Mathematics for Economists
Kapitel 2 – Analyse af flere variable

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Disposition Kapitel 2

- Indsættelser: Grænseværdier, kontinuitet, optimering af funktioner af en variabel, middelværdisætningen, Taylor formlen for funktioner af en variabel
- Partielle afledede, gradienter (2.1)
- Differentiabilitet (2.9)
- Taylor formlen for funktioner af flere variable (2.6)
- Implicit givne funktioner og inverse funktioner (2.7)
- Konvekse mængder (2.2)
- Konkave og konvekse funktioner (2.3/2.4)
- **Kvasikonkave og -konvekse funktioner (2.5)**

2.5 Kvasikonkave og kvasikonvekse funktioner

2.5 Kvasikonkave og kvasikonvekse funktioner

Definition (s. 69, Kvasikonkave og kvasikonvekse funktioner)

En funktion f, defineret på en konveks mængde $S \subseteq \mathbb{R}^n$, er **kvasikonkav** hvis den **øvre niveaumængde** $P_a = \{x \in S : f(x) \geq a\}$ er konveks for hvert tal a.

Vi siger at f er **kvasikonveks** hvis $-f$ er kvasikonkav. Altså er f kvasikonveks hvis den **nedre niveaumængde** $P^a = \{x \in S : f(x) \leq a\}$ er konveks for hvert tal a.

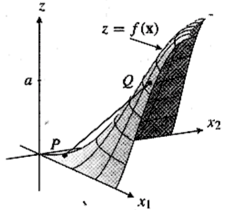

Figure 1 A quasiconcave function of two variables.

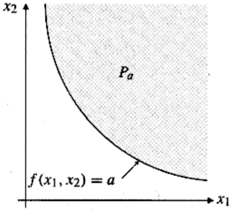

Figure 2 An upper level set for the function in Fig. 1.

2.5 Kvasikonkave og kvasikonvekse funktioner

- Hvis f er konkav, så er f kvasikonkav.
- Hvis f er konveks, så er f kvasikonveks.
- En sum af konkave funktioner er konkav. Derimod er en sum af kvasikonkave funktioner ikke nødvendigvis kvasikonkav.
- Kvasikonkave funktioner er vigtige i nytteteorien, hvor nyttefunktioner repræsenterer niveauer af tilfredsstillelse. Preferencer, repræsenteret ved niveaumængder, er vigtigere end de faktiske numeriske værdier af en givet nyttefunktion.

2.5 Kvasikonkave og kvasikonvekse funktioner

Teorem (2.5.1)

Lad f være en funktion af n variabler defineret på en konveks mængde S i $\mathbb{R}^n$. Der gælder at f er kvasikonkav hvis og kun hvis en af de følgende ækvivalente betingelser er opfyldt for alle x og y i S og alle λ i $[0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\} \tag{4}$$

$$f(x) \geq f(y) \Longrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(y) \tag{5}$$

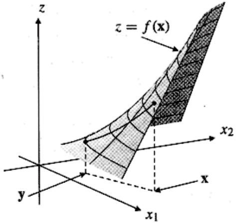

Figure 4 Illustration of (4) and (5).

2.5 Kvasikonkave og kvasikonvekse funktioner

Teorem (2.5.2)

Lad $f(x)$ være defineret på en konveks mængde S i $\mathbb{R}^n$ og lad F være en funktion af en variabel hvis definitionsmængde indeholder $f(S)$.

(a) Hvis $f(x)$ er kvasikonkav (kvasikonveks) og F er voksende, så er $F(f(x))$ kvasikonkav (kvasikonveks).

(b) Hvis $f(x)$ er kvasikonkav (kvasikonveks) og F er aftagende, så er $F(f(x))$ kvasikonveks (kvasikonkav).

Eksempel (Cobb-Douglas Produktionsfunktion)

Cobb-Douglas funktionen er givet ved

$$f(x_1, \ldots, x_n) = Ax_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n},\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0,$$

med A, $a_1, \ldots, a_n > 0$ og $a = a_1 + \ldots + a_n$. Vi tager logaritmen

$$\log f = \log A + a_1 \log x_1 + \ldots + a_n \log x_n.$$

1. $\log f$ er konkav (som sum af konkave funktioner), og derfor kvasikonkav. Fordi $\exp(\cdot)$ er voksende, er $f = \exp(\log f)$ kvasikonkav for alle a (Teorem 2.5.2).
2. Hvis $a < 1$, er f strengt konkav (Problem 2.3.9).
3. Hvis $a \leq 1$, viser Teorem 2.5.3 at f er konkav.
4. Hvis $a > 1$, er f ikke konkav. F.eks., langs $x = x_1 = \ldots = x_n$ har vi $f = x^a$, som er konveks for $a > 1$.

Eksempel (Generaliserede CES funktion)

Den generaliserede constant-elasticity-of-substitution (CES) funktion er givet ved

$$f(x_1, \dots, x_n) = A(\delta_1 x_1^{-\rho} + \delta_2 x_2^{-\rho} + \cdots + \delta_n x_n^{-\rho})^{-\mu/\rho},$$

med $A > 0, \mu > 0, \rho \neq 0$, $\delta_i, x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Følg den samme argumentation for

$$u(x) = \delta_1 x_1^{-\rho} + \delta_2 x_2^{-\rho} + \cdots + \delta_n x_n^{-\rho}$$

og $f(x) = Au(x)^{-\mu/\rho}$.

2.5 Kvasikonkave og kvasikonvekse funktioner

Eksempel (Generaliserede CES funktion)

- Hvis $\rho \leq -1$, $u(x)$ er en sum af konvekse funktioner, altså konveks. $u \mapsto Au^{-\mu/\rho}$ er voksende, altså er $f(x)$ kvasikonveks (Teorem 2.5.2(a)).
- Hvis $\rho \in [-1, 0)$, er $u(x)$ konkav, $u \mapsto Au^{-\mu/\rho}$ er voksende, altså er $f(x)$ kvasikonkav (Teorem 2.5.2(a)).
- Hvis $\rho > 0$, er $u(x)$ konveks, $u \mapsto Au^{-\mu/\rho}$ er aftagende, altså er $f(x)$ kvasikonkav (Teorem 2.5.2(b)).
- $f(x)$ er homogen af grad μ. Hvis $\rho \geq -1$ og $0 < \mu \leq 1$, så er $f(x)$ konkav (Teorem 2.5.3).
- Hvis $\rho > -1$ og $0 < \mu < 1$, så er $f(x)$ strengt konkav (Problem 2.5.11).

2.5 Kvasikonkave og kvasikonvekse funktioner

Definition (s. 74, Strikt Kvasikonkavitet/Kvasikonveksitet)

En funktion f defineret på en konveks mængde $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldes for **strengt kvasikonkav** hvis

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \min\{f(x), f(y)\}$$

for alle x og y i S med $x \neq y$ og alle λ in $(0,1)$. Funktionen f er **strengt kvasikonveks** hvis $-f$ er strengt kvasikonkav.

(a) En strengt konkav (konveks) funktion er strengt kvasikonkav (kvasikonveks).

(b) En strengt kvasikonkav funktion er kvasikonkav.

(c) En strengt kvasikonkav funktion kan kun have et globalt maximum.