**2622 Matematik for Økonomer**

Eric Hillebrand

**Opgavesæt 10**

**Opgave 1**
Section 5.4 Problem 6

**Opgave 2**
Section 5.6 Problem 1

**Opgave 3: Et økonomisk eksempel på en DL, hvor indikatorvariablen ikke er tiden**
Lad $U : x \mapsto U(x) \in \mathbb{R}$ være en mindst to-gange kontinuert differentiabel nyttefunktion. Elasticiteten for den første afledede $U'$ ift. gode $x$,

$$-\epsilon_x(U') = -\frac{dU'(x)}{U'(x)} \Big/ \frac{dx}{x} = -\frac{dU'(x)}{dx}\,\frac{x}{U'(x)} = -\frac{U''(x)x}{U'(x)}$$

hedder **Arrow-Pratt måltal** for relativ risikoaversion. Ved at kræve en konstant relativ risikoaversion (CRR), eller konstant intertemporal substitutionselasticitet (C(I)ES), opstiller man en DL af anden orden for $U$:

$$-\frac{U''(x)x}{U'(x)} \equiv \theta \iff U''(x) = -\frac{\theta}{x}\,U'(x),\ \theta > 0.$$

Betragt substitutionen $v(x) := U'(x)$. Så gælder

$$v'(x) = -\frac{\theta}{x}\,v(x)$$

Løs denne første-ordens DL for $v$ og integrér $v$ for at få $U$. Du skal skelne mellem tilfældene $\theta \neq 1$ og $\theta = 1$. Den resulterende klasse af funktioner er familien af CRR eller C(I)ES nyttefunktioner. Jo større $\theta$, desto større er den relative formindskelse i $U'(x)$ når $x$ vokser. Det betyder, at store forandringer i $x$ er mindre velkomne end med en mindre værdi af $\theta$.

**Opgave 4: The global carbon budget and the airborne fraction**
En almindelig antagelse indenfor klimaforskning er, at havet og planterne optager CO2 i atmosfæren lineært ved

$$S_{OCN}(t) = \frac{1}{\tau_{OCN}}C(t) = \beta_1 C(t),$$
$$S_{LND}(t) = \frac{1}{\tau_{LND}}C(t) = \beta_2 C(t),$$

hvor $S_{OCN,LND}$ står for optagelsen ($S$-sink, $OCN$-ocean, $LND$-land), og de positive tal $\tau_{OCN}$ og $\tau_{LND}$ beskriver den gennemsnitlige tid, det tager for havet og planterne, at optage en enhed $C(t)$ af atmosfærisk CO2-koncentration på tidspunkt $t$.
Fordi CO2 udledninger fra økonomisk aktivitet $E(t)$ optages enten af havet, planterne, eller atmosfæren, kan vi skrive, at den øjeblikkelige forandring i atmosfærisk CO2 er givet ved

$$\dot{C}(t) = E(t) - \left(\frac{1}{\tau_{OCN}} + \frac{1}{\tau_{LND}}\right)C(t) = E(t) - (\beta_1 + \beta_2)C(t),$$

en differentialligning der hedder “global carbon budget”.

1. Løs differentialligningen.
2. Vis at, hvis vi antager, at CO2 udledningerne er eksponentielle:

   $$E(t) = E_0 e^{\alpha t}, \ \alpha > 0,$$

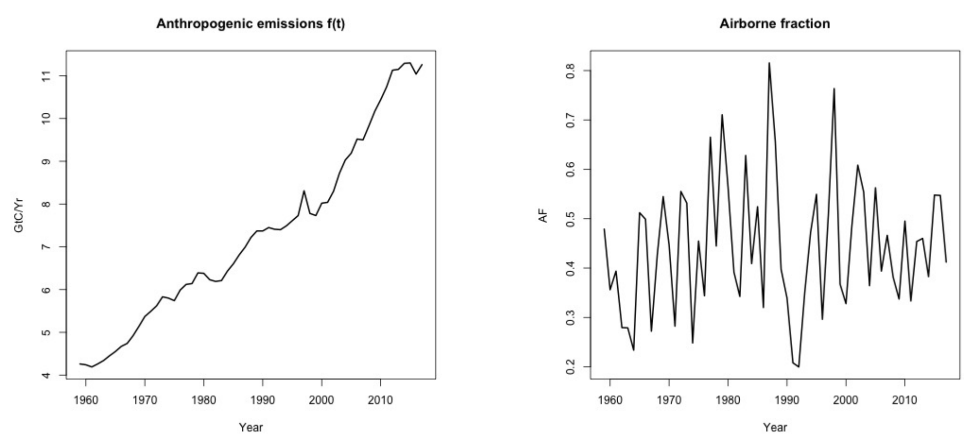
   så konvergerer kvotienten

   $$AF = \frac{\dot{C}(t)}{E(t)}$$

   mod et konstant tal. Kvotienten "AF" kaldes for "airborne fraction", andelen af CO2 udledningerne, der forbliver i atmosfæren.

Figure 1: Globale CO2 udledninger fra industriel aktivitet og landbrug; andelen af udledningerne, der forbliver i atmosfæren (airborne fraction), 1959–2017

(a) CO2 udledninger (b) Airborne Fraction




Gloor, Sarmiento, and Gruber, 2010, "What can be learned about carbon cycle climate feedbacks from the CO2 airborne fraction", *Atmospheric Chemistry and Physics*, 10:7739–7751.

Data: Le Quéré et al., 2018, "Global Carbon Budget 2018", *Earth System Science Data*, 10:2141-2194.

### 8-minutters foredrag

1. Lineære DL af første orden
2. Separable ligninger, substitution, kvalitativ teori