2622 Matematik for Økonomer
Eric Hillebrand

Opgavesæt 3

Opgave 1
Bestem egenværdier og egenvektorer og derved egenværdi-dekompositionen $A = P\Lambda P^{-1}$ for følgende matricer.

1. $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. $$A = \begin{bmatrix} 11 & -15 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Opgave 2
Section 1.7 Exercise 5

Opgave 3
I portefølje teorien er afkastet for en portefølje givet ved

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i,$$

hvor n er antallet af værdipapirer, w_i er fraktionen af porteføljeværdien investeret i værdipapir i (som er antaget at være konstant), og r_i er afkastet på værdipapir i. Bemærk at $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Markowitz (1952) middelværdi-varians metode for portefølje optimering er baseret på de første to momenter af sandsynlighedsfordelingen for r_i.

$$\mathbb{E}r_p = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}r_i, \tag{1}$$

$$V(r_p) = \mathbb{E}(r_p - \mathbb{E}r_p)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i(r_i - \mathbb{E}r_i)\right)^2. \tag{2}$$

Varianser og kovarianser for de n værdipapirer

$$\sigma_i^2 := \mathbb{E}(r_i - \mathbb{E}r_i)^2, \quad \sigma_{ij} := \mathbb{E}[(r_i - \mathbb{E}r_i)(r_j - \mathbb{E}r_j)] \tag{3}$$

samles i kovariansmatricen

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

1. Vis at kovariansmatricen Ω er symmetrisk.
2. Vis at variansen $V(r_p)$ for porteføljeafkastet er en symmetrisk kvadratisk form givet ved matricen Ω:
$$V(r_p) = w^T \Omega w.$$
3. Ω må være positivt semidefinit. Hvorfor?
4. For en portefølje $(1/5, 2/5, 2/5)$, hvor de tre værdipapirer $i = 1, 2, 3$ har kovariansmatrix
$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{16}{25} \end{bmatrix},$$
bestem variansen $V(r_p)$ for porteføljeafkastet.

8-minutters foredrag

1. Egenværdier og egenvektorer
2. Bilineære former