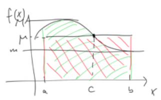

Lad $\quad m := \min\{ f(x),\ x \in [a,b] \}$

$\qquad M := \max\{ f(x),\ x \in [a,b] \}$

$\Rightarrow \quad m \leq f(x) \leq M \quad \text{for } x \in [a,b]$

$\overset{(vi)}{\Rightarrow} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

$\Rightarrow$ Derfor findes et $\mu \in [m, M]$ således, at

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a) = \int_a^b \mu\,dx$$

Fra mellemværdisætningen [EMEA Thm 7.10.1] følger, at der findes $c \in [a,b]$ således, at

$$f(c) = \mu. \qquad \square$$

For $h > 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right)$$

$$\overset{(iv)}{=} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Ved middelværdisætningen følger, at der findes $c_h \in [x, x+h]$, således, at

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h)\,h$$

Da f kontinuert og $\lim_{h \to 0} c_h = x$:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cancel{h} f(c_h)$$

$$= f(x) \qquad \square$$

For $x \in I$, lad

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$\Rightarrow F_0$ er stamfunktion af f, og

$$F_0(b) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F_0(a) = 0.$$

Hvis F er en vilkårlig stamfunktion af f, så findes $c \in \mathbb{R}$ således, at

$$F - F_0 = c$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \qquad \square$$

Lad $F : I \to \mathbb{R}$ være stamfunktion af f. Brug kædereglen for $F \circ g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x).$$

Ved fundamentalsætningen gælder

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = (F \circ g)(x) \Big|_a^b$$

$$= F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(g)\,dg \qquad \square$$

$$\frac{dg}{dx} = g'(x) \quad \Rightarrow \quad dg = g'(x)\,dx$$

$$\int_a^b Fg = FG\Big|_a^b - \int_a^b fG$$

$$(FG)' = fG + Fg$$

Fundamentalsætning:

$$FG\Big|_a^b = \int_a^b (FG)'\,dx$$

$$= \int_a^b fG\,dx + \int_a^b Fg\,dx$$

Bevis (matematisk induktion)

Basisskridt: $n = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\,dt \quad \text{(Fundamentalsætning)}$$

$$= f(x_0) + R_1(x)$$

Induktionsskridt: Antag, at påstanden gælder for n og vis, at den må så gælde for $n+1$.

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$$

$$= -\int_{x_0}^x \underbrace{f^{(n)}(t)}_{F} \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{(x-t)^n}{n!}}_{g}\,dt$$

$$= -f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} \underbrace{\frac{d}{dt} f^{(n)}(t)}_{f^{(n+1)}(t)}\,dt$$

$$FG\Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x fG$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x) \qquad \square$$

Almindelig skriver vi restledet i Lagrange-form. Ved middelværdisætningen findes et tal $c \in [x_0, x]$ således, at

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= f^{(n+1)}(c) \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

$$= f^{(n+1)}(c) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=x_0}^{t=x}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \square$$

Definér H som funktion af tre variable:

$$H(r, u, v) = \int_u^v f(x, r)\,dx$$

Så er $F(r) = H(r, u(r), v(r))$ og ved kædereglen får vi

$$F'(r) = \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dr} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{dv}{dr}$$

Fra sl. 16 følger, at

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \int_u^v \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\,dx$$

Ved fundamentalsætningen følger, at for hvert givet r, gælder

$$\int_u^v f(x)\,dx = G(v) - G(u)$$

for en stamfunktion G af f. Det følger, at

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_u^v f(x)\,dx = \frac{dG}{dv} = f(v)$$

og $\frac{\partial}{\partial u}\int_u^v f(x)\,dx = -\frac{dG}{du} = -f(u)$

$\Rightarrow$

$$F'(r) = \int_u^v \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\,dx - f(u,r)\,u'(r) + f(v,r)\,v'(r) \qquad \square$$