Mathematics for Economists
Kapitel 5 – Ramsey II

Eric Hillebrand

Institut for Økonomi
og
CREATES
Aarhus Universitet

Husholdningens optimeringsproblem

Husholdningens optimeringsproblem

Eksempel (Husholdningernes budgetrestriktionen i Ramsey-modellen)

Ramsey-modellen har følgende objekter:

$\mathsf{L}(t) = e^{\alpha_L t}$	arbejdsstyrke per repræsentativ husholdning
$\alpha_L > 0$	fertilitetsraten (populationsvækst)
$C(t)$	den repræsentative husholdnings forbrug
$\mathtt{c}(t) = \frac{C(t)}{\mathsf{L}(t)}$	per-capita forbrug
$u(x)$	CRRA, CES nyttefunktion
$\rho > 0$	tidspræferenceraten (diskonteringssats)
$A(t)$	summen af aktiver i den repræsentative husholdning
$\mathtt{a}(t) = \frac{A(t)}{\mathsf{L}(t)}$	per-capita aktiver
$r(t)$	aktivernes afkast
$\mathtt{w}(t)$	lønrate per arbejdsenhed

Husholdningens optimeringsproblem

Eksempel (Husholdningens optimeringsproblem)

Aktiverne kan være ejendom af kapital eller lån til producenter; både indtager afkastet $r(t)$. Negative værdier for a er tilladt, idet de repræsenterer gæld til producenterne. Den øjeblikkelige nyttefunktion er givet ved

$$u(x) = \frac{x^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}.$$

Nytten for den repræsentative husholdning er givet ved at integrere nytten for individerne gange antallet af individer gange diskonteringsfaktoren, der afspejler tidspræferencen. Antag at planlægningsperioden er $[t_0, t]$, så er objektfunktionen for den repræsentative husholdning givet ved

$$J(t, a, c) = \int_{t_0}^{t} u(c(s)) L(s) e^{-\rho s} ds.$$

Objektfunktionen maksimeres under en bibetingelse: Nutidsværdien af forbruget i planlægningsintervallet plus nutidsværdien af alle aktiver tilbage på tidspunkt t skal være lige med nutidsværdien af indkomsten plus aktiverne, som husholdningen ejer i begyndelsen t_0 af intervallet.

Husholdningens optimeringsproblem

Eksempel (Husholdningens budgetrestriktion)

Den øjeblikkelige forandring i den repræsentative husholdnings aktiver $A(t)$ er givet ved afkastet for aktiverne, $r(t)A(t)$, plus løn per husholdning, $\mathtt{w}(t)\mathrm{L}(t)$, minus husholdningens forbrug $C(t)$:

$$\dot{A}(t) = r(t)A(t) + \mathtt{w}(t)\mathrm{L}(t) - C(t)$$

eller i per-capita enheder

$$\dot{\mathrm{a}}(t) = r(t)\mathrm{a}(t) + \mathtt{w}(t) - \mathrm{c}(t) - \alpha_L \mathrm{a}(t).$$

(Vis at $\dot{\mathrm{a}}(t) = \frac{\dot{A}(t)}{\mathrm{L}(t)} - \alpha_L \mathrm{a}(t)$.) Løsningen for $\mathrm{a}(t)$ fås som

$$\mathrm{a}(t) = \mathrm{a}(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}(r(s)-\alpha_L)ds} + e^{\int_{t_0}^{t}(r(s)-\alpha_L)ds}\int_{t_0}^{t}\left(\mathtt{w}(s) - \mathrm{c}(s)\right)e^{-\int_{t_0}^{s}(r(\tau)-\alpha_L)d\tau}\,ds,$$

eller

$$\mathrm{a}(t)e^{-\int_{t_0}^{t}(r(s)-\alpha_L)ds} + \int_{t_0}^{t}\mathrm{c}(s)e^{-\int_{t_0}^{s}(r(\tau)-\alpha_L)d\tau}\,ds = \mathrm{a}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\mathtt{w}(s)e^{-\int_{t_0}^{s}(r(\tau)-\alpha_L)d\tau}\,ds.$$

Den sidste ligning afspejler bibetingelsen beskrevet på den foregående slide.