2622 Matematik for Økonomer
Eric Hillebrand

Opgavesæt 11

Opgave 1
Section 6.3 Exercise 2

Opgave 2
Section 6.3 Exercise 8

Opgave 3
Section 6.5 Exercise 1

Opgave 4
Section 6.6 Exercise 3

Opgave 5: Ramsey-Model
I Ramsey modellen (Opgave 3 i sæt 5) har vi fundet en linearisering for det logaritmiske kapitalapparat $\log k(t)$ og det logaritmiske forbrug $\log c(t)$ omkring deres ligevægtsværdier $(\log k^*, \log c^*)$ som

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

hvor

$$x(t) = \begin{bmatrix} \log k(t) - \log k^*(t) \\ \log c(t) - \log c^*(t) \end{bmatrix},$$

og

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

med indgange

$$\begin{aligned} a_{11} &= \rho - \alpha_L - (1-\theta)\alpha_T, \\ a_{12} &= \delta + \alpha_L + \alpha_T - \frac{1}{\alpha}(\delta + \rho + \theta\alpha_T), \\ a_{21} &= \frac{\alpha - 1}{\theta}(\delta + \rho + \theta\alpha_T), \\ a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Ligevægtspunktet er givet ved

$$\begin{aligned} k^* &= \left[\frac{1}{\alpha A}(\delta + \rho + \theta\alpha_T)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}, \\ c^* &= A(k^*)^\alpha - (\delta + \alpha_L + \alpha_T)k^*. \end{aligned}$$

Opgave: *Løs systemet $\dot{x}(t) = Ax(t)$ (skriv løsningen i a_{ij} koefficienterne for at holde notationen overskuelig). Vis at matricen A kan diagonaliseres hvis og kun hvis*

$$a_{11}^2 \neq -4a_{12}a_{21}.$$

Løsningerne er givet ved

$$[v_1 e^{\lambda_1 t},\ v_2 e^{\lambda_2 t}].$$

Egenværdierne og -vektorerne er givet ved

$$\lambda_1 = \frac{a_{11}}{2} + \sqrt{\frac{a_{11}^2}{4} + a_{12}a_{21}}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ \frac{a_{11}}{2} - \sqrt{\frac{a_{11}^2}{4} + a_{12}a_{21}} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = \frac{a_{11}}{2} - \sqrt{\frac{a_{11}^2}{4} + a_{12}a_{21}}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ \frac{a_{11}}{2} + \sqrt{\frac{a_{11}^2}{4} + a_{12}a_{21}} \end{bmatrix},$$

8-minutters foredrag

1. Lineære DL af anden orden med konstante koefficienter
2. Differentialligningssystemer og ligevægtspunkter