Mathematics for Economists
Kapitel 2 – Analyse af flere variable

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 2

- Indsættelser: Grænseværdier, kontinuitet, optimering af funktioner af en variabel, middelværdisætningen, Taylor formlen for funktioner af en variabel
- Partielle afledede, gradienter (2.1)
- **Differentiabilitet (2.9)**
- Taylor formlen for funktioner af flere variable (2.6)
- Implicit givne funktioner og inverse funktioner (2.7)
- Konvekse mængder (2.2)
- Konkave og konvekse funktioner (2.3/2.4)
- Kvasikonkave og -konvekse funktioner (2.5)

2.9 Differentiabilitet

2.9 Differentiabilitet

Ved Taylor-formlen kan vi skrive en differentiabel funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + R(h),$$

hvor Taylor-formlen giver et eksplicit udtryk for $R(h)$ som funktion af anden ordens afledede, men selvfølgelig er det også trivielt korrekt, at

$$R(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h,$$

og fra definitionen af den afledede som differenskvotientens grænseværdi ved vi, at

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) = 0.$$

Vi kan betragte argumentet omvendt og **definerer** en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som **differentiabel i** x, hvis der findes et tal $c \in \mathbb{R}$ således, at

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ch}{h} = 0,$$

og vi kalder tallet c for $f'(x)$.

2.9 Differentiabilitet

Definition

En funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaldes **totalt differentiabel** eller bare **differentiabel** i x, hvis der findes en matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ således, at

$$f(x+h) = f(x) + Ch + R(h), \; x, h \in \mathbb{R}^n,$$

i en omegn af $x \in \mathbb{R}^n$. Restledsfunktionen $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er defineret på en omegn af x således, at

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0.$$

Matricen C hedder den **(totale) afledede** af f i x. Almindelige betegnelser er $f'(x)$, $Df(x)$, eller $J_f(x)$ (for **Jacobi matrix**).

Eksempel

(i) For $n = m = 1$ får vi den bekendte definition af differentiabilitet af funktioner af en variabel.
(ii) For $n = 2$, $m = 1$, betragt

$$f(x+h) - f(x) = Ch + R(h), \quad C \in \mathbb{R}^{1\times 2}, h \in \mathbb{R}^{2\times 1}, R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

For $h \to 0$ forsvinder $R(h)$, og relationen skrives hyppigt symbolsk som

$$\begin{aligned} Df(x) &= f(x+dx) - f(x) = A\,dx = [D_1 f(x)\ D_2 f(x)] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} \\ &= D_1 f(x)\,dx_1 + D_2 f(x)\,dx_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\,dx_2, \\ &= \langle \nabla f(x),\, dx \rangle. \end{aligned}$$

(iii) På samme måde, for $n = k$, $m = 1$,

$$Df(x) = \sum_{i=1}^{k} D_i f(x)\,dx_i = \langle \nabla f,\, dx \rangle.$$

2.9 Differentiabilitet

For $m > 1$, er $f(x) \in \mathbb{R}^m$ en vektor. Vi skriver

$$f(x) = (f_1(x),\, f_2(x),\, \dots,\, f_m(x))^T.$$

Hvis f er differentiabel i x, så har vi

$$\underbrace{Df(x)}_{\in\mathbb{R}^m} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_1 f_1(x) & D_2 f_1(x) & \cdots & D_n f_1(x) \\ D_1 f_2(x) & D_2 f_2(x) & \cdots & D_n f_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(x) & D_2 f_m(x) & \cdots & D_n f_m(x) \end{bmatrix}}_{=C\in\mathbb{R}^{m\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}}_{\in\mathbb{R}^n}$$

Definition

C hedder **Jacobi matrix**, eller **funktionalmatrix** eller bare **afledede**; Df er den **totale differentiale**.

2.9 Differentiabilitet

Sætning (Teoremer 2.9.1, 2.9.2, og 2.9.3)

Lad $X \subset \mathbb{R}^n$ åben, $f : X \to \mathbb{R}^m$ totalt differentiabel i $x \in X$ således, at for $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x+h) = f(x) + Ch + R(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0,$$

med Jacobi matrix $J_f(x) = C$. Der gælder

(i) f er kontinuert i x.

(ii) Ethvert element $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, af f er partielt differentiabel med

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = c_{ij}.$$

2.9 Differentiabilitet

Theorem (Kædereglen, 2.9.4)

Lad $X \subset \mathbb{R}^n$ og $Y \subset \mathbb{R}^m$ være åbne mængder. Lad

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \ f(X) \subset Y, \\ x &\longmapsto f(x) = y, \\ g : Y &\longrightarrow \mathbb{R}^k, \\ y &\longmapsto g(y). \end{aligned}$$

Lad f være totalt differentiabel i $x \in X$, g være totalt differentiabel i $y \in f(X) \subset Y$. Betragt

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad (X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k), \\ x &\longmapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Der gælder, at funktionen $g \circ f$ er totalt differentiabel og den afledede er

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))\, Df(x).$$