2622 Matematik for Økonomer
Eric Hillebrand

Opgavesæt 4

Opgave 1
Betragt funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, \lambda) &\mapsto y, \end{aligned}$$

som tager en vektor x og et tal λ som argumenter og afbilder til et tal

$$y = f(x, \lambda) = \frac{1}{2}(1-\lambda)x_1^2 + \frac{1}{2}(3-\lambda)x_2^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2x_3.$$

1. Hvis vi betragter λ som en fikseret parameter, bestem gradienten $\mathrm{grad} f$ med hensyn til x.
2. Bestem parameterværdierne λ og vektorer $x \in \mathbb{R}^3$ der opfylder $\mathrm{grad} f(x) = 0$. (Tip: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$.)

Ligningen $\mathrm{grad} f(x) = 0$ svarer til egenværdiproblemet

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Egenværdierne er givet, bestem egenvektorerne.

Opgave 2

1. Lad $f(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Bestem Jacobi-matricen af $f(x)$.
   $J_f = A$.
2. Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved
   $$\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{pmatrix}$$
   (polære koordinater). Bestem Jacobi-matricen af f og dens determinant.
   $$J_f = \begin{bmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{bmatrix}$$
   $\det J_f = r$.
3. Lad $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix}.$$

Bestem Jacobi-matricen af den sammensatte funktion $(f \circ g)(x, y)$, med f fra 4.2, ved hjælp af kædereglen.

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{bmatrix}.$$

$$J_{f \circ g} = I.$$

Opgave 3
FMEA Section 2.1 Problem 8

8-minutters foredrag

1. Differentiabilitet
2. Kædereglen