Mathematics for Economists
Kapitel 1 – Lineær Algebra

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 1

- Ligningssystemer / Lineære uafhængighed
- Funktioner / Rangen af en matrix / Rangen og lineære ligningssystemer / Skalarprodukt
- Determinanter
- Egenværdier
- **Symmetriske bilineære former**

1.7 Symmetriske bilineære former

1.7 Symmetriske bilineære former

Definition

Lad $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ være en symmetrisk matrix, i.e., $A^T = A$, eller

$$(a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,n\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}} = (a_{ji})_{\substack{j \in \{1,\dots,n\} \\ i \in \{1,\dots,n\}}} .$$

En **symmetrisk bilineær form** er givet ved

$$\begin{aligned} Q_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x, y &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \end{aligned}$$

eller $Q_A(x, y) = x^T A y = \langle x, Ay \rangle$.

Bemærk den eponyme egenskab $Q_A(x, y) = Q_A(y, x)$ eller $x^T A y = y^T A x$ eller $\langle x, Ay \rangle = \langle y, Ax \rangle$.

Definition

Den tilhørende **kvadratiske form** er givet ved

$$q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto x^T A x = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} x_i x_j.$$

Vi har allerede forstået at egenvektorer til forskellige egenværdier er lineært uafhængige. Hvis matricen er symmetrisk, så er egenvektorerne endda ortogonale.

Sætning

For en symmetrisk matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gælder, at egenvektorer til forskellige egenværdier er ortogonale.

Som vi har set kan egenværdierne af en almindelig $\mathbb{R}^{n \times n}$ matrix være komplekse. Men:

Sætning

For en symmetrisk matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gælder, at alle egenværdier er reelle.

$\square$

Definition

En kvadratisk matrix A der er dannet af ortogonale søjler $(v_1, \ldots, v_n)$, $v_i \perp v_j$ for $i \neq j$, kaldes en **ortogonal matrix**.

$$A'A = \begin{bmatrix} v_1'v_1 & v_1'v_2 & \cdots & v_1'v_n \\ v_2'v_1 & v_2'v_2 & \cdots & v_2'v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n'v_1 & v_n'v_2 & \cdots & v_n'v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v_1\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|v_2\|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|v_n\|^2 \end{bmatrix}.$$

Definition

En kvadratisk matrix A der er dannet af ortonormale søjler $(v_1, \ldots, v_n)$, $v_i \perp v_j$ for $i \neq j$, $\|v_1\| = \ldots = \|v_n\| = 1$ kaldes en **ortonormal matrix**.

$$A'A = I.$$

Sætning

For en ortonormal matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gælder

$$A^{-1} = A'.$$

Den inverse er altså givet ved den transponerede.

Følger umiddelbart fra $A'A = I$.

Sætning

Lad $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ være en symmetrisk matrix med n forskellige egenværdier. Der findes en ortogonal matrix P således at

$$P'AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Derfor er egenværdi dekompositionen givet ved

$$A = PDP'.$$

1.7 Symmetriske bilineære former

Definition

En symmetrisk bilineærform siges at være **positivt (semi-) definit**, hvis

$$Q_A(x, x) = x^T Ax > 0 \text{ (semi: } \geq 0)$$

for alle $x \neq 0$.

Analogt definerer vi **negativt (semi-) definit**.

Sætning

Lad $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ være en symmetrisk matrix.

$$A \text{ positivt definit} \iff \text{alle egenværdier er positive.}$$

Det følger at for A at være positivt definit, skal A have fuld rang. Hvis A har egenværdier lig med nul, så kan A kun være positivt semi-definit.

Definition

For en kvadratisk matrix A kaldes matricerne A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, defineret ved

$$A_k = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\ldots,k\} \\ j \in \{1,\ldots,k\}}}$$

som **ledende undermatricer**.

1.7 Symmetriske bilineære former

Skematisk er de ledende undermatricer givet ved

$$\begin{array}{c|cccc} A_1 & a_{11}\rfloor & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{21} & a_{22}\rfloor & a_{23} & a_{24} \\ A_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33}\rfloor & a_{34} \\ A_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\rfloor \end{array}$$

Teorem (Hurwitz criterion, Thm 1.7.1)

Lad $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ være en symmetrisk matrix. A er positivt definit hvis og kun hvis

$$\det A_k > 0 \text{ for alle } k = 1, \ldots, n.$$

Tallene $\det A_k$ kaldes **ledende underdeterminanter**.

Definition

Lad $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ være en symmetrisk matrix. A er **negativt definit** hvis $-A$ er positivt definit.

Korollar

Lad $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ være en symmetrisk matrix. A er negativt definit hvis og kun hvis

$$(-1)^k \det A_k > 0 \text{ for alle } k = 1, \ldots, n.$$

Teorem (1.7.2)

Lad $Q = x'Ax$ være en kvadratisk form, hvor matricen A er symmetrisk, og lad $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ være de reelle egenværdier for A. Der gælder

(a) Q er positivt definit $\iff$ $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$

(b) Q er positivt semidefinit $\iff$ $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$

(c) Q er negativt definit $\iff$ $\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$

(d) Q er negativt semidefinit $\iff$ $\lambda_1 \leq 0, \ldots, \lambda_n \leq 0$

(e) Q er indefinit $\iff$ A har både pos. og neg. egenværdier