Mathematics for Economists
Kapitel 4 – Integration

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 4

- **Integration af funktioner på et interval (4.1)**
- **Leibnizformel (4.2)**
- Integraler af funktioner af flere variable på produktmængder (4.4)
- Planintegral over begrænsede mængder (4.5)
- Riemann integral af funktioner af flere variable (4.6)
- Substitution for planintegraler (4.7)

4.1 Integration af funktioner på et interval

4.1 Integration af funktioner på et interval

Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion på et interval I. Husk, at det **ubestemte integral** eller **stamfunktion** af $f(x)$ er en funktion $F(x)$, hvis afledede er lig med $f(x)$ for hvert $x \in I$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Altså gælder det, at $F'(x) = f(x)$. Vigtige klasser af integraler er

- Hvis $a \neq -1$,

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C.$$

- Hvis $x > 0$,

$$\int \frac{1}{x}dx = \log x + C.$$

- $$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$$

4.1 Integration af funktioner på et interval

Egenskaber. Lad $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ være kontinuerte.

(i) *Homogenitet:* For $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

(ii) *Additivitet:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Egenskaberne (i) og (ii) udgør *linearitet* af integralet.

(iii) *Monotoni:* Hvis $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in [a, b]$, så følger

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(iv) *Intervaladditivitet (Indskudsreglen):* Lad $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, så gælder

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx.$$

(v)

$$\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0, \; x_0 \in [a, b].$$

(vi) Hvis $m \leq f(x) \leq M$ for $a \leq x \leq b$, så gælder

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

(vii) Da $-f(x) \leq |f(x)|$ og $f(x) \leq |f(x)|$, $\pm \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, følger trekantsuligheden i integralform fra monotonien (iii):

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(viii) Fra (v) og (iv) følger

$$\int_{x_3}^{x_3} f(x)dx \overset{(v)}{=} 0 \overset{(iv)}{=} \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_1} f(x)dx,$$

og derved

$$\int_{x_3}^{x_1} f(x)dx = -\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx.$$

4.1 Integration af funktioner på et interval

Teorem (Middelværdisætningen for integraler)

Lad $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være kontinuert. Der findes et tal $c \in [a, b]$ således, at

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

4.1 Integration af funktioner på et interval

Teorem (Analysens fundamentalsætning I)

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være kontinuert, $a \in I$. For $x \in I$ definer

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Der gælder at $F : I \to \mathbb{R}$ er differentiabel og $F' = f$.

4.1 Integration af funktioner på et interval

Teorem (Analysens fundamentalsætning II)

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være kontinuert og F stamfunktion for f. For hvert $a, b \in I$ har vi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

4.1 Integration af funktioner på et interval

Teorem (Integration ved substitution)

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være kontinuert, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinuert differentiabel, $g([a, b]) \subset I$.
Der gælder

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g) dg.$$

Eksempel

$$\int_1^2 \sqrt{2x+1}x dx = \int_1^2 t \frac{1}{2}(t^2-1) dx(t).$$

Vi bruger substitutionen $x = x(t) = (t^2-1)/2$ og derved $t = \sqrt{2x+1}$. Så gælder $dx(t) = t\,dt$, og intervallet bliver

$$1 = \frac{1}{2}(t_0^2 - 1) \Longrightarrow t_0 = \sqrt{3},$$
$$2 = \frac{1}{2}(t_1^2 - 1) \Longrightarrow t_1 = \sqrt{5}.$$

Der fås

$$\int_1^2 \sqrt{2x+1}x dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} (t^4 - t^2) dt = \left[\frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{6}t^3\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}.$$

Teorem (Partiel (delvis) integration)

Lad $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ være kontinuert og differentiabel med afledede $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. **Partiel integration** betegner ligningen

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

Eksempel

Lad $a, b > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \log x dx &= \int_a^b \underbrace{\log x}_{F} \underbrace{1}_{g} dx, \\
&= \underbrace{x}_{G} \underbrace{\log x}_{F} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\frac{1}{x}}_{f} \underbrace{x}_{G} dx, \\
&= x(\log x - 1) \Big|_a^b.
\end{aligned}$$

Sætning (Anvendelse: Taylorformlen)

Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et interval og $f : I \to \mathbb{R}$ en $(n+1)$-gange kontinuert differentiabel funktion. Så gælder for $x_0 \in I$ og $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

hvor restledet er givet ved

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

4.2 Leibnizformel

4.2 Leibnizformel

Lad f være kontinuert differentiabel og afhængig af indikatorvariablen x og en parameter r:

$$F(r) = \int_a^b f(x, r) dx.$$

Vi kan finde den partielle afledede af integralet i forhold til parameteren r som

$$\frac{dF(r)}{dr} = \int_a^b \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} dx,$$

fordi

$$\begin{aligned} F'(r) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(r+h) - F(r)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_a^b \frac{f(x, r+h) - f(x, r)}{h} dx \\ &= \int_a^b \lim_{h \to 0} \frac{f(x, r+h) - f(x, r)}{h} dx. \end{aligned}$$

Det kan generaliseres til intervaller $[a, b]$ der afhænger af r.

4.2 Leibnizformel

Teorem (4.2.1 Leibnizformel)

Antag at $f(x, r)$ er kontinuert differentiabel på rektanglet $x \in [a, b]$, $r \in [c, d]$. Antag at $u(r)$ og $v(r)$ er kontinuert differentiable funktioner fra $[c, d]$ til $[a, b]$. Definer $F(r)$ ved

$$F(r) = \int_{u(r)}^{v(r)} f(x, r)dx.$$

Der gælder

$$F'(r) = f(v(r), r)v'(r) - f(u(r), r)u'(r) + \int_{u(r)}^{v(r)} \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} dx.$$

4.2 Leibnizformel

Eksempel

Antag at en forretning indtager en profit $y(t)$ i intervallet $t \in [0,\ T]$. På tidspunkt $s \in [0,\ T]$ er nutidsværdien

$$V(s,r) = \int_s^T y(t) e^{-r(t-s)}\, dt,$$

hvor r er en konstant diskonteringsfaktor. Øjebliksforandringen er

$$\frac{\partial V(s,r)}{\partial s} = -y(s) + \int_s^T y(t)\, r\, e^{-r(t-s)}\, dt = -y(s) + rV(s,r),$$

eller

$$r = \frac{y(s) + \partial V(s,r)/\partial s}{V(s,r)},$$

dvs. at diskonteringsfaktoren er lig med det øjeblikkelige proportionale afkast.

4.2 Leibnizformel

Teorem (4.2.2 Leibnizformel for uegentlige integraler)

Antag at $f(x, r)$ er kontinuert differentiabel for hvert $x > a$ og hvert $r \in [c, d]$, og antag at integralet

$$\int_a^\infty f(x, r)dx$$

konvergerer for hvert $r \in [c, d]$. Antag derudover, at $\partial f(x, r)/\partial r$ er begrænset i den forstand at der findes $p(x)$, uafhængig af r, således, at

$$\int_a^\infty p(x)dx < \infty$$

og

$$\left| \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} \right| \leq p(x) \text{ for hvert } x > a \text{ og } r \in [c, d].$$

Der gælder

$$\frac{d}{dr} \int_a^\infty f(x, r)dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} dx.$$