2622 Matematik for Økonomer

Eric Hillebrand

Opgavesæt 1

Opgave 1 I en økonomi med 4 varer er efterspørgslen givet ved en lineær funktion

$$x_D = Ap + c,$$

hvor vektoren $x_D = (x_{D,1},\, x_{D,2},\, x_{D,3},\, x_{D,4})' \in \mathbb{R}^4$ betegner den efterspurgte kvantitet for henholdsvis god 1, 2, 3 og 4. Prisvektoren for de fire varer betegnes med $p = (p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4)' \in \mathbb{R}^4$. Den lineære udbudsfunktion er givet ved

$$x_S = Bp,$$

hvor $x_S \in \mathbb{R}^4$ er den udbudte kvantitet. De tilhørende matricer A og B er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 51 \\ 14 \\ 21 \\ 32 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Brug eliminationsmetoden for at bestemme prisvektoren til den efterspurgte kvantitet $x_D = (29,\, 7,\, 2,\, 22)'$.

   $$p = (5, 7, 9, 1)'$$

2. Brug eliminationsmetoden for at bestemme prisvektoren til den udbudte kvantitet $x_S = (5,\, 40,\, 60,\, 95)'$.

   $$p = (5, 10, 15, 20)'$$

3. Bestem ligevægtsparret (p, x) ved at invertere matricen der beskriver ligevægten.

   Ligevægtsbetingelsen er

   $$x_S^* = x_D^*,$$

   Her er

   $$(B - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 11 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1},$$
   $$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & \frac{11}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{6}{5} & 1 & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{113}{63} \end{bmatrix},$$

ligevægtsprisen er

$$p^* = \left(\frac{457}{77}, \frac{14}{5}, \frac{1511}{495}, \frac{2650}{693}\right)'$$

og ligevægtskvantiteten er

$$x^* = \left(\frac{2649}{77}, \frac{56}{5}, \frac{2488}{165}, \frac{5021}{231}\right)'.$$

4. Bestem betingelserne på rangen af C for eksistens og entydighed af en ligevægt.

   Rang(B-A) mindre end 4: unendelig mange løsninger

   Rang(B-A) = 4: en entydig løsning

5. Betragt nu

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

   og

$$c = (51, 14, 33, 32)'.$$

   Angiv mængden af løsningerne for ligevægtspriserne. Er der en mulighed for, at der opstår negative priser?

   Løsningsmængden for prisvektoren er givet ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{19}{9} \\ \frac{14}{5} \\ \frac{877}{90} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \end{bmatrix} s \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

   En negativ pris for gode 3 opstår for $s \geq \frac{1754}{315}$. En negativ pris for gode 1 opstår hvis $s \leq -\frac{19}{9}$ og for gode 4 for $s < 0$.

6. Giv en økonomisk fortolkning af de negative ikke-diagonale indgange i B og de positive ikke-diagonale indgange i A. Giv en økonomisk fortolkning af strukturen af de anden rækker i A og B.

   Goder med positive ikke-diagonale indgange i A og negative ikke-diagonale indgange i B kan (delvis) substitueres. Hvorfor?

   Prisen af gode 2 er uafhængig af priserne for de andre goder: Der er ingen substitution.