# Mathematics for Economists
# Kapitel 11 Differensligninger

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

## Disposition Kapitel 11

- Differensligninger af første orden (11.1)
- Økonomiske Anvendelser (11.2)
- **DL af anden orden (11.3)**
- **Anden-ordens DL med konstante koefficienter (11.4)**
- Systemer af DL (11.6)

## 11.3 Differensligninger af anden orden

# 11.3 Differensligninger af anden orden

En almindelig anden-ordens differensligning har formen

$$x_{t+2} = f(t, x_t, x_{t+1}), \quad t = 0, 1, \dots \tag{6}$$

Iteration af ligningen giver løsningen

$$\begin{aligned} x_2 &= f(0, x_0, x_1), \\ x_3 &= f(1, x_1, f(0, x_0, x_1)), \\ &\dots \\ x_t &= g(t; A, B), \end{aligned}$$

hvor $g(t; A, B)$ er entydig bestemt ved $x_0$ og $x_1$.

# 11.3 Differensligninger af anden orden

Den almindelige lineære ligning har formen

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t \tag{7}$$

hvor $a_t$, $b_t$, og $c_t$ er givne funktioner af $t$, med $b_t \not\equiv 0$.

## Teorem (11.3.1)

(a) Den **fuldstændige løsning** på den homogene DL

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = 0 \quad \text{er} \quad x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$$

med $u_t^{(1)}$ og $u_t^{(2)}$ to ikke-proportionale løsninger, og $A$ og $B$ vilkårlige konstante.

(b) Den **fuldstændige løsning** på den inhomogene DL

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t \quad \text{er} \quad x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$$

med $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ fuldstændig løsning på den tilknyttede homogene ligning og $u_t^*$ en partikulær løsning på den inhomogene ligning.

# 11.3 Differensligninger af anden orden

**Bemærkning**

For at bruge Teorem 11.3.1 skal vi tjekke at to givne løsninger for den homogene ligning ikke er lineært afhængige, dvs. ikke er proportionale. Den følgende betingelse er nødvendig og tilstrækkelig (og generaliserer til tilfældet af $n$ funktioner).

$$u_t^{(1)} \text{ and } u_t^{(2)} \text{ er lineært uafhængige} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

## 11.4 Lineære ligninger af anden orden med konstante koefficienter

# 11.4 Lineære ligninger af anden orden med konstante koefficienter

## Teorem (11.4.1)

Den **fuldstændige løsning** for

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0 \quad (b \neq 0)$$

afhænger af tre tilfælde for den karakteristiske ligning $m^2 + am + b = 0$ :

(I) $a^2/4 - b > 0$ (karakteristisk ligning har to distinkte reelle rødder),

$$x_t = Am_1^t + Bm_2^t, \quad m_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

(II) $a^2/4 - b = 0$ (karakteristisk ligning har en dobbelt rod),

$$x_t = (A + Bt)m^t, \quad m = -\frac{a}{2}$$

(III) $a^2/4 - b < 0$ (karakteristisk ligning har to komplekse rødder $m_{1,2} = -a/2 \pm i\sqrt{b - a^2/4} = r(\cos\theta \pm \sin\theta)$,

$$x_t = r^t(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)), \quad r = \sqrt{b}, \quad \cos\theta = -\frac{a}{2\sqrt{b}}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

# 11.4 Lineære ligninger af anden orden med konstante koefficienter

Den inhomogene ligning:

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c_t$$

har den fuldstændige løsning

$$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*.$$

- Tilfældet $c_t \equiv c$: $u_t^* \equiv u^* \in \mathbb{R}$. Fra

  $$u^* + au^* + bu^* = c$$

  følger

  $$u^* = \frac{c}{1+a+b}, \quad 1+a+b \neq 0.$$

- Tilfælde $c_t = a^t$, $t^m$, $\sin(qt)$, $\cos(qt)$: Sammenligning af koefficienterne.

# 11.4 Lineære ligninger af anden orden med konstante koefficienter

## Teorem (11.4.2)

Ligningen

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0$$

er globalt asymptotisk stabil, hvis og kun hvis en af de følgende to betingelser er opfyldte

(A) Rødderne for den karakteristiske ligning $m^2 + am + b = 0$ har absolutværdier mindre end 1.

(B) $|a| < 1 + b$ og $b < 1$.