Mathematics for Economists
Kapitel 4 – Integration

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 4

- Integration af funktioner på et interval (4.1)
- Leibnizformel (4.2)
- Integraler af funktioner af flere variable på produktmængder (4.4)
- Planintegral over begrænsede mængder (4.5)
- **Riemann integral af funktioner af flere variable (4.6)**
- **Substitution for planintegraler (4.7)**

4.6 Riemann-integral af funktioner af flere variable

4.6 Riemann-integral af funktioner af flere variable

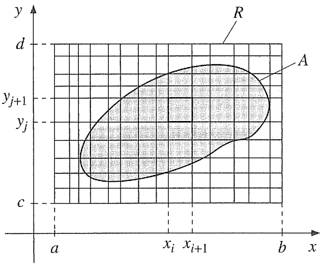

Figure 1

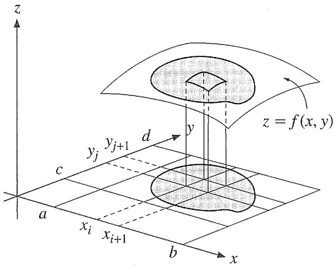

Figure 2

- $f : A \to \mathbb{R}$ kontinuert, $A \subset \mathbb{R}^2$ lukket og begrænset.
- $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ inddeling af under-rektangler af rektanglet R der rummer A. $(x_{i,*}, y_{j,*}) \in R_{ij}$ vilkårligt punkt.
- Rumfanget af søjlen i Figure 2 kan approksimeres ved $f(x_{i,*}, y_{j,*})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$.
- Integralet kan approksimeres ved

$$\sum_{R_{ij} \subset A} f(x_{i,*}, y_{j,*}) \Delta x_i \Delta y_j, \qquad \Delta x_i = (x_{i+1} - x_i),\ \Delta y_j = (y_{j+1} - y_j).$$

4.6 Riemann-integral af funktioner af flere variable

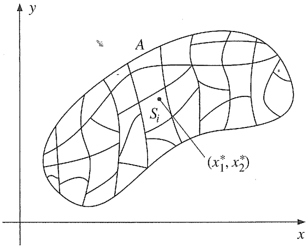

Figure 3

- Definitionen generaliseres til en stor klasse af almindelige mængder: A underinddeles i delmængder $S_1, \ldots, S_n$ med arealer $\Delta s_1, \ \ldots \ \ \Delta s_n$. $(x_{i,*}, y_{i,*}) \in S_i$.
- Approksimer integralet ved

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i,*}, y_{j,*})\Delta s_i.$$

- Lad areal $\Delta s_i \to 0$ for at fåplanintegralet.

4.6 Riemann-integral af funktioner af flere variable

Egenskaberne af integralet opremset på slides 4 og 5 gælder også for Riemann-integralet af funktioner af flere variable.

Teorem (Mellemværdisætning for planintegralet)

Lad $f : A \to \mathbb{R}$ kontinuert, $A \subset \mathbb{R}^2$, og lad $m, M \in \mathbb{R}$ således, at $m \leq f(x,y) \leq M$ påA. Der findes $\xi \in \mathbb{R}$ således, at

$$\int_A f(x,y)dx\,dy = \xi \int_A dx\,dy = \xi \text{ areal}(A).$$

Teorem (Middelværdisætning for planintegralet)

Lad $f : A \to \mathbb{R}$ kontinuert, $A \subset \mathbb{R}^2$ sammenhængende (dvs. at A ikke er foreningsmængden af disjunkte mængder). Såfindes et par $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ således, at

$$\int_A f(x,y)dx\,dy = f(\bar{x},\bar{y}) \int_A dx\,dy = f(\bar{x},\bar{y}) \text{ areal}(A).$$

4.7 Substitution for planintegraler

4.7 Substitution for planintegraler

Substitution for planintegraler

Betragt planintegralet

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy$$

og lad

$$x = g(u,v), \quad y = h(u,v).$$

Under antagelser på f, g, h og A får vi, at

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{A'} f(g(u,v),\, h(u,v)) \det \begin{bmatrix} \partial g/\partial u & \partial g/\partial v \\ \partial h/\partial u & \partial h/\partial v. \end{bmatrix} du\,dv,$$

hvor

$$\begin{bmatrix} \partial g/\partial u & \partial g/\partial v \\ \partial h/\partial u & \partial h/\partial v. \end{bmatrix}$$

er Jacobi-matricen for afbildningen

$$\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

4.7 Substitution for planintegraler

Substitution for planintegraler

Bemærk at arealerne A og A' ikke er de samme. Deres forhold er

$$A = \{(g(u, v), h(u, v)) \mid (u, v) \in A'\}.$$

4.7 Substitution for planintegraler

Teorem (Substitution for planintegraler)

Antag, at

$$x = g(u, v), \qquad y = h(u, v)$$

definerer en kontinuert differentiabel bijektion fra en åben og begrænset mængde $A' \subset \mathbb{R}^2$ til en åben og begrænset mængde $A \subset \mathbb{R}^2$. Antag derudover, at Jacobi-determinanten $|\partial(g, h)/\partial(u, v)|$ er begrænset på A'. Lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuert og begrænset funktion på A. Der gælder

$$\int_A f(x, y) dx\, dy = \int_{A'} f(g(u, v),\ h(u, v)) \left| \frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv.$$

4.7 Substitution for planintegraler

Teorem (Substitution for integraler af funktioner af flere variable)

Antag at $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u \mapsto x$ er en kontinuert differentiabel bijektion på åbne og begrænsede mængder A, $A' \subset \mathbb{R}^n$, hvor

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = g(u),\ u \in A'\}.$$

Antag derudover, at Jacobi-determinanten

$$\det J_g = \det \left[\frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} \right]$$

for g er begrænset på A'. Lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuert og begrænset funktion på A. Der gælder

$$\int_A f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{A'} f(g_1(u), \ldots, g_n(u)) \det(J_g)\, du_1 \cdots du_n.$$