$$\dot{x} = g(t, x, u)$$

$$\frac{dx}{dt} = g$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \cong g \implies \Delta x \cong g \Delta t$$

$$H \Delta t = f \Delta t + p g \Delta t$$
$$\cong f \Delta t + p \Delta x$$

(x^*, u^*) optimalt par.

Nødv. (Maksimumsprincippet)

(x^*, u^*) optimalt par

$$\implies \left.\begin{array}{l} u^* \text{ maks. } H \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \text{transversalitet} \end{array}\right\} (M)$$

Tilstrækkelig:

(M) og U konveks mængde og H konkav i (x, u)

$\implies (x^*, u^*)$ optimalt.

Eks:
$$\max_u \int_0^2 (u^2 - x)\, dt$$

$$\dot{x} = u, \qquad u \in [0,1]$$
$$x(0) = 0$$
$$x(2) \text{ fri} \quad \Rightarrow \quad p(2) = 0$$

Hamilton - funktion

$$H(t,x,u,p) = u^2 - x + pu$$

$$\dot{p} = -H'_x = 1 \quad \Rightarrow \quad p(t) = t + C$$
$$p(2) = 2 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -2$$

u^* skal maksimere H:

$H = u^2 - x + (t-2)u$ streng konveks

$\Rightarrow$ ikke noget indre punkt, og vi må betragt randpunktene

u skal maksimere

$$g(u) = u^2 + (t-2)u$$
$$g(0) = 0$$
$$g(1) = t-1$$

$t < 1$: $u = 0$ maksimumspunkt med $g(0) = 0$

$t > 1$: $u = 1$ er maksimumspunkt med $g(1) = t-1$

$$\Rightarrow \quad u^* = \begin{cases} 0, & t \in [0,1] \\ 1, & t \in (1,2] \end{cases}$$

Tilstandsfunktion:

$$\dot{x} = \begin{cases} 0, & t \in [0,1] \\ 1, & t \in (1,2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x^* = \begin{cases} 0, & t \in [0,1] \\ t + C, & t \in (1,2] \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$\lim_{t \uparrow 1} x^*(t) = 0$$

$$\lim_{t \downarrow 1} x^*(t) = \lim_{t \downarrow 1} (t + C) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

Maksimerede Hamilton funktion:

$$\hat{H}(t, x, p) = \max_{u \in [0,1]} \left(u^2 - x + (t-2)u \right)$$

$$= \begin{cases} -x & , \; t \in [0,1] \\ -x + t - 1 & , \; t \in (1,2] \end{cases}$$

lineær i x $\Rightarrow$ konkav i x

$\underset{\text{Arrow}}{\Rightarrow}$ (x^*, u^*) er optimalt.

$\blacksquare$