Mathematics for Economists
Kapitel 9 – Kontrolteori: Grundlæggende metoder

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 9

- Introduktion (9.1, 9.2)
- Regularitetsbetingelser (9.3)
- Standardproblemet (9.4)
- Skyggepriser og den adjungerede funktion (9.6)
- Tilstrækkelige betingelser (9.7)
- **Problemer udtrykt i nutidsværdi (9.9)**
- Ubegrænset periode (9.11)

9.9 Problemer udtrykt i nutidsværdi

9.9 Problemer udtrykt i nutidsværdi

Mange kontrolproblemer i økonomien maksimerer **nutidsværdien** for en øjeblikkelig funktion f:

$$\max_{u \in U \subseteq \mathbb{R}} \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)e^{-rt}dt, \quad \dot{x}(t) = g(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0, \quad \begin{cases} \text{(a)} \quad x(t_1) = x_1 \\ \text{(b)} \quad x(t_1) \geq x_1 \\ \text{(c)} \quad x(t_1) \text{ fri} \end{cases}$$

Gang Hamilton-funktionen med e^{rt} for at få **Hamilton-funktionen udtrykt i fremtidsværdi**

$$H^c = He^{rt} = f(t,x,u) + e^{rt}pg(t,x,u).$$

Lad $\lambda = e^{rt}p$ være **fremtidsværdien for skyggeprisen**, så gælder

$$H^c(t,x,u,\lambda) = f(t,x,u) + \lambda g(t,x,u)$$

9.9 Problemer udtrykt i nutidsværdi

Bemærk at

$$\lambda = e^{rt} p \Rightarrow \dot{\lambda} = re^{rt} p + e^{rt} \dot{p} = r\lambda + e^{rt} \dot{p},$$

og derved

$$\dot{p} = e^{-rt}(\dot{\lambda} - r\lambda).$$

Derudover implicerer $H^c = He^{rt}$ at

$$\partial H^c / \partial x = e^{rt} (\partial H / \partial x).$$

DL'en for p bliver til

$$\dot{p} = -\partial H / \partial x \Leftrightarrow \dot{\lambda} - r\lambda = -\partial H^c / \partial x.$$

9.9 Problemer udtrykt i nutidsværdi

Teorem (9.9.1, Maksimumsprincip for problemer i nutidsværdi)

Antag at det tilladte par $(x^*(t), u^*(t))$ løser problemet og lad H^c være fremtidsværdi-Hamiltonfunktionen. Så findes en kontinuert funktion $\lambda(t)$ således at:

(A) $u = u^*(t)$ maksimerer $H^c(t, x^*(t), u, \lambda(t))$ for $u \in U$

(B) $\dot{\lambda}(t) - r\lambda(t) = -\dfrac{\partial H^c(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial x}$

(C) Transversalitetsbetingelserne er:

- (a′) $\lambda(t_1)$ ingen begrænsninger
- (b′) $\lambda(t_1) \geq 0$, med $\lambda(t_1) = 0$ hvis $x^*(t_1) > x_1$
- (c′) $\lambda(t_1) = 0$

9.9 Problemer udtrykt i nutidsværdi

Mangasarian og Arrow tilstrækkelighedsbetingelserne har umiddelbare generaliseringer til problemet i nutidsværdi. Betingelserne i Teorem 9.9.1 er tilstrækkelige for optimalitet hvis

$$H^c(t, x, u, \lambda(t)) \text{ er konkav i } (x, u), \qquad \text{(Mangasarian)}$$

eller (mere generelt)

$$\widehat{H}^c(t, x, \lambda(t)) = \max_{u \in U} H^c(t, x, u, \lambda(t)) \text{ er konkav i } x. \qquad \text{(Arrow)}$$