Mathematics for Economists
Kapitel 5 – Sædvanlige Differentialligninger af Første Orden

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 5

- Introduktion (5.1)
- Retningsfelter (5.2)
- Separable DL (5.3)
- Lineære DL af første orden (5.4)
- **Substitution (5.6)**
- **Kvalitativ Teori (5.7)**

5.6 Substitution

5.6 Substitution

Nogle gange kan substitution hjælpe med at bringe DL i løsbare form.

Eksempel

Betragt **Bernoullis ligning**:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)x^r,$$

$r \in \mathbb{R}$ og $a(t),\ b(t) \in C^1$. DLen er lineær hvis $r = 0, 1$ og separabel hvis $r = 1$: $\dot{x} + (a(t) - b(t))x = 0$. Den almindelige form for $r \neq 1$ kan løses ved substitution: Dividér DLen med x^r:

$$x^{-r}\dot{x} + a(t)x^{1-r} = b(t).$$

Introducér substitutionen $z = x^{1-r}$, så gælder det at

$$\dot{z} = (1-r)x^{-r}\dot{x}.$$

DLen bliver til

$$\frac{1}{1-r}\dot{z} + a(t)z = b(t),$$

som er en lineær DL for $z = z(t)$.

5.7 Kvalitativ Teori og Stabilitet

5.7 Kvalitativ Teori og Stabilitet

Mange DL i økonomien kan udtrykkes som autonome ligninger

$$\dot{x} = F(x)$$

For at studere egenskaberne for løsningerne betragter man **fasediagrammet**.

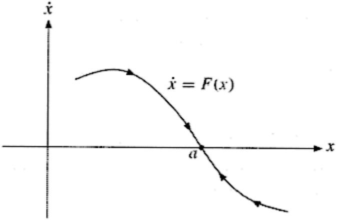

Figure 1

Et punkt a siges at repræsentere en **ligevægtstilstand** eller **steady state** hvis $F(a) = 0$. I dette tilfælde er $x(t) \equiv a$ en løsning.

Eksemplet i Fig. 1 har en ligevægtstilstand a, som kaldes for **global asymptotisk stabil**, fordi hvis $x(t)$ er en løsning for $\dot{x} = F(x)$ med $x(t_0) = x_0$, så vil $x(t)$ altid konvergere mod punktet $x = a$ for hvert begyndelsespunkt (t_0, x_0).

5.7 Kvalitativ Teori og Stabilitet

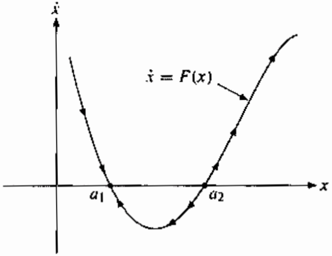

Figure 2 a_1 is a locally stable equilibrium state for $\dot{x} = F(x)$, whereas a_2 is unstable.

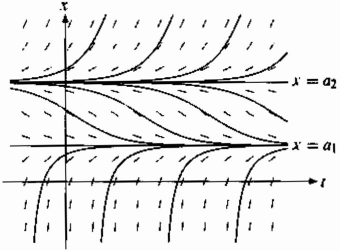

Figure 3 A corresponding directional diagram and some solution curves for $\dot{x} = F(x)$.

I Fig. 2 er der to ligevægte, a_1 og a_2. Man siger at a_1 er en **lokal asymptotisk stabil ligevægt**, hvorimod a_2 er **ustabil**.

(a) $F(a) = 0$ og $F'(a) < 0 \Rightarrow a$ er en lokal asymptotisk stabil ligevægt.

(b) $F(a) = 0$ og $F'(a) > 0 \Rightarrow a$ er en ustabil ligevægt.