2622 Matematik for Økonomer
Eric Hillebrand

Opgavesæt 5

Opgave 1

1. Lad $f(x) = \sin(x)$. Brug Taylor-formlen for at vise, at

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(Husk, at $\sin'(x) = \cos(x)$ og $\cos'(x) = -\sin(x)$.)
Udvikl $\sin x$ i $x_0 = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

2. Find et tilsvarende udtryk for $\cos(x)$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

3. Brug dine resultater fra 1. og 2. for at vise, at

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x),$$

hvor i er den imaginære enhed.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \cdots \end{aligned}$$

Opgave 2

Antag, at vi har en output funktion Y af arbejdsstyrke L og kapital K, som er to gange kontinuert differentiabel. Lad w betegne prisen per enhed arbejdsstyrke, og lad i betegne prisen per enhed kapital. Hvis vi minimerer omkostningerne for arbejde og kapital

$$C(L, K) = wL + iK,$$

således, at outputniveauet er konstant lig med Y_0,

$$Y(L, K) = Y_0 \in \mathbb{R}_+,$$

så finder vi første-ordens betingelserne

$$\frac{w}{i} = \frac{D_L Y(L^*, K^*)}{D_K Y(L^*, K^*)} = -\text{marginalrate af teknisk substitution.} \tag{1}$$

(Vi skal komme tilbage til det i Kapitel 3.)
Betragt Cobb-Douglas produktionsfunktionen

$$Y(L, K) = AL^\alpha K^\beta.$$

1. Bestem gradienten og Hesse matricen.

$$\nabla Y(L, K) = \begin{bmatrix} a\alpha L^{\alpha-1} K^\beta \\ a\beta L^\alpha K^{\beta-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Hess } Y(L, K) = \begin{bmatrix} a\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^\beta & a\alpha\beta L^{\alpha-1}K^{\beta-1} \\ a\alpha\beta L^{\alpha-1}K^{\beta-1} & a\beta(\beta-1)L^\alpha K^{\beta-2} \end{bmatrix}$$

2. Vis at Cobb-Douglas funktionen er homogen (af første grad, dvs. lineær i K og i L) hvis $\beta = 1 - \alpha$.

$$\begin{aligned} Y(\lambda L, \lambda K) &= a(\lambda L)^\alpha (\lambda K)^\beta, \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} a L^\alpha K^\beta, \\ &= \lambda Y(L, K), \text{ if } \beta = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

3. For en produktionsfunktion $Y(x)$, $x = (K, L)'$, betragt kvotienten

$$\frac{Y(\lambda x)}{\lambda Y(x)}, \quad \lambda > 1.$$

Hvis kvotienten er lig med 1, så siges funktionen at implicere konstante skalaafkast; hvis kvotienten er større end 1, så implicerer funktionen voksende skalaafkast; hvis kvotienten er mindre end 1, aftagende skalaafkast. Vis at Cobb-Douglas funktionen implicerer konstant skalaafkast hvis $\beta = 1 - \alpha$, voksende skalaafkast hvis $\alpha + \beta > 1$ og aftagende skalaafkast hvis $\alpha + \beta < 1$.

$$\frac{Y(\lambda x)}{\lambda Y(x)} = \lambda^{\alpha+\beta-1}$$

$\lambda^{\alpha+\beta-1}$ er lig med nul hvis $\beta = 1 - \alpha$, større end 1 hvis $\alpha + \beta > 1$ og mindre end 1 hvis $\alpha + \beta < 1$.

4. Vis at forholdet mellem arbejde L og kapital C, der opfylder den første-ordens betingelse for optimalitet (1), er konstant.

$$\frac{D_L Y(L,K)}{D_K Y(L,K)} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L} \overset{!}{=} \frac{\omega}{i}$$
$$\Longrightarrow \frac{L^*}{K^*} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{i}{\omega} = \text{konstant}$$

5. Vis at
$$Y = K\ D_K Y(L,K) + L\ D_L Y(L,K),$$
dvs. hver inputfaktor betales beløbet af dens marginalprodukt, hvis $\beta = 1 - \alpha$. Nogle gang betegnes dette forhold som "Eulers teorem" indenfor økonomien.

6. Vis at substitutionselasticiteten
$$ES = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{L^*}{K^*}\right)}{L^*/K^*}}{\dfrac{d\left(\dfrac{i}{w}\right)}{i/w}}$$
der opfylder den første-ordens betingelse for optimalitet (1), er konstant.
$$ES = \frac{d\left(\frac{L^*}{K^*}\right)}{d\left(\frac{i}{w}\right)}\frac{i/\omega}{L^*/K^*} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} = 1$$

7. Vis at de relative andele af faktorerne af produktet Y er givet ved
$$\frac{LD_L Y}{Y} = \alpha, \ \frac{KD_K Y}{Y} = \beta.$$

Opgave 3 (Ramsey Model)

1. Vis at Cobb-Douglas produktionsfunktionen $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ kan skrives i per-capita formen
$$y = Ak^\alpha,$$
hvor $y = Y/L$ og $k = K/L$.

2. Vis at de steady-state ligevægtsværdier i Ramsey-modellen er givne ved
$$k^* = \left[\frac{1}{\alpha A}(\delta + \rho + \theta\alpha_T)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}},$$
$$c^* = A(k^*)^\alpha - (\delta + \alpha_L + \alpha_T)k^*.$$

3. Vis at Jacobi matricen for

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{bmatrix} \log k \\ \log c \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} Ak^{\alpha-1} - \frac{c}{k} - (\delta + \alpha_L + \alpha_T) \\ \frac{1}{\theta}\left(\alpha A k^{\alpha-1} - (\delta + \rho + \theta\alpha_T)\right) \end{bmatrix},$$

evalueret i $(\log k^*, \log c^*)$ er givet ved

$$J_f(\log k^*, \log c^*) = \begin{bmatrix} \rho - \alpha_L - (1-\theta)\alpha_T & \delta + \alpha_L + \alpha_T - \frac{1}{\alpha}(\delta + \rho + \theta\alpha_T) \\ \frac{\alpha-1}{\theta}(\delta + \rho + \theta\alpha_T) & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Vis at

$$f(\log k^*, \log c^*) = (0, 0)^T.$$

Omskriv funktionen f til

$$\begin{bmatrix} \log k \\ \log c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} Ae^{(\alpha-1)\log k} - e^{\log\frac{c}{k}} - (\delta + \alpha_L + \alpha_T) \\ \frac{1}{\theta}\left(\alpha A e^{(\alpha-1)\log k} - (\delta + \rho + \theta\alpha_T)\right) \end{bmatrix}$$

Jacobi-matricen:

$$J_f = \begin{bmatrix} A(\alpha-1)k^{\alpha-1} + \frac{c}{k} & -\frac{c}{k} \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\theta} A k^{\alpha-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Hvis du evaluerer i $(\log k^*, \log c^*)$ finder du værdierne for J_f og f som påstået i opgaven.

Opgave 4

Section 2.7 Exercise 3

Løs med Teoremet om Implicit Givne Funktioner, som vi har behandlet det. (Det er lidt anderledes end løsningen i bogen.)

$$F: \quad X_1 \times Y_1 \to \mathbb{R}^3, \quad X_1, Y_1 \subset \mathbb{R}^3$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{=:s}, \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{=:g(s)} \mapsto \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 - z + u - v - w^3 + 1 \\ -2x + y - z^2 + u + v^3 - w + 3 \\ x^2 + z - u - v + w^3 - 3 \end{bmatrix}$$

I punktet P har vi, at

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bestem

$$D_s g(s) = D_{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}$$

i punktet P

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ifølge Teoremet om Implicit Givne Funktioner gælder det i dette punkt, at

$$D_s g(s)|_P = -D_g F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} D_s F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Jacobi matricen af F i forhold til g er givet ved

$$D_g F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3w^2 \\ 1 & 3v^2 & -1 \\ -1 & -1 & 3w^2 \end{bmatrix}$$

og i punktet P

$$D_g F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

med invers matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Jacobi matricen af F i forhold til s er givet ved

$$D_s F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2y & -1 \\ -2 & 1 & -2z \\ 2x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og i punktet P

$$D_s F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Derved følger, at

$$D_s g(s)|_P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Svaret til 2.7.3 er den første søjle

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right)' = \left(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)'.$$

8-minutters foredrag

1. Taylor-formlen
2. Teorem om Implicit Givne Funktioner