Bevismetoder

1. Direkte bevis
2. Kontraposition
3. Bevis ved modstrid
4. Matematisk induktion

$$A \Rightarrow B$$

1. $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B$

$A: \quad S_n = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n, \quad |q| < 1$

$B: \quad S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ - \; q S_n &= \phantom{1 + {}} q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} \\ \hline (1-q) S_n &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

2. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

$\left[\begin{array}{l} \wedge : \text{ og} \\ \vee : \text{ eller} \end{array} \right.$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

$$\begin{aligned} (\underset{\tilde{A}}{\neg B} \Rightarrow \underset{\tilde{B}}{\neg A}) &\Leftrightarrow (\neg \tilde{A} \vee \tilde{B}) \\ &\Leftrightarrow (\neg(\neg B) \vee \neg A) \\ &\Leftrightarrow (B \vee \neg A) \\ &\Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \end{aligned}$$

Ex: $n \in \mathbb{N}$

$\underset{A}{n^2 \text{ er lige}} \Rightarrow \underset{B}{n \text{ lige}}$

$\neg B$: n ulige

$\Rightarrow$ $n \cdot n$ ulige, fordi prod. af to ulige tal er ulige

$\Rightarrow \neg A$ $\square$

3. Bevis ved modstrid

$\underset{\text{ortogonal}}{A} \Rightarrow \underset{\text{uafhængige}}{B}$

$(\underset{\text{afhæng.}}{\neg B} \wedge \underset{\text{ortogonal}}{A}) \Rightarrow (Z \wedge \neg Z)$

$x, y \neq 0$, $y = rx, r \neq 0$

enten $r = 0$ eller $x = 0$ ($0 = r^2 \|x\|^2$)

4. Matematisk induktion

$A_n \Rightarrow B_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$

1) $A_0 \Rightarrow B_0$
eller $A_1 \Rightarrow B_1$

2) Antag at $A_n \Rightarrow B_n$ er sandt
Vis at $A_{n+1} \Rightarrow B_{n+1}$.

$A_n: \quad S_n = q^0 + q^1 + \dots + q^n$

$\Rightarrow B_n: \quad S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

1) $S_0 = q^0 = 1$

$S_0 = \dfrac{1 - q^{0+1}}{1 - q} = 1$

2) $S_n = q^0 + \dots + q^n$

$\Rightarrow S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Vis: $S_{n+1} = q^0 + \dots + q^{n+1}$

$\Rightarrow S_{n+1} = \dfrac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \underbrace{q^0 + q + \dots + q^n}_{\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} \end{aligned}$$

$\square$