# Mathematics for Economists
# Kapitel 11 Differensligninger

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

## Disposition Kapitel 11

- **Differensligninger af første orden (11.1)**
- **Økonomiske Anvendelser (11.2)**
- DL af anden orden (11.3)
- Anden-ordens DL med konstante koefficienter (11.4)
- Systemer af DL (11.6)

# 11.1 Differensligninger af første orden

# 11.1 Differensligninger af første orden

Lad $f(t,x)$ være en funktion defineret for alle naturlige tal $t$ (nul inkluderet) og alle reelle tal $x$. En differensligning af første orden i $x_t$ kan almindeligvis skrives som

$$x_{t+1} = f(t, x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Vi taler om første orden fordi ligningen relaterer værdien for funktionen i periode $t+1$ til og kun til værdien for den samme funktion i periode $t$.

Antag at $x_0$ er givet. Gentagne anvendelse af ligningen (1) giver

$$\begin{aligned} x_1 &= f(0, x_0) \\ x_2 &= f(1, x_1) = f(1, f(0, x_0)) \\ x_3 &= f(2, x_2) = f(2, f(1, f(0, x_0))) \end{aligned}$$

og så videre. *For en givet værdi for $x_0$ kan vi beregne $x_t$ for hver værdi for $t$.*

I visse tilfælde kan en eksplicit formel for $x_t$ bestemmes, men tit er det ikke muligt. En **fuldstændig løsning** for (1) er en funktion af formen $x_t = g(t;\alpha)$ der opfylder (1) for hver værdi for den vilkårlige konstant $\alpha$. Konstanten bruges at tilpasse løsningen til begyndelsesbetingelser således at $g(0,\alpha) = x_0$.

## Eksempel

Betragt DL'en (nu står DL for differensligning)

$$x_{t+1} = ax_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Derved følger at

$$x_{t+1} = ax_t = a^2 x_{t-1} = a^3 x_{t-2} = \ldots$$

Iteration af ligningen giver

$$x_t = a^t x_0.$$

Lad $a = -3$, så fås

$$x_t = (-3)^t x_0$$

som fuldstændig løsning. I dette tilfælde er $\alpha = x_0$. For begyndelsesbetingelsen $x_0 = 5$ er løsningen

$$x_t = 5(-3)^t.$$

# 11.1 Differensligninger af første orden

## Eksempel

Lad $Y_t$ være indkomst, $S_t$ opsparing, $I_t$ investering.

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha Y_t, \quad \alpha > 0, \\ I_{t+1} &= \beta(Y_{t+1} - Y_t), \quad \beta > \alpha, \\ S_t &= I_t. \end{aligned}$$

Ligevægtsbetingelsen giver

$$I_{t+1} = \alpha Y_{t+1},$$

altså

$$\alpha Y_{t+1} = \beta(Y_{t+1} - Y_t),$$

eller

$$Y_{t+1} = \frac{\beta}{\beta - \alpha} Y_t = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta - \alpha}\right) Y_t = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta - \alpha}\right)^t Y_0,$$

med vækstraten

$$\frac{\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t}.$$

# 11.1 Differensligninger af første orden

## Lineære ligninger af første orden med konstante koefficienter

Betragt den inhomogene DL

$$x_{t+1} = ax_t + b, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

med $a$ og $b$ konstanter. Iteration af ligningen giver

$$x_t = a^t x_0 + (a^{t-1} + a^{t-2} + \cdots + a + 1)b.$$

Fra formlen for den geometriske række får vi at $1 + a + a^2 + \cdots + a^{t-1} = (1 - a^t)/(1 - a)$, for $a \neq 1$. Derved gælder for $t = 0, 1, 2, \ldots,$ at

$$x_{t+1} = ax_t + b \quad \Longleftrightarrow \quad x_t = a^t \left( x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \quad (a \neq 1). \tag{3}$$

For $a = 1$ fås $1 + a + \cdots + a^{t-1} = t$ og $x_t = x_0 + tb$ for $t = 1, 2, \ldots$.

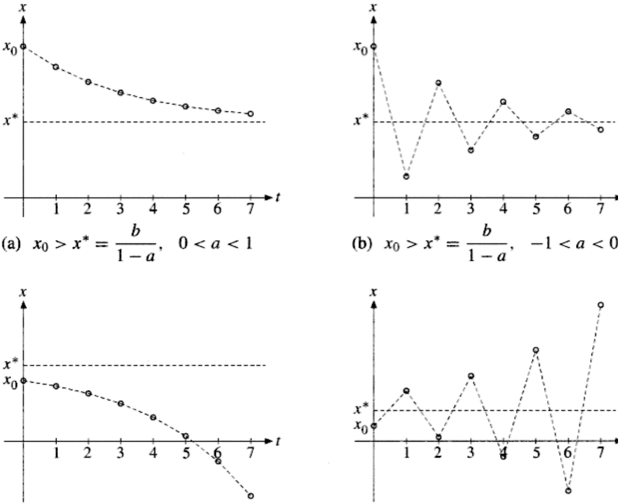
# 11.1 Differensligninger af første orden

**Ligevægtspunkter og stabilitet**

Antag at konstanten $a$ i (3) har absolutværdi mindre end 1, dvs. $-1 < a < 1$. Så følger at $a^t \to 0$ når $t \to \infty$, og (3) implicerer, at

$$x_t \to x^* = b/(1-a) \quad \text{når} \quad t \to \infty.$$

Hvis $|a| < 1$, så konvergerer løsningen til ligevægten når $t \to \infty$. Ligningen kaldes for **globalt asymptotisk stabil**.




(a) $x_0 > x^* = \dfrac{b}{1-a}$, $0 < a < 1$

(b) $x_0 > x^* = \dfrac{b}{1-a}$, $-1 < a < 0$

(c) $x_0 < x^* = \dfrac{b}{1-a}$, $a > 1$

(d) $x_0 < x^* = \dfrac{b}{1-a}$, $a < -1$

**Figure 1**

**Tidsafhængig højre side**

Betragt tilfældet hvor den højre side i ligningen (3) er en vilkårligt givet funktion af $t$:

$$x_{t+1} = ax_t + b_t, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

og $a$ er stadig konstant. Iteration giver den fuldstændige løsning

$$x_{t+1} = ax_t + b_t \quad \Longleftrightarrow \quad x_t = a^t x_0 + \sum_{k=1}^{t} a^{t-k} b_{k-1}, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{5}$$