Mathematics for Economists
Kapitel 3 – Statisk Optimering

Eric Hillebrand

Institut for økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 3

- Ekstremumspunkter (3.1)
- Lokale ekstremumspunkter (3.2)
- **Bibetingelser givet ved ligheder (3.3)**
- Bibetingelser givet ved uligheder (3.5)
- Tilstrækkelige betingelser (3.6)

3.3 Optimering under bibetingelser givet ved ligheder

3.3 Bibetingelser givet ved ligheder

Det generelle optimeringsproblem med bibetingelser givet ved ligheder har den form

$$\max\ (\min)\ f(x_1, \dots, x_n) \text{ således at } \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & (m < n) \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases} \tag{1}$$

hvor tallene b_j er konstante. Vi antager, at $m < n$, såat der er frihedsgrader. Vi skriver problemet i vektornotation

$$\max\ (\min)\ f(x) \text{ således at } g(x) = b. \tag{2}$$

For at løse problemet definerer vi **Lagrange funktionen**

$$\mathcal{L}(x) = f(x) - \lambda_1(g_1(x) - b_1) - \cdots - \lambda_m(g_m(x) - b_m) = f(x) - \langle \lambda, g(x) - b \rangle \tag{3}$$

hvor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ kaldes **Lagrange multiplikatorer**.

3.3 Bibetingelser givet ved ligheder

Den **nødvendige førsteordens betingelse** for optimalitet er:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

eller,

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x).$$

3.3 Bibetingelser givet ved ligheder

Betragt **værdifunktionen** for problem (1):

$$f^*(b) = \max\{f(x) : g_j(x) = b_j,\ j = 1, \ldots, m.\}$$

For en konstant vektor $b = \bar{b}$, lad $\bar{x}$ betegne den tilsvarende optimale løsning, dvs.

$$f(\bar{x}) = f^*(\bar{b}).$$

For hver x har vi

$$f(x) \leq f^*(g(x)).$$

Lad

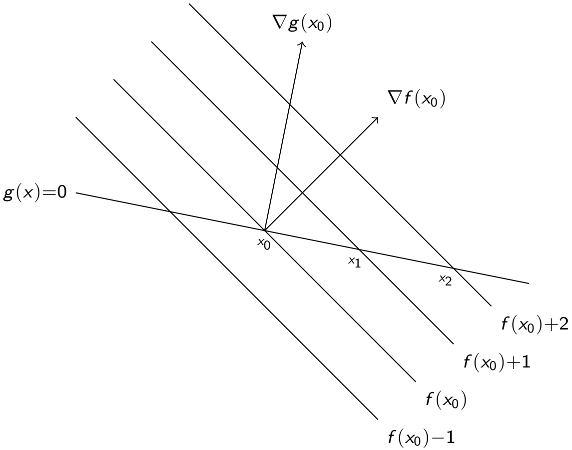
$$\phi(x) = f(x) - f^*(g(x)),$$

med maksimummet $\phi(x) = 0$ i $x = \bar{x}$. Så fås

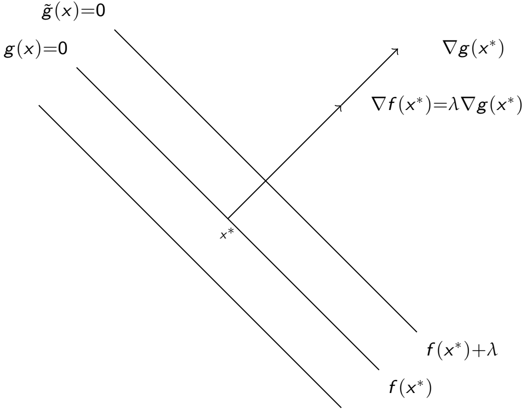
$$0 = \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial f^*(\bar{b})}{\partial b_j}\right|_{b=g(\bar{x})} \frac{\partial g_j(\bar{x})}{\partial x_i}.$$

Vi sætter $\lambda_j = \partial f^*(\bar{b})/\partial b_j|_{b=g(\bar{x})}$ og får ligning (4).

3.3 Bibetingelser givet ved ligheder



3.3 Bibetingelser givet ved ligheder



3.3 Bibetingelser givet ved ligheder

Teorem (3.3.1, Nødvendige og tilstrækkelige betingelser)

(a) Antag at funktionerne f og $g_1, \ldots, g_m$ er defineret på en mængde S i $\mathbb{R}^n$, og at $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ er et indre punkt i S der løser problem (1). Antag derudover at f og $g_1, \ldots, g_m$ er C^1 i en kugle med centrum x^*, og at den $m \times n$ Jacobi matrix af partielt afledede af bibetingelserne

$$J_g(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{har rang } m$$

(constraint qualification). Så findes unikke tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ således, at (4) gælder.

(b) Hvis der findes tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ og en x^* som opfylder den førsteordens betingelse (4), og hvis Lagrange funktionen $\mathcal{L}(x)$ defineret ved (3) er konkav (konveks) i x, og hvis S er konveks, så løser x^* maksimerings- (minimerings-) problemet (1).

3.3 Bibetingelser givet ved ligheder

Betingelsen om **constraint qualification** af rangen af $J_g(x^*)$ er ensbetydende med lineær uafhængighed af gradienterne af bibetingelserne g_i. Ligning (4) siger at

$$\nabla f(x^*) = \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(x^*).$$

Med andre ord, i optimummet er gradienten for f i den lineære span af bibetingelsernes gradienter.

3.3 Bibetingelser givet ved ligheder

Eksempel

Betragt problemet

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \; y = 6x_1 + 5x_2, \;\text{ s.t. }\; 100 - 13x_1 - \sqrt{x_2} = 0.$$

Lagrange funktionen er givet ved

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 6x_1 + 5x_2 - \lambda(100 - 13x_1 - \sqrt{x_2}),$$

og førsteordens betingelserne resulterer i den følgende løsning.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 6 + 13\lambda \stackrel{!}{=} 0 && \implies \lambda = -\frac{6}{13}, \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 5 + \frac{1}{2}\lambda\frac{1}{\sqrt{x_2}} \stackrel{!}{=} 0 && \\
& 5 + \frac{1}{2}\left(-\frac{6}{13}\right)\frac{1}{\sqrt{x_2}} \stackrel{!}{=} 0 && \implies x_2 = \frac{9}{4225}, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 100 - 13x_1 - \sqrt{x_2} \stackrel{!}{=} 0 && \implies x_1 = \frac{6497}{845}.
\end{aligned}$$

3.3 Bibetingelser givet ved ligheder

Eksempel

- Økonomi med to forbrugere $i = 1, 2$, to goder $j = 1, 2$.
- Konstant mængde af hver gode e_1, e_2.
- Forbruger i konsumerer c_{ij} af gode j.
- Forbruger i's nyttefunktion er givet ved

$$U_i(c_{i,1}, c_{i,2}) = \alpha_1 \log c_{i,1} + \alpha_2 \log c_{i,2},$$

  hvor $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$.
- Maksimér velfærdsfunktionen

$$W = \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2,$$

  $\beta_1 > 0$, $\beta_2 = 1 - \beta_1$, således at resource-bibetingelserne

$$c_{1,1} + c_{2,1} = e_1, \quad c_{1,2} + c_{2,2} = e_2.$$

  er opfyldte.

3.3 Bibetingelser givet ved ligheder

- Lagrange funktion:

$$\mathcal{L} = \beta_1(\alpha_1 \log c_{1,1} + \alpha_2 \log c_{1,2}) + \beta_2(\alpha_1 \log c_{2,1} + \alpha_2 \log c_{2,2}) \\ - \lambda_1(c_{1,1} + c_{2,1} - e_1) - \lambda_2(c_{1,2} + c_{2,2} - e_2).$$

- Første-ordens betingelser:

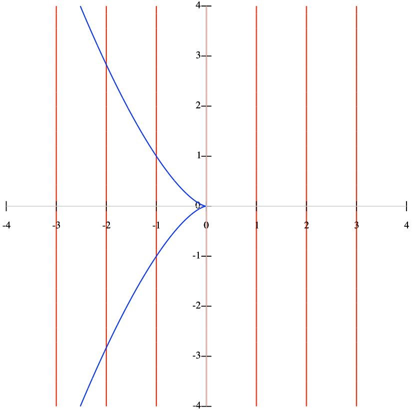
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{1,1}} = \frac{\alpha_1\beta_1}{c_{1,1}} - \lambda_1 = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{1,2}} = \frac{\alpha_2\beta_1}{c_{1,2}} - \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{2,1}} = \frac{\alpha_1\beta_2}{c_{2,1}} - \lambda_1 = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{2,2}} = \frac{\alpha_2\beta_2}{c_{2,2}} - \lambda_2 = 0$$

- Sammen med bibetingelserne får vi seks ligninger med seks ubekendte c_{ij}, $i, j = 1, 2$, og $\lambda_{1,2}$ og løsningen er:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1}{e_1} \qquad \lambda_2 = \frac{\alpha_2}{e_2}$$
$$c_{1,1} = \beta_1 e_1 \qquad c_{1,2} = \beta_1 e_2$$
$$c_{2,1} = \beta_2 e_1 \qquad c_{2,2} = \beta_2 e_2$$

Modeksempel (Constraint qualification)

$$\max_{x,y} f(x,y) = x \quad \text{s.t. } x^3 + y^2 = 0$$



3.3 Bibetingelser givet ved ligheder

Modeksempel (Constraint qualification)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - 3\lambda x^2 = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2\lambda y = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^3 + y^2 = 0.$$

Den anden ligning giver, at enten y eller λ er lig med nul. $\lambda = 0$ er i modstrid med den første ligning, altså$y = 0$. Fra den tredje ligning følger, at $x = 0$, hvilket igen er i modstrid med den første ligning. Ikke desto mindre er $(0, 0)$ et maksimumspunkt.

Modeksempel (Constraint qualification)

$$\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla g(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.3 Bibetingelser givet ved ligheder

Lagrange multiplikatorerne har en økonomisk fortolkning. Antag, at

$$g(x) = 100 - x_1 - x_2 \stackrel{!}{=} 0$$

er en lager bibetingelse på to goder x_1 og x_2. Vi kan have 100 enheder på lager på et tidspunkt. Vi investerer i lagerkapaciteten og forøger den til 101 enheder. Den nye bibetingelse er

$$\tilde{g}(x) = 101 - x_1 - x_2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Det er en forøgelse af niveaukurven af bibetingelsen om en enhed, dvs. en bevægelse i retning af ∇g om en enhed. Da

$$\nabla f = \lambda \nabla g,$$

er den tilsvarende forandring i f lig med λ. Med andre ord resulterer forøgelsen i lagerkapaciteten om en enhed i en forandring i målfunktionen om λ enheder.
Hvis f er profit vi skal maksimere, og profitten afhænger positivt af lagerkapaciteten, så forøger vi profitten med λ valutaenheder.
Hvis f er lageromkostninger vi skal minimere, så pådrager vi os λ valutaenheder højere lageromkostninger.
Lagrange multiplikatorer er derfor også kaldt for **skyggepriser**. De afspejler alternativomkostninger (offeromkostninger), som et resultat af bibetingelsen.