Mathematics for Economists
Kapitel 6 – Sædvanlige differentialligninger af anden orden og systemer i planet

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 6

- Introduktion (6.1)
- Lineære ligninger af anden orden (6.2)
- Anden-ordens ligninger med konstante koefficienter (6.3)
- Stabilitet for lineære ligninger (6.4)
- **Ligningssystemer i planet (6.5)**
- Ligevægtspunkter for lineære systemer (6.6)
- Faseplananalyse (6.7)

6.5 Ligningssystemer i planet

6.5 Ligningssystemer i planet

Betragt et system med to ligninger i to ubekendte:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ \dot{y} &= g(t,x,y) \end{aligned}$$

Vi antager at f, g, f'_x, f'_y, g'_x og g'_y er kontinuerte. En **løsning** er et par af differentiable funktioner $(x(t), y(t))$ der er defineret på et interval I, og der opfylder begge ligninger.

Den fuldstændige løsning afhænger sædvanligvis af to vilkårlige konstanter c og d, og kan skrives som $x = \varphi_1(t; c, d)$, $y = \varphi_2(t; c, d)$. De to konstanter bestemmes når vi specificerer en begyndelsesbetingelse på hver variabel—for eksempel, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

6.5 Ligningssystemer i planet

Løsningsmetode for autonome systemer

Betragt et system af formen

$$\dot{x} = f(x, y),$$
$$\dot{y} = g(x, y),$$

hvor f og g ikke afhænger direkte af t. I et punkt hvor $\dot{x} \neq 0$, betragt $y = y(x)$ med

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Løs ligningen for at få $y = \varphi(x)$. Så er $x(t)$ givet ved

$$\dot{x} = f(x, \varphi(x)),$$

og kan løses for at give $x(t)$. Derved får vi $y(t) = \varphi(x(t))$.

6.5 Ligningssystemer i planet

Lineære systemer med konstante koefficienter

Betragt det lineære system

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1(t),$$
$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2(t),$$

eller

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

eller kort

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Sætning

Systemet (1) er ækvivalent til to uafhængige ligninger for x og y:

$$\ddot{x} - \operatorname{tr}(A)\dot{x} + \det(A)x = a_{12}b_2 - a_{22}b_1 + \dot{b}_1,$$
$$\ddot{y} - \operatorname{tr}(A)\dot{y} + \det(A)y = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 + \dot{b}_2.$$

6.5 Ligningssystemer i planet

Den homogene ligning er

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

Antag at løsninger har formen

$$(x(t),\, y(t)) = (v_1 e^{\lambda t},\, v_2 e^{\lambda t}).$$

Der gælder, at

$$\begin{bmatrix} v_1 \lambda e^{\lambda t} \\ v_2 \lambda e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix},$$

eller ved division med $e^{\lambda t} > 0$,

$$\begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda v = Av.$$

Den karakteristiske ligning for DL'en er den samme som det karakteristiske polynomium for matricen A.

6.5 Ligningssystemer i planet

Løsningerne er givet ved egenværdierne $\lambda_{1,2}$ og egenvektorerne u, v.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ce^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + de^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$