Mathematics for Economists
Kapitel 11 Differensligninger

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Disposition Kapitel 11

- Differensligninger af første orden (11.1)
- Økonomiske Anvendelser (11.2)
- DL af anden orden (11.3)
- Anden-ordens DL med konstante koefficienter (11.4)
- **Systemer af DL (11.6)**

11.6 Systemer af differensligninger

11.6 Systemer af differensligninger

Betragt systemet

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix},$$

eller

$$x_{t+1} = Ax_t, \qquad x_t \in \mathbb{R}^2,\ A \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Antag at en løsning har formen

$$x_t = \lambda^t v, \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^2.$$

Så får vi fra DL'en, at

$$\lambda^{t+1} v = A\lambda^t v,$$

og efter division med λ^t står vi foran egenværdiproblemet igen.

Fremgangsmåden generaliseres til $x_t \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

11.6 Systemer af differensligninger

Lad $x(t), b(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ob betragt matrix ligningen

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + b(t), \\ &= A[Ax(t-1) + b(t-1)] + b(t) = \ldots, \\ &= A^{t+1}x_0 + \sum_{k=0}^{t} A^k b(t-k). \end{aligned}$$

Vi skriver summen baglæns for at få lign. 11.6 (5) i bogen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{t} A^k b(t-k) &= A^0 b(t) + A^1 b(t-1) + A^2 b(t-2) + \ldots + A^t b(0), \\ &= \sum_{k=1}^{t+1} A^{t+1-k} b(k-1). \end{aligned}$$

11.6 Systemer af differensligninger

Hvis det inhomogene led er konstant, $b(t) \equiv b$, så gælder

$$\sum_{k=1}^{t} A^{t-k} b(k-1) = \sum_{k=1}^{t} A^{t-k} b = (A^0 + A^1 + A^2 + \ldots + A^{t-1})b.$$

Lige som i det skalare tilfælde kan vi definere den **geometriske række for matricer**

$$\begin{aligned} S_{t-1} &= A^0 + A^1 + A^2 + \ldots + A^{t-1}, \\ AS_{t-1} &= \phantom{A^0 + {}} A^1 + A^2 + A^3 + \ldots + A^t. \end{aligned}$$

Derved,

$$(I - A)S_{t-1} = I - A^t,$$

eller, hvis $(I - A)^{-1}$ findes,

$$S_{t-1} = (I - A)^{-1}(I - A^t).$$

11.6 Systemer af differensligninger

Hvis A er diagonaliserbar med egenværdier $\neq 1$, så gælder $A = P\Lambda P^{-1}$, og

$$I - A = PIP^{-1} - P\Lambda P^{-1} = P(I - \Lambda)P^{-1}$$

har fuld rang, altså findes $(I - A)^{-1}$. Hvis egenværdierne er derudover *mindre* end 1 i absolutværdien, så gælder

$$\lim_{t\to\infty} A^t = \lim_{t\to\infty} (P\Lambda P^{-1})^t = P(\lim_{t\to\infty} \Lambda^t)P^{-1} = 0.$$

I dette tilfælde har vi

$$\lim_{t\to\infty} S_t = A^0 + A^1 + A^2 + \ldots = (I - A)^{-1},$$

og

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{t-k} b = (I - A)^{-1} b.$$

11.6 Systemer af differensligninger

Teorem (11.6.1)

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for systemet $x(t+1) = Ax(t) + b(t)$ at være globalt asymptotisk stabilt er at alle egenværdier for matricen A er streng mindre end 1 i absolutværdien.

Teorem (11.6.2)

Hvis alle egenværdier for $A = (a_{ij})_{n \times n}$ er streng mindre end 1 i absolutværdien, så er DL'en

$$x(t+1) = Ax(t) + b, \quad t = 0, 1, \ldots$$

globalt asymptotisk stabil, og hver løsning x konvergerer til den konstante vektor $(I - A)^{-1} b$.