ε-δ definition af grænseværdien

(EMEA, 5^{th} ed s. 264)

Tallet $a \in \mathbb{R}$ kaldes for grænseværdi af funktionen $f(x)$ når x går mod $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis for ethvert tal $\varepsilon > 0$, der findes et tal $\delta > 0$ således, at

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Hvis jeg påstår, at for en funktion $g(x)$ holder at

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{|x|} = 0 \quad \Bigg| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ a = 0 \end{array}$$

så betydes det ifølge definitionen, at for ethvert $\varepsilon > 0$, der findes et $\delta > 0$ således, at

$$|x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{g(x)}{|x|} \right| < \varepsilon$$

eller jeg kan skrive, at

$$|g(x)| < \varepsilon |x|$$

for "x tilstrækkeligt lille".

For en vektor $x \in \mathbb{R}^n$ og en funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

defineres i grænseværdien elementvis:

For alle $\tilde{\varepsilon} > 0$ findes et $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, således at

$$\|x\| < \delta_i \quad \Rightarrow \quad |y_i| < \tilde{\varepsilon}$$

Lad $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$.

$$\|x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |y_i| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{for alle } i = 1, \dots, m.$$

$$\|y\| < \sqrt{\underbrace{\tilde{\varepsilon}^2 + \tilde{\varepsilon}^2 + \dots + \tilde{\varepsilon}^2}_{m \text{ gange}}} = \sqrt{m\tilde{\varepsilon}^2} = \sqrt{m}\,\tilde{\varepsilon}$$

For $\varepsilon > 0$ vælg $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$, så følger, at der findes $\delta > 0$ således at

$$\|x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|y\| < \varepsilon$$

Hvis jeg påstår, at for en funktion $g(x) \in \mathbb{R}^m$ holder at $\lim_{\|x\| \to 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0$

Så betyder, at for ethvert $\varepsilon > 0$, der findes et $\delta > 0$ således, at

$$\|x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon$$

eller $\|g(x)\| < \varepsilon \|x\|$ for x tilstrækkeligt lille. $(x = 0 \iff \|x\| = 0)$

Lad $y = g(x) \in \mathbb{R}^m$ og $A \in \mathbb{R}^{k \times m}$.

Hvis $\lim_{\|x\| \to 0} \frac{y}{\|x\|} = 0$

hvad kan vi sige om

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{Ay}{\|x\|} \; ?$$

$$Ay = \begin{bmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1m} y_m \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2m} y_m \\ \vdots \\ a_{k1} y_1 + a_{k2} y_2 + \dots + a_{km} y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Lad $\bar{a}$ være den største indgang i A

$$\{Ay\}_i \leq \bar{a} \, (\underbrace{y_1 + y_2 + \dots + y_m}_{= \Sigma y_j})$$

$i = 1, \dots, k$

$$\|Ay\| \leq \left\| \begin{matrix} \bar{a} \; \Sigma y_j \\ \bar{a} \; \Sigma y_j \\ \vdots \\ \bar{a} \; \Sigma y_j \end{matrix} \right\| = \sqrt{k} \, \bar{a} \, \Sigma y_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = \langle y, 1 \rangle , \quad 1 \in \mathbb{R}^m$$

Cauchy-Schwartz:

$$|\langle y, 1 \rangle| \leq \|y\| \, \|1\| = \sqrt{m} \, \|y\|$$

$$\Rightarrow \; |\sqrt{k} \, \bar{a} \, \Sigma y_j| \leq \sqrt{k} \sqrt{m} \, \bar{a} \, \|y\|$$

$$\Rightarrow \quad \|Ay\| \leq \sqrt{km} \, \bar{a} \, \|y\| .$$

Den største indgang i Ay er mindre eller lig med $\|Ay\|$, og så kan vi konkludere, at

—

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|Ay\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\sqrt{km}\,\bar{a}\,\|y\|}{\|x\|}}_{\underbrace{\sqrt{km}\,\bar{a} \underbrace{\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|y\|}{\|x\|}}_{=0}}_{=0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\|x\|\to 0} \frac{Ay}{\|x\|} = 0 \qquad \square$$

Kaede regel:

$$\begin{array}{llll} & \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m \\ & \cup & & \cup \\ f: & X & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad f(x) = y$$

$$g: \; Y \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Udsagn: $\underset{k\times n}{D(g\circ f)(x)} = \underset{k\times m}{Dg(y)}\;\underset{m\times n}{Df(x)}$

Bevis: Lad $A = Df(x)$, $B = Dg(y)$

Vi viser at $D(g\circ f)(x) = BA$.

f, g differentiable

$$\underset{m}{f(x+h)} = \underset{m}{f(x)} + \underset{m\times n}{A}\;\underset{n\times 1}{h} + \underset{m}{e_f(h)}$$

$$\underset{k}{g(y+p)} = \underset{k}{g(y)} + \underset{k\times m}{B}\;\underset{m\times 1}{p} + \underset{k}{e_g(p)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e_f(h)}{\|h\|} = 0 , \qquad \lim_{p\to 0} \frac{e_g(p)}{\|p\|} = 0$$

Derved,

$$(g\circ f)(x+h) = g(f(x+h))$$

$$= g(\underbrace{f(x)}_{y} + \underbrace{Ah + e_f(h)}_{p(h)})$$

$$= g(f(x)) + B(Ah + e_f(h)) + e_g(Ah + e_f(h))$$

$$= \underbrace{g(f(x))}_{(g\circ f)(x)} + BAh + \underbrace{Be_f(h) + e_g(Ah + e_f(h))}_{e(h)} \qquad (*)$$

Vi skal vise at

$$\lim_{h\to 0} \frac{e(h)}{\|h\|} = 0.$$

Vi har set: $\lim_{h\to 0} \frac{Be_f(h)}{\|h\|} = 0$

Nu skriver vi $\|e_g(p)\| < \varepsilon_1 \|p\|$

for et $\varepsilon_1 > 0$ og $\|p\| < \delta_1$

På samme måde skriver vi

$$\|e_f(h)\| < \varepsilon_2 \|h\|$$

for $\varepsilon_2 > 0$ og $\|h\| < \delta_2$. Så får vi:

$$\|e_g(\underbrace{Ah + e_f(h)}_{p})\| < \varepsilon_1 \|Ah + e_f(h)\|$$

$$\leq \varepsilon_1 \|Ah\| + \varepsilon_1 \|e_f(h)\|$$

trekants-
ulighed

$$< \varepsilon_1 \|Ah\| + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \|h\|$$

$$< \varepsilon_1 \sqrt{nm}\,\bar{a}\,\|h\| + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \|h\|$$

$\bar{a}$ største indgang i A

Vi skriver $\|B e_f(h)\| < \varepsilon_3 \|h\|$ for $\varepsilon_3 > 0$ og $\|h\| < \delta_3$.

Så får vi:

$$\|e(h)\| \leq \left(\varepsilon_3 + \varepsilon_1 \sqrt{nm}\,\bar{a} + \varepsilon_1 \varepsilon_2\right) \|h\|$$

For $K > 0$, vælg $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ således at

$$K \geq \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \left(\sqrt{nm}\,\bar{a} + \varepsilon_2\right)$$

Vælg $\|h\| \leq \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} =: \delta$

$$\Rightarrow \quad \|e(h)\| < K \|h\|$$

Derved har vi vist, at i ligningen $(*)$

$$g(f(x+h)) = g(f(x)) + BAh + e(h),$$

da gælder at

$$\lim_{h \to 0} \frac{e(h)}{\|h\|} = 0.$$

Og derved har vi vist at $g \circ f$ er differentiabel med Jacobi matrix BA. $\square$