Mathematics for Economists
Kapitel 1 – Lineær Algebra

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 1

- Ligningssystemer / Lineære uafhængighed
- **Funktioner / Rangen af en matrix / Rangen og lineære ligningssystemer / Skalarprodukt**
- Determinanter
- Egenværdier
- Symmetriske bilineære former

Funktioner

Definition

En **relation** R fra en mængde A til en mængde B er en delmængde af $A \times B = \{(a, b) | a \in A,\ b \in B\}$. For eksempel, "$\leq$" definerer en (binær) relation R fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ således at

$$(a, b) \in R \Rightarrow a \leq b.$$

Definition

En **funktion** eller **afbildning** $f : X \to Y$ fra en mængde X til en mængde Y er en relation hvorved der til hvert element $x \in X$ knyttes et bestemt element $y \in Y$.

1. X kaldes **definitionsmængde**; Y kaldes **dispositionsmængde** af f.
2. Det til et element $x \in X$ svarende element af Y betegnes $f(x)$ og kaldes **funktionsværdien** eller **billedet af** x **ved** f.
3. For en vilkårlig delmængde $A \subset X$ udgør billederne $f(x) \in Y$, $x \in A$ en delmængde af Y der kaldes **billedet af** A **ved** f og betegnes

   $$f(A) = \{f(x) | x \in A\}.$$

   $f(X)$ kaldes **billedmængden for** f eller **værdimængden for** f.

Funktioner

Definition

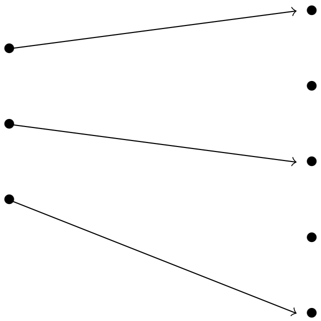
Lad $f : A \to B$ være en funktion.

1. Hvis det gælder for $a_1, a_2 \in A$ med $a_1 \neq a_2$ at $f(a_1) \neq f(a_2)$, såkaldes f for **injektiv**. Sagt anderledes, $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.
2. Hvis $f(A) = B$, såkaldes f for **surjektiv**.
3. Hvis f er både injektiv og surjektiv, kaldes f for **bijektiv**. Med andre ord, ethvert $y \in Y$ er et billede af et og kun et $x \in X$.

Funktioner

f injektiv

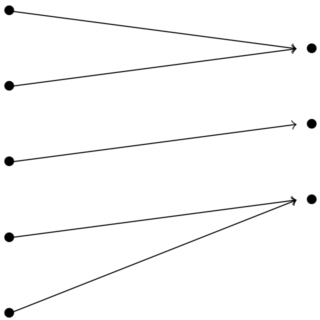
$$f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$



Funktioner

f surjektiv

$$f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$



Funktioner

f bijektiv

$$
\begin{array}{cccccc}
f & : & A & \longrightarrow & B \\
 & & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
 & & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
 & & \bullet & \longrightarrow & \bullet
\end{array}
$$

1.3 Rangen af en Matrix

1.3 Rangen af en Matrix

Definition (p. 11)

Rangen $r(A)$ af en matrix A er det maksimale antal af lineær uafhængige søjler i A. Vi sætter $r(A) = 0$ hvis A er den 0-matrix.

Sætning (1.3.2)

Rangen af en matrix A er lig med rangen af den transponerede matrix A': $r(A) = r(A')$.

Transposition

For en givet $m \times n$ matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

definerer vi den **transponerede** matrix A' som $n \times m$ matricen

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Vi har altså

$$A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}, \qquad A' = \{a_{ji}\}_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,m}}.$$

Transposition

Vektorer forstås sædvanligvis som søjler:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Den transponerede vektor x' er derfor rækken

$$x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

1.4 Rangen og lineære ligningssystemer

1.4 Rangen og lineære ligningssystemer

Rangbegrebet kan bruges til at klassificere lineære ligningssystemer.

Sætning

Lad $Ax = b$, hvor $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ og $b \in \mathbb{R}^m$, have en løsning $x \in \mathbb{R}^n$. Der er netop én løsning hvis og kun hvis

$$r(A) = n.$$

I dette tilfælde har ligningen $Ax = 0$ kun den triviale løsning $x = 0$.

Sætning

Lad $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. $Ax = b$ har mindst en løsning for hver $b \in \mathbb{R}^m$ hvis $r(A) = m$.

1.4 Rangen og lineære ligningssystemer

Betragt det lineære system med m ligninger og n ubekendte

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad \text{eller} \quad Ax = b \tag{1}
$$

hvor A er en $m \times n$ koefficientmatrix. Lad $A_b \in \mathbb{R}^{m \times n+1}$ benævne totalmatricen (augmented matrix):

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}
$$

1.4 Rangen og lineære ligningssystemer

Teorem (1.4.1)

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for eksistensen af mindst en løsning er, at rangen af koefficientmatricen A er lig med rangen af totalmatricen A_b:

$$Ax = b \quad \text{har en løsning} \quad \iff \quad r(A) = r(A_b)$$

1.4 Rangen og lineære ligningssystemer

Teorem (1.4.2)

Antag at system (1) har løsninger og at $r(A) = r(A_b) = k$.

(a) Hvis $k < m$, dvs. at rangen k er mindre end antallet af ligningerne m, så er $m - k$ ligninger overflødige. Hvis vi betragter en løsning til et subsystem af k lineært uafhængige rækker, så vil de resterende $m - k$ ligninger være automatisk opfyldt.

(b) Hvis rangen er mindre end antallet af ubekendte, $k < n$, så er der $n - k$ variable der kan vælges frie, og de resterende k variable bestemmes ved disse $n - k$ frie variable. Systemet har $n - k$ **frihedsgrader**.

Skalarproduktet

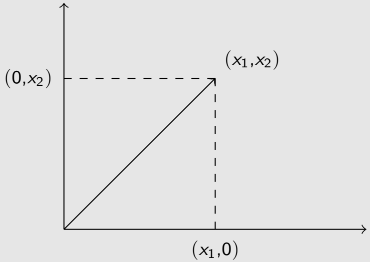
Skalarproduktet

Eksempel

Vi indfører konceptet af **længden** af en vektor i $\mathbb{R}^2$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Intuitivt tyr vi til Pythagoras og definerer $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

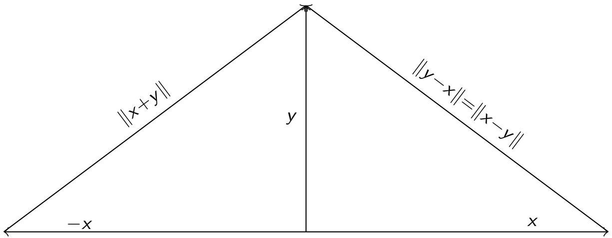


Skalarproduktet

Eksempel

Når idéen om længden er sådan defineret, så er konceptet af en **ret vinkel** impliceret. Lad $x = (x_1, x_2)^T$ and $y = (y_1, y_2)^T$. Vektorerne x og y er retvinklede (eller **ortogonale**, skrives $x \perp y$) hvis

$$\|x + y\| = \|x - y\|, \text{ eller } x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0.$$



Skalarproduktet

Definition

I $\mathbb{R}^2$ kaldes tallet $x_1 y_1 + x_2 y_2$ et **skalarprodukt** (eller det **indre produkt** af x og y.
Notation: $\langle x, y \rangle$ eller $x \cdot y$.

Definition (Indre produkt)

Lad $V \subset \mathbb{R}^n$ være et vektorrum. Skalarproduktet er en funktion

$$V \times V \to \mathbb{R}$$

som knytter et tal $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ til hvert par x, $y \in V$ af vektorer, således at den resulterende afbildning er

(i) **bilineær:** for x, y, $z \in V$, r, $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle rx + sy, z \rangle &= r\langle x, z \rangle + s\langle y, z \rangle \\ \langle x, ry + sz \rangle &= r\langle x, y \rangle + s\langle x, z \rangle, \end{aligned}$$

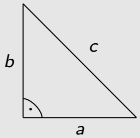
(ii) **symmetrisk:** $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(iii) **positivt definit:** $\langle x, x \rangle \geq 0$, "$=$" hvis og kun hvis $x = 0$.

Skalarproduktet

Eksempel (Pythagoras' Theorem)

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle
\end{aligned}
$$



Lad $x = (a,\ 0)^T$ og $y = (0,\ b)^T$, så fås

$$c^2 = \|x + y\|^2 = a^2 + b^2.$$

Da x og y er ortogonale, $\langle x, y \rangle = 0$.

Skalarproduktet

Eksempel

Standard skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = x^Ty.$$

Skalarproduktet

Definition (Norm)

Det reelle tal $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ kaldes (den Euklidiske) **norm** af en vektor.

Definition (Ortogonalitet)

To vektorer x, y kaldes for **ortogonale** hvis $\langle x, y\rangle = 0$. Notation: $x \perp y$.

Skalarproduktet

Teorem (Cauchy-Schwarz Uligheden, Lgn. (38))

For $x, y \in V$, V reelt vektorrum, gælder

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Ligheden holder hvis x og y er lineært afhængige.

Skalarproduktet

Vi vender tilbage til Pythagoras Teoremet, og ved hjælp af Cauchy-Schwarz uligheden får vi **trekantsuligheden** (Eqn. 39):

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Skalarprodukter

Definition

Et system af vektorer $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ kaldes et **ortogonalsæt** hvis $v_i \neq 0$ and $v_i \perp v_j$ for $i \neq j$ (indbyrdes ortogonale). Hvis $\|v_i\| = 1$ for alle i, kaldes systemet et **ortonormalsæt**.

Sætning

Ortogonalsæt er lineært uafhængige.

Skalarproduktet

Definition

En basis der er et ortogonalsæt kaldes for **ortogonalbasis**. (Analogt defineres **ortonormalbasis**.)

Eksempel

Standardbasen $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ i $\mathbb{R}^n$ er en ortonormalbasis.