Mathematics for Economists
Kapitel 2 – Analyse af flere variable

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 2

- Indsættelser: Grænseværdier, kontinuitet, optimering af funktioner af en variabel, middelværdisætningen, Taylor formlen for funktioner af en variabel
- Partielle afledede, gradienter (2.1)
- Differentiabilitet (2.9)
- **Taylor formlen for funktioner af flere variable (2.6)**
- Implicit givne funktioner og inverse funktioner (2.7)
- Konvekse mængder (2.2)
- Konkave og konvekse funktioner (2.3/2.4)
- Kvasikonkave og -konvekse funktioner (2.5)

2.6 Taylors formel

2.6 Taylors formel

Teorem (2.6.1, Taylors formel)

Hvis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er $n+1$ gange differentiabel i et interval som indeholder a og x, så gælder

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

for et tal c mellem a og x.

2.6 Taylors formel

Definition

Lad $X \subset \mathbb{R}^n$ være en åben mængde, $f : X \to \mathbb{R}$ to gange kontinuert differentiabel. **Hesse**-matricen i $x \in X$ er givet ved

$$\mathrm{Hess}\, f(x) = (f''_{ij}(x))_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Der gælder $f''_{ij}(x) = f''_{ji}(x)$, og derfor er Hesse matricen symmetrisk og giver anledning til en symmetrisk bilinearform.
I tilfældet $n = 2$ er Hesse matricen givet ved

$$\mathrm{Hess}\, f(x) = \begin{bmatrix} f''_{11}(x) & f''_{12}(x) \\ f''_{12}(x) & f''_{22}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Teorem (2.6.3, Taylors formel for funktioner af n variable)

Antag at f er C^2 på en åben mængde som indeholder linjestykket $[x_0, x_0 + v]$. Så gælder

$$\begin{aligned} f(x_0 + v) &= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0) v_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}''(x_0 + cv) v_i v_j, \\ &= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), v \rangle + \frac{1}{2} v' \,\mathrm{Hess}\, f(x_0 + cv)\, v, \end{aligned}$$

for $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)'$ og et tal $c \in (0, 1)$.