Mathematics for Economists
Kapitel 3 – Statisk Optimering

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 3

- Ekstremumspunkter (3.1)
- **Lokale ekstremumspunkter (3.2)**
- Bibetingelser givet ved ligheder (3.3)
- Bibetingelser givet ved uligheder (3.5)
- Tilstrækkelige betingelser (3.6)

3.2 Lokale Ekstremumspunkter

3.2 Lokale Ekstremumspunkter

Definition

Lad $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$. Punktet x^* er et **lokalt maksimumspunkt** for f i S, hvis der findes en åben omegn $B(x^*, r) \subset S$ så at

$$f(x^*) \geq f(y)$$

for hvert $y \in B$, $x \neq y$.

Analogt definerer vi **lokale minimumspunkter** og **strenge** lokale extremumspunkter.

Thm. 3.1.1 gælder: Et lokalt extremumspunkt er altid et kritisk punkt.

Definition

Et kritisk punkt der ikke er et lokalt ekstremumspunkt hedder **sadelpunkt**.

3.2 Lokale Ekstremumspunkter

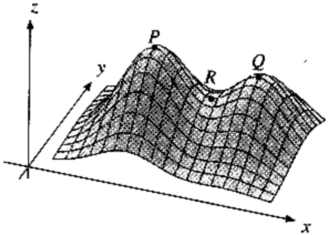


Figure 1 P is a maximum, Q is a local maximum, and R is a saddle point.

Teorem 3.2.1 i $\mathbb{R}^2$

Hvis $f(x, y)$ er en C^2 funktion med (x^*, y^*) et indre kritisk punkt, så gælder:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}\, f(x^*, y^*) \text{ positivt definit} &\implies \text{lokalt minimum i } (x^*, y^*), \\ \mathrm{Hess}\, f(x^*, y^*) \text{ negativt definit} &\implies \text{lokalt maksimum i } (x^*, y^*), \\ \mathrm{Hess}\, f(x^*, y^*) \text{ indefinit} &\implies (x^*, y^*) \text{ er et sadelpunkt.} \end{aligned}$$

3.2 Lokale Ekstremumspunkter

Ved Hurwitz-kriteriummet gælder

$$f''_{11}(x^*, y^*) > 0 \;\&\; \begin{vmatrix} f''_{11}(x^*, y^*) & f''_{12}(x^*, y^*) \\ f''_{21}(x^*, y^*) & f''_{22}(x^*, y^*) \end{vmatrix} > 0 \Longrightarrow \text{ lokalt min. i } (x^*, y^*)$$

$$f''_{11}(x^*, y^*) < 0 \;\&\; \begin{vmatrix} f''_{11}(x^*, y^*) & f''_{12}(x^*, y^*) \\ f''_{21}(x^*, y^*) & f''_{22}(x^*, y^*) \end{vmatrix} > 0 \Longrightarrow \text{ lokalt maks. i } (x^*, y^*)$$

$$\begin{vmatrix} f''_{11}(x^*, y^*) & f''_{12}(x^*, y^*) \\ f''_{21}(x^*, y^*) & f''_{22}(x^*, y^*) \end{vmatrix} < 0 \Longrightarrow (x^*, y^*) \text{ er et sadelpunkt}$$

3.2 Lokale Ekstremumspunkter

Teorem (3.2.1, Tilstrækkelige Lokale Anden-Ordens Betingelser)

Antag at $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ er defineret på en mængde S i $\mathbb{R}^n$ og at x^* er et indre kritisk punkt. Antag derudover at f er C^2 i en åben kugle med centrum x^*. Der gælder, at

(a) $\mathrm{Hess}\, f(x^*)$ positivt definit $\Longrightarrow x^*$ er et lokalt minimumspunkt.

(b) $\mathrm{Hess}\, f(x^*)$ negativt definit $\Longrightarrow x^*$ er et lokalt maksimumspunkt.

(c) $\mathrm{Hess}\, f(x^*)$ indefinit $\Longrightarrow x^*$ er et sadelpunkt.

3.2 Lokale Ekstremumspunkter

Ved Hurwitz-kriteriummet gælder: Lad $D_k(x)$ være de ledende underdeterminanter af orden k af Hesse-matricen:

(a) $D_k(x^*) > 0, k = 1, \ldots, n \implies x^*$ er et lokalt minimumspunkt.

(b) $(-1)^k D_k(x^*) > 0, k = 1, \ldots, n \implies x^*$ er et lokalt maksimumspunkt.

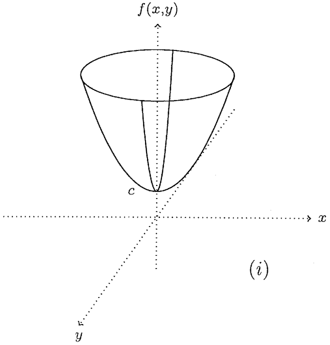
(c) $D_n(x^*) \neq 0$ og hverken (a) eller (b) er opfyldt $\implies x^*$ er et sadelpunkt.

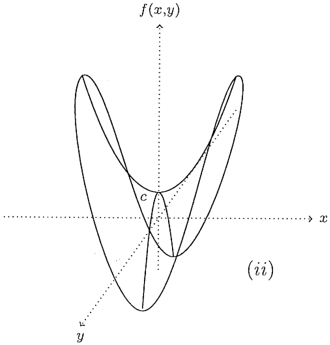
Eksempel

1. Betragt funktionen $f(x, y) = c + x^2 + y^2$, hvor $c > 0$ og $x, y \in \mathbb{R}$. I punktet $(0, 0)$ har vi
$$\operatorname{grad} f(0, 0) = [0, 0]^T$$
og
$$\operatorname{Hess} f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \succ 0,$$
hvor symbolet "$\succ 0$" betegner positiv definithed. Funktionen f har derfor et lokalt minimum i $(0, 0)$.

2. Betragt funktionen $f(x, y) = c + x^2 - y^2$, hvor $c > 0$ og $x, y \in \mathbb{R}$. I punktet $(0, 0)$ har vi
$$\operatorname{grad} f(0, 0) = [0, 0]^T$$
og
$$\operatorname{Hess} f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$
Punktet $(0, 0)$ er et sadelpunkt. I x-retningen viser grafen for f positiv krumning; i y-retningen viser den negativ krumning.

3.2 Lokale Ekstremumspunkter





3.2 Lokale Ekstremumspunkter

Eksempel

Betragt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y, z) = x^3 + 3xy + 3xz + y^3 + 3yz + z^3.$$

Tjek at $(0, 0, 0)^T$ og $(-2, -2, -2)^T$ er kritiske punkter. Hesse-matricen er

$$\mathrm{Hess}\, f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 3 & 3 \\ 3 & 6y & 3 \\ 3 & 3 & 6z \end{bmatrix}.$$

I $(x, y, z) = (-2, -2, -2)$ er de ledende underdeterminanter

$$-12, \quad \det \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 3 & -12 \end{bmatrix} = 135, \quad \det \mathrm{Hess}\, f(-2, -2, -2) = -1350.$$

Derfor er $\mathrm{Hess}\, f(-2, -2, -2)$ negativt definit og $(x, y, z) = (-2, -2, -2)$ er et lokalt maksimumspunkt.

3.2 Lokale Ekstremumspunkter

Modeksempel

Betragt funktionen $f(x, y) = x^2 + y^4$. I punktet $(0, 0)$ har vi

$$\operatorname{grad} f(0, 0) = [0, 0]^T$$

og

$$\operatorname{Hess} f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Funktionen har alligevel et lokalt minimum i $(0, 0)$.

Hvis Hesse-matricen er semi-definit i et kritisk punkt, så kan vi ikke konkludere noget om punktets kvalitet.

3.2 Lokale Ekstremumspunkter

Teorem (3.2.2, Nødvendige Lokale Anden-Ordens Betingelser)

Antag at $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ er defineret på en mængde S i $\mathbb{R}^n$ og at x^* er et indre kritisk punkt. Antag derudover at f er C^2 i en åben kugle med centrum x^*. Der gælder, at

(a) x^* er et lokalt minimumspunkt $\implies \mathrm{Hess}\, f(x^*)$ positivt semidefinit.

(b) x^* er et lokalt maksimumspunkt $\implies \mathrm{Hess}\, f(x^*)$ negativt semidefinit.