Mathematics for Economists
Kapitel 9 – Kontrolteori: Grundlæggende metoder

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 9

- **Introduktion (9.1, 9.2)**
- Regularitetsbetingelser (9.3)
- Standardproblemet (9.4)
- Skyggepriser og den adjungerede funktion (9.6)
- Tilstrækkelige betingelser (9.7)
- Problemer udtrykt i nutidsværdi (9.9)
- Ubegrænset periode (9.11)

Introduktion
(Afsnit 9.1 og 9.2)

Introduktion

- Betragt et system hvis tilstand på tidspunkt t er beskrevet af et tal $x(t)$ der kaldes for **tilstandsvariablen**.
- Processen der bestemmer $x(t)$ kan påvirkes, i det mindste delvist, af en **kontrolfunktion** $u(t)$.
- Udviklingen for $x(t)$ beskrives ved en *kontrolleret differentialligning*

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

- Antag at det er muligt at måle nytten tilknyttet til hver funktion for $x(t)$ for en givet kontrolfunktion $u(t)$ ved integralet

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \tag{2}$$

  med f en givet funktion. Integralet J kaldes for **objektfunktionen**.
- Den terminale tilstand $x(t_1)$ skal ofte opfylde bibetingelser. Tiden t_1 er ikke nødvendigvis fikseret men kan vælges i nogle tilfælde.

Vi betragter det fundamentale problem:

Blandt alle par $(x(t), u(t))$ der opfylder DL'en (1) med $x(t_0) = x_0$ og der opfylder bibetingelserne stillet for $x(t_1)$, find parret der maksimerer (2).

Introduktion

Eksempel 1: Økonomisk Vækst

Betragt kontrolproblemet

$$
\begin{aligned}
&\max \int_0^T (1-s(t))f(k(t))dt,\\
&\dot{k}(t) = s(t)f(k(t)),\\
&k(0) = k_0,\ k(T) \geq k_T,\\
&0 \leq s(t) \leq 1.
\end{aligned}
$$

Tilstandsvariablen $k(t)$ beskriver kapitalapparatet for et land og $f(k)$ er produktionsfunktionen. Kontrolvariablen er opsparingsraten $s(t)$,som skal forblive i **kontrolregionen** $s \in [0,1]$. Kvantiteten $(1-s)f(k)$ er forbrugsstrømmen. Vi skal maksimere integralet (stock) over strømmen (flow) over planlægningsperioden $[0, T]$. Konstanten k_0 betegner kapitalen i begyndelsen og bibetingelsen $k(T) \geq k_T$ kræver, at vi står tilbage med mindst k_T enheder kapital ved enden af perioden.

Introduktion

Eksempel 2: Olieudvinding

Lad $x(t)$ betegne mængden af olie i et reservoir på tidspunkt t. Antag at feltet rummer K tønder i $t = 0$, så at $x(0) = K$. Hvis $u(t)$ er udvindingsraten

$$\dot{x}(t) = -u(t), \quad x(0) = K \tag{$*$}$$

så giver integration på begge sider af $(*)$

$$x(t) - x(0) = -\int_0^t u(\tau)d\tau, \text{ eller } x(t) = K - \int_0^t u(\tau)d\tau \text{ for hvert } t \geq 0.$$

Introduktion

Eksempel 2: Olieudvinding

Antag at markedprisen for olie i t er givet ved $q(t)$. Antag derudover at omkostninger $C = C(t, x, u)$ afhænger af tiden t, den resterende mængde $x(t)$ og udvindingsraten $u(t)$. Så er den øjeblikkelige profit givet ved

$$\pi(t, x(t), u(t)) = q(t)u(t) - C(t, x(t), u(t))$$

Hvis diskonteringssatsen er r, så er nutidsværdien for profitten på intervallet $[0, T]$ givet som

$$\int_0^T \left[q(t)u(t) - C(t, x(t), u(t))\right] e^{-rt} dt \qquad (**)$$

Det er naturligt at antage, at $u(t) \geq 0$ og at $x(T) \geq 0$.

Problem: Find udvindingsraten $u(t) \geq 0$ der maksimerer $(**)$ under betingelserne $(*)$ og $x(T) \geq 0$ over udvindingsperioden $[0, T]$.

Introduktion

Betragt et kontrolproblem uden bibetingelser for kontrolvariablen $u(t)$ og uden bibetingelser for sluttilstanden $x(t_1)$. Givet faste tidspunkter t_0 og t_1, er problemet givet ved

$$\text{maksimér} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt, \quad u(t) \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

således, at

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \text{ fast}, \quad x(t_1) \text{ fri}. \tag{2}$$

- Givet en vilkårlig kontrolfunktion $u(t)$ defineret på $[t_0, t_1]$, er den tilhørende løsning på differentialligningen (2) med $x(t_0) = x_0$ som regel entydig bestemt på hele intervallet $[t_0, t_1]$.
- Et par $(x(t), u(t))$ der opfylder (2) kaldes for et **tilladt par**.
- Vi søger et **optimalt par** blandt alle tilladte par, dvs. et par der maksimerer integralet i (1).

Introduktion

I kapitel 3 behandlede vi bibetingelser givet ved ligheder i en Lagrange-funktion med en Lagrange-koefficient for hver betingelse.

- I analogi tilknytter vi nu et tal $p(t)$, der kaldes for **costate variabel**, til betingelsen (2) for hvert t i $[t_0, t_1]$.
- Den resulterende funktion $p = p(t)$ kaldes for den **adjungerede funktion** tilhørende til differentialligningen.
- I analogi til Lagrange-funktionen danner vi **Hamilton-funktionen** H. For hvert t i $[t_0, t_1]$ og hvert tre-tupel (x, u, p) af tilstandsfunktion, kontrolfunktion, og adjungerede funktion, er Hamilton-funktionen givet ved

$$H(t, x, u, p) = f(t, x, u) + pg(t, x, u) \tag{3}$$

Introduktion

Teorem (9.2.1, Maksimumsprincippet)

Antag at $(x^*(t), u^*(t))$ er et optimalt par for problemet (1)–(2). Så findes en kontinuert funktion $p(t)$ således, at for hvert t i $[t_0, t_1]$,

$$u = u^*(t) \text{ maksimerer } H(t, x^*(t), u, p(t)) \text{ for } u \text{ i } (-\infty, \infty), \tag{4}$$

$$\dot{p}(t) = -H'_x(t, x^*(t), u^*(t), p(t)), \quad p(t_1) = 0. \tag{5}$$

Fordi kontrolregionen er $(-\infty, \infty)$, har vi den *nødvendige* betingelse for (4) at

$$H'_u(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) = 0. \tag{6}$$

Hvis $H(t, x(t), u, p(t))$ er konkav i u, så er betingelsen (6) også tilstrækkelig for (4). (Vi husker, at et indre kritisk punkt af en konkav funktion er et globalt maksimum.)

Teorem (9.2.2, Mangasarian)

Hvis kravet

$$H(t, x, u, p) \quad \text{er konkav i } (x, u) \text{ for hvert } t \text{ i } [t_0, t_1] \tag{7}$$

tilføjes til antagelserne i Teorem 9.2.1, så får vi *tilstrækkelige* betingelser. Dvs. hvis vi finder en tre-tupel $(x^*(t), u^*(t), p(t))$ der opfylder (2), (4), (5), og (7), så er $(x^*(t), u^*(t), p(t))$ optimal.

Introduktion

Bemærkning

Hvis problemet er at minimere objektfunktionen i (1), så omskrives problemet til at maksimere den negative objektfunktion. Man kan også omformulere problemet: en optimal kontrolfunktion minimerer Hamilton-funktionen, og konveksitet af $H(t, x, u, p(t))$ ift. (x, u) er den tilstrækkelige betingelse.