Mathematics for Economists
Kapitel 2 – Analyse af flere variable

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 2

- **Indsættelser: Grænseværdier, kontinuitet, optimering af funktioner af en variabel, middelværdisætningen, Taylor formlen for funktioner af en variabel**
- Partielle afledede, gradienter (2.1)
- Differentiabilitet (2.9)
- Taylor formlen for funktioner af flere variable (2.6)
- Implicit givne funktioner og inverse funktioner (2.7)
- Konvekse mængder (2.2)
- Konkave og konvekse funktioner (2.3/2.4)
- Kvasikonkave og -konvekse funktioner (2.5)

Indsættelser

- Grænseværdi af en funktion
- Kontinuitet
- Optimering af funktioner af en variabel
- Middelværdisætningen
- Taylor formel for funktioner af en variabel

Indsættelse: Grænseværdi af en funktion

EMEA afsnit 7.9

Definition (Grænseværdi af en funktion)

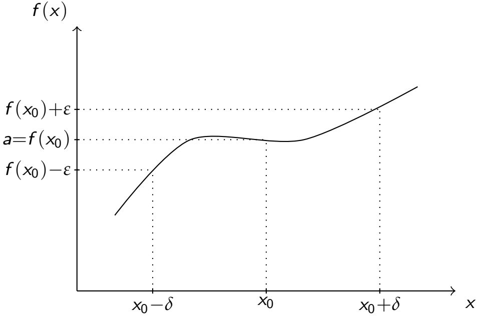
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en funktion defineret på en åben omegn af $x_0 \in \mathbb{R}$: $I = \{x : 0 < |x - x_0| < r\}$ for et $r > 0$. Et tal a kaldes **grænseværdi af f når x går mod x_0**, hvis for ethvert tal $\varepsilon > 0$ findes et tal $\delta \in (0, r]$ således, at

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

og vi skriver

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Indsættelse: Grænseværdi af en funktion



Indsættelse: Kontinuitet

EMEA afsnit 7.8

Definition (Kontinuitet)

Lad $f : D \to \mathbb{R}$, med D åbent interval, som indeholder punktet x_0. f kaldes for **kontinuert i punktet** x_0, hvis

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Indsættelse: Kontinuitet

Definition (ε-δ-Definition af kontinuitet)

f kaldes for **kontinuert i punktet** x_0, hvis og kun hvis for ethvert tal $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ således, at

$$|x - x_0| < \delta,\, x \in D \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Indsættelse: Optimering af funktioner af en variabel

EMEA Afsnit 8.1 Optimering af funktioner af en variabel

Teorem (8.1.1)

Lad $f : D \to \mathbb{R}$, differentiabel i $x_0 \in D$ indre punkt. Hvis x_0 er et (lokalt) ekstremum (minimum eller maksimum), så gælder

$$f'(x_0) = 0.$$

Indsættelse: Middelværdisætningen

EMEA afsnit 8.4 Middelværdisætningen

Teorem (Rolles sætning, en version af ekstremværdisætningen 8.4.1)

Lad $a < b$ og $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinuert og differentiabel på (a, b). Lad $f(a) = f(b)$. Så findes et tal $c \in (a, b)$ således, at

$$f'(c) = 0.$$

Indsættelse: Middelværdisætningen

Teorem (Middelværdisætning 8.4.2)

Lad $a < b$ og $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinuert og differentiabel på (a, b). Så findes et indre punkt $c \in (a, b)$ således, at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Indsættelse: Taylor formel for funktioner af en variabel

EMEA afsnit 7.6

Sætning

Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et interval og $f : I \to \mathbb{R}$ en $(n+1)$-gange kontinuert differentiabel funktion. Så gælder for $x_0, x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

hvor restledet er givet ved

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

For en $(n+1)$-gange kontinuert differentiabel funktion skriver vi $f \in C^{n+1}$.