Mathematics for Economists
Kapitel 1 – Lineær Algebra

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 1

- **Ligningssystemer / Lineær uafhængighed**
- Funktioner / Rangen af en matrix / Rangen og lineære ligningssystemer / Skalarprodukt
- Determinanter
- Egenværdier
- Symmetriske bilineære former

1.1 Ligningssystemer

1.1 Ligningssystemer

Vi ønsker at finde reelle tal $\left(x_j\right)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ givet mængden af reelle tal $\left(a_{ij}\right)_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$ og $\left(b_i\right)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ sådan at

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Der er m **lineære ligninger** i n **ubekendte**. Mængden $\left(x_j\right)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ er **løsningen**. Vi antager, at ligningerne er **lineært uafhængige**, dvs. at ingen ligning kun er et multiplum af en anden ligning, og at b_i-tallene ikke er alle nul. Vi skelner mellem tre mulige tilfælde:

$$\begin{array}{ll} n > m & \text{uendeligt mange løsninger,} \\ n < m & \text{ingen løsning,} \\ n = m & \text{netop én løsning.} \end{array}$$

Eksempel

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 3x_2 & + & 9x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 10x_3 & = & 5 \end{array}$$

Eksempel

$$\begin{array}{ccccr} x_1 & & & = & 5 \\ & x_2 & & = & -2 \\ & & x_3 & = & 1 \end{array}$$

1.1 Ligningssystemer

Vi skriver matricen og vektorerne

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

og definerer produktet af en matrix med en vektor

$$Ax := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Med disse betegnelser kan vi skrive ligningssystemet som

$$Ax = b, \; A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \, x \in \mathbb{R}^n, \, b \in \mathbb{R}^m.$$

1.1 Ligningssystemer

Med matrixmultiplikation kan vi skrive:

Eksempel

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 3x_2 & + & 9x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 10x_3 & = & 5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Eksempel

$$\begin{array}{rrrcr} 1x_1 & & & = & 5 \\ & 1x_2 & & = & -2 \\ & & 1x_3 & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definition

Løsningsmængden forandres ikke ved følgende **rækkeoperationer**:

(i) at gange en række (ligning) igennem med et tal forskelligt fra nul,

(ii) at lægge et multiplum af en række (ligning) til en anden række (ligning),

(iii) at bytte om pårækkerne (rækkefølgen af ligningerne).

1.1 Ligningssystemer

Vi definerer produktet af to matricer $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ og $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ som

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \ldots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1} & \cdots & a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \ldots + a_{2n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \ldots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \ldots + a_{mn}b_{np} \end{bmatrix} \\
&= (a_{ik})_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\} \\ k\in\{1,\ldots,n\}}} (b_{kj})_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\} \\ j\in\{1,\ldots,p\}}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\in\{1,\ldots,m\} \\ j\in\{1,\ldots,p\}}} .
\end{aligned}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p} \implies AB \in \mathbb{R}^{m\times p}$.

Definition (Invers Matrix)

Vi definerer den **inverse matrix** til $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, skrevet $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (læs: A-invers), som den matrix, der opfylder

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} =: I \quad \text{“identitet.”}$$

Hvis A^{-1} eksisterer, såkaldes A for **regulær** eller **invertibel**.

Kun **kvadratiske matricer** (antal af rækker = antal af søjler) kan være invertible.
Identiteten $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er det neutrale element af multiplikationen i rummet $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$Ix = x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$AI = IA = A, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

1.2 Lineær Uafhængighed

Definition (Vektorrum)

Et **reelt vektorrum** er en mængde V hvor, for vilkårlige vektorer u, v, $w \in V$ og tal r, $s \in \mathbb{R}$, der gælder

(i) $u + v \in V$

(ii) $ru \in V$

(iii) $0 \in V \quad (0 + v = v$ for alle $v \in V)$.

(iv) For alle $v \in V$ findes et element $-v \in V$ således at $v + (-v) = 0$.

(v) For $1 \in \mathbb{R}$ gælder $1v = v$ for alle $v \in V$.

(vi) Associativitet:

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$
$$r(sv) = (rs)v$$

Kommutativitet:

$$u + v = v + u$$

Distributivitet:

$$(r + s)v = rv + sv, \qquad r(u + v) = ru + rv.$$

1.2 Lineær Uafhængighed

Definition (Linearkombination)

Lad V være et vektorrum og lad $v_1, \ldots, v_m$ være et sæt af vektorer i V. En vektor v af formen

$$v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_m v_m,$$

hvor $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$, siges at være en **linearkombination** af $v_1, \ldots, v_m$.

Definition (Lineær span)

Et sæt af vektorer $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ udgør et vektorrum af alle linearkombinationer, betegnes **lineær span**,

$$L(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i v_i,\ r_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.2 Lineær Uafhængighed

Definition (Lineær Uafhængighed)

Et sæt af vektorer $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ kaldes for **lineært uafhængigt** hvis hvert element $v \in L(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ har netop én repræsentation

$$v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_m v_m, \ r_i \in \mathbb{R}.$$

Definition (Lineær Afhængighed)

Et sæt af vektorer $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ er **lineært afhængige** hvis der findes tal $r_1, r_2, \ldots, r_m$ ikke alle nul, således at

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_m v_m = 0.$$

Hvis ligningen kun holder i det triviale tilfælde at $r_1 = r_2 = \ldots = r_m = 0$, såer vektorerne **lineært uafhængige**.

Med andre ord, hvis $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ er lineært afhængige, så kan enhver af dem skrives som en linearkombination af de øvrige:

$$v_i = -\frac{r_1}{r_i} v_1 - \ldots - \frac{r_m}{r_i} v_m, \ r_i \neq 0.$$

1.2 Lineær Uafhængighed

Definition (Basis)

Lad V være et vektorrum. Et sæt af vektorer $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ kaldes for **basis** af V, hvis hver $v \in V$ har netop én repræsentation

$$v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_m v_m, \quad r_i \in \mathbb{R}.$$

En basis består derfor af lineært uafhængige vektorer.

Eksempel

Sættet af standard enhedssøjlerne

$$(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for vektorrummet $V = \mathbb{R}^3$.

Eksempel

Hver $x \in \mathbb{R}^3$ har netop én repræsentation

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I modsætning er sættet af vektorer

$$(e_1, e_2, e_3, v_4) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

ikke en basis for $V = \mathbb{R}^3$, men derimod lineært afhængige. Hver $x \in \mathbb{R}^3$ har uendeligt mange repræsentationer

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + (x_2 + s) e_2 + (x_3 + s) e_3 - s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{R}.$$

Definition (Dimension)

Antallet af vektorer i en basis af et vektorrum V kaldes for **dimensionen** af vektorrummet.

Definition (Lineær Funktion)

Lad V og W være vektorrum. En funktion $f : V \to W$ kaldes for **lineær** hvis for hver $u, v \in V$ og tal $r, s \in \mathbb{R}$ det gælder

$$f(ru + sv) = rf(u) + sf(v).$$

For endelige summer gælder

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(v_i).$$

Lineære funktioner respekterer linearkombinationer.

Sætning

Hver lineær funktion mellem vektorrum er givet ved multiplikation med en matrix.

Lad $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær funktion. Enhedsvektorerne $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ er en basis af definitionsmængden $\mathbb{R}^n$. Saml billederne $f(e_j) \in \mathbb{R}^m$ af enhedsvektorerne i søjlerne af en matrix A:

$$A = [f(e_1)\, f(e_2)\, \ldots\, f(e_n)] \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Det følger, at for hvert element $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ i $\mathbb{R}^n$, vi har

$$f(x) =: y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = [f(e_1)\, f(e_2)\, \ldots\, f(e_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Ax.$$

1.2 Lineær Uafhængighed

Hver lineær funktion mellem vektorrum kan identificeres med multiplikation af vektorerne fra definitionsmængden med en matrix. Objektet "lineær funktion" er ensbetydende med den tilsvarende matrix. Denne matrix har billederne af enhedssøjlerne for definitionsmængden ved funktionen i søjlerne.