Mathematics for Economists
Kapitel 5 – Sædvanlige Differentialligninger af Første Orden

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 5

- Introduktion (5.1)
- Retningsfelter (5.2)
- Separable DL (5.3)
- **Lineære DL af første orden (5.4)**
- Substitution (5.6)
- Kvalitativ Teori (5.7)

5.4 Lineære differentialligninger af første orden

5.4 Lineære DL af første orden

Definition

En **lineær differentialligning af første orden** er en DL, der kan skrives som

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \tag{1}$$

hvor $a(t)$ og $b(t)$ er kontinuerte funktioner af t på et interval, og $x = x(t)$ er den ukendte funktion. Ligning (1) kaldes for "lineær", fordi ligningens venstre side afhænger lineært af $\dot{x}$ og x.

5.4 Lineære DL af første orden

De tre tilfælde

(1) Konstante koefficienter:

$$\dot{x} + ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = Ce^{-at} + \frac{b}{a}.$$

(2) Tidsafhængig højre side:

$$\dot{x} + ax = b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad x = Ce^{-at} + e^{-at} \int e^{at} b(t) dt.$$

(3) Tidsafhængige koefficienter:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad x = e^{-\int a(t)dt} \left(C + \int e^{\int a(t)dt} b(t) dt \right).$$

5.4 Lineære DL af første orden

Eksempel (Pristilpasningsmekanisme)

Lad udbud og efterspørgsel påen gode være givet ved

$$D(p(t)) = a - bp(t),\ S(p(t)) = \alpha + \beta p(t),$$

hvor $a, b, \alpha, \beta > 0$. Lad prisforandringen $\dot{p}(t)$ være proportional med overskudsefterspørgslen:

$$\dot{p}(t) = \lambda(D(p) - S(p)),\ \lambda > 0.$$

Det kan omformes til

$$\dot{p} + \lambda(b + \beta)p = \lambda(a - \alpha),$$

med den fuldstændige løsning

$$p(t) = Ce^{-\lambda(b+\beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta}.$$

Siden $\lambda(b + \beta) > 0$, konvergerer $p(t)$ mod ligevægtsprisen $p^* = (a - \alpha)/(b + \beta)$, hvor $D(p^*) = S(p^*)$.

Eksempel (Økonomisk Vækst)

Betragt en enkel model af en udviklingsøkonomi:

- BNP $X(t)$ er en andel af kapitalapparatet $K(t)$:

$$X(t) = AK(t).$$

- Forandringen i kapitalapparatet er givet ved opsparingskvoten og direkte udenlandske investeringer $H(t)$:

$$\dot{K}(t) = s\,X(t) + H(t),$$

hvor $H(t) = H_0 e^{\mu t}$.

Eksempel (Økonomisk vækst)

De første to ligninger giver DLen

$$\dot{K}(t) - sAK(t) = H(t) = H_0 e^{\mu t}.$$

Brug den fuldstændige løsning

$$\begin{aligned}
x(t) &= C\, e^{-at} + e^{-at} \int e^{at} b(t)\, dt, \\
K(t) &= C\, e^{sAt} + e^{sAt} \int e^{-sAt} H_0 e^{\mu t}\, dt, \\
&= C\, e^{sAt} + H_0 e^{sAt} \int e^{(\mu - sA)t}\, dt, \\
&= C\, e^{sAt} + \frac{H_0 e^{sAt}}{\mu - sA} e^{(\mu - sA)t}, \\
&= C\, e^{sAt} + \frac{H_0}{\mu - sA} e^{\mu t}.
\end{aligned}$$

Eksempel (Økonomisk Vækst)

For at løse problemet med begyndelsesbetingelsen $K(0) = K_0$, betragt

$$K(0) = C + \frac{H_0}{\mu - sA} \stackrel{!}{=} K_0 \;\Rightarrow\; C = K_0 - \frac{H_0}{\mu - sA}.$$

Den partikulære løsning er derfor givet ved

$$K(t) = \left(K_0 - \frac{H_0}{\mu - sA} \right) e^{sAt} + \frac{H_0}{\mu - sA} e^{\mu t}.$$

Eksempel (Introduktionseksempel)

Betragt

$$\dot{x} = x + t \text{ eller } \dot{x} - x = t.$$

Formlen for en tidsafhængig højre side giver

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{-at} + e^{-at} \int e^{at} b(t) dt, \\ &= Ce^{t} + e^{t} \int e^{-t} t dt. \end{aligned}$$

Delvis integration giver

$$\int te^{-t} dt = -e^{-t}(t+1).$$

Derved,

$$x(t) = Ce^{t} - t - 1.$$

Eksempel

Betragt DL

$$\dot{x}(t) + 2t\,x(t) = 4t.$$

med begyndelsesbetingelsen $x(0) = x_0 = -2$. Vi har dermed, at $a(t) = 2t$ og $A(t) = \int a(t)dt = t^2$.

Brug den fuldstændige løsning

$$\begin{aligned} x(t) &= C\,e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(t)\,e^{A(t)}\,dt, \\ &= C\,e^{-t^2} + e^{-t^2} \int 4t\,e^{t^2}\,dt, \\ &= C\,e^{-t^2} + e^{-t^2}\,2\,e^{t^2}, \\ &= C\,e^{-t^2} + 2. \end{aligned}$$

Begyndelsesbetingelsen er opfyldt ved at sætte $C = -4$.

Eksempel (Formueakkumulation)

Vi udvider eksemplet om renters rente til en formueprocess, der vokser med en kontinuerlig rente $r(t)$ og indtægt $y(t)$ og udgifter $c(t)$:

$$\dot{w}(t) = r(t)\,w(t) + y(t) - c(t).$$

Der fås fra den fuldstændige løsning, at

$$w(t) = w(0)\,e^{\int_0^t r(\tau)\,d\tau} + \int_0^t [y(s) - c(s)]e^{\int_s^t r(\tau)\,d\tau} ds,$$

eller

$$w(t)\,e^{-\int_0^t r(\tau)\,d\tau} = w(0) + \int_0^t [y(s) - c(s)]e^{-\int_0^s r(\tau)\,d\tau} ds.$$

Nutidsværdien af formueprocessen er summen af formuen i begyndelsen og nutidsværdien af differencen mellem indtægter og udgifter.