Lý thuyết đồ thị

I/ Một số khái niệm

Một đồ thị (Graph) G = (V, E) là một bộ gồm 2 tập hợp

{ - Tập hợp các đỉnh (Vertises): V ≠ ∅
{ Tập hợp các cạnh (Edges): E

Hai cạnh được gọi là song song nhau nếu chúng tương ứng với 1 cặp đỉnh

Hai đỉnh được gọi là kề nhau (liên kết nhau) nếu G không có cạnh song song và cũng không có vòng. Ngược lại, ta gọi là đa đồ thị (multi-graph)

Một đồ thị G được gọi là đầy đủ (complete graph) nếu như mọi cặp đỉnh của G đều kề nhau, nghĩa là mọi đỉnh đều có cạnh nối trực tiếp đến tất cả các đỉnh còn lại của G

Một đồ thị G được gọi là hữu hạn nếu có số đỉnh hữu hạn và số cạnh hữu hạn.

Quyết Tâm

Bậc dưu

Bậc của một đỉnh

$$\sum_{u \in V} deg(u) = 2|E|$$

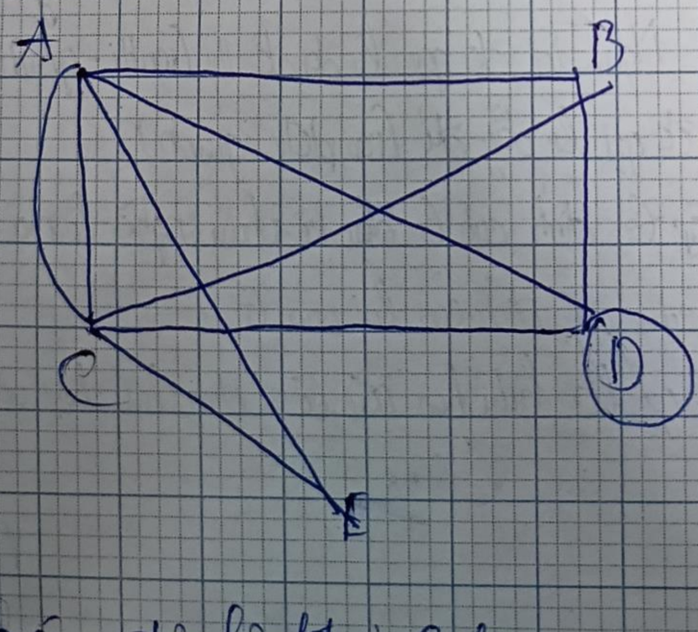
với $|E|$ = số cạnh của G

Trong đồ thị G vô hướng ta luôn có tổng số bậc của các đỉnh bậc lẻ luôn là số chẵn

Trong một đồ thị vô hướng, luôn có một số chẵn đỉnh bậc lẻ

Trong đồ thị K_n, ta luôn có số cạnh là $\frac{n(n-1)}{2}$

Vd mẫu:



Ta có ma trận liên kết của G là

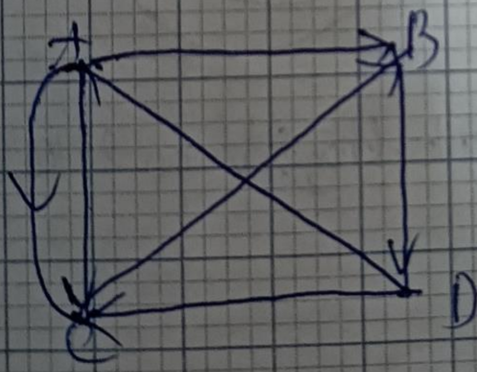
$$M = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ C & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ D & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ E & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$deg(A) = 5$
$deg(B) = 3$
$deg(C) = 5$
$deg(D) = 5$
$deg(E) = 2$

$$\sum_{u \in V} deg(u) = 20 = 2|E|$$

$|E| = 10$ cạnh

VD2: Cho G là đồ thị có hướng



$$M = \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & 1 & 2 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 0 \\ D & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} deg_{out}(A) = 3 \\ deg_{out}(B) = 1 \\ deg_{out}(C) = 1 \end{cases}$$
$deg_{out}(D) = 3$

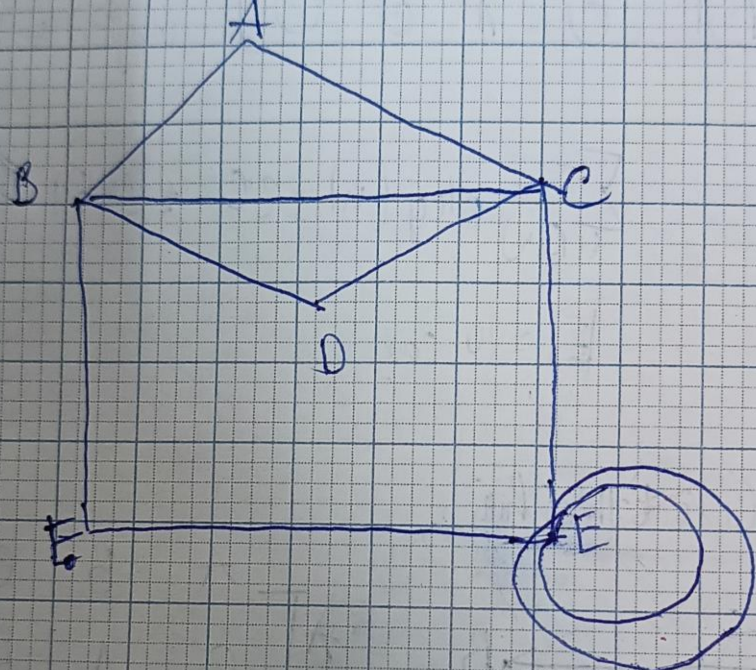
$deg_{in} A = 1$
$deg_{in} B = 2$
$deg_{in} C = 3$
$deg_{in} D = 2$

$\sum deg_{out} = 8$ $\qquad$ $\sum deg_{in} = 8$

$|E| = 8$ cạnh

Đường đi và chu trình

Cho G là đồ thị vô hướng có biểu đồ sau



Hỏi G có chu trình đường đi Euler không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm 1 chu trình Euler cho G

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	0	0
B	1	0	1	1	0	1
C	1	1	0	1	1	0
D	0	1	1	0	0	0
E	0	0	1	0	4	1
F	0	1	0	0	1	0

Suy ra deg(A) = 2 ; deg(B) = 4 ; deg(C) = 4 ; deg(D) = 2 ; deg(E) = 6
deg(F) = 2

Do tất cả các đỉnh của G đều có bậc chẵn, nên G có chu trình Euler

Gọi chu trình Euler cần tìm G là E_G

Chọn 1 đỉnh làm đỉnh xuất phát. Ví dụ chọn đỉnh A, ta đưa A vào C_E

Suy ra $C_E = A$

Dựa vào chu trình liên kết của G, ta tìm được chu trình Euler là

$C_E = ABCA$

Ta xây dựng chu trình $C_E = DCAB$

Ta có $C_E =$ BCABDCEEFB

$C_E =$ BCABDCEEEFB

Đường đi ~~Halmi~~ Hamilton

Một đường đi Hamilton của đồ thị G là một con đường đi qua tất cả các đỉnh của G, và mỗi đỉnh chỉ đi qua đúng 1 lần

Một chu trình Hamilton của G là một đường đi Hamilton khép kín, có đỉnh nối trực tiếp từ đỉnh kết thúc, đến đỉnh bắt đầu

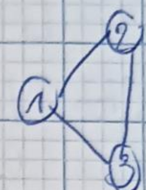
Các khái niệm

Cạnh bội (song song)

là hai cạnh phân biệt cùng tương ứng với một cặp đỉnh

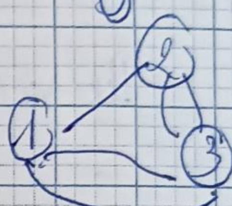
Đơn đồ thị

Đơn đồ thị không có vòng và cạnh song song



Đa đồ thị ~~không phải~~

Các đồ thị không phải đơn đồ thị



Đồ thị đầy đủ: đồ thị mà mọi cặp đỉnh đều kề nhau

K_n: đơn đồ thị đầy đủ

Đồ thị con:

Đồ thị $G' = (V', E')$ $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

Đồ thị hữu hạn

E, V hữu hạn

Bậc của đỉnh

Số cạnh liên thuộc với nó

Ký hiệu $deg(v)$ hay $d(v)$

Mỗi vòng được kể hai lần

Cạnh treo có đầu mút là một đỉnh treo

Đỉnh cô lập: $deg(v) = 0$

Đồ thị rỗng $deg(v) = 0 \ \forall v \in V$

Định lý

Tổng số bậc bằng 2 lần số cạnh

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} deg(v)$$

Hệ quả:

Trong mọi đồ thị $G(V,E)$:

Số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn

Tổng bậc của đỉnh bậc lẻ là một số chẵn

Nếu số đỉnh nhiều hơn 1, thì tồn tại ít nhất hai đỉnh cùng bậc

Trong đơn đồ thị: Nếu số đỉnh nhiều hơn 2 và có đúng 2 đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không đồng thời có bậc bằng 0 hoặc n-1

Chứng minh và giải toán bằng pp đồ thị

Mỗi đỉnh là một đtg

Q.hệ giữa hai đtg là cạnh

Đề 2022-2023

Câu 1: $f^{-1}(0) = \{1110, 0111, 0000, 1000, 1101\}$

a) Hãy tìm dạng nối rời chính tắc của hàm f

xy \ zt	00	01	11	10
00	X	.	.	X
01	.	.	X	X
11	.	X	.	.
10	X	.	.	.

Dạng chính tắc nối rời của hàm f

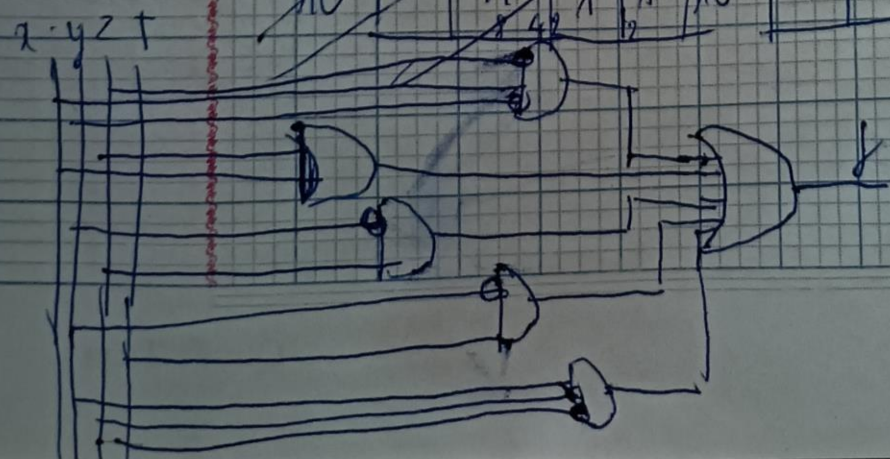
$f(x,y,z,t) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}\bar{y}zt + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}t$

$+ xy\bar{z}\bar{t} + xyzt + xyz\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}zt + x\bar{y}z\bar{t}$

b) Hãy tìm công thức đa thức tối tiểu của hàm f

	00	01	11	10
00		1	1	1
01	1	1		
11	1		1	1
10		1	1	1

zt \ xy	00	01	11	10
00	x	1	1	x
01	1	1	x	x
11	1	x	1	1
10	1	x	1	1



zt \ xy	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1		1
11	1		1	1
10	1		1	1

$T_1 = xz$

$T_2 = \bar{y}z$

$T_3 = \bar{y}t$

$T_4 = y\bar{z}\bar{t}$

$T_5 = \bar{x}\bar{z}t$

$T_6 = \bar{x}y\bar{z}$

$T_7 = xy\bar{t}$

$T_1 \to T_2 \to T_3$ — T_6 — T_4, T_7

T_3 — T_4 — T_5, T_6

$Kar(f) = T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_6 \vee T_4$ (1)

$T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_6 \vee T_7$ (2)

$T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_4 \vee T_5$ (3)

$\cancel{T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_4 \vee T_6}$

(1), (2), (3) phủ tối thiểu (nhỏ nhất)

Các chuẩn đa thức tối tiểu của f

(1) ⇔ $f = xz \vee \bar{y}z \vee \bar{y}t \vee \bar{x}y\bar{z} \vee y\bar{z}\bar{t}$

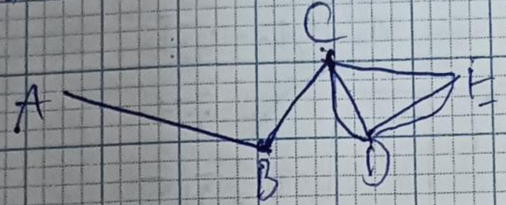
(2) ⇔ $f = xz \vee \bar{y}z \vee \bar{y}t \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xy\bar{t}$

(3) ⇔ $f = xz \vee \bar{y}z \vee \bar{y}t \vee y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{z}t$

Câu 2:

a) Đồ thị vô hướng liên thông có ~~05~~ 2 đỉnh bậc lẻ

b)



Câu 3:

~~Đỉnh A B C D E F G H I J Cạnh~~

Đỉnh	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Cạnh
H						H,10	H,2	~~H~~	H,7	H,15	
G			G,5		G,2	H,10	~~G~~	–	H,7	H,15	HG
C	C,17	C,7	–		C,6	H,10	–	–	H,7	H,15	GC
E	C,17	C,7	–	E,10	–	H,10	–	–	H,7	H,15	CE
B	C,17	–	–	E,10	–	H,10	–	–	H,7	H,15	CB
I	C,17	–	–	E,10	–	H,10	–	–	–	I,11	HI
D	C,17	–	–	–	–	H,10	–	–	–	I,11	ED
F	D,17	–	–	–	–	–	–	–	–	I,11	HF
J	D,17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	IJ
A	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	CA

Đường đi ngắn nhất từ H đến A:

Cạnh	Trọng số	Cạnh	Trọng số
EG	20	EG	20
HI	15	HI	15
~~FH~~	~~10~~	AC	12
AB	10	FH	10
AC	12	AB	10
FH	10	FI	9
AB	10	AF	8
~~BD~~	~~8~~	HI	7
EF	6	EF	6
BD	5	BD	5

Đề 2020 - 2021

Câu 1:

$f^{-1}(0) = \{1000, 0111, 0000, 1111, 1010, 1101\}$

a)

$zt \backslash xy$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	0	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	0

Dạng chính tắc nối rời của hàm f

$\cancel{f(x,y,z,t) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t}}$

$\cancel{xy\bar{z}t \vee \bar{x}yzt \vee xyzt} \vee x\bar{y}z\bar{t}$

$f(x,y,z,t) = \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t$

$\vee \bar{x}y\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt$

$\vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}yz\bar{t}$

$\vee xyz\bar{t}$

b)

$zt \backslash xy$	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1		1
11	1			1
10	1	1	1	

$T_1 = y\bar{t}$

$T_2 = \bar{y}t$

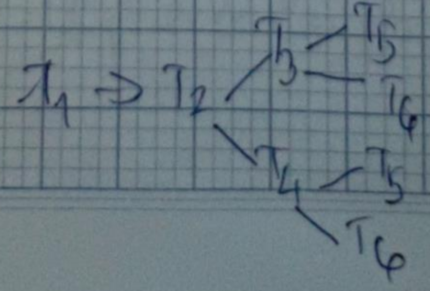
$T_3 = \bar{x}z\bar{t}$

$T_4 = \bar{x}\bar{y}z$

$T_5 = x\bar{z}t$

$T_6 = \bar{x}y\bar{z}$

Sơ đồ phủ:



$\Rightarrow \text{Kar}\, f = T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_5$

$= T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_6$

$= T_1 \vee T_2 \vee T_4 \vee T_5$

$= T_1 \vee T_2 \vee T_4 \vee T_6$

Quyết Tâm

b) Công thức đa thức tối tiểu của hàm f:

$f(x,y,z,t) = y\bar{t} + \bar{y}t + \bar{x}z\bar{t} + \bar{x}\bar{z}t$

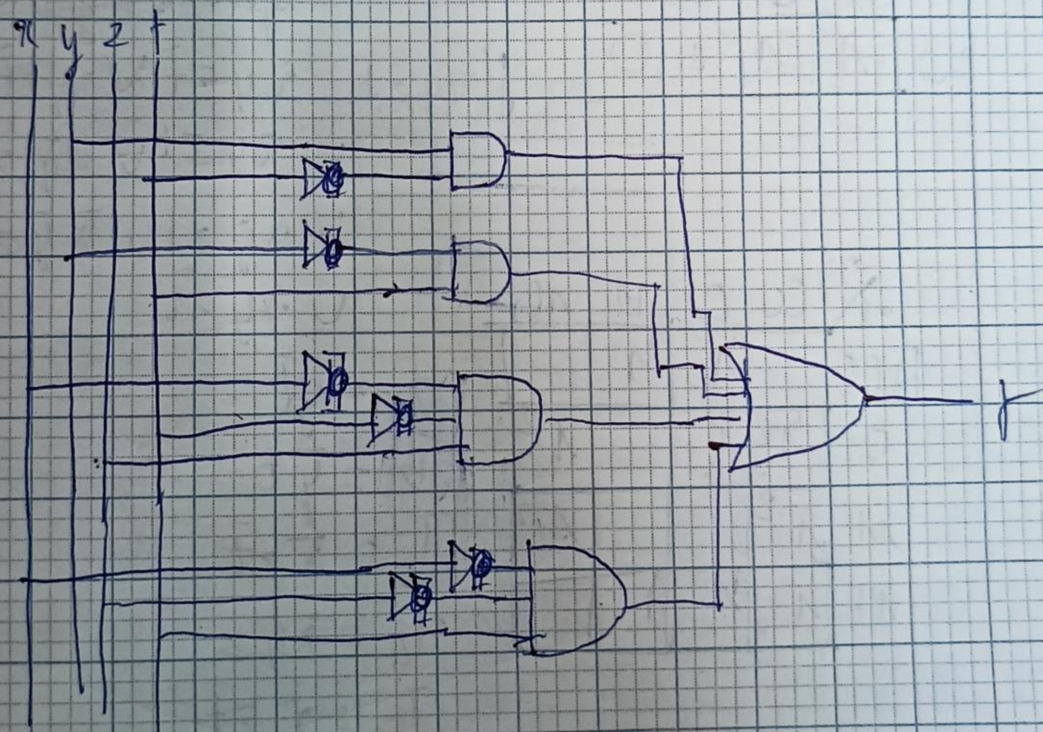
$= y\bar{t} \vee \bar{y}t \vee \bar{x}z\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}$

$= y\bar{t} \vee \bar{y}t \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z}t$

$= y\bar{t} \vee \bar{y}t \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$

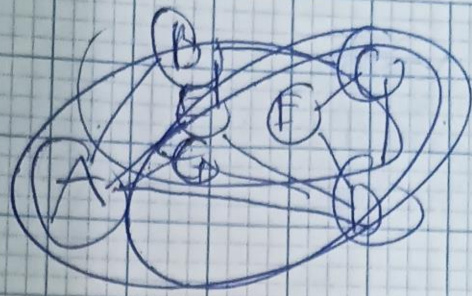
c)

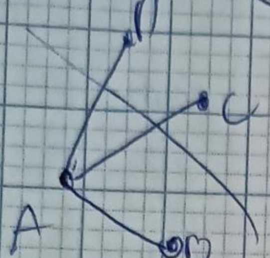
Chọn $f(x,y,z,t) = y\bar{t} \vee \bar{y}t + \bar{x}z\bar{t} \vee \bar{x}\bar{z}t$

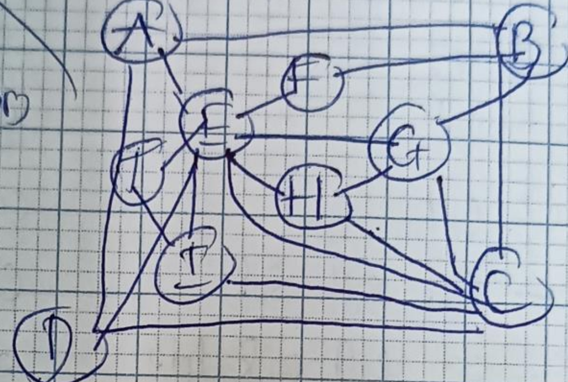


Câu 2:

Giả sử $|V| = 10$, $\deg v = 3 \; \forall v \in V$, $|E| = 15$, G có đồ thị Hamilton không



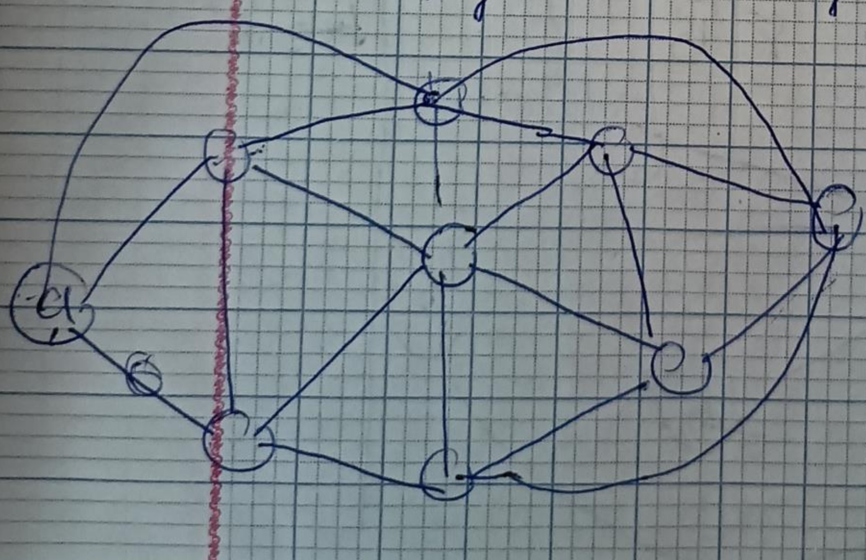




Câu 3:

a) Đồ thị có đg đi Euler

aefgih dbceghe bafedif



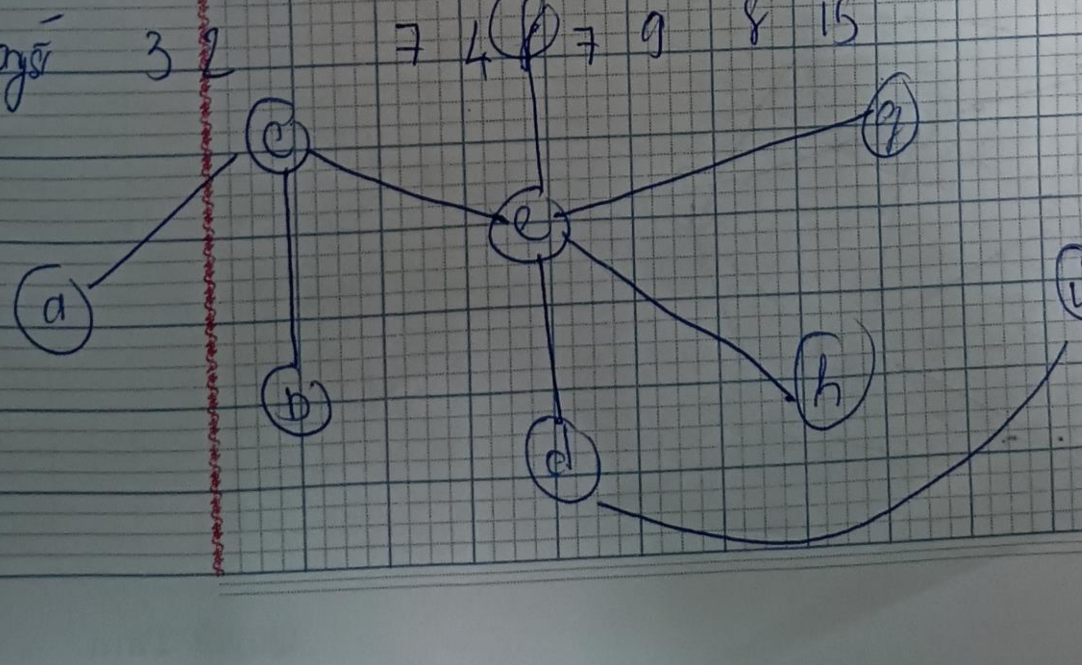
b)

~~Q_1~~: a c f g i h e d b a

P_1: a c f g i h e d b

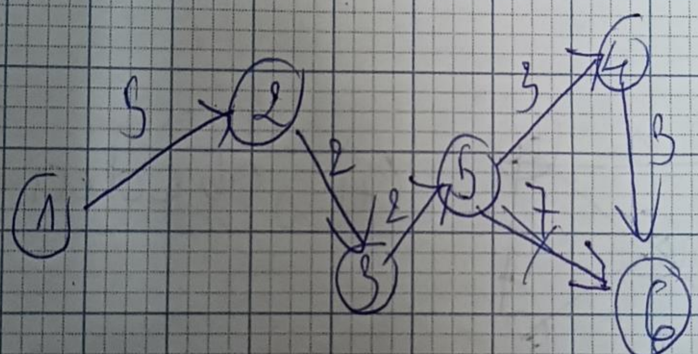
c)

Đỉnh / ~~cạnh~~	a	b	c	d	e	f	g	h	i	cạnh
c	c,3	c,2	~~x~~		c,4	c,7				
b	c,3	–	–		c,4	c,7				cb
a	–	–	–	a,4	c,4	c,7				ca
e	–	–	–	e,7	–	c,7	e,9	e,8		ce
d	–	–	–	–	–	c,7	e,9	e,8	d,13	ed
f	–	–	–	–	–	–	e,9	e,8	d,13	cf
h	–	–	–	–	–	–	e,9	–	d,15	eh
g	–	–	–	–	–	–	–	–	d,5	eg
i	–	–	–	–	–	–	–	–	–	di
Trọng số	3	2		7	4	7	9	8	15	



~~Thêm~~

Ba đỉnh	1	2	3	4	5	6	cạnh
	1,0	1,+∞	1,+∞	1,+∞	1,+∞	1,+∞	
1	1,0	1,5	1,8	1,+∞	1,+∞	1,+∞	12
2	–	–	2,7	2,15	2,12	1,+∞	12
3	–	–	–	2,15	3,9	1,+∞	23
5	–	–	–	5,12	–	5,16	35
4	–	–	–	–	–	4,16	5,4
6	–	–	–	–	–	–	~~56~~ 46

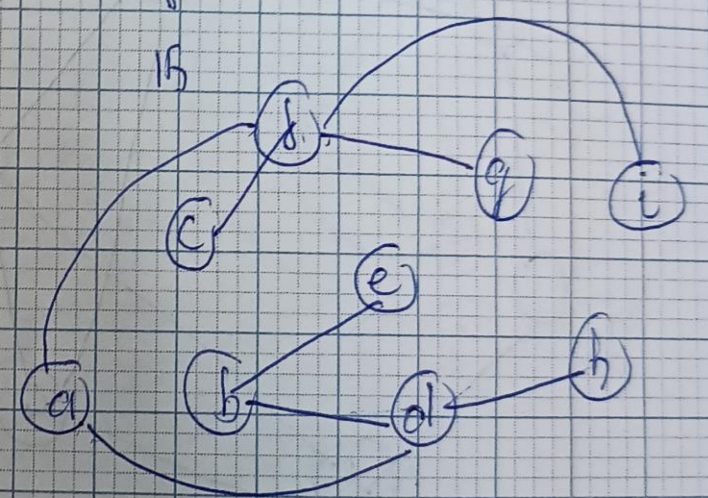


đỉnh	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	cạnh
	A,0	(A,+∞)	–								
A	–		A,9	A,7	A,13	A,20					
D	–		A,5	–	~~D,11~~	A,20		D,15			AD
C	–		–	–	D,11	A,20		D,15			AC
E	–		–	–	–	A,20		D,15	E,14	E,15	DE
I	–	I,19	–	–	–	A,20		D,15	–	E,15	EI
H	–	I,19	–	–	–	A,20	–	–		E,15	DH
K	–	I,19	–	–	–	A,20	–	–		~~E~~,15	ER

Đường đi ngắn nhất từ c đến

a là:	ca	có trọng số là	3
b là	cb	có trọng số là	2
d là:	ced	có trọng số là	7
e là	ce	có trọng số là	4
f là	cf	có trọng số là	7
g là	ceg		9
h là	cehg		8
i	cedi		15

d)



Cạnh	Trọng số:
ad	11
fi	10
af	7
cf	7
dh	7
fg	6
bd	6
eb	5