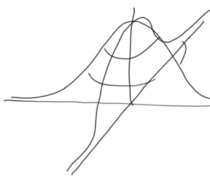
Eks: Vis at $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ er kvasikonkav



Øvre niveaumængder

$P_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid e^{-x^2-y^2}\ge a\}$

$a > 1$: $e^{-x^2-y^2} < 1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow P_a = \emptyset$ konveks

$a = 1$: $e^{-x^2-y^2} \ge 1 \iff (x,y) = (0,0)$

$\Rightarrow P_a = \{(0,0)\}$ konveks

$a \le 0$ $e^{-x^2-y^2} > 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$P_a = \mathbb{R}^2$ konveks

Interessant: $0 < a < 1$:

$e^{-x^2-y^2} \ge a$

$\iff -x^2-y^2 \ge \log a$

$x^2+y^2 \le -\log a$

$\sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{-\log a}$

$\iff$ P_a kreds med radius $\sqrt{-\log a}$ med centret i origoet.

Konveks. $\Rightarrow$ f kvasikonkav

---

f kvasikonkav $\iff f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \min\{f(x), f(y)\}$

"$\Rightarrow$": f kvasikonkav. Lad $x,y\in S$ og

$a = \min\{f(x), f(y)\}$

$\Rightarrow x,y \in P_a$

f kvasikonkav $\Rightarrow$ P_a konveks.

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in P_a$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge a$

"$\Leftarrow$": $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \min\{f(x), f(y)\}$

$a\in\mathbb{R}$ vilkårligt. Vi skal vise, at $P_a = \{x\in S : f(x) \ge a\}$ konveks.

$P_a = \emptyset$ konveks

$P_a = \{x\}$ $\Rightarrow$ P_a konveks

Lad $x,y \in P_a \Rightarrow f(x), f(y) \ge a$

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \min\{f(x), f(y)\} \ge a$

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in P_a$ konveks

$\Rightarrow$ f kvasikonkav □

(a)

$\underbrace{f(x) \text{ kvasikonkav}, F \text{ voksende}}_{A} \Rightarrow \underbrace{F\circ f(x) \text{ kvasikonkav}}_{B}$

Bevis ved modstrid: Antag $A \wedge \neg B$ ($F\circ f$ ikke kvasikonkav)

og vis, at det medfører $z \wedge \neg z$.

Fra $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \min\{f(x), f(y)\}$

følger, at: Der findes $u,v\in S$ således, at

$F[f(\lambda u + (1-\lambda)v)] < F(f(u))$

$F[f(\lambda u + (1-\lambda)v)] < F(f(v))$

F voksende $\Rightarrow f(\lambda u + (1-\lambda)v) < f(u)$

$f(\lambda u + (1-\lambda)v) < f(v)$

$\Rightarrow \underline{f(\lambda u + (1-\lambda)v) < \min\{f(u), f(v)\}}$

z = f kvasikonkav, $\neg z$ f ikke kvasikonkav

↯ □

Eks $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

$g(x,y) = -x^2-y^2$ konkav

$\Rightarrow$ kvasikonkav

$G(z) = e^z$ voksende

$\Rightarrow f(x,y) = G\circ g(x,y)$

$= e^{-x^2-y^2}$ kvasikonkav

Lad $x,y \in S$ være globale maksima med $x \ne y$ men $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) > f(x) = f(y)$

↯