Mathematics for Economists
Kapitel 6 – Sædvanlige differentialligninger af anden orden og systemer i planet

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 6

- Introduktion (6.1)
- Lineære ligninger af anden orden (6.2)
- Anden-ordens ligninger med konstante koefficienter (6.3)
- Stabilitet for lineære ligninger (6.4)
- Ligningssystemer i planet (6.5)
- **Ligevægtspunkter for lineære systemer (6.6)**
- **Faseplananalyse (6.7)**

6.6 Ligevægtspunkter for lineære systemer

6.6 Ligevægtspunkter for lineære systemer

Betragt det lineære system med konstante koefficienter

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Ligevægtspunkterne for systemet bestemmes ved ligningerne

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0 \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0 \end{aligned} \quad \text{eller} \quad \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= -b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= -b_2 \end{aligned}$$

Hvis $|A| \neq 0$, så har systemet en entydig løsning (x^*, y^*), der hedder **ligevægtspunkt** (**equilibrium state**). Ved Cramers regel:

$$x^* = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{|A|}, \quad y^* = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{|A|} \tag{3}$$

6.6 Ligevægtspunkter for lineære systemer

Definition

Et ligevægtspunkt (x^*, y^*) kaldes for **globalt asymptotisk stabil**, hvis løsningen konvergerer til ligevægtspunktet for alle begyndelsesbetingelser.

I det sidste afsnit har vi set, at den karakteristiske ligning for et lineært system af DL af første orden er

$$r^2 + ar + b = r^2 - \operatorname{tr}(A)r + \det A = 0.$$

Stabilitetskriteriet $a, b > 0$ giver umiddelbart det følgende teorem.

6.6 Ligevægtspunkter for lineære systemer

Teorem (6.6.1)

Antag at $|A| \neq 0$. Så er ligevægtspunktet $(x^*, y^*) = A^{-1}(-b)$ for det lineære system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

globalt asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{and} \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$$

eller, ækvivalent, hvis og kun hvis egenværdierne for A har negative realdele.

6.6 Ligevægtspunkter for lineære systemer

Karakterisering af ligevægtspunkter

(A) Hvis begge egenværdier for A har negative realdele, så er (x^*, y^*) globalt asymptotisk stabil (**sink**).

(B) Hvis begge egenværdier for A har positive realdele, så er (x^*, y^*) en kilde (**source**). I dette tilfælde eksploderer alle løsningskurver, der ikke begynder i ligevægtspunktet.

(C) Hvis egenværdierne er reelle med modsatte tegn, så er (x^*, y^*) et **sadelpunkt**.

(D) Hvis egenværdierne er streng komplekse ($\lambda_{1,2} = \pm i\beta$), så er (x^*, y^*) et **centrum**. Alle løsningskurver er periodisk med den samme periode. Løsningerne er ellipser eller cirkler.

6.7 Faseplananalyse

6.7 Faseplananalyse

Betragt systemet

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -2x - y$$

Fasediagram: I (I), $y \geq 0 \Rightarrow \dot{x} \geq 0$. $x, y \geq 0 \Rightarrow \dot{y} \leq 0$. $y = 0$ og $y = -2x$ er isoklin for nulniveauet (**null clines**), hvor den afledede af en variabel sættes lig med nul, så at variablen er konstant, og vi kan fokusere på forandringerne i den anden variabel.

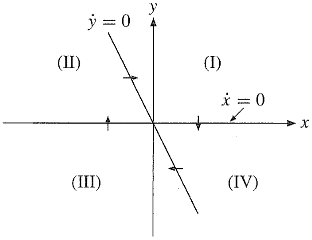

Figure 4

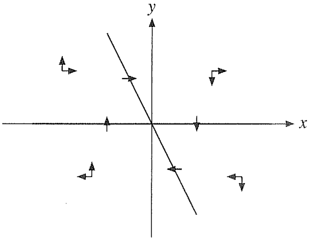

Figure 5

6.7 Faseplananalyse

Vektorfelt: Tilføj gradientvektor $(\dot{x},\ \dot{y})'$ til hvert punkt (x, y).

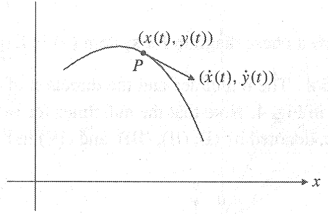

Figure 1

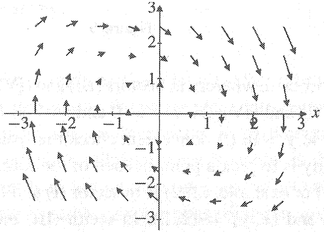

Figure 2

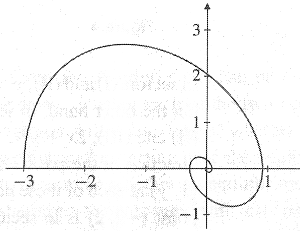

Figure 3