$u : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{U}$ kontrolregionen

$$\lim_{t \uparrow t'} u(t) = u(t') = 1$$

kontinuert fra venstre
continue à gauche (cag)

$$\underbrace{\lim_{t \downarrow t'} u(t)}_{0} \neq \underbrace{u(t')}_{1}$$

grænseværdi fra højre
limit à droit (lad)

cag-lad

$$\dot{x} = g(t, x, u)$$

Eks: $\max_u \int_0^1 x \, dt$

$$\dot{x} = x + u, \quad u \in [-1, 1]$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) \text{ fri}$$

x så stor som muligt
$\Rightarrow$ u så stor som muligt
$\Rightarrow$ $u = 1$?

Tjek Hamilton-funktionen

$$H(t,x,u,p) = x + px + pu$$

$$\dot{p} = -H'_x = -1-p$$

$$p(1) = 0$$

$$\dot{p} + p = -1$$

$$\underbrace{\dot{p}e^t + pe^t}_{\frac{d}{dt}(pe^t)} = -e^t$$

$$pe^t = -e^t + C$$

$$\Rightarrow p(t) = Ce^{-t} - 1$$

$$p(1) = Ce^{-1} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow C = e$$

$$\Rightarrow p(t) = e^{1-t} - 1 > 0, \quad t \in [0,1)$$

For at maksimere

$$H = x + px + pu$$

skal u være lig med 1.

$$\dot{x} = x + 1$$

$$\dot{x} - x = 1$$

$$\dot{x}e^{-t} - xe^{-t} = e^{-t}$$

$$xe^{-t} = -e^{-t} + B$$

$$\Rightarrow x(t) = -1 + Be^{t}$$

$$x(0) = -1 + B = 0 \Rightarrow B = 1$$

$$x^*(t) = -1 + e^{t}$$

Eks :

$$\max_{u} \int_0^1 (2x - x^2)\, dt$$

$$\dot{x} = u \,, \quad u \in [-1, 1]$$

$$x(0) = 0 \,, \quad x(1) = 0 \Rightarrow p(1) \text{ fri}$$

Hamilton-funktionen:

$$H(t, x, u, p) = 2x - x^2 + pu$$

konkav i (x, u)

For at maksimere H skal vi vælge

$$u(t) = \begin{cases} 1 \,, & p(t) > 0 \\ -1 \,, & p(t) < 0 \end{cases}$$

Ekstra får vi, at

$$\dot{x} = u \leq 1 \quad \text{på} \quad [0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{dx}{ds}\, ds \leq \int_0^t ds$$

$$x(t) - x(0) \leq t \qquad , \; t \in [0, 1]$$

$\Rightarrow \quad x(t) \le t \quad$ på $[0,1]$

$< t \quad$ på $[0,1)$

$$\dot{p} = -H'_x = 2x - 2 = 2(x-1) < 0$$

på $[0,1)$

$\Rightarrow$ p streng aftagende på $[0,1)$.

Antag, at der findes en løsning med $p(1) > 0$, p streng aftagende $\Rightarrow$ $p(t) > 0$ på $[0,1)$.

$\Rightarrow \quad u = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = u = 1$

$\Rightarrow \quad x(t) = t + x(0) = t$

$\Rightarrow \quad x(1) = 1 \quad$ men $\quad x(1) \stackrel{!}{=} 0 \quad$ ↯

Det følger, at $p(1) \le 0$. Antag, at $p(t) \le 0$ på $[0,1)$:

$\Rightarrow \quad u = -1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -1$

$\Rightarrow \quad x(t) = -t$

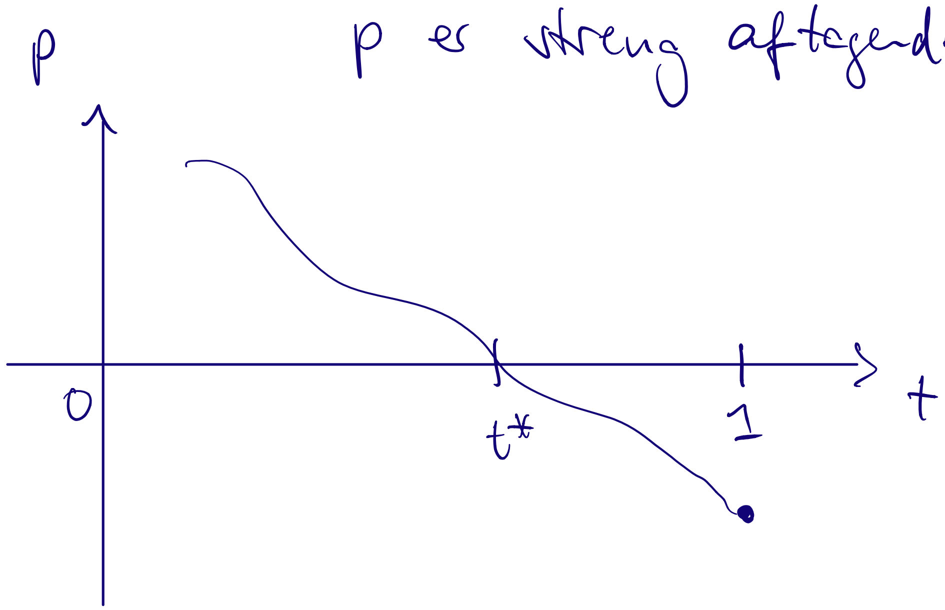
$\Rightarrow \quad x(1) = -1 \quad$ ↯

Det følger, at

$p(t) \geq 0$ for nogle $t \in [0, 1)$

$p(1) < 0$

p er streng aftagende



Fordi u er kontinuert fra venstre:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{for } t \in [0, t^*] \\ -1, & \text{for } t \in (t^*, 1] \end{cases}$$

Og, ved $\dot{x} = u$:

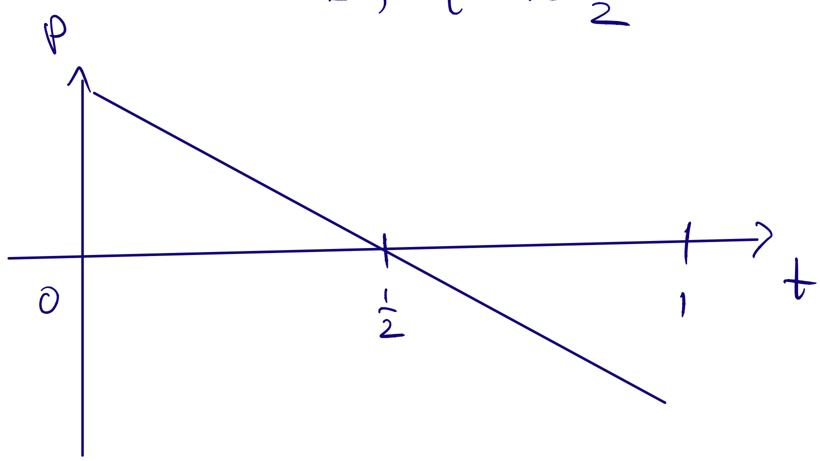
$$\dot{x} = \begin{cases} 1, & \text{for } t \in [0, t^*] \\ -1, & \text{for } t \in (t^*, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{cases} t, & t \in [0, t^*] \\ -t + C, & t \in (t^*, 1] \end{cases}$$

x må være kontinuert

$$x(t^*) = t^*$$
$$= -t^* + C$$
$$\Rightarrow \quad C = 2t^*$$

$$x(1) = 0 \; : \; x(1) = -1 + C$$
$$= -1 + 2t^* \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \quad t^* = \frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow \quad u^* = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1, & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$x^* = \begin{cases} t, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -t + 1, & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\dot{p} = 2x - 2 = 2t - 2$ på $[0, \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \quad p(t) = t^2 - 2t + C$$

Fordi: $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 + C = 0$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{3}{4}$$

På $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$:

$$\dot{p} = 2(1-t) - 2 = -2t$$

$$\Rightarrow \quad p(t) = -t^2 + C$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + C = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{4}$$