2622 Matematik for Økonomer
Eric Hillebrand

Opgavesæt 8

Opgave 1
Section 3.6 Exercise 2
Tjek også constraint qualification, som ikke er diskuteret i student manual.

Gradienterne af bibetingelserne er

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}, \qquad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og de to vektorer er lineært afhængige for alle punkter, hvor $x = y$. Problemet bliver til

$$\max x^2 + 2x \text{ u.b. } 2x^2 \leq 2, \quad 2x \leq 1.$$

Vi kan se, at vi skal vælge $x > 0$ så stort som muligt, og den bindende bibetingelse bliver $x \leq 1/2$. Så vælger vi $(x, y) = (1/2, 1/2)$, som er et punkt vi allerede har fundet.

Opgave 2
Betragt igen Opgave 3 i Opgavesæt 3. Vi kan bestemme porteføljen $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ med den minimale varians (*minimum-variance portfolio, MVP*) for den givne kovariansmatrix $\Omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$ for n værdipapirer. Det betyder, at vi finder porteføljen med den minimale risiko. Vi antager, at short salg ($w_i < 0$) er mulige. Minimeringsproblemet er

$$\begin{array}{cc} \min\limits_{w} & w^T \Omega w, \\ \text{således at} & \sum_{i=1}^n w_i = 1. \end{array}$$

1. Bestem porteføljen $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ der løser problemet. (Tjek også anden-ordens betingelsen.)

2. Bestem *minimum variance portfolio* for kovariansmatricen $\Omega \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ givet i nr. 4 af Opgave 3, Opgavesæt 3.

3. Afkastets middelværdien er givet ved $\bar{r}_i$, $i = 1, \ldots, n$ for n værdipapirerne. Bestem *minimum variance portfolio* under bibetingelsen, at porteføljen skal have et givet middelafkast $\bar{r}_p$.

1.

$$L(w, \lambda) = w^T \Omega w - \lambda \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right),$$

$$D_w L = \underbrace{2\Omega w}_{\text{afledede af en kvadratisk form}} - \lambda \underbrace{\mathbb{1}}_{\in \mathbb{R}^n},$$

$$D_\lambda L = -\left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) = -(\langle w, \mathbb{1} \rangle - 1),$$

hvor $\mathbb{1}$ er en n-vektor af 1-tal. Fra den afledede ift. w får vi

$$w = \frac{\lambda}{2}\Omega^{-1}\mathbb{1}.$$

Sæt det ind i den afledede ift. λ:

$$\frac{\lambda}{2}\left\langle \Omega^{-1}\mathbb{1},\, \mathbb{1}\right\rangle = 1,$$

eller

$$\lambda = \frac{2}{\langle \Omega^{-1}\mathbb{1},\, \mathbb{1}\rangle}$$

og

$$w = \frac{\Omega^{-1}\mathbb{1}}{\langle \Omega^{-1}\mathbb{1},\, \mathbb{1}\rangle} \in \mathbb{R}^n.$$

Dette resultat viser intuitivt, at aktien med den højeste varians udgør den mindste del i porteføljen, og at aktien med den mindste varians udgør den største del.

Hesse matricen ift. w er $D_w^2 L = 2\Omega$, symmetrisk positivt definit, og derfor er w et minimum.

2.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}, \\
\Omega^{-1} &\approx \begin{bmatrix} 29.25 & -4.5 & -5.625 \\ -4.5 & 2.333 & -0.4167 \\ -5.625 & -0.4167 & 3.6458 \end{bmatrix}, \\
\langle \Omega^{-1}\mathbb{1},\, \mathbb{1}\rangle &\approx 14.1458, \\
\frac{\Omega^{-1}\mathbb{1}}{\langle \Omega^{-1}\mathbb{1},\, \mathbb{1}\rangle} &= \begin{bmatrix} 1.352 \\ -0.1826 \\ -0.1694 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Optimeringsproblemet er givet ved

$$\begin{aligned}
\min_{w\in\mathbb{R}^n} \; & w^T\Omega w, \\
s.t. \; & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r}_p,
\end{aligned}$$

hvor $\bar{r}_i$ er det gennemsnitlige afkast af aktie i, og $\bar{r}_p$ er det påkrævede gennemsnitlige afkast på porteføljen. Lad $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n)^T$. Lagrange-funktionen og dens partielle afledede er

$$\begin{aligned} L &= w^T \Omega w - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 \right) - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - \bar{r}_p \right), \\ D_w L &= 2\Omega w - \lambda_1 \mathbb{1} - \lambda_2 \bar{r}, \\ D_{\lambda_1} L &= 1 - \langle w, 1 \rangle, \\ D_{\lambda_2} L &= \bar{r}_p - \langle w, \bar{r} \rangle, \end{aligned}$$

hvor $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^n$ er vektoren af 1-tal. Det giver første-ordens betingelserne

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}[\Omega^{-1}\mathbb{1}\lambda_1 + \Omega^{-1}\bar{r}\lambda_2], \\ \langle w, 1 \rangle &= 1, \\ \langle w, \bar{r} \rangle &= \bar{r}_p. \end{aligned}$$

Sæt ind for w,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle \lambda_1 \Omega^{-1}\mathbb{1} + \lambda_2 \Omega^{-1}\bar{r}, \mathbb{1} \rangle &= 1, \\ \frac{1}{2}\langle \lambda_1 \Omega^{-1}\mathbb{1} + \lambda_2 \Omega^{-1}\bar{r}, \bar{r} \rangle &= \bar{r}_p, \\ \lambda_1 \underbrace{\langle \Omega^{-1}\mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle}_{=:a} + \lambda_2 \underbrace{\langle \Omega^{-1}\bar{r}, \mathbb{1} \rangle}_{=:b} &= 2, \\ \lambda_1 \underbrace{\langle \Omega^{-1}\mathbb{1}, \bar{r} \rangle}_{=:c} + \lambda_2 \underbrace{\langle \Omega^{-1}\bar{r}, \bar{r} \rangle}_{=:d} &= 2\bar{r}_p. \end{aligned}$$

Dette lineære system kan løses for λ_1 og λ_2. Bemærk at Ω, $\bar{r}$ og $\bar{r}_p$ er data, og a, b, c og d er derfor givet. Vi får

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2}{a}\left[1 - \frac{bc/a - b\bar{r}_p}{bc/a - d}\right], \\ \lambda_2 &= 2\,\frac{c/a - \bar{r}_p}{bc/a - d}. \end{aligned}$$

Vektoren af portefølje-vægterne er

$$w = \frac{1}{a}\,\frac{b\bar{r}_p - d}{bc/a - d}\Omega^{-1}\mathbb{1} + \frac{c/a - \bar{r}_p}{bc/a - d}\Omega^{-1}\bar{r}.$$

8-minutters foredrag

1. Optimering under bibetingelser givet ved uligheder
2. Ramsey modellen