$$\begin{bmatrix} \nabla g_1 & \nabla g_2 & \cdots & \nabla g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \nabla f$$

(b) Lad $\mathcal{L}(x)$ være konkav.
Ligning (4) (sl. 5) $\Rightarrow$ x^* er et kritisk punkt af $\mathcal{L}$.
Teorem 3.1.2 $\Rightarrow$ x^* er maksimums-punktet af $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}(x^*) = f(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x^*) - b_j)$$

$$\geq \mathcal{L}(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - b_j)$$

for alle $x \in S$. Især for alle tilladte x, hvor $g_j(x) - b_j = 0$ for alle j.
x^* tilladt.

$$\Rightarrow \quad f(x^*) \geq f(x)$$

$\square$

$$\mathcal{L}(x) = x - \lambda(x^3 + y^2)$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (0,0)$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eks. [Ekstrema af en kvadratisk symmetrisk form på enhedskuglen i $\mathbb{R}^n$

Betragt $q_A(x) = x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^n$, A symmetrisk

Vi ved $Dq_A(x) = \nabla q_A(x) = 2Ax$.

Find ekstremumspunkter på
$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 1 \}.$$

Ekstremværdisætningen (3.1.3): q_A kont. og S lukket & begrænset $\Rightarrow$ findes maks og min.

$$f(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$g(x) = \|x\|^2 - 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0$$

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$$

$$Ax = \lambda x$$

(λ_0, x_0) egenpar til den mindste egenværdi

(λ_1, x_1) egenpar til den største egenværdi

$$q_A(x_0) = x_0^T A x_0 = \lambda_0 \langle x_0, x_0 \rangle = \lambda_0 \|x_0\|^2 = \lambda_0$$

$$q_A(x_1) = x_1^T A x_1 = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1$$

$\square$