Mathematics for Economists
Kapitel 2 – Analyse af flere variable

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 2

- Indsættelser: Grænseværdier, kontinuitet, optimering af funktioner af en variabel, middelværdisætningen, Taylor formlen for funktioner af en variabel
- **Partielle afledede, gradienter (2.1)**
- Differentiabilitet (2.9)
- Taylor formlen for funktioner af flere variable (2.6)
- Implicit givne funktioner og inverse funktioner (2.7)
- Konvekse mængder (2.2)
- Konkave og konvekse funktioner (2.3/2.4)
- Kvasikonkave og -konvekse funktioner (2.5)

2.1 Gradienter og retningsafledede

2.1 Gradienter og retningsafledede

Definition (Partielt afledede i et punkt)

Lad $X \subset \mathbb{R}^n$ være en åben mængde og

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, \ldots, x_n)^T &\longmapsto F(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

F er **partielt differentiabel** i $x \in X$ i forhold til den i'te variabel, hvis

$$F_i'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{F(x + he_i) - F(x)}{h}$$

findes i $\mathbb{R}$, hvor e_i er den i'te standard basisvektor.

Almindelige alternative betegnelser for den i'te partielle afledede er

$$F_i'(x) = D_i F(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x) = F_{x_i}(x).$$

Indsættelse: Åbne/Lukkede mængder

Intervaller:

- **Åbent:**

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

- **Lukket:**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Høj-dimensionale kugler: Lad $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- **Åben:**

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

- **Lukket:**

$$\overline{B(x_0, \varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

Indsættelse: Åbne/Lukkede mængder

Definition (Indre punkt)

Lad $A \subset \mathbb{R}^n$ og $a \in A$. Vi siger, at a er et **indre punkt** i A, hvis der findes et $\varepsilon > 0$ således, at kuglen $B(a, \varepsilon) \subset A$.

Definition (Åben mængde)

En mængde U kaldes **åben**, hvis ethvert punkt i U er et indre punkt, dvs. hvis for ethvert $x \in U$ findes et $\varepsilon > 0$ således, at $B(x, \varepsilon) \subset U$.

2.1 Gradienter og retningsafledede

Definition (p. 45)

Ved **gradienten** af F i x_0 forstås vektoren

$$\operatorname{grad} F(x_0) = \nabla F(x_0) = \left(\frac{\partial F(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_n} \right)$$

af første ordens partielle afledede. Hvis $x_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$ ligger på niveaumængden af F til niveau C, dvs. hvis $F(x_0) = C$, så er **tangenthyperplanet** til niveaumængden i x_0 mængden af alle x der opfylder

$$\langle \nabla F(x_0), (x - x_0) \rangle = 0. \qquad (*)$$

Da hvert punkt på tangenthyperplanet opfylder $(*)$, er gradienten $\nabla F(x_0)$ ortogonal til tangenthyperplanet i x_0.

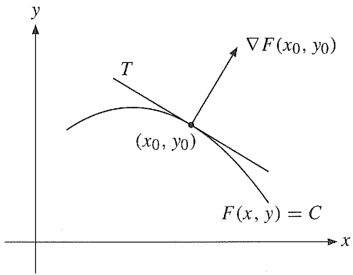


Figure 1 $\nabla F(x_0, y_0)$ is **orthogonal** to the tangent line T at (x_0, y_0).

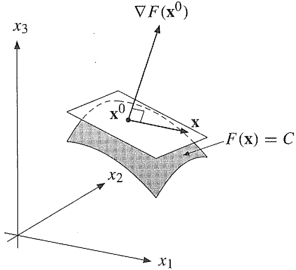


Figure 2 The gradient $\nabla F(\mathbf{x}^0)$ is orthogonal to the tangent plane of $F(\mathbf{x}) = C$ at $\mathbf{x}^0$.

Eksempel

Lad funktionen $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ være **homogen** af grad k, dvs. (EMEA p. 435)

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x).$$

Så gælder

$$\nabla f(\lambda x) = \lambda^{k-1} \nabla f(x),$$

dvs. gradienten er homogen af grad $k - 1$.
På en ret linje λx fra origoet er gradienterne proportionale. Med andre ord: Tangenthyperplanerne i hvert punkt på linjen λx er parallele.

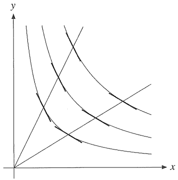


Figure 3 f is homogeneous of degree k. The level curves are parallel along each ray from the origin.

2.1 Gradienter og retningsafledede

I definitionen af den partielle afledede har vi brugt standard basisvektorene e_i

$$f_i'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}.$$

Vi kan generalisere definitionen til en vilkårligt givet vektor $a \in \mathbb{R}^n$ for at få den **retningsafledede**.

Definition

Den **retningsafledede** af en partielt differentiabel funktion f i a's retning er givet ved

$$f_a'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + ha) - f(x)}{h}$$

Det gælder at

$$f_a'(x) = \langle \nabla f(x), a \rangle.$$

2.1 Gradienter og retningsafledede

Teorem (2.1.1)

Lad $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ være C^1 (én gang kontinuert differentiabel) i en åben mængde A. I punkter x med $\nabla f(x) \neq 0$ opfylder gradienten $\nabla f(x) = (f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_n'(x))$:

(a) $\nabla f(x)$ er ortogonal til niveaukurven gennem x.

(b) $\nabla f(x)$ peger i retningen af den største vækst af f.

(b) $\|\nabla f(x)\|$ måler hastigheden af forøgelsen af f i retning af den største vækst.

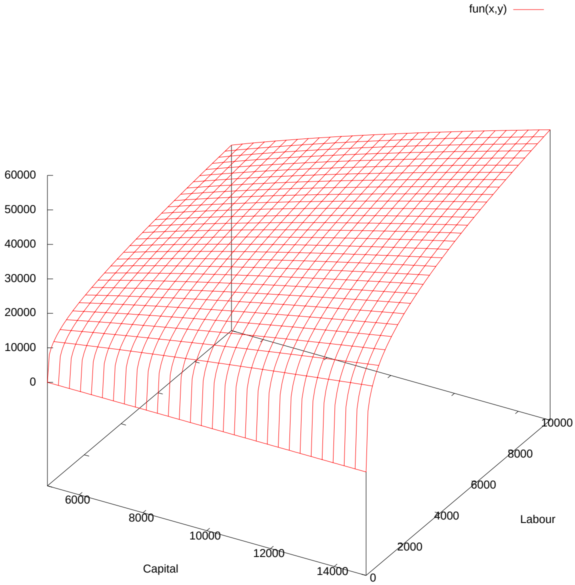
Eksempel: Cobb-Douglas produktionsfunktion I

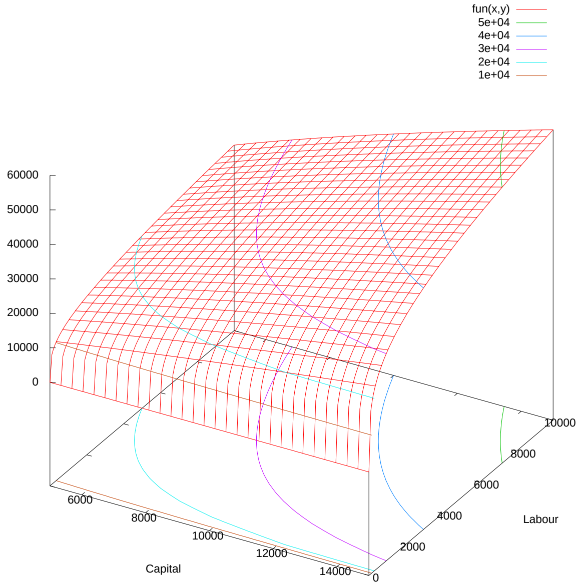
Betragt Cobb-Douglas produktionsfunktionen $f(K, L) = 4K^{3/4}L^{1/4}$ med argumenter K (udgifter til kapital) og L (udgifter til løn).

- Find gradienten i $(10000, 625)$:

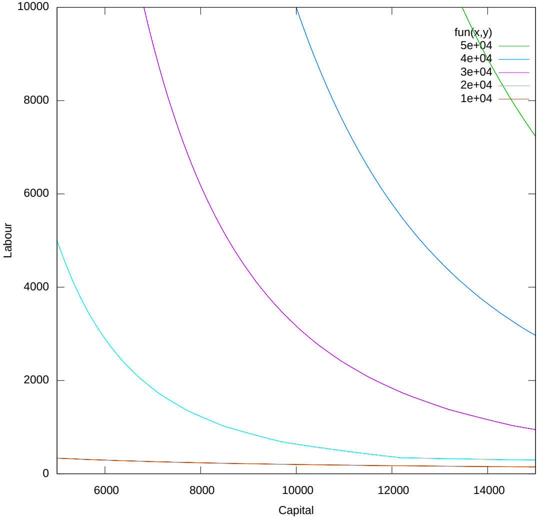
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial K} &= 3K^{-1/4}L^{1/4} = 3(L/K)^{1/4} \\
\frac{\partial f}{\partial L} &= K^{3/4}L^{-3/4} = (K/L)^{3/4} \\
\nabla f(K, L) &= \left(3(L/K)^{1/4}, (K/L)^{3/4}\right) \\
\nabla f(10000, 625) &= (1.5, 8)
\end{aligned}$$

2.1 Gradienter og retningsafledede

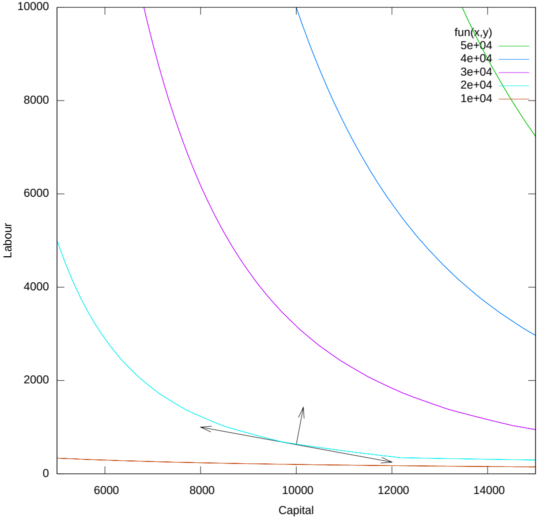



fun(x,y)
5e+04
4e+04
3e+04
2e+04
1e+04
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
6000
8000
10000
12000
14000
Capital
0
2000
4000
6000
8000
10000
Labour

2.1 Gradienter og retningsafledede



2.1 Gradienter og retningsafledede



Example: Cobb-Douglas Production Function II

- Hvor hurtigt stiger f i retning af gradienten i $(10000, 625)$?

$$\left\|\nabla f(10000, 625)\right\| = \sqrt{1.5^2 + 8^2} \approx 8.14$$

- Hvor hurtigt stiger produktionen hvis K og L forøges i samme grad? Lad $a = (1, 1)$ og $b = a/\|a\| = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, så følger

$$\begin{aligned} f_b'(10000, 625) &= \langle \nabla f(10000, 625), b\rangle \\ &= 1.5/\sqrt{2} + 8/\sqrt{2} \approx 6.72 \end{aligned}$$