2622 Matematik for Økonomer
Ramsey Modellen I

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus University

Ramsey modellen

- I den makroøkonomiske teori bruges Ramsey modellen til at beskrive forbrug og produktion i en forenklet økonomi (Ramsey 1928, Cass 1965, Koopmans 1965).
- Modellen behandles i lærebøger som, for eksempel, Barro og Sala-i-Martin (2003) og Romer (2006). Vores notation følger Barro og Sala-i-Martin (2003).
- Modellen består af en repræsentativ husholdning og et repræsentativt firma, som har hver deres egne optimeringsproblemer.
- Firmaet maksimerer profitten ift. kapitalapparatet:

$$\max_{K(t)} \left\{ \Pi(K, L) = F(K, L) - (r + \delta)K - \mathtt{w}\mathrm{L} \right\},$$

  - Output $Y(t) = F(K(t), L(t)) = AL(t)^{1-\alpha}K(t)^{\alpha} = A(\mathrm{L}(t)\mathrm{T}(t))^{1-\alpha}K(t)^{\alpha}$,
  - Arbejdsstyrke af husholdningen $\mathrm{L}(t) = e^{\alpha_L t}$, α_L vækstrate
  - Teknologisk fremskridt $\mathrm{T}(t) = e^{\alpha_T t}$, α_T vækstrate
  - Afkast af kapital $r(t)$
  - Afskrivnings-/Nedslidningsrate $\delta > 0$
  - Lønsats per arbejdsenhed $\mathtt{w}(t)$

Ramsey modellen

- Husholdningen maksimerer nutidsværdien af nyttefunktionalen over planlægningsintervallet $[t_0, \infty)$ ift. forbruget $C(t)$:

$$\max_{C(t)} \left\{ J(t, a, C) = \int_{t_0}^{\infty} u(\mathrm{c}(s))\mathrm{L}(s)e^{-\rho s} ds \right\},$$

  - Forbrug $C(t)$, per-capita forbrug $\mathrm{c}(t) = C(t)/\mathrm{L}(t)$
  - CES, CRRA nyttefunktion $u(x) = (x^{1-\theta})/(1-\theta)$, θ risikoaversions- eller substitutionselasticitetsparameter
  - Tidspræferencerate $\rho > 0$

- Budgetrestriktionen til dette optimeringsproblem er givet som en differentialligning. Vi studerer den i Kapitel 5.

Ramsey modellen

Bemærk at man skelner mellem per-capita enheder (nævner L) og enheder for effektiv arbejde (nævner L):

- Output per effektiv arbejde / per capita

$$y = \frac{Y}{L}, \qquad \mathtt{y} = \frac{Y}{\mathrm{L}}$$

- Forbrug per effektiv arbejde / per capita

$$c = \frac{C}{L}, \qquad \mathtt{c} = \frac{C}{\mathrm{L}}$$

- Kapitalapparat per effektiv arbejde / per capita

$$k = \frac{K}{L}, \qquad \mathtt{k} = \frac{K}{\mathrm{L}}$$

Ramsey modellen

I ligevægten er økonomien beskrevet ved et system af ikke-lineære ordinære differentialligninger for kapital per effektiv arbejde $k(t)$ og forbrug per effektiv arbejde $c(t)$, som funktioner af tiden.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\log k(t) &= Ak^{\alpha-1} - \frac{c}{k} - (\delta + \alpha_L + \alpha_T), \\
\frac{d}{dt}\log c(t) &= \frac{1}{\theta}\left(\alpha Ak^{\alpha-1} - (\delta + \rho + \theta\alpha_T)\right).
\end{aligned}
$$

Ramsey modellen

Vi definerer en **steady state** (langsigtede ligevægt) $(k(t), c(t)) \equiv (k^*, c^*)$, hvor hverken kapital eller forbrug ændrer sig med tiden:

$$\frac{d}{dt}\log k(t) = \frac{d}{dt}\log c(t) = 0.$$

Det er ofte besværligt, at systemet er ikke-lineært. For at analysere systemet **lineariseres** det i en omegn af steady state. Det betyder, at funktionen

$$f : R^2 \longrightarrow R^2,$$
$$\left[\begin{array}{c} \log k \\ \log c \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{c} \frac{d}{dt}\log k \\ \frac{d}{dt}\log c \end{array}\right],$$

bliver Taylor-udviklet i punktet $(\log k^*, \log c^*)$ ved første ordens afledede.

Ramsey modellen

De resulterende Taylor-formler af første orden danner et lineært system af ordinære differentialligninger:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\log k \\ \frac{d}{dt}\log c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho - \alpha_L - (1-\theta)\alpha_T & \delta + \alpha_L + \alpha_T - \frac{1}{\alpha}(\delta + \rho + \theta\alpha_T) \\ \frac{\alpha - 1}{\theta}(\delta + \rho + \theta\alpha_T) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log \frac{k}{k^*} \\ \log \frac{c}{c^*} \end{bmatrix}.$$

Vi uddyber dette eksempel i et opgavesæt.