{\alpha A}(\delta + \rho + \theta\alpha_T)\right]^{\frac{1}{\alpha - 1}},$$
$$c^* = A(k^*)^\alpha - (\delta + \alpha_L + \alpha_T)k^*.$$

3. Vis at Jacobi matricen for

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{bmatrix} \log k \\ \log c \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} Ak^{\alpha-1} - \frac{c}{k} - (\delta + \alpha_L + \alpha_T) \\ \frac{1}{\theta}\left(\alpha A k^{\alpha-1} - (\delta + \rho + \theta\alpha_T)\right) \end{bmatrix},$$

evalueret i $(\log k^*, \log c^*)$ er givet ved

$$J_f(\log k^*, \log c^*) = \begin{bmatrix} \rho - \alpha_L - (1-\theta)\alpha_T & \delta + \alpha_L + \alpha_T - \frac{1}{\alpha}(\delta + \rho + \theta\alpha_T) \\ \frac{\alpha-1}{\theta}(\delta + \rho + \theta\alpha_T) & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Vis at

$$f(\log k^*, \log c^*) = (0, 0)^T.$$

Opgave 4
Section 2.7 Exercise 3

Løs med Teoremet om Implicit Givne Funktioner, som vi har behandlet det. (Det er lidt anderledes end løsningen i bogen.)

8-minutters foredrag

1. Taylor-formlen
2. Teorem om Implicit Givne Funktioner