Mathematics for Economists
Kapitel 9 – Kontrolteori: Grundlæggende metoder

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 9

- Introduktion (9.1, 9.2)
- Regularitetsbetingelser (9.3)
- Standardproblemet (9.4)
- **Skyggepriser og den adjungerede funktion (9.6)**
- **Tilstrækkelige betingelser (9.7)**
- Problemer udtrykt i nutidsværdi (9.9)
- Ubegrænset periode (9.11)

9.6 Skyggepriser og den adjungerede funktion

9.6 Skyggepriser og den adjungerede funktion

Hamilton-funktionen er

$$H = f(t, x, u) + p(t)g(t, x, u).$$

Betragt et kort interval $[t, t + \Delta t]$. På dette interval har vi

$$\Delta x \approx g(t, x, u)\Delta t,$$

og derfor

$$H\Delta t = f(t, x, u)\Delta t + p(t)g(t, x, u)\Delta t \approx f(t, x, u)\Delta t + p(t)\Delta x.$$

$H\Delta t$ er den kumulative øjeblikkelige profit påintervallet $[t, t + \Delta t]$ og $p(t)\Delta x$ er bidraget fra kapitalforandringen Δx.

Dette er et argument for, at $p(t)$ kan fortolkes som alternativomkostninger. En forandring i bibetingelsen, som giver dynamikken af x, medfører en forandring på beløbet p i objektfunktionen.

9.6 Skyggepriser og den adjungerede funktion

Økonomisk fortolkning

Betragt et firma der maksimerer profit på et planlægningsinterval $[t_0, t_1]$. Tilstanden af firmaet i punkt t er beskrevet ved kapitalapparatet $x(t)$. I hvert punkt t kan firmaet styre dets øjeblikkelige profit $f(t, x(t), u(t))$ og forandringen i den fremtidige kapital. Antag at firmaet kan vælge kontrolfunktionen $u(t)$ inden for visse grænser, således at $u(t) \in U = [u_0, u_1]$. Totalprofitten i perioden $[t_0, t_1]$ er

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$$

Forandringsraten i kapital afhænger af den nuværende kapital og af $u(t)$. Derved fås

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

med x_0 som givet kapitalapparat i $t = t_0$. Kontrolfunktionen $u(t)$ styrer ikke kun den øjeblikkelige profit, men gennem DL'en også forandringen i kapital or derved den fremtidige kapital, som igen forandrer totalprofitten. Den adjungerede funktion $p(t)$ giver **skyggeprisen** for kapitalvariablen $x(t)$, fordi $p(t)$ måler det marginale bidrag af kapitalen til profitten.

9.7 Tilstrækkelige betingelser

9.7 Tilstrækkelige betingelser

Maksimumsprincippet giver **nødvendige betingelser**. Indtil her har vi brugt Mangasarian for **tilstrækkelighed**.

Teorem (Mangasarian)

Betragt standardproblemet (9.4.1)-(9.4.3) med et interval i $\mathbb{R}$ som kontrolregion U. Antag at det tilladte par (x^*, u^*) opfylder alle betingelser i maksimumsprincippet (9.4.5)-(9.4.7), med den tilhørende adjungerede funktion $p(t)$ og $p_0 = 1$. Der gælder at hvis

$$H(t, x, u, p) \text{ er konkav mht. } (x, u) \text{ for hvert } t \in [t_0, t_1],$$

så løser parret (x^*, u^*) problemet. Hvis H er streng konkav i (x, u), såer (x^*, u^*) den entydige løsning.

9.7 Tilstrækkelige betingelser

Bemækning

Hvis U er et åbent interval, så implicerer konkavitet af H i u at maksimeringsbetingelsen (9.4.5) er ensbetydende med

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{(x^*,u^*)} = 0.$$

Konkavitet i (x, u) er opfyldt hvis, f.eks., f og pg er konkave i (x, u) eller f er konkav og g lineær i (x, u).

9.7 Tilstrækkelige betingelser

- Antag at $U = [u_0, u_1]$. Hvis $u^* \in (u_0, u_1)$, så gælder
$$\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{(x^*,u^*)} = 0.$$
- hvis $u^* = u_0$,
$$\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{(x^*,u^*)} \leq 0,$$
fordi ellers kunne vi vælge en u til højre for u_0 og forøge H.
- Hvis $u^* = u_1$,
$$\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{(x^*,u^*)} \geq 0,$$
fordi ellers kunne vi vælge en u til venstre for u_1 og forøge H.

9.7 Tilstrækkelige betingelser

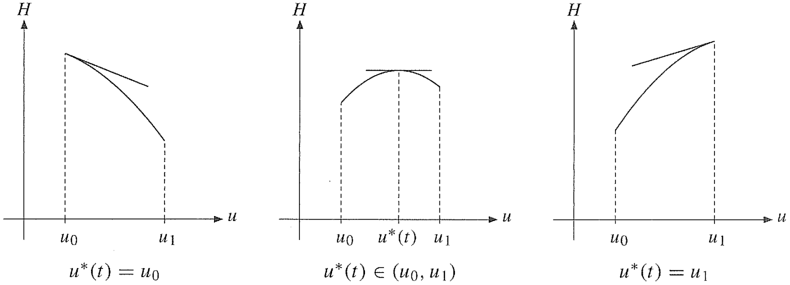

Figure 1

9.7 Tilstrækkelige betingelser

I mange økonomiske modeller er Hamilton-funktionen ikke konkav. Arrow foreslog en svagere konkavitetsbetingelse: Lad

$$\widehat{H}(t, x, p) = \max_{u \in U} H(t, x, u, p)$$

hvor vi antager at maksimummet over u findes i hvert tre-tupel (x, u, p). Funktionen $\widehat{H}(t, x, p)$ kaldes for den **maksimerede Hamilton-funktion**. Det kan vises at:

Teorem (9.7.2, Arrows tilstrækkelige betingelse)

Antag at $(x^*(t), u^*(t))$ er et tilladt par for standardproblemet med slutbetingelser (9.4.1)–(9.4.3) der opfylder alle krav fra maksimumsprincippet, med $p(t)$ som adjungerede funktion. Antag derudover at

$$\widehat{H}(t, x, p(t)) \text{ er konkav i } x \text{ for hvert } t \in [t_0, t_1].$$

Så løser $(x^*(t), u^*(t))$ problemet.