2622 Matematik for Økonomer
Eric Hillebrand

Opgavesæt 12

Opgave 1
Section 9.2 Problem 2

Opgave 2
Section 9.2 Problem 5

Opgave 3 [Simple Linear Regulator Problem]
Betragt produktionen af et enkelt gode Y, der kun bruger kapital K i en forenklet Cobb-Douglas produktionsfunktion

$$Y(t) = AK(t), \quad A \in \mathbb{R}.$$

Kapitalapparatet $K(t)$ følger en lineær sædvanlig differentialligning, som er givet som difference af investering $I(t)$ minus afskrivninger $\Delta K(t)$, hvor $\delta \in (0, 1)$ er afskrivningssatsen:

$$\dot{K} = I - \delta K, \quad K(0) = K_0.$$

Vi skal maksimere profitfunktionen. Prisen $q \in \mathbb{R}$ for en enhed af Y er en givet parameter, investeringsomkostninger er $c_1 I^2$, og der er løbende omkostninger $c_2 K^2$ for at bruge kapitalen, hvor c_1 og c_2 er givne parameter. Vi kan skrive vores optimeringsproblem som

$$\begin{aligned} \max_I J &= \int_0^T (qAK(t) - c_1 I(t)^2 - c_2 K(t)^2)\, dt, \\ \text{således at} \quad \dot{K}(t) &= I(t) - \delta K(t), \\ K(0) &= K_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tilstandsvariablen er K og afhænger af kontrolfunktionen I. Bestem Hamilton-funktionen og de første-ordens betingelser ifølge maksimumsprincippet. Find det implicerede differentialligningssystem for p og K og løs det.

Tilstandsvariablen er K, som afhænger af kontrolfunktionen I. Hamilton-funktionen er

$$H(t, K, I, \lambda) = qAK(t) - c_1 I(t)^2 - c_2 K(t)^2 + p(t)(I(t) - \delta K(t)),$$

og første-ordens betingelserne er

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial I} &= -2c_1 I + p = 0, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial K} = -qA + 2c_2 K + p\delta, \\ p(T) &= 0. \end{aligned}$$

Det følger fra den første betingelse, at den optimale kontrolfunktion er

$$I(t) = \frac{p(t)}{2c_1},$$

og hvis vi sætter I ind i differentialligningen for K, så får vi et system af lineære sædvanlige differentialligninger

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qA \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & 2c_2 \\ \frac{1}{2c_1} & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ K \end{bmatrix} = b + A \begin{bmatrix} p \\ K \end{bmatrix}.$$

De lineær uafhængige løsninger på den homogene ligning er

$$\Phi(t) = [v_1 e^{\mu_1 t} \; v_2 e^{\mu_2 t}],$$

hvor

$$\mu_1 = \sqrt{\delta^2 + \frac{c_2}{c_1}}, \qquad \mu_2 = -\sqrt{\delta^2 + \frac{c_2}{c_1}},$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2c_2 \\ \delta - \mu_1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -2c_2 \\ \delta - \mu_2 \end{bmatrix},$$

er egenværdierne μ og egenvektorerne v af matricen A.

8-minutters foredrag

1. Standardproblemet (9.1, 9.2, 9.4)
2. Regularitetsbetingelser, diskontinuerte kontrolfunktioner, adjungerede funktion og skyggepriser (9.3, 9.6)