Mathematics for Economists
Kapitel 1 – Lineær Algebra

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 1

- Ligningssystemer / Lineære uafhængighed
- Funktioner / Rangen af en matrix / Rangen og lineære ligningssystemer / Skalarprodukt
- **Determinanter**
- Egenværdier
- Symmetriske bilineære former

Determinanter

Determinanter

Definition (Determinant af 2×2 matrix)

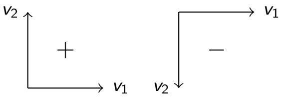
Vi definerer funktionen

$$\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mapsto a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

$\det A$ kaldes for **determinanten** af A.

Den to-dimensionale determinant følger en fortegn konvention:

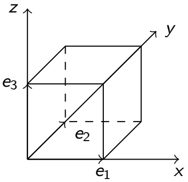


Definition

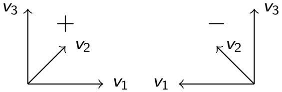
Determinanten af $n \times n$ matricen A er det orienterede n-dimensionale rumfang af parallelepipedummet udgjort af søjlerne af matricen A.

Betragt

$$A = [e_1 \; e_2 \; e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Søjlerne former et parallelepipedum (terning, i dette tilfælde) med orienteret volumen 1. "Orienteret" betyder, at der gælder en konvention mht. fortegnet:
$\det[-e_1 \; e_2 \; e_3] = -1$.



Determinanter

Definition

Lad $V = \mathbb{R}^n$. En funktion

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

kaldes for **determinanten**, hvis det gælder at

(i) f er **multi-lineær**:

$$v_i \mapsto f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

er lineær for alle $i = 1, \ldots, n$.

(ii) f er **alternerend**: Hvis $v_i = v_j$ for nogle $i \neq j$, så

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0.$$

(iii) f antager værdien 1 påstandardbasen: $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$.

Bemærk, at vi endnu ingen eksplicitformel for determinanten af $n \times n$ matrix har.

Determinanter

Sætning (Egenskaber af Determinanten)

Lad A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Antag at B er dannet ud fra A ved

(i) muliplikation af en søjle (række) med et tal $r \in \mathbb{R}$; da er

$$\det B = r \det A;$$

(ii) ombytning af to søjler (rækker); da er

$$\det B = -\det A;$$

(iii) addition af et multiplum af en søjle (række) til en anden søjle (række); da er

$$\det B = \det A.$$

(iv) Determinanten er invariant ved transpositionen:

$$\det A^T = \det A.$$

Determinanter

Sætning

(v) Det gælder at

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

(vi) Hvis A er regulær (invertibel), så gælder

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A},$$

fordi $\det(I) = 1 = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$.

(vii) Determinanten af en basis $(v_1, \ldots, v_n)$ er ikke-nul:

$$\det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0.$$

Hver basisvektor kan skrives $v_i = \sum_{j=1}^{n} r_j e_j$ med mindst et $r_j \neq 0$. Determinanten af standardbasen er 1, deraf følger påstanden.

Determinanter

Hvis søjlerne af matricen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er lineært afhængige, dvs. $r(A) < n$, så gælder $\det A = 0$. Ellers er søjlerne en basis i $\mathbb{R}^n$ og $\det A \neq 0$. Derfor gælder

$$r(A) = n \iff \det A \neq 0 \iff Ax = b \text{ har netop én løsning.}$$

Teorem (1.2.1)

De n søjler $a_1, a_2, \ldots, a_n$ af $n \times n$ matricen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{med} \quad a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

er lineært uafhængige hvis og kun hvis $|A| \neq 0$.

Determinanter

Eksempel

(i) For $n = 1$, $a \in \mathbb{R}$, har vi $\det a = a$, som er længden.

(ii) For $n = 2$ har vi arealet

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = ab - cd.$$

(iii) Determinanten af en diagonalmatrix er lig med produktet af indgangene på diagonalen.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} = [d_{11}e_1 \; d_{22}e_2 \; \ldots \; d_{nn}e_n],$$

$$\det D = \det(d_{11}e_1, d_{22}e_2, \ldots, d_{nn}e_n) = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn} \underbrace{\det I}_{=1} = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$

Eksempel

(iv) Determinanten af en nedre/øvre trekantsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ eller } A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

er lig med produktet af indgangene på diagonalen

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

fordi rækkeoperationer transformerer A til

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Eksempel

(v) Lad $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$, og lad A være blockmatricen

$$A = \begin{bmatrix} B & M \\ 0 & C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)},$$

hvor 0 er $n \times m$ nulmatricen. Der gælder

$$\det A = \det B \det C,$$

fordi med tilpassende nulmatricer skriver vi

$$A = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & M \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

$$\det A = 1 \cdot \det C \;\cdot\; 1 \cdot 1 \;\cdot\; \det B \cdot 1.$$

Eksempel (Cramers formler)

Vi kan beregne løsningen x til $Ax = b$ ved hjælp af determinanten. Lad a_i være den i-te søjle af A og definer

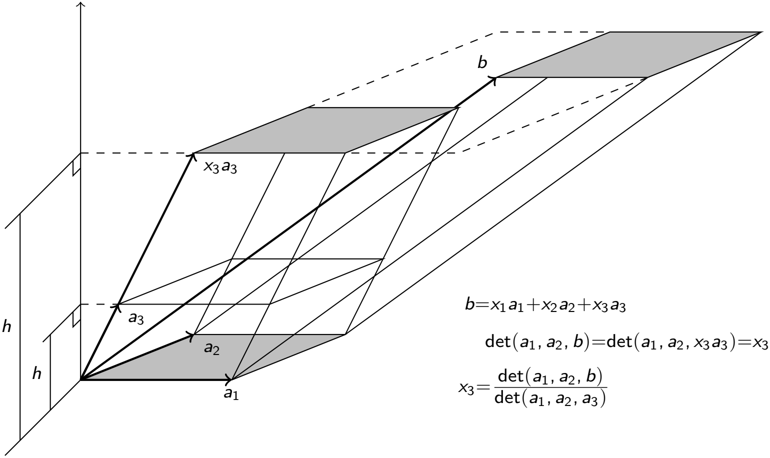
$$A_i(b) := [a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_{i-1} \; b \; a_{i+1} \; \ldots \; a_n].$$

Hvis $\det A \neq 0$, såhar A fuld rang og $b = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j$. Derved er

$$\begin{aligned} \det A_i(b) &= \det\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n\right), \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n), \\ &= x_i \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n), \\ &= x_i \det A. \end{aligned}$$

Det giver udtrykkene (de såkaldte **Cramers formler**):

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, \; i = 1, \ldots, n.$$



$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$$

$$\det(a_1, a_2, b) = \det(a_1, a_2, x_3 a_3) = x_3 \det(a_1, a_2, a_3)$$

$$x_3 = \frac{\det(a_1, a_2, b)}{\det(a_1, a_2, a_3)}$$

Fra Nelsen (2000), "Proof without words."

Determinanter

Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{bmatrix} \text{ søjler af } A.$$

Der gælder

$$\begin{aligned} \det A &= \det(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3,\, a_2,\, a_3), \\ &= a_{11}\det(e_1,\, a_2,\, a_3) + a_{21}\det(e_2,\, a_2,\, a_3) + a_{31}\det(e_3,\, a_2,\, a_3), \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}). \end{aligned}$$

Determinanter

I det generelle $n \times n$-tilfælde lad A_{ik} være matricen der fås ved at slette den i-te række og den k-te søjle i $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Teorem (Eksplicit Determinantformel)

For $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og en bestemt søjle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gælder

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}.$$

Formlen kaldes for **udviklingen af** det A **efter** den k-te **søjle**.

Determinanter

Fortegnmønstret fra $(-1)^{i+k}$ faktoren kan læses fra skakbræt-matricen

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{bmatrix}.$$

Teorem

For $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og en bestemt række $i \in \{1, \ldots, n\}$ gælder

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}.$$

Formlen kaldes for **udviklingen af** det A **efter** den i-te **række**.

Eksempel (Polynomier som Determinanter)

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{n-1}+x & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{bmatrix}.$$

Udvikl determinanten efter den første række

$$\det A = (a_{n-1}+x)\det \begin{bmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{bmatrix} - a_{n-2}\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{bmatrix}$$

$$+ a_{n-3}\det \begin{bmatrix} -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{bmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1} a_0 \det \begin{bmatrix} -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinanter

Eksempel (Polynomier som Determinanter)

Determinanterne påden højre side vurderes nemt, da de reduceres til determinanter af øvre og nedre trekantsmatricer.

$$\begin{aligned} \det A &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}(-1)x^{n-2} + \ldots + (-1)^{2n}a_0, \\ &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0. \end{aligned}$$

Det viser, at hvert n'te gradspolynomium kan forstås som rumfanget af parallelepipedummet udgjort af søjlerne af matricen A.