- Thuật toán Loang

Bài toán đặt ra

Ta có một bài toán như sau:

Một vùng biển được chia ra thành một lưới ô vuông có kích thước $n \times m$. Một tai nạn xảy ra khiến cho dầu bị tràn ra biển. Các ô có dầu tràn được kí hiệu bằng số 1, các ô không có dầu tràn được kí hiệu bằng số 0. Một vết loang là một tập hợp các ô chung cạnh được kí hiệu bằng số 1.

Hãy đếm số lượng vết dầu loang và in ra kích thước của từng vết dầu theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Input:

- Dòng 1: 2 số nguyên dương n, m lần lượt thể hiện cho số hàng và số cột của lưới ô vuông tượng trưng cho vùng biển $(n, m \leq 10^3)$
- Dòng $2 \ldots n+1$: Ma trận kích thước $n \times m$ trong đó các ô có dầu có giá trị là 1, các ô còn lại có giá trị là 0

Output:

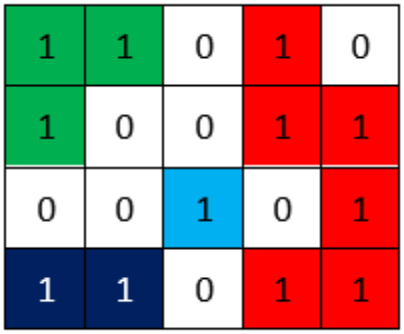
- Dòng 1: Số nguyên duy nhất là số lượng vết dầu loang
- Dòng 2: Kích thước của các vết dầu được sắp xếp từ nhỏ đến lớn

Ví dụ:

Input	Output
4 5 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1	4 1 2 3 6

Giải thích ví dụ:

Đây là hình ảnh minh hoạ cho ma trận trên với các vết dầu được tô màu.



Ý tưởng

Ý tưởng của bài toán thực ra khá đơn giản và đó cũng chính là cách chúng ta giải quyết bài này một cách thủ công: Từ một ô mang giá trị 1, ta sẽ xem liệu có ô nào chung cạnh mang giá trị 1 không. Nếu có, ta sẽ tiếp tục quá trình trên đến khi nào chạm phải một ô mang giá trị 0. Khi đó, tập các ô mang giá trị 1 mà ta vừa đi qua sẽ tạo thành một vết dầu.

Cách làm này giống như việc ta đổ nước ra sàn, nước sẽ chảy ra mọi phía và chỉ ngừng chảy khi chạm phải vật cản. Khi đó, những khu vực nước chảy qua sẽ bị đọng nước. Chính vì sự tương tự này mà ta gọi thuật toán là Loang.

Vậy thì ta sẽ triển khai chi tiết ý tưởng trên như thế nào?

Ta nhận thấy rằng ta hoàn toàn có thể mô hình hoá được ma trận trên thành một đồ thị trong đó mỗi ô là một đỉnh, cứ hai ô có chung cạnh sẽ tạo thành một cạnh trên đồ thị của chúng ta. Khi này, ta sẽ duyệt đồ thị để tìm các thành phần liên thông chứa toàn số 1.

Cách cài đặt

Ta sẽ cần một mảng ***mark[][]*** để đánh dấu các ô đã được xét.

Thuật toán diễn ra như sau:

- Ta sẽ duyệt tất cả các ô trong ma trận, nếu như gặp một ô có giá trị 1 và chưa được đánh dấu (***mark[][] = 0***) thì ta sẽ loang từ ô đó
- Quá trình loang:
    - Ta sẽ có một hàng đợi chứa các ô mang giá trị 1 và đang chờ kiểm tra xem liệu có loang tiếp từ các ô đó được không. Ban đầu, hàng đợi chứa ô mang giá trị 1 mà ta gặp ở trên
    - Mỗi lần, ta sẽ lấy ra từ hàng đợi một ô
    - Ta sẽ kiểm tra xem các ô có chung cạnh nó có tồn tại ô nào mang giá trị 1 và chưa được đánh dấu không. Nếu có, ta sẽ thêm ô đó vào hàng đợi và

đánh dấu đỉnh đó. Đây là một phần khá thú vị và mình sẽ trình bày riêng ở dưới
    - Quá trình kết thúc khi hàng đợi rỗng. Kích thước vết dầu chính là số phần tử đã từng được đẩy vào hàng đợi

Ở trong quá trình trên, thao tác tìm các ô chung cạnh thoả mãn sẽ là thao tác "khó nhằn" nhất. Ta thấy, ta sẽ quản lý các ô theo tọa độ của chúng. Do đó, ta sẽ lưu tâm đến quan hệ toạ độ của một ô với các ô chung cạnh của nó.

Xét ô vuông có toạ độ (x, y), ta thấy 4 ô vuông xung quanh nó sẽ có toạ độ như sau:

	$x-1, y$	
$x, y-1$	x, y	$x, y+1$
	$x+1, y$	

Lúc này, các bạn có thể nghĩ đơn giản là ta sẽ tạo ra 4 cặp biến tương ứng với tọa độ của 4 ô vuông xung quanh ô (x, y) để xét. Cách làm này không sai. Tuy nhiên, giả sử nếu sau này phát sinh những bài toán cần tìm quan hệ của nhiều hơn 4 ô xung quanh thì cách làm này sẽ khiến code vô cùng khó đọc. Vậy thì giải pháp là gì?

Ta thấy, toạ độ các ô vuông xung quanh ô (x, y) là toạ độ ô (x, y) và được thêm bớt một giá trị cố định. Do đó, ta sẽ lập 2 mảng hằng ***dx[]={0, 0, 1, -1}*** và ***dy[]={1, -1, 0, 0}*** thể hiện cho các giá trị được cộng thêm vào toạ độ (x, y) để được toạ độ các ô xung quanh. Khi này, chỉ cần dùng vòng lặp để duyệt qua 4 cặp giá trị ở hai mảng trên là ta sẽ có toạ độ 4 ô xung quanh.

Như vậy liệu đã hoàn thành chưa nhỉ? Theo các bạn, có yếu tố nào mà ta đã bỏ quên hay không? Các bạn hãy tạm ngưng bài học ở đây và code thử theo ý tưởng trên nhé. Đây coi như là một bài tập nhỏ cho các bạn. Hãy chạy thử chương trình các bạn code và kiểm tra xem ý tưởng trên còn gì thiếu sót không nhé!

Các bạn đã nhận ra ý tưởng trên còn bỏ sót yếu tố nào chưa? Hãy cùng theo dõi tiếp bài học nhé.

Ta thấy rằng, với các ô ở hàng trên cùng, sẽ không tồn tại các ô ở phía trên nó. Với các ô ở hàng cuối cùng, sẽ không tồn tại các ô ở dưới nó. Tương tự với các ô ở cạnh trái và cạnh phải cũng sẽ không tồn tại ô ở phía bên trái và bên phải nó. Do đó, khi xét các ô vuông có chung cạnh, ta sẽ cần kiểm tra xem ô vuông đó có nằm trong hình vuông đang được xét không. Điều kiện để kiểm tra ô vuông (x, y) có thuộc hình đang xét không đó là $1 \leq x \leq n$ && $1 \leq y \leq m$.

Code

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

typedef long long ll;

const int MaxN = 1 + 1e3, dx[4] = {0, 0, 1, -1}, dy[4] = {1, -1, 0, 0};

int n, m, a[MaxN][MaxN], mark[MaxN][MaxN];
vector<int> ans;

int Loang(int x, int y){
    int res = 0;
    queue<pair<int, int>> q;
    q.push({x, y});
    mark[x][y] = 1;
    while(!q.empty()){
        int x = q.front().first, y = q.front().second;
        q.pop();
        res++;
        for(int i = 0 ; i < 4 ; ++i)
        if(x + dx[i] > 0 && x + dx[i] <= n && y + dy[i] > 0 && y + dy[i] <= m && a[x
+ dx[i]][y + dy[i]] == 1 && !mark[x + dx[i]][y + dy[i]]){
            q.push({x + dx[i], y + dy[i]});
            mark[x + dx[i]][y + dy[i]] = 1;
        }
    }
    return res;
}

int main(){
    freopen("CTDL.inp","r",stdin);
    freopen("CTDL.out","w",stdout);
    cin >> n >> m;
    for(int i = 1 ; i <= n ; ++i)
    for(int j = 1 ; j <= m ; ++j) cin >> a[i][j];
    for(int i = 1 ; i <= n ; ++i)
    for(int j = 1 ; j <= m ; ++j)
    if(a[i][j] == 1 && !mark[i][j]) ans.push_back(Loang(i, j));
    cout << ans.size() << endl;
    sort(ans.begin(), ans.end());
    for(int i : ans) cout << i << " ";

    return 0;
}
```

Độ phức tạp

Thuật toán trên đơn thuần là duyệt qua tất cả các ô vuông nên độ phức tạp sẽ là $O(n \times m)$.

Mở rộng

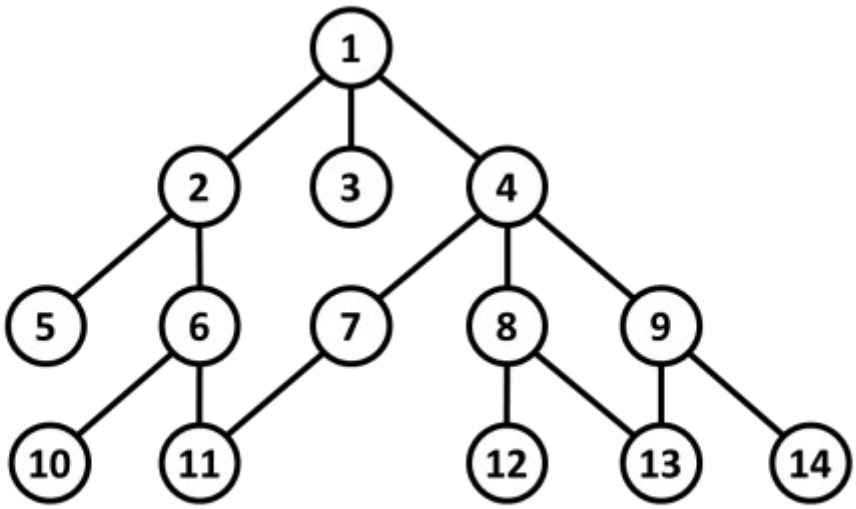
Thuật toán Loang chỉ là một trong những ứng dụng của thuật toán BFS trong lập trình. Ngoài ra, các bạn có thể tìm hiểu thêm về các ứng dụng sau của thuật toán BFS:

- Tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị không trọng số
- Tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số 0 hoặc 1
- Tìm kiếm thành phần liên thông trong đồ thị (Thực chất chính là bài toán trên của chúng ta)

BFS (Breadth-first search)

Thuật toán duyệt đồ thị ưu tiên chiều rộng

Thuật toán **duyệt đồ thị ưu tiên chiều rộng** *(Breadth-first search - BFS)* là một trong những thuật toán tìm kiếm cơ bản và thiết yếu trên đồ thị. Mà trong đó, những đỉnh nào gần đỉnh xuất phát hơn sẽ được duyệt trước.
Ứng dụng của BFSBFS có thể giúp ta giải quyết tốt một số bài toán trong thời gian và không gian **tối thiểu**. Đặc biệt là bài toán tìm kiếm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh gốc tới tất cả các đỉnh khác. Trong đồ thị không có trọng số hoặc tất cả trọng số bằng nhau, thuật toán sẽ luôn trả ra đường đi ngắn nhất có thể. Ngoài ra, thuật toán này còn được dùng để tìm các thành phần liên thông của đồ thị, hoặc kiểm tra đồ thị hai phía, ...



Thứ tự thăm các đỉnh của BFS

Ý tưởng

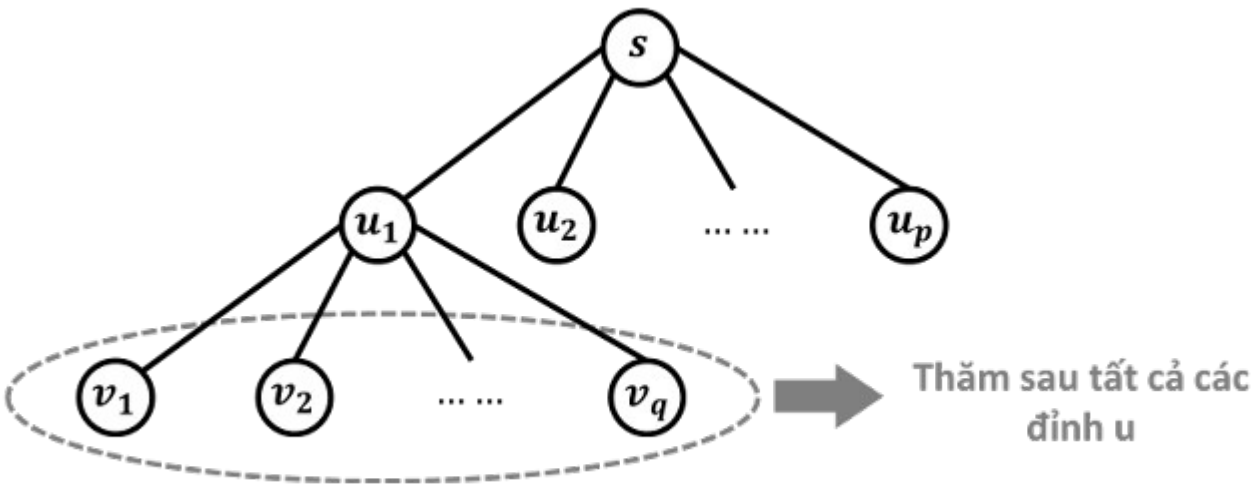
Với đồ thị không trọng số và đỉnh nguồn ss. Đồ thị này có thể là đồ thị có hướng hoặc vô hướng, điều đó **không quan trọng** đối với thuật toán.

Có thể hiểu thuật toán như một ngọn lửa lan rộng trên đồ thị:

- Ở bước thứ 00, chỉ có đỉnh nguồn ss đang cháy.
- Ở mỗi bước tiếp theo, ngọn lửa đang cháy ở mỗi đỉnh lại lan sang tất cả các đỉnh kề với nó. Trong mỗi lần lặp của thuật toán, "vòng lửa" lại lan rộng ra theo chiều rộng. Những đỉnh nào gần ss hơn sẽ bùng cháy trước.

Chính xác hơn, thuật toán có thể được mô tả như sau:

- Đầu tiên ta thăm đỉnh nguồn ss.
- Việc thăm đỉnh ss sẽ phát sinh thứ tự thăm các đỉnh $(u_1,u_2,...u_p)$(u1,u2,...up) kề với ss (những đỉnh gần ss nhất). Tiếp theo, ta thăm đỉnh u_1u1, khi thăm đỉnh u_1u1 sẽ lại phát sinh yêu cầu thăm những đỉnh $(v_1,v_2,...,v_q)$(v1,v2,...,vq) kề với u_1u1. Nhưng rõ ràng những đỉnh vv này "xa" ss hơn những đỉnh uu nên chúng chỉ được thăm khi tất cả những đỉnh uu đều đã được thăm. Tức là thứ tự thăm các đỉnh sẽ là: $s,u_1,u_2,...,u_p,v_1,v_2,...,v_q,...$ s,u1,u2,...,up,v1,v2,...,vq,...



Thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng sử dụng một danh sách để chứa những đỉnh đang "chờ" thăm. Tại mỗi bước, ta thăm một đỉnh đầu danh sách, loại nó ra khỏi danh sách và cho những đỉnh kề với nó chưa được thăm xếp hàng vào cuối danh sách. Thuật toán sẽ kết thúc khi danh sách rỗng.

Thuật toán

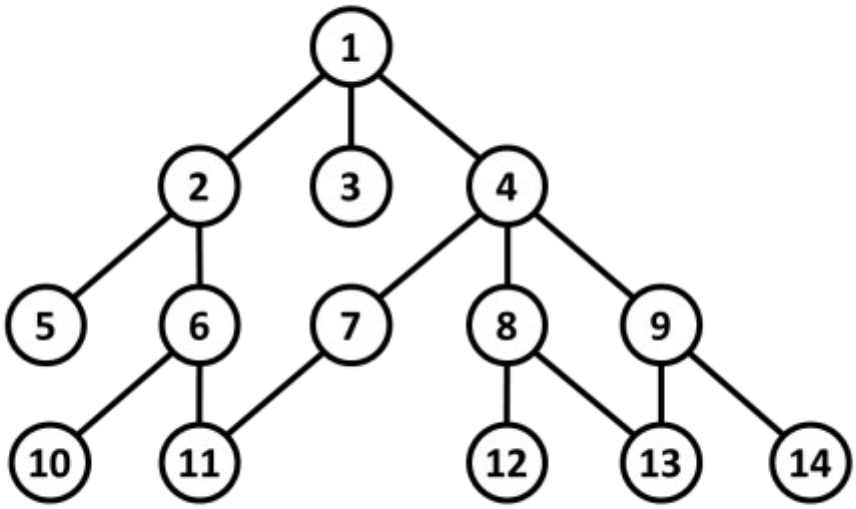
Thuật toán sử dụng một cấu trúc dữ liệu hàng đợi *(queue)* để chứa các đỉnh sẽ được duyệt theo thứ tự ưu tiên chiều rộng.
Bước 1: Khởi tạo

- Các đỉnh đều ở trạng thái chưa được đánh dấu. Ngoại trừ đỉnh nguồn ss đã được đánh dấu.

- Một hàng đợi ban đầu chỉ chứa 11 phần tử là ss.
  Bước 2: Lặp lại các bước sau cho đến khi hàng đợi rỗng:
- Lấy đỉnh uu ra khỏi hàng đợi.
- Xét tất cả những đỉnh vv kề với uu mà chưa được đánh dấu, với mỗi đỉnh vv đó:
  - Đánh dấu vv đã thăm.
  - Lưu lại vết đường đi từ uu đến vv.
  - Đẩy vv vào trong hàng đợi (đỉnh vv sẽ chờ được duyệt tại những bước sau).
    Bước 3: Truy vết tìm đường đi.

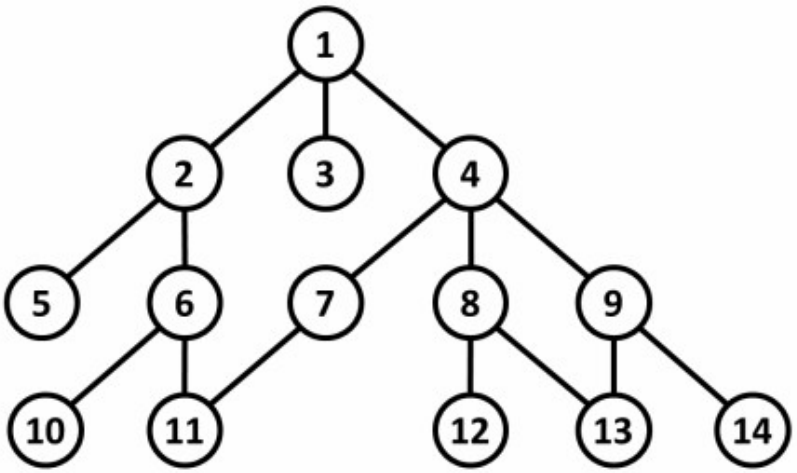
Mô tả

- Xét đồ thị sau đây, với đỉnh nguồn $s=1$:



Hàng đợi	Đỉnh u (lấy từ hàng đợi)	Hàng đợi (sau khi lấy u ra)	Các đỉnh v kề u mà chưa đánh dấu	Hàng đợi sau khi đẩy những đỉnh v vào
(1)	1	Ø	(2; 3 ;4)	(2; 3 ;4)
(2; 3; 4)	2	(3; 4)	(5; 6)	(3; 4; 5; 6)
(3; 4; 5; 6)	3	(4; 5; 6)	Ø	(4; 5; 6)
(4; 5; 6)	4	(5; 6)	(7; 8; 9)	(5; 6; 7; 8; 9)
(5; 6; 7; 8; 9)	5	(6; 7; 8; 9)	Ø	(6; 7; 8; 9)
(6; 7; 8; 9)	6	(7; 8; 9)	(10; 11)	(7; 8; 9; 10; 11)
(7; 8; 9; 10; 11)	7	(8; 9; 10; 11)	Ø	(8; 9; 10; 11)
(8; 9; 10; 11)	8	(9; 10; 11)	(12; 13)	(9; 10; 11; 12; 13)
(9; 10; 11; 12; 13)	9	(10; 11; 12; 13)	(14)	(10; 11; 12; 13; 14)
(10; 11; 12; 13; 14)	10	(11; 12; 13; 14)	Ø	(11; 12; 13; 14)
(11; 12; 13; 14)	11	(12; 13; 14)	Ø	(12; 13; 14)
(12; 13; 14)	12	(13; 14)	Ø	(13; 14)
(13; 14)	13	(14)	Ø	(14)
(14)	14	Ø	Ø	Ø

- **Quá trình:**

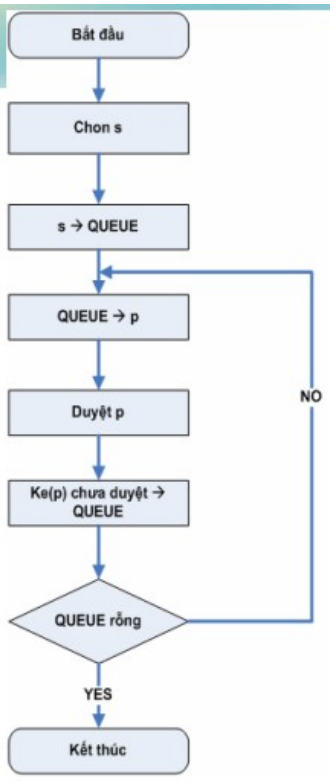


Mô tả quá trình duyệt đồ thị ưu tiên chiều rộng

Cài đặt

II.1. Cài đặt bằng hàng đợi

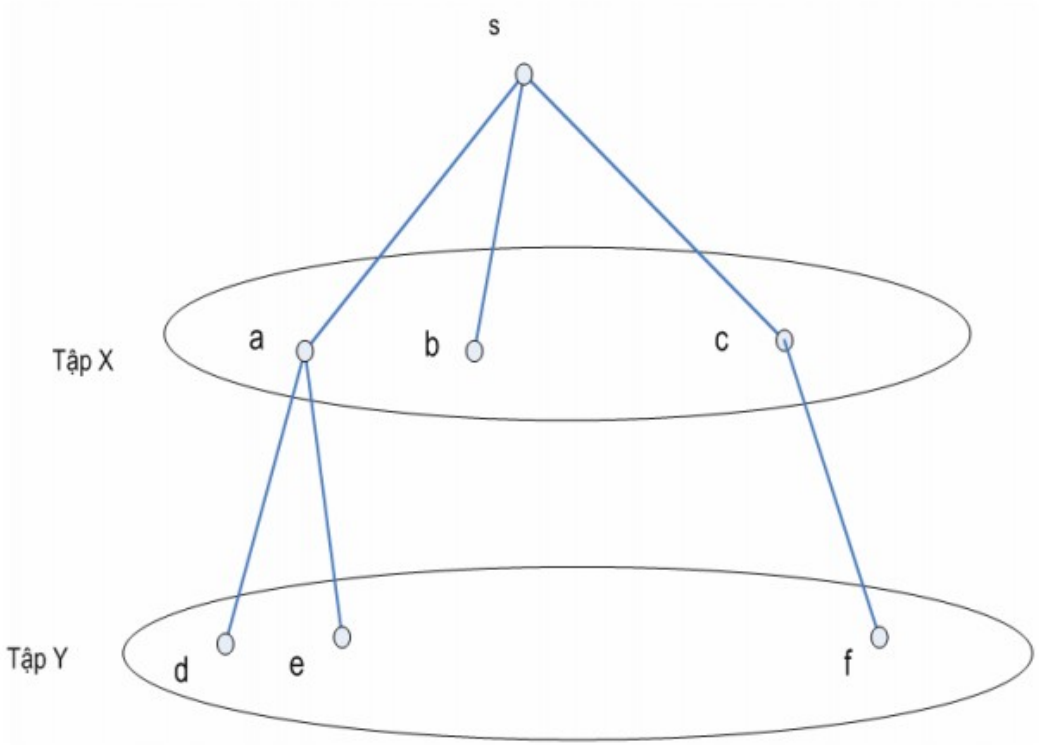
B1: Lấy s là một đỉnh của đồ thị
B2: Đặt s vào QUEUE
B3: Lặp nếu QUEUE chưa rỗng.
a.Lấy đỉnh p từ QUEUE
b.Duyệt đỉnh p
c.Đặt các đỉnh kề của p chưa được xét *(chưa từng có mặt trong QUEUE)* vào QUEUE.
d.Kết thúc lặp

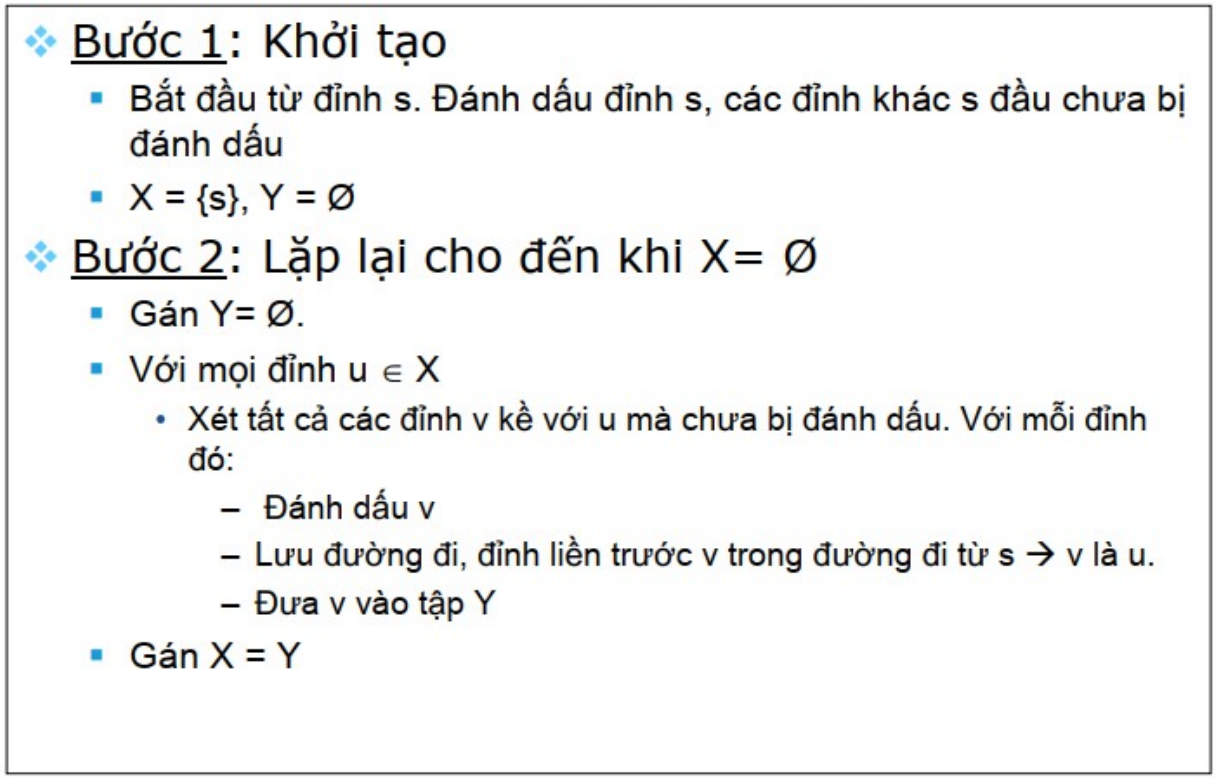


II.1. Cài đặt bằng hàng đợi

```
/* Khai báo các biến ChuaXet, Ke */
BFS(v)
{
        QUEUE = ∅;
        QUEUE ⇐ v;
        ChuaXet[v] = 0;/*Đánh dấu đã xét đỉnh v*/
        while ( QUEUE ≠ ∅ )
        {
                p ⇐ QUEUE;
                Duyệt đỉnh p;
                        for  ( u ∈ Ke(p) )
                                if  ( ChuaXet[u] )
                                {
                                        QUEUE ⇐ u;
                                        ChuaXet[u] = 0;/*Đánh dấu đã xét đỉnh */
                                }
        }
}
void main()
/* Nhập đồ thị, tạo biến Ke */
{
            for ( v ∈ V )  ChuaXet[v] = 1; /* Khởi tạo cờ cho đỉnh */
            for ( v ∈ V )
                        if  ( ChuaXet[v] )  BFS(v);
}
```

II.2. Cài đặt bằng thuật toán loang





Cấu trúc dữ liệu:

- Biến `maxN` - Kích thước mảng.
- Mảng `d[]` - Mảng lưu lại khoảng cách từ đỉnh nguồn đến mọi đỉnh.
- Mảng `par[]` - Mảng lưu lại vết đường đi.
- Mảng `visit[]` - Mảng đánh dấu các đỉnh đã thăm.
- Vector `g[]` - Danh sách cạnh kề của mỗi đỉnh.
- Hàng đợi `q` - Chứa các đỉnh sẽ được duyệt theo thứ tự ưu tiên chiều rộng.

```
int n; // Số lượng đỉnh của đồ thị
int d[maxN], par[maxN];
bool visit[maxN];
vector <int> g[maxN];

void bfs(int s) { // Với s là đỉnh xuất phát (đỉnh nguồn)
    fill_n(d, n + 1, 0);
    fill_n(par, n + 1, -1);
    fill_n(visit, n + 1, false);

    queue <int> q;
    q.push(s);
    visit[s] = true;
    while (!q.empty()) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        for (auto v : g[u]) {
            if (!visit[v]) {
                d[v]     = d[u] + 1;
                par[v]   = u;
                visit[v] = true;
```

```
                q.push(v);
            }
        }
    }
}
```

Truy vết

- Cài đặt truy vết đường đi từ đỉnh nguồn s đến đỉnh u :

```
if (!visit[u]) cout << "No path!";
else {
    vector <int> path;
    for (int v = u; v != -1; v = par[v])
        path.push_back(v);
    reverse(path.begin(), path.end());

    cout << "Path: ";
    for (auto v : path) cout << v << ' ';
}
```

Các đặc tính của thuật toán

Nếu sử dụng một ngăn xếp *(stack)* thay vì hàng đợi *(queue)* thì ta sẽ thu được **thứ tự duyệt đỉnh** của thuật toán **tìm kiếm theo chiều sâu** *(Depth First Search – DFS)*. Đây chính là **phương pháp khử đệ quy** của DFSDFS để cài đặt thuật toán trên các ngôn ngữ không cho phép đệ quy.

Định lí: Thuật toán BFSBFS cho ta độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn tới mọi đỉnh (với khoảng cách tới đỉnh uu bằng $d[u]$d[u]). Trong thuật toán BFSBFS, nếu đỉnh uu xa đỉnh nguồn hơn đỉnh vv, thì uu sẽ được thăm trước.

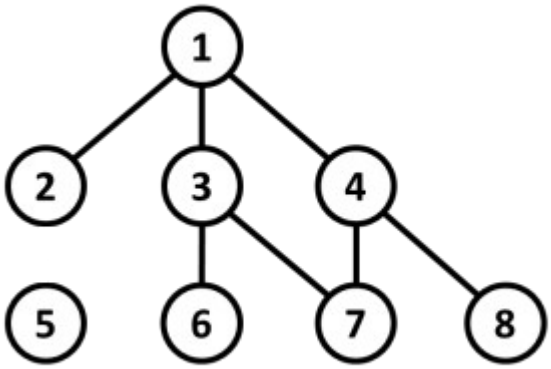
- **Chứng minh:** Trong BFSBFS, từ một đỉnh hiện tại, ta luôn đi thăm tất cả các đỉnh kề với nó trước, sau đó thăm tất cả các đỉnh cách nó một đỉnh, rồi các đỉnh cách nó hai đỉnh, v.v... Như vậy, nếu từ một đỉnh uu khi ta chạy BFSBFS, quãng đường đến đỉnh vv luôn là quãng đường đi qua ít cạnh nhất.

Định lý Bắt tay (Handshaking lemma)

Định lý: Trong một đồ thị bất kỳ, tổng số bậc của tất cả các đỉnh bằng **gấp đôi** số cạnh của đồ thị.

- **Mô tả:** Cho đồ thị $G=(V,E)$G=(V,E) gồm $|V|$|V| đỉnh và $|E|$|E| cạnh. Khi đó, tổng tất cả các bậc của đỉnh trong GG bằng $2\times|E|$2×|E| . Với $deg(v)$deg(v) là số bậc của đỉnh vv, ta có: $\sum_{v\in V}deg(v)=2\times|E|$∑v∈Vdeg(v)=2×|E|
    - **Ví dụ:** Cho đồ thị sau với $|V|=8$|V|=8 và $|E|=7$|E|=7

Đỉnh v	deg(v)
1	3
2	1
3	3
4	3
5	0
6	1
7	2
8	1



- $\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \times |E| = 2 \times 7 = 14$∑v∈Vdeg(v)=2×|E|=2×7=14
- **Chứng minh:** Vì mỗi một cạnh nối với đúng hai đỉnh của đồ thị, nên một cạnh sẽ đóng góp 2 đơn vị vào tổng số bậc của tất cả các đỉnh.
  Hệ quả: Trong đồ thị, số lượng **đỉnh bậc lẻ** luôn là một số chẵn.
- **Chứng minh:** Gọi L và C lần lượt là tập các đỉnh bậc lẻ và bậc chẵn của đồ thị $G = (V, E)$G=(V,E). Ta có: $2 \times |E| = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in L} deg(v) + \sum_{v \in C} deg(v)$2×|E|
  =∑v∈Vdeg(v)=∑v∈Ldeg(v)+∑v∈Cdeg(v)
  - $2 \times |E|$2×|E| chẵn
  - $\sum_{v \in C} deg(v)$∑v∈Cdeg(v) chẵn

    ⇒⇒ $\sum_{v \in L} deg(v)$∑v∈Ldeg(v) chẵn

    Nhận xét:
- Trong quá trình duyệt đồ thị được biểu diễn bằng **danh sách kề**, mỗi cạnh sẽ được duyệt chính xác hai lần đối với **đồ thị vô hướng** (vì mỗi cạnh sẽ được lưu trong 2 danh sách kề của 2 đỉnh). Còn đối với **đồ thị có hướng**, mọi cạnh của đồ thị chỉ được duyệt chính xác một lần.
  Tham khảo: Handshaking_lemma

Độ phức tạp thuật toán

Độ phức tạp thời gian

Gọi $|V|$|V| là số lượng đỉnh và $|E|$|E| là số lượng cạnh của đồ thị.
Trong quá trình BFSBFS, cách biểu diễn đồ thị có ảnh hưởng lớn tới chi phí về thời gian thực hiện giải thuật :

- Nếu đồ thị biểu diễn bằng **danh sách kề** (vector `g[]`) :
  - Ta có thể thực hiện thuật toán này một cách **tối ưu nhất** về mặt thời gian nhờ khả năng duyệt qua các đỉnh kề của mỗi đỉnh một cách **hiệu quả**.
  - Vì ta sử dụng mảng `visit[]` để ngăn việc đẩy một đỉnh vào hàng đợi nhiều lần nên mỗi đỉnh sẽ được thăm **chính xác một lần** duy nhất. Do đó, ta mất độ phức tạp thời gian $O(|V|)$O(|V|) dành cho việc thăm các đỉnh.

- Bất cứ khi nào một đỉnh được thăm, mọi cạnh kề với đỉnh đó đều được duyệt, với thời gian dành cho mỗi cạnh là $O(1)$O(1). Từ phần nhận xét của **định lý Bắt tay *(Handshaking lemma)***, ta sẽ mất độ phức tạp thời gian $O(|E|)$O(|E|) dành cho việc duyệt các cạnh.
- Nhìn chung, độ phức tạp thời gian của thuật toán này là $O(|V|+|E|)$O(|V|+|E|). Đây là cách cài đặt tốt nhất.

- Nếu đồ thị được biểu diễn bằng **ma trận kề** :
- Ta cũng sẽ mất độ phức tạp thời gian $O(|V|)$O(|V|) dành cho việc thăm các đỉnh *(giải thích tương tự như trên)*.
- Với mỗi đỉnh được thăm, ta sẽ phải duyệt qua toàn bộ các đỉnh của đồ thị để kiểm tra đỉnh kề với nó. Do đó, thuật toán sẽ mất độ phức tạp $O(|V|_2)$O(|V|2).

Độ phức tạp không gian

Tại mọi thời điểm, trong hàng đợi (queue `q`) có không quá $|V|$|V| phần tử. Do đó, độ phức tạp bộ nhớ là $O(|V|)$O(|V|).

Ứng dụng BFS để xác định thành phần liên thông

Bài toán 1

BDFS - Đếm số thành phần liên thông

Đề bài

Cho đơn đồ thị vô hướng gồm nn đỉnh và mm cạnh $(1\leq n,m\leq 10_5)$(1≤n,m≤105), các đỉnh được đánh số từ $1$1 tới nn. Tìm số thành phần liên thông của đồ thị.

Ý tưởng

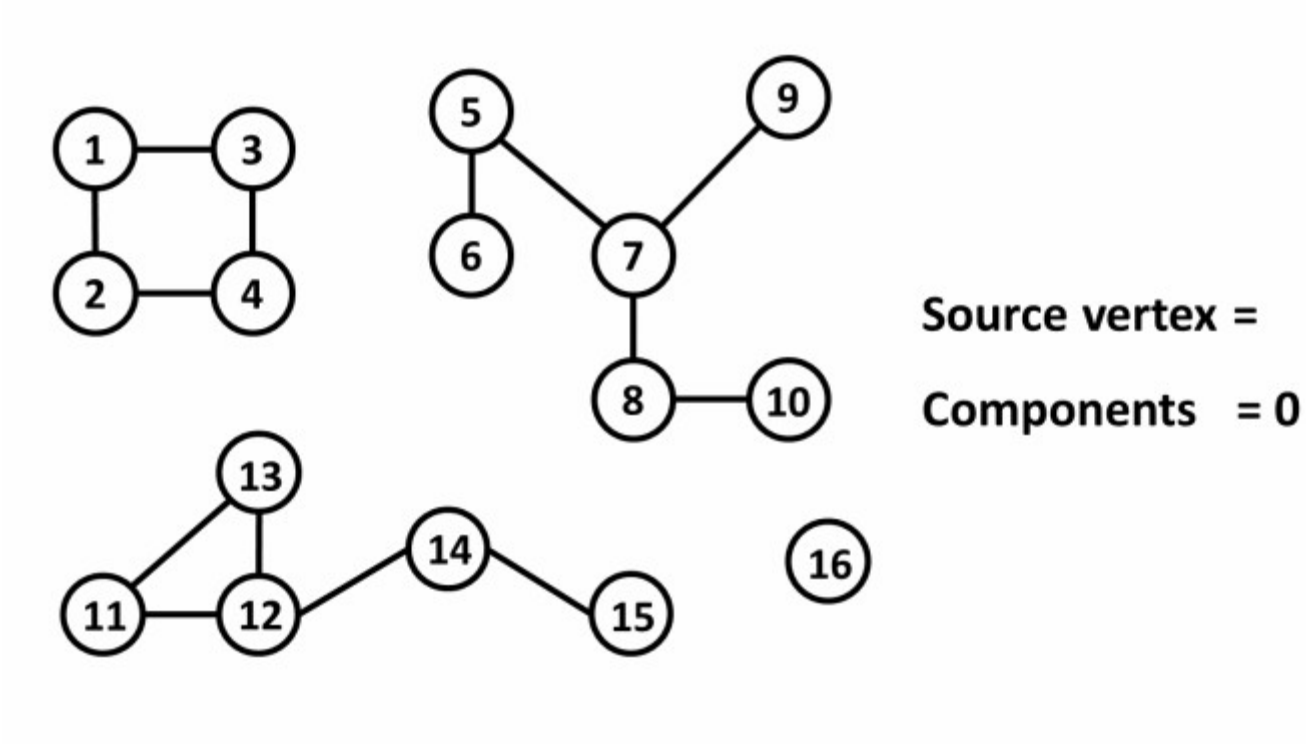
Một đồ thị có thể liên thông hoặc không liên thông. Nếu đồ thị liên thông thì số thành phần liên thông của nó là $1$1. Điều này tương đương với phép duyệt theo thủ tục BFSBFS được gọi đến **đúng một lần**. Nếu đồ thị không liên thông (số thành phần liên thông lớn hơn $1$1) ta có thể tách chúng thành những **đồ thị con liên thông**. Điều này cũng có nghĩa là trong phép duyệt đồ thị, số thành phần liên thông của nó bằng số lần gọi tới thủ tục BFSBFS.

Thuật toán

Thuật toán ứng dụng BFSBFS để xác định thành phần liên thông:

- **Bước 0:** Khởi tạo số lượng thành phần liên thông bằng $0$0.
- **Bước 1:** Xuất phát từ một đỉnh chưa được đánh dấu của đồ thị. Ta đánh dấu đỉnh xuất phát, tăng số thành phần liên thông thêm $1$1.
- **Bước 2:** Từ một đỉnh ii đã đánh dấu, ta đánh dấu tất cả các đỉnh jj kề với ii mà jj chưa được đánh dấu.
- **Bước 3:** Thực hiện bước $2$2 cho đến khi không còn thực hiện được nữa.
- **Bước 4:** Nếu số số đỉnh đánh dấu bằng nn (mọi đỉnh đều được đánh dấu) kết thúc thuật toán và trả về số thành phần liên thông, ngược lại quay về bước $1$1.

Mô tả



Cài đặt

Cấu trúc dữ liệu:

- Hằng số `maxN = 100007`.
- Biến `components` - Số lượng thành phần liên thông.
- Mảng `visit[]` - Mảng đánh dấu các đỉnh đã thăm.
- Vector `g[]` - Danh sách cạnh kề của mỗi đỉnh.
- Hàng đợi `q` - Chứa các đỉnh sẽ được duyệt theo thứ tự ưu tiên chiều rộng.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int maxN  = 1e5 + 7;

int n, m, components = 0;
bool visit[maxN];
vector <int> g[maxN];

void bfs(int s) {
    ++components;
    queue <int> q;
    q.push(s);
    visit[s] = true;
    while (!q.empty()) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        for (auto v : g[u]) {
            if (!visit[v]) {
                visit[v] = true;
```

```
                q.push(v);
            }
        }
    }
}

int main() {
    cin >> n >> m;
    while (m--) {
        int u, v;
        cin >> u >> v;
        g[u].push_back(v);
        g[v].push_back(u);
    }

    fill_n(visit, n + 1, false);
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        if (!visit[i]) bfs(i);
    cout << components;
}
```

Đánh giá

Ta cũng có thể sử dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu *(Depth First Search – DFS)* để xác định thành phần liên thông.

Độ phức tạp

Độ phức tạp của thuật toán là $O(n+m)$O(n+m).

Thuật toán loang (Flood Fill)

Thuật toán loang *(thuật toán vết dầu loang)* là một kĩ thuật sử dụng BFSBFS để tìm tất cả các điểm có thể đi tới. Điểm khác biệt giữa **Loang** so với đa số những bài BFSBFS là ta không phải tìm chi phí nhỏ nhất.

Thuật toán loang được dùng khá nhiều trong tin học, điển hình là **thuật toán loang trên ma trận** được ứng dụng để đếm số **thành phần liên thông** trên ma trận. Ngoài ra, nó còn ứng dụng trong các **bài toán thực tế** như các bài toán tìm đường đi, game dò mìn, game line98,...

Gọi là thuật toán loang vì nguyên lí của thuật toán này rất giống với hiện tượng loang của chất lỏng. Khi ta nhỏ dầu xuống một mặt phẳng, vết dầu có thể loang ra những khu vực xung quanh. Tương tự, thuật toán loang trên ma trận cũng vậy, ta sẽ duyệt một ô trên ma trận và sau đó duyệt các điểm xung quanh nó và loang dần ra để giải quyết bài toán.

Bài toán 2

UCV2013H - Slick

Đề bài

Một tai nạn hàng hải đã khiến dầu tràn ra biển. Để có được thông tin về mức độ nghiêm trọng của thảm họa này, người ta phải phân tích các hình ảnh chụp từ vệ tinh, từ đó tính toán chi phí khắc phục cho phù hợp. Đối với điều này, số lượng vết dầu loang trên biển và

kích thước của mỗi vết loang phải được xác định. Vết loang là một mảng dầu nổi trên mặt nước.

Để tiện cho việc xử lí, hình ảnh được chuyển đổi thành một ma trận nhị phân kích thước $N \times M$N×M $(1 \leq N, M \leq 250)$(1≤N,M≤250). Với $1$1 là ô bị nhiễm dầu, và $0$0 là ô không bị nhiễm dầu. Vết dầu loang là tập hợp của một số ô bị nhiễm dầu có chung cạnh.

Họ đã thuê bạn để giúp họ xử lí hình ảnh. Công việc của bạn là đếm số lượng vết loang trên biển và kích thước tương ứng của từng vết.

Ý tưởng

Ta xây dựng một **mô hình đồ thị** của bài toán như sau:

- Gọi mỗi đỉnh của đồ thị tương ứng với mỗi ô $1$1 *(ô bị nhiễm dầu)* của ma trận.
- Tồn tại một cạnh nối giữa cặp đỉnh (u, v)(u,v) khi và chỉ khi ô tương ứng với đỉnh uu kề cạnh với ô tương ứng với đỉnh vv và cả hai ô đều là ô $1$1.

Khi đó, bài toán quy về thành bài toán **xác định thành phần liên thông của đồ thị**. Trong đó, mỗi thành phần liên thông tương ứng với mỗi một vết dầu loang.

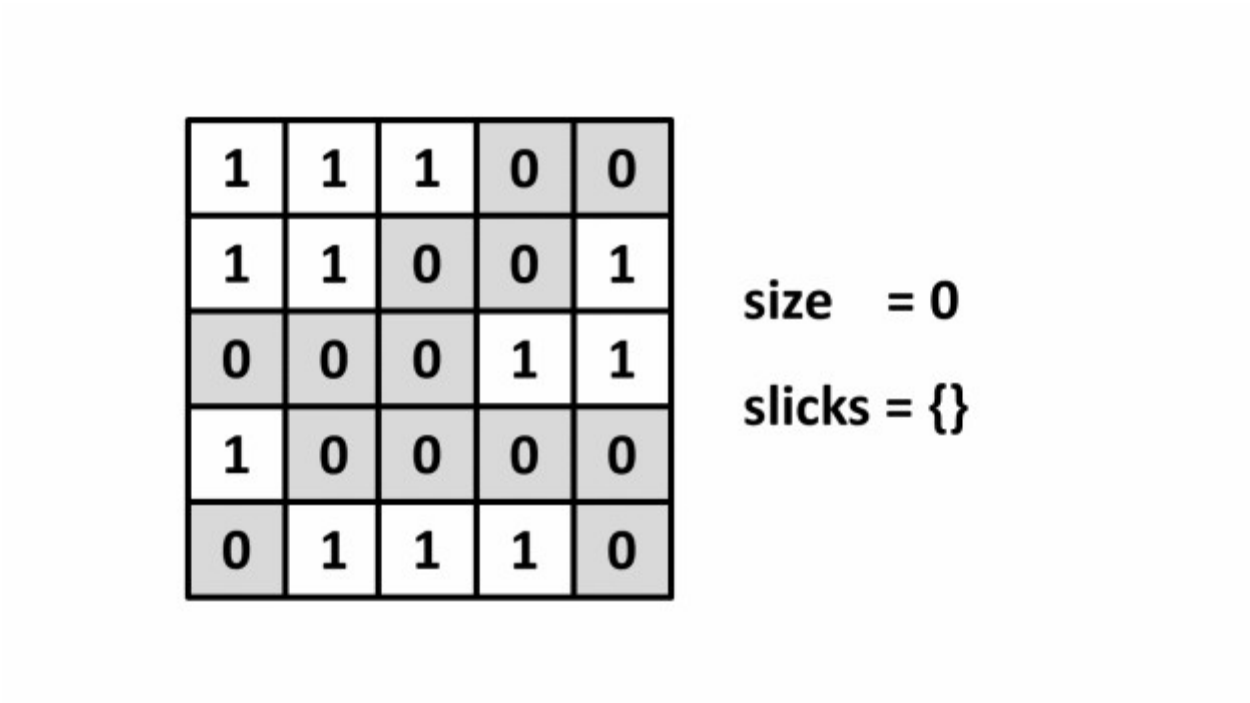
Nghĩa là, số lượng thành phần liên thông của đồ thị chính là số lượng vết dầu loang. Và số lượng đỉnh nằm trong cùng một thành phần liên thông là kích thước của vết loang tương ứng.

Thuật toán

Áp dụng **thuật toán loang trên ma trận** để xác định thành phần liên thông:

- Khởi tạo số lượng vết dầu bằng $0$0.
- Duyệt dần từng ô của ma trận, nếu ô đang xét là một ô bị nhiễm dầu (ô $1$1) và chưa được đánh dấu:
  - Đánh dấu lại ô đó.
  - Tăng số lượng vết dầu thêm $1$1.
  - Thực hiện thủ tục BFSBFS xuất phát từ ô đó để loang ra các ô xung quanh như sau:
    - Khởi tạo kích thước của vết dầu đang xét là $1$1.
    - Tiếp tục thực hiện công việc sau cho đến khi không còn thực hiện được nữa: Từ một ô đã đánh dấu, ta đánh dấu tất cả các ô bị nhiễm dầu kề cạnh với ô đó mà chưa được đánh dấu. Mỗi lần đánh dấu lại một ô thì ta tăng kích thước của vết dầu thêm $1$1.
    - Sử dụng $1$1 mảng để lưu lại kích thước của từng vết loang.
- Nếu tất cả các ô bị nhiễm dầu đều đã được đánh dấu, trả ra kết quả và kết thúc thuật toán.

Mô tả



Cài đặt

Cấu trúc dữ liệu:

- Hằng số `maxN = 300`.
- Mảng `visit[][]` - Mảng đánh dấu các ô đã duyệt.
- Vector `slicks` - Lưu kích thước của mỗi vết dầu loang.
- Hàng đợi `q` - Chứa các ô sẽ được duyệt theo thứ tự ưu tiên chiều rộng.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int maxN  = 300;

int n, m;
bool a[maxN][maxN], visit[maxN][maxN];
vector <int> slicks;
int moveX[] = {0, 0, 1, -1};
int moveY[] = {1, -1, 0, 0};

// Thủ tục cài đặt lại cấu trúc dữ liệu sau mỗi bộ test
void reset() {
    slicks.clear();
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        fill_n(visit[i], m + 1, false);
}

int bfs(int sx, int sy) {
    int sizeSlicks = 1; // Biến đếm số lượng đỉnh thuộc thành phần liên thông
    queue < pair <int, int> > q;
    q.push({sx, sy});
    visit[sx][sy] = true;
```

```
    while (!q.empty()) {
        int x = q.front().first;
        int y = q.front().second;
        q.pop();

        for (int i = 0; i < 4; ++i) {
            int u = x + moveX[i];
            int v = y + moveY[i];

            if (u > n || u < 1) continue;
            if (v > m || v < 1) continue;

            if (a[u][v] && !visit[u][v]) {
                ++sizeSlicks;
                visit[u][v] = true;
                q.push({u, v});
            }
        }
    }
    return sizeSlicks;
}

int main() {
    while (cin >> n >> m) {
        if (!n && !m) return 0;

        for (int i = 1; i <= n; ++i)
            for (int j = 1; j <= m; ++j) cin >> a[i][j];

        for (int i = 1; i <= n; ++i)
            for (int j = 1; j <= m; ++j)
                if (a[i][j] && !visit[i][j])
                    slicks.push_back(bfs(i, j));

        cout << slicks.size() << '\n';

        sort(slicks.begin(), slicks.end());
        slicks.push_back(1e9);
        int number = 0, pre = slicks[0];
        for (auto v : slicks)
            if (v != pre) {
                cout << pre << ' ' << number << '\n';
                pre = v;
                number = 1;
            }
            else ++number;

        reset();
    }
```

```
}
```

Đánh giá

Ta sử dụng 22 mảng `moveX[]` và `moveY[]` để có thể dễ dàng duyệt qua tất cả các ô kề cạnh với ô đang xét.

Độ phức tạp

Với mỗi bộ test:

- Vì mỗi ô của ma trận được duyệt đúng duy nhất 11 lần nên ta sẽ mất độ phức tạp $O(N \times M)$O(N×M).
- Ta sẽ mất thêm $O(4 \times N \times M)$O(4×N×M) vì ta phải duyệt qua 44 ô kề cạnh với mỗi ô của ma trận.

Nhìn chung, độ phức tạp của thuật toán là $O(t \times (N \times M + 4 \times N \times M))$O(t×(N×M+4×N×M)).
Với tt là số lượng bộ test.

Bài tập áp dụng

BCDAISY - Chú bò hư hỏng
BCLKCOUN - Đếm số ao
BCISLAND - Nước biển
MTNTRAI - Nông Trại
NKGUARD - Bảo vệ nông trang
Damage - Động đất
KOZE - Sheep
CSES - Counting Rooms

Ứng dụng BFS để tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị không trọng số

Những bài sử dụng BFSBFS thường yêu cầu tìm số bước ít nhất (hoặc đường đi ngắn nhất) từ điểm đầu đến điểm cuối. Bên cạnh đó, đường đi giữa 22 điểm bất kì thường có chung trọng số (và thường là 11). Phổ biến nhất là dạng bài cho bảng $N \times M$N×M, có những ô đi qua được và những ô không đi qua được. Bảng này có thể là mê cung, sơ đồ, các thành phố hoặc các thứ các thứ tương đương. Có thể nói đây là những bài toán BFSBFS kinh điển.

Hãy xem xét bài toán sau đây:

Bài toán 3

Vmunch - Gặm cỏ

Đề bài

Cho một bảng hình chữ nhật chia thành lưới ô vuông kích thước $R \times C$R×C ($1 \leq R, C \leq 1001$≤R,C≤100). Mỗi ô mang 11 trong 44 giá trị sau : `.` , `*` , `B` , `C`. Cô bò Bessie đang đứng ở ô `C` và cần đi đến ô `B`. Mỗi bước đi Bessie có thể đi từ 11 ô vuông sang 44 ô vuông khác kề cạnh nhưng không được đi vào ô `*` hay đi ra khỏi bảng. Hãy tìm số bước đi ít nhất để Bessie đến được ô `B`.
Đảm bảo chỉ có duy nhất 11 ô `B` và 11 ô `C` trong bảng, và luôn tồn tại đường đi từ `C` đến `B`.

Phân tích

Theo mối quan hệ được xây dựng trong đề bài, Bessie có thể di chuyển từ 11 ô vuông sang 44 ô vuông khác kề cạnh. Từ đó, ta có thể xây dựng một **mô hình đồ thị** của bài toán:

- Gọi mỗi đỉnh của đồ thị tương ứng với mỗi ô trong lưới ô vuông.
- Tồn tại một cạnh nối giữa cặp đỉnh (u,v)(u,v) khi và chỉ khi từ ô tương ứng với đỉnh uu có thể di chuyển đến ô tương ứng với đỉnh vv (đồng nghĩa, ô tương ứng với đỉnh uu kề cạnh với ô tương ứng với đỉnh vv và cả $2$2 ô đều **không phải** là ô `*`).

Sau khi xây dựng được đồ thị, bài toán quy về như sau: Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh tương ứng với ô `C` đến đỉnh tương ứng với ô `B`. Độ dài đường đi ngắn nhất đó chính là số bước ít nhất mà Bessie cần thực hiện.

Vậy để tìm được kết quả bài toán, ta sẽ áp dụng thuật toán BFSBFS.

Cài đặt

Cấu trúc dữ liệu:

- Hằng số `maxN = 110`.
- Mảng `d[][]` - Mảng lưu số bước ít nhất để đi từ ô xuất phát đến mỗi ô khác.
- Mảng `visit[][]` - Mảng đánh dấu các ô đã đi qua.
- Hàng đợi `q` - Chứa các ô sẽ được duyệt theo thứ tự ưu tiên chiều rộng.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int maxN  = 110;

int r, c;
char a[maxN][maxN];
int d[maxN][maxN];
bool visit[maxN][maxN];
int moveX[] = {0, 0, 1, -1};
int moveY[] = {1, -1, 0, 0};

void bfs(int sx, int sy) {
    for (int i = 1; i <= r; ++i) {
        fill_n(d[i], c + 1, 0);
        fill_n(visit[i], c + 1, false);
    }

    queue < pair <int, int> > q;
    q.push({sx, sy});
    visit[sx][sy] = true;
    while (!q.empty()) {
        int x = q.front().first;
        int y = q.front().second;
        q.pop();

        // Nếu gặp được ô B thì kết thúc thủ tục BFS
        if (a[x][y] == 'B') return;

        for (int i = 0; i < 4; ++i) {
```

```
            int u = x + moveX[i];
            int v = y + moveY[i];

            if (u > r || u < 1) continue;
            if (v > c || v < 1) continue;
            if (a[u][v] == '*') continue;

            if (!visit[u][v]) {
                d[u][v] = d[x][y] + 1;
                visit[u][v] = true;
                q.push({u, v});
            }
        }
    }
}

int main() {
    int sx, sy, tx, ty;
    cin >> r >> c;
    for (int i = 1; i <= r; ++i)
        for (int j = 1; j <= c; ++j) {
            cin >> a[i][j];
            if (a[i][j] == 'C') { sx = i; sy = j; }
            if (a[i][j] == 'B') { tx = i; ty = j; }
        }

    bfs(sx, sy);
    cout << d[tx][ty];
}
```

Đánh giá

Ta sử dụng 22 mảng `moveX[]` và `moveY[]` để có thể dễ dàng duyệt qua tất cả các ô kề cạnh với ô đang xét.

Độ phức tạp

Giống như BFSBFS thông thường, độ phức tạp của bài toán là $O(|V|+|E|)$O(|V|+|E|) (với $|V|$|V| là số đỉnh và $|E|$|E| là số cạnh của đồ thị). Trong đó, số đỉnh của đồ thị bằng số lượng ô vuông của bảng (nghĩa là $|V|=R\times C$|V|=R×C). Trong **trường hợp tệ nhất**, tại mỗi ô đều có thể đi sang 44 ô kề cạnh, nên đồ thị sẽ có khoảng $4\times|V|$4×|V| cạnh.

Mặc dù trong quá trình BFSBFS, khi gặp được ô `B` thì thủ tục BFSBFS kết thúc luôn nên độ phức tạp thực tế có thể ít hơn so với tính toán. Nhưng trong **trường hợp tệ nhất** là ta phải đi hết tất cả các ô khác xong mới đến được ô `B`. Nên nhìn chung, độ phức tạp của thuật toán là $O(R\times C+4\times R\times C)$O(R×C+4×R×C).

Bài toán 4

ELEVTRBL - Elevator Trouble

Đề bài

Trong một tòa nhà có ff tầng, các tầng được đánh số từ 11 đến ff, hiện tại bạn đang đứng tại tầng ss và cần đi đến tầng gg. Tại mỗi tầng, thang máy chỉ có 22 nút là "UP u" và "DOWN d" :

- Nút "UP u" có thể đưa bạn lên đúng uu tầng nếu như có đủ số tầng phía trên.
- Nút "DOWN d" có thể đưa bạn xuống đúng dd tầng nếu như có đủ số tầng phía dưới.
  Trường hợp không có đủ số tầng thì thang máy sẽ không lên hoặc không xuống. Hãy tính số lần phải bấm nút ít nhất để có thể đến được tầng gg.
  $1 \leq s, g \leq f \leq 10^6; 0 \leq u, d \leq 10^6$1≤s,g≤f≤106;0≤u,d≤106.

Phân tích

Ghi chú: Từ ứng dụng **tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị không trọng số**, ta có thể áp dụng để giải quyết các vấn đề hoặc trò chơi có số lần di chuyển ít nhất, nếu mỗi trạng thái của nó có thể được biểu diễn bằng một đỉnh của đồ thị và việc chuyển đổi từ trạng thái này sang trạng thái khác là các cạnh của đồ thị.

Với bài toán này ta **không thể** sử dụng thuật toán vét cạn, hay quay lui có điều kiện vì số lượng tầng ở đây có thể lên đến $10^6$106 dẫn tới việc chương trình có thể **chạy quá thời gian**.

Thay vào đó, ta sẽ sử dụng thuật toán BFSBFS. Tư tưởng ở đây là ta sẽ đi tính số lần bấm nút nhỏ nhất để đến được mỗi tầng.

Từ mối quan hệ được xây dựng trong bài toán, ta có thể xây dựng một **mô hình đồ thị** như sau:

- Gọi mỗi đỉnh của đồ thị tương ứng với mỗi tầng của tòa nhà.
- Nếu từ tầng xx ta có thể đến được tầng yy bằng một lần bấm nút thì tồn tại cạnh nối 11 chiều từ đỉnh xx đến đỉnh yy. Tương đương với việc tồn tại cạnh $x \rightarrow (x+u)$x→(x+u) (nếu $(x+u) \leq f$(x+u)≤f) và cạnh $x \rightarrow (x-d)$x→(x−d) (nếu $(x-d) \geq 1$(x−d)≥1).

Sau khi xây dựng được đồ thị, đường đi ngắn nhất từ đỉnh ss đến đỉnh gg chính là số lần bấm nút ít nhất cần thực hiện.

Vậy để tìm được kết quả bài toán, ta sẽ áp dụng thuật toán BFSBFS.

Cài đặt

Cấu trúc dữ liệu:

- Hằng số `maxN = 1000007`.
- Mảng `number[]` - Mảng lưu lại số lần bấm nút ít nhất để đến được mỗi tầng.
- Mảng `visit[]` - Mảng đánh dấu lại các tầng đã đến.
- Hàng đợi `q` - Chứa các tầng sẽ được duyệt theo thứ tự ưu tiên chiều rộng.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int maxN  = 1e6 + 7;

int f, s, g, u, d;
int visit[maxN], number[maxN];

void bfs() {
    fill_n(number, f + 1, 0);
    fill_n(visit, f + 1, false);

    queue <int> q;
    q.push(s);
    visit[s] = true;
```

```
    while (!q.empty()) {
        int x = q.front();
        q.pop();

        // Nếu gặp được tầng đích thì kết thúc thủ tục BFS
        if (x == g) return;

        for (int y : {x + u, x - d}) {
            if (y > f || y < 1) continue;

            if (!visit[y]) {
                visit[y]  = true;
                number[y] = number[x] + 1;
                q.push(y);
            }
        }
    }

    // Kết thúc quá trình BFS mà ko đến được tầng đích
    number[g] = -1;
}

int main() {
    cin >> f >> s >> g >> u >> d;
    bfs();
    if (number[g] != -1) cout << number[g];
    else cout << "use the stairs";
}
```

Đánh giá

Độ phức tạp

Độ phức tạp của bài toán là $O(|V|+|E|)$O(|V|+|E|) (với $|V|$|V| là số đỉnh và $|E|$|E| là số cạnh của đồ thị). Trong đó, số đỉnh của đồ thị bằng số tầng của tòa nhà (nghĩa là $|V|=f$|V|=f). Đa số mỗi tầng đều có thể đi đến $2$2 tầng khác, nên đồ thị sẽ có khoảng $2\times|V|$2×|V| cạnh. Nhìn chung, độ phức tạp của thuật toán là $O(f+2\times f)$O(f+2×f).

Bài toán 5

cjpaysballas - CJ thanh toán BALLAS

Đề bài

Cho một đồ thị có hướng gồm NN đỉnh và MM cạnh $(1\leq N\leq 10^5;1\leq M\leq 10^6)$ (1≤N≤105;1≤M≤106). Các đỉnh được đánh số từ $1$1 đến NN. Hãy tìm đường đi ngắn nhất xuất phát tại đỉnh ss và kết thúc tại đỉnh tt. Nếu có nhiều đường đi ngắn nhất thỏa mãn, thì chỉ ra đường đi có **thứ tự từ điển nhỏ nhất** trong số đó.
Đảm bảo luôn tồn tại ít nhất một đường đi từ ss đến tt.

Phân tích

Định lí: Nếu ta sắp xếp các **danh sách kề** của mỗi đỉnh theo **thứ tự tăng dần** thì thuật toán BFSBFS luôn trả về đường đi có **thứ tự từ điển nhỏ nhất** trong số những đường đi ngắn nhất.

- **Chứng minh:** Trong quá trình BFSBFS, nếu các đỉnh được đưa vào hàng đợi *(queue)* theo thứ tự từ điển tăng dần thì theo cơ chế hoạt động FIFOFIFO *(First In - First Out)*, các đỉnh có thứ tự từ điển nhỏ hơn sẽ được thăm trước.
  Từ **định lí** trên, ta sẽ sắp xếp lại thứ tự đỉnh kề theo thứ tự tăng dần để đảm bảo đường đi được in ra theo thứ tự từ điển. Sau đó sử dụng BFSBFS kết hợp với truy vết để giải quyết bài toán.

Cài đặt

Cấu trúc dữ liệu:

- Mảng `par[]` - Mảng lưu lại vết đường đi.
- Mảng `visit[]` - Mảng đánh dấu các đỉnh đã thăm.
- Vector `g[]` - Danh sách cạnh kề của mỗi đỉnh.
- Hàng đợi `q` - Chứa các đỉnh sẽ được duyệt theo thứ tự ưu tiên chiều rộng.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int maxN  = 1e5 + 7;

int n, m, s, t;
int par[maxN];
bool visit[maxN];
vector <int> g[maxN];

void bfs(int s) {
    fill_n(par, n + 1, -1);
    fill_n(visit, n + 1, false);

    queue <int> q;
    q.push(s);
    visit[s] = true;
    while (!q.empty()) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        for (auto v : g[u]) {
            if (!visit[v]) {
                par[v]   = u;
                visit[v] = true;
                q.push(v);
            }
        }
    }
}

int main() {
    cin >> n >> m >> s >> t;
    while (m--) {
        int u, v;
        cin >> u >> v;
        g[u].push_back(v);
```

```
    }

    // Sắp xếp danh sách kề
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        sort(g[i].begin(), g[i].end());

    bfs(s);

    // Truy vết
    vector <int> path;
    for (int v = t; v != -1; v = par[v])
        path.push_back(v);
    reverse(path.begin(), path.end());

    for (auto v : path) cout << v << ' ';
}
```

Đánh giá

Độ phức tạp

- Độ phức tạp của thuật toán là $O(N+M)$O(N+M).

Bài tập áp dụng

BFS - BFS Cơ bản
Kandp - Mã và tốt
NAKANJ - Minimum Knight moves !!!
DIGOKEYS - Find the Treasure
MICEMAZE - Mice and Maze
INVESORT - Inversion Sort
ONEZERO - Ones and zeros
CATM - The Cats and the Mouse
NATALIAG - Natalia Plays a Game
MULTII - Yet Another Multiple Problem
Cycle in Maze - 769C Codeforces
Okabe and City - 821D Codeforces
Police Stations - 796D Codeforces
CSES - Labyrinth
CSES - Message Route
CSES - Monsters

Ứng dụng BFS để tìm chu trình ngắn nhất trong đồ thị có hướng không trọng số

Bài toán 6

Đề bài

Ada đang có một chuyến đi ở Bugindia. Ở đó có nhiều thành phố và những con đường một chiều nối giữa chúng. Ada rất băn khoăn về việc tìm con đường ngắn nhất bắt đầu tại một

thành phố và kết thúc ở cùng một thành phố. Vì Ada thích những chuyến đi ngắn, cô ấy đã nhờ bạn tìm độ dài của con đường như vậy cho mỗi thành phố ở Bugindia.

Input

- Dòng đầu tiên chứa số NN $(0<N\leq 200)$(0<N≤200) là số lượng thành phố.
- NN dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa NN số nguyên H_{ij}Hij $(0\leq H_{ij}\leq 1)$(0≤Hij≤1) . Nghĩa là, nếu $H_{ij}=1$Hij=1 thì tồn tại một con đường nối từ thành phố ii đến thành phố jj. Ngược lại, nếu $H_{ij}=0$Hij=0 thì không tồn tại con đường.

Output

- Gồm NN dòng: Dòng thứ ii in ra độ dài của con đường ngắn nhất bắt đầu từ thành phố ii và kết thúc ở thành phố ii. Nếu không tồn tại con đường nào như vậy, hãy in ra "**NO WAY**" để thay thế.

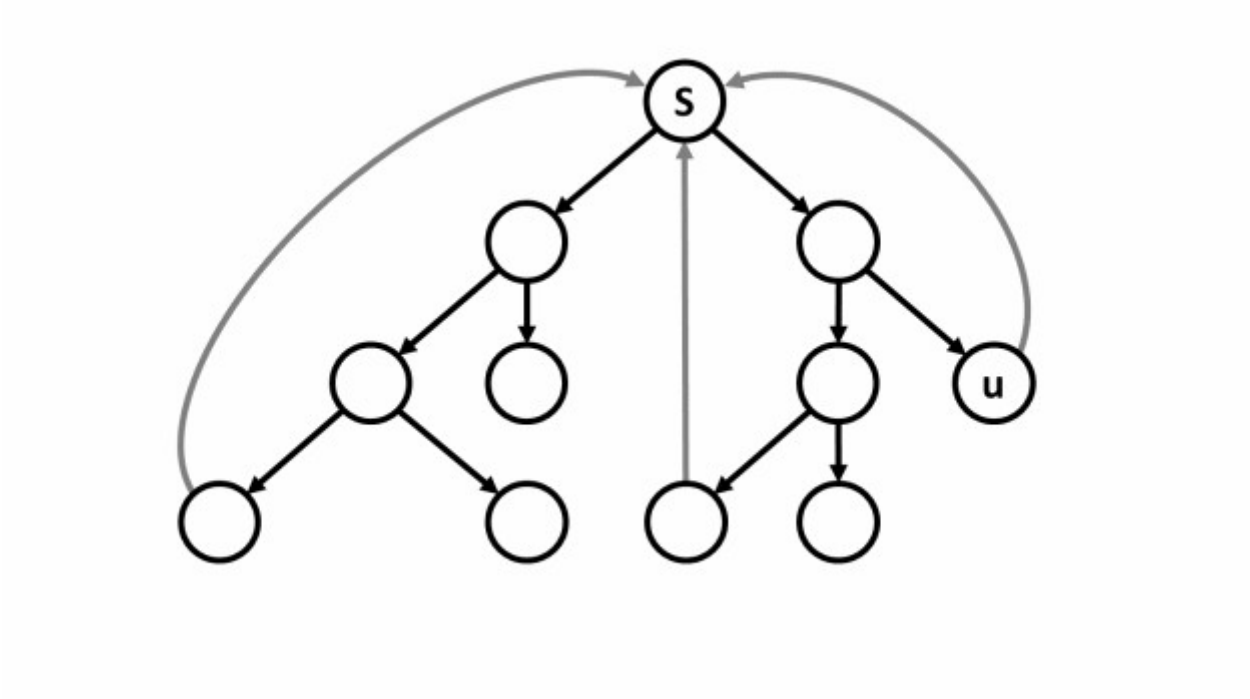
Phân tích

Theo yêu cầu đề bài, với mỗi thành phố, ta phải tìm độ dài con đường ngắn nhất bắt đầu và kết thúc ở cùng một thành phố đó.

Ta coi các thành phố là các đỉnh của đồ thị và các con đường $1$1 chiều là các cạnh có hướng của đồ thị.
Đồng nghĩa với việc, với mỗi đỉnh của đồ thị, ta phải tìm độ dài của **chu trình ngắn nhất** chứa đỉnh đó. Vì thứ tự duyệt các đỉnh của thuật toán BFSBFS luôn bắt đầu duyệt từ các đỉnh gần đỉnh nguồn nhất cho đến các đỉnh nằm ở xa đỉnh nguồn. Do đó, ta có thể áp dụng **tính chất** này của BFSBFS để có thể tìm ra đỉnh uu nằm gần đỉnh nguồn nhất sao cho có cạnh nối từ uu đến đỉnh nguồn.
Đường đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn đến đỉnh uu, rồi từ uu trở lại đỉnh nguồn bằng $1$1 cạnh có hướng, chính là **chu trình ngắn nhất** chứa đỉnh nguồn.

Mô tả

- Thực hiện BFSBFS bắt đầu tại đỉnh SS :



Thuật toán

Với mỗi đỉnh của đồ thị, ta thực hiện BFSBFS bắt đầu từ đỉnh đó.
Trong quá trình BFSBFS, ghi nhận khoảng cách từ đỉnh nguồn đến đỉnh đang duyệt, nếu gặp lại đỉnh nguồn thì đó là **chu trình ngắn nhất** chứa đỉnh nguồn. Lúc này, ta in ra độ dài chu trình và kết thúc BFSBFS, rồi bắt đầu thực hiện một BFSBFS mới từ đỉnh tiếp theo.

Cài đặt

Cấu trúc dữ liệu:

- Hằng số `maxN = 210`.
- Mảng `visit[]` - Mảng đánh dấu các đỉnh đã thăm.
- Mảng `d[]` - Mảng lưu lại khoảng cách từ đỉnh nguồn đến mọi đỉnh.
- Vector `g[]` - Danh sách cạnh kề của mỗi đỉnh.
- Hàng đợi `q` - Chứa các đỉnh sẽ được duyệt theo thứ tự ưu tiên chiều rộng.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int maxN  = 210;

int n;
int visit[maxN], d[maxN];
vector <int> g[maxN];

int bfs(int s) {
    fill_n(d, n + 1, 0);
    fill_n(visit, n + 1, false);

    queue <int> q;
    q.push(s);
    visit[s] = true;
    while (!q.empty()) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        for (auto v : g[u]) {

            // Nếu gặp lại đỉnh nguồn, trả ra độ dài chu trình và kết thúc BFS
            if (v == s) return d[u] + 1;

            if (!visit[v]) {
                d[v] = d[u] + 1;
                visit[v] = true;
                q.push(v);
            }
        }
    }
    return 0;
}

int main() {
    cin >> n;
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
```

```
        for (int j = 1; j <= n; ++j) {
            int h;
            cin >> h;
            if (h) g[i].push_back(j);
        }

    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        int ans = bfs(i);
        if (ans) cout << ans << '\n';
        else cout << "NO WAY\n";
    }
}
```

Đánh giá

Từ bài toán này, ta có thể áp dụng để **tìm chu trình ngắn nhất trong đồ thị có hướng không trọng số** bằng cách lấy ra chu trình ngắn nhất trong tất cả các chu trình chứa mỗi đỉnh (nhiều nhất một chu trình từ mỗi BFSBFS bắt đầu từ $1$1 đỉnh).

Độ phức tạp

Theo đề bài, đồ thị ban đầu được biểu diễn bằng **ma trận kề**. Nên để tối ưu về mặt thời gian, ta sẽ chuyển đổi cách biểu diễn đồ thị thành **danh sách kề**.

Theo cách tính toán độ phức tạp thông thường, hàm BFSBFS sẽ mất $O(N+|E|)$O(N+|E|). Với $|E|$|E| là số cạnh của đồ thị. Trong **trường hợp xấu nhất**, mỗi đỉnh đều có cạnh nối tới tất cả các đỉnh của đồ thị (đồng nghĩa, $H_{ij}=1$Hij=1 với $1\leq i,j\leq N$1≤i,j≤N), khi đó, số lượng cạnh của đồ thị là N^2N2.

Vì với mỗi đỉnh của đồ thị, ta phải gọi lại hàm BFSBFS. Nên nhìn chung, độ phức tạp của thuật toán là $O(N^3)$O(N3).

Ứng dụng BFS để tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số 0 hoặc 1

Bài toán 7

REVERSE - Chef and Reversing

Đề bài

Cho một đồ thị có hướng NN đỉnh và MM cạnh $(1\leq N,M\leq 10^5)$(1≤N,M≤105). Tìm số cạnh ít nhất cần phải đảo chiều để tồn tại đường đi từ đỉnh $1$1 cho đến đỉnh NN.

Các đỉnh được đánh số từ $1$1 đến NN. Đồ thị có thể có nhiều cạnh nối giữa một cặp đỉnh. Và có thể tồn tại cạnh nối từ một đỉnh đến chính nó *(đồ thị có thể có khuyên)*.

Phân tích

Gọi đồ thị ban đầu là GG.

Ta sẽ thêm các **cạnh ngược** của mỗi cạnh ban đầu trong đồ thị GG (nghĩa là, với mỗi cạnh $u\to v$u→v của đồ thị, ta sẽ thêm cạnh $v\to u$v→u vào). Cho các **cạnh ngược** có trọng số bằng $1$1 và tất cả các cạnh ban đầu có trọng số bằng $0$0. Khi đó, ta sẽ có được đồ thị mới là đồ thị G'G′.

Độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh $1$1 cho đến đỉnh NN trong đồ thị G'G′ chính là đáp án của bài toán.

- **Chứng minh:** Trong đồ thị G', xét từng cạnh trên một đường đi từ 1 đến N. Nếu cạnh đó có trọng số là 0 thì đã tồn tại cạnh đó trên đồ thị G ban đầu, còn nếu trọng số là 1 thì cạnh ngược lại của nó tồn tại trong đồ thị G. Khi đó ta sẽ phải đảo chiều cạnh đó. Nhận thấy sau khi xét toàn bộ các cạnh, ta sẽ thu được một đường đi từ 1 đến N, và số cạnh ta phải đảo chiều chính là số cạnh 1 trong đường đi đó.
  Ta sử dụng **kĩ thuật 0-1 BFS** :
- Nó có tên gọi như vậy vì **kĩ thuật 0-1 BFS** thường được sử dụng để tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số 0 hoặc 1.
- Khi trọng số của các cạnh bằng 0 hoặc 1, thuật toán BFS thông thường sẽ trả ra kết quả **sai**, vì thuật toán BFS thông thường chỉ **đúng** trong đồ thị có trọng số của các cạnh **bằng nhau**.
  Ta có thể chỉnh sửa một chút từ thuật toán BFS để có được **kĩ thuật 0-1 BFS** :
- Trong kĩ thuật này, thay vì sử dụng mảng *bool* để đánh dấu lại các đỉnh đã duyệt, ta sẽ kiểm tra điều kiện **khoảng cách ngắn nhất**. Nghĩa là, trong quá trình BFS, với mỗi đỉnh v kề với u, đỉnh v chỉ được đẩy vào hàng đợi khi và chỉ khi đường đi đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn đến v lớn hơn đường đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn đến u cộng với trọng số cạnh $u \to v$ ($u \to v$) .
- Ta sẽ sử dụng một hàng đợi hai đầu *(deque)* thay cho hàng đợi *(queue)* để lưu trữ các đỉnh. Trong quá trình BFS, nếu ta gặp một cạnh có trọng số bằng 0 thì đỉnh sẽ được đẩy vào **phía trước** của hàng đợi hai đầu. Ngược lại, nếu ta gặp một cạnh có trọng số bằng 1 thì đỉnh sẽ được đẩy vào **phía sau** của hàng đợi hai đầu.
  - **Giải thích:** Ta *push* đỉnh kết nối bởi cạnh có trọng số 0 vào đầu *deque* để giữ cho hàng đợi luôn được sắp xếp theo khoảng cách từ đỉnh nguồn tại mọi thời điểm. Bởi vì, các đỉnh ở gần đầu *queue/deque* hơn thì nó phải có khoảng cách từ gốc gần hơn, mà đỉnh ta *push* vào đầu có khoảng cách bằng chính khoảng cách đỉnh vừa *pop* ra, nên *deque* lúc này thỏa mãn tính chất của *queue* trong BFS.
  - Từ tính chất trên, ta có nhận xét sau: **Kĩ thuật 0-1 BFS** vẫn đúng cho trường hợp đồ thị có trọng số cạnh là 0 hoặc x $(x \geq 0)$($x \geq 0$).
    Cách tiếp cận của **kĩ thuật 0-1 BFS** khá giống với thuật toán BFS + Dijkstra.

Cài đặt

Cấu trúc dữ liệu:

- Hằng số `inf = 1000000000`.
- Hằng số `maxN = 100007`.
- Mảng `d[]` - Mảng lưu lại khoảng cách ngắn nhất từ đỉnh nguồn đến mỗi đỉnh.
- Vector `g[]` - Danh sách cạnh kề của mỗi đỉnh.
- Hàng đợi hai đầu `q` - Chứa các đỉnh sẽ được duyệt theo thứ tự.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int inf  = 1e9;
const int maxN = 1e5 + 7;

int n, m;
int d[maxN];
vector < pair <int, int> > g[maxN];
```

```cpp
void bfs(int s) {
    fill_n(d, n + 1, inf);
    deque <int> q;
    q.push_back(s);
    d[s] = 0;
    while (!q.empty()) {
        int u = q.front();
        q.pop_front();

        if (u == n) return;

        for (auto edge : g[u]) {
            int v = edge.second;
            int w = edge.first;

            if (d[v] > d[u] + w) {
                d[v] = d[u] + w;
                if (w) q.push_back(v);
                else q.push_front(v);
            }
        }
    }
    d[n] = -1;
}

int main() {
    cin >> n >> m;
    while (m--) {
        int u, v;
        cin >> u >> v;
        g[u].push_back({0, v});
        g[v].push_back({1, u});
    }
    bfs(1);
    cout << d[n];
}
```

Đánh giá

Ta cũng có thể giải quyết bài toán này bằng thuật toán $\mathrm{Dijkstra}$Dijkstra với độ phức tạp $O(M \times \log N)$O(M×logN).

Trong khi sử dụng BFSBFS, độ phức tạp sẽ là $O(N+M)$O(N+M). Nó tuyến tính và hiệu quả hơn thuật toán $\mathrm{Dijkstra}$Dijkstra.

Bài tập áp dụng

KATHTHI - KATHTHI
Chamber of Secrets - 173B
Three States - 590C Codeforces
Olya and Energy Drinks - 877D Codeforces
UVA - Ocean Currents

UVA - Colliding Traffic
Tram
Jailbreak
Minimum Cost to Make at Least One Valid Path in a Grid

Ứng dụng BFS để kiểm tra đồ thị hai phía (Bipartite graph)

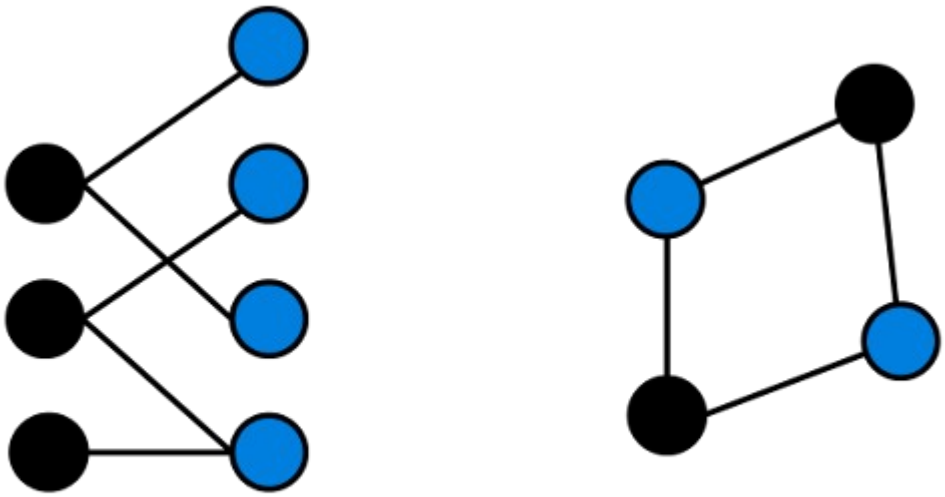
Định nghĩa

Trong *Lý thuyết đồ thị*, **đồ thị hai phía** (**đồ thị lưỡng phân** hay **đồ thị hai phần** - *Bipartite graph*) là một đồ thị đặc biệt, trong đó tập hợp các đỉnh của đồ thị có thể được chia làm hai tập hợp **không** giao nhau thỏa mãn điều kiện **không** có cạnh nối hai đỉnh bất kỳ thuộc cùng một tập.

Có rất nhiều tình huống thực tế có thể mô phỏng bằng đồ thị hai phía:

- **Ví dụ:** Muốn biểu diễn mối quan hệ giữa một nhóm học sinh và một nhóm các trường học, ta có thể xây dựng một đồ thị với mỗi một học sinh và mỗi trường học là một đỉnh. Giữa một người A và một trường X sẽ có một cạnh nếu như A đã hoặc đang đi học ở trường X. Kiểu đồ thị này sẽ là một **đồ thị hai phần**, với một nhóm đỉnh là người và nhóm kia là trường; sẽ không có cạnh nối giữa hai người hoặc giữa hai trường.

  Một tính chất thú vị của đồ thị hai phía là ta có thể tô màu các đỉnh đồ thị với hai màu sao cho không có hai đỉnh nào cùng màu kề nhau.



Bipartite graph

Bạn có thể tìm hiểu thêm về **đồ thị hai phía** tại **đây**.

Bài toán 8

Bicoloring - UVA 10004

Đề bài

Cho một đồ thị vô hướng liên thông gồm n đỉnh $(0<n<200)$(0<n<200). Các đỉnh được đánh số từ 0 đến $n-1$n−1. Và không tồn tại cạnh nối từ một đỉnh đến chính nó *(đồ thị không có khuyên)*.

Bạn hãy kiểm tra xem đồ thị có thể được tô bằng 2 màu hay không. Nghĩa là ta có thể gán màu (từ một bảng gồm 2 màu) cho mỗi đỉnh của đồ thị theo cách sao cho không có 2 đỉnh nào kề cạnh nhau có cùng màu.

Phân tích

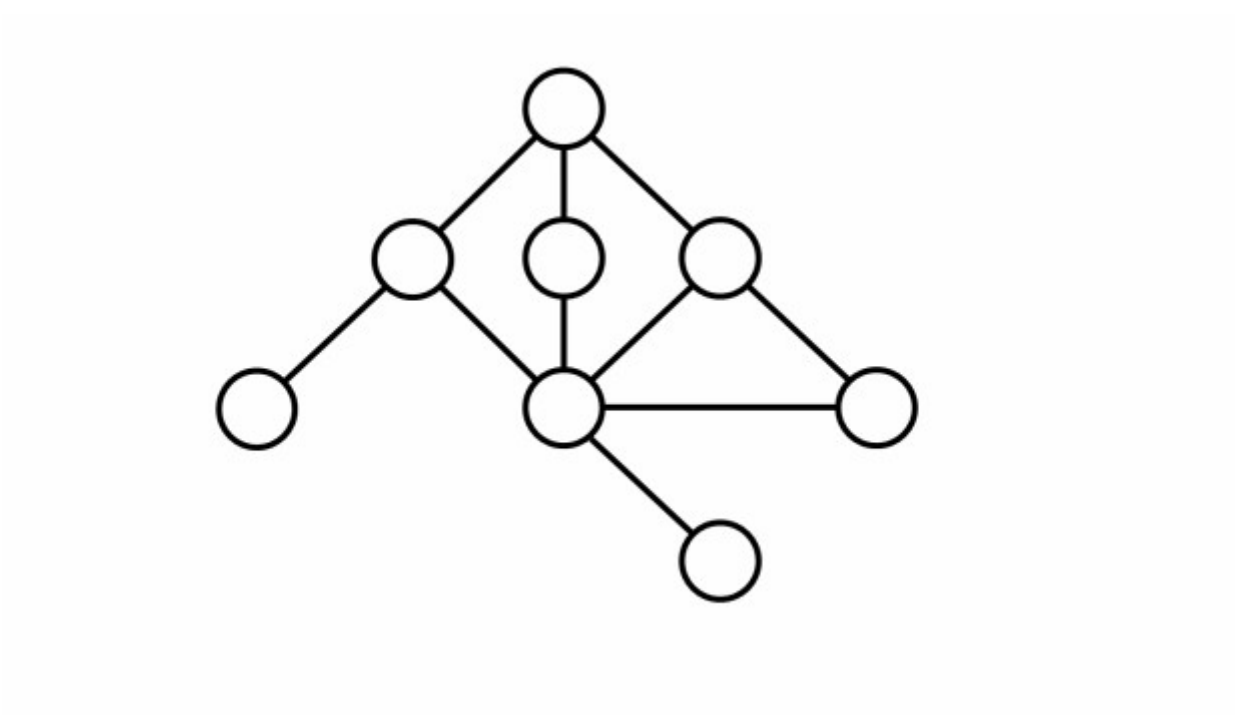
Theo đề bài, ta phải kiểm tra xem 1 đồ thị có thể được tô bằng 2 màu sao cho không có 2 đỉnh nào kề cạnh nhau có cùng màu hay không. Điều đó tương đương với việc kiểm tra xem đồ thị đã cho có phải là **đồ thị hai phía** hay không.

Ta có thể dùng thuật toán BFSBFS để kiểm tra xem một đồ thị có phải đồ thị hai phía, bằng cách tìm kiếm từ một đỉnh bất kì và tô màu cho các đỉnh được xem xét. Nghĩa là, ta tô **màu đen** cho đỉnh gốc, tô **màu xanh** cho tất cả các đỉnh kề đỉnh gốc, tô **màu đen** cho tất cả các đỉnh kề với một đỉnh kề đỉnh gốc, và tiếp tục như vậy. Nếu ở một bước nào đó, hai đỉnh kề nhau có cùng màu, thì đồ thị **không phải** là hai phía. Nếu quá trình tìm kiếm kết thúc mà điều này **không** xảy ra thì đồ thị là hai phía.

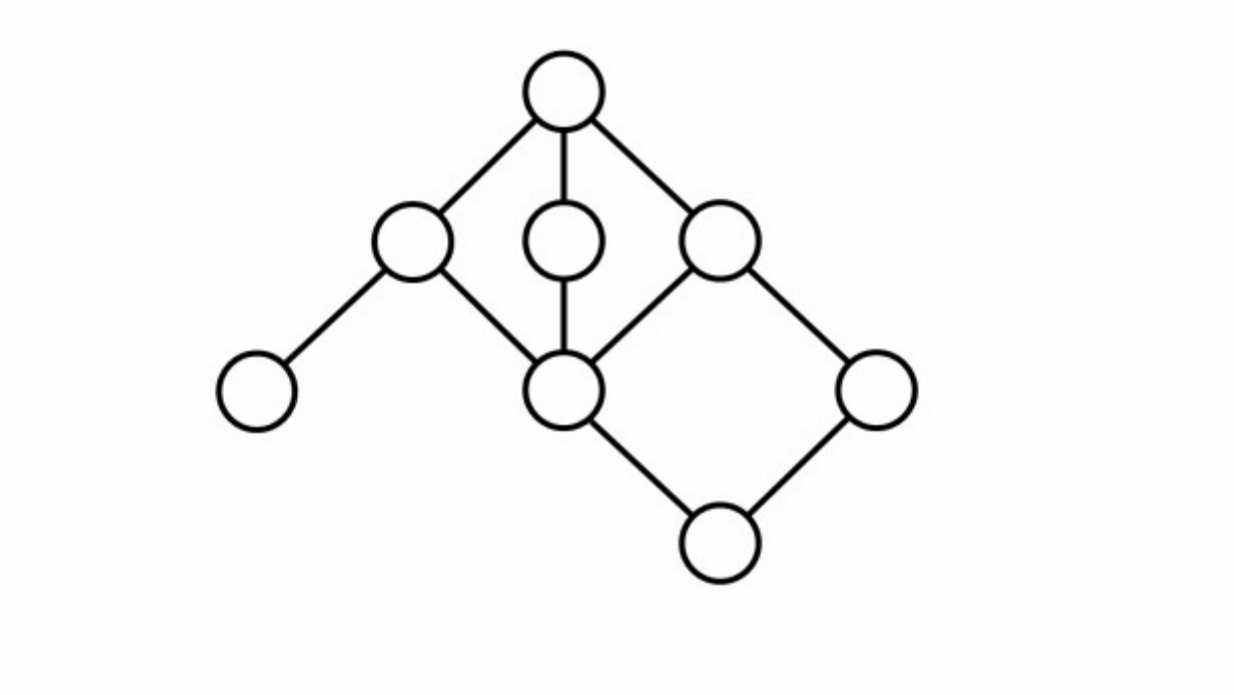
Thuật toán này đúng với đồ thị liên thông. Với đồ thị gồm nhiều thành phần liên thông thì ta phải duyệt từng thành phần liên thông một như thuật toán tìm số thành phần liên thông và áp dụng thủ tục BFSBFS tương ứng.

Mô tả

- Ví dụ mô tả đồ thị **không phải** là đồ thị hai phía:



- Ví dụ mô tả **đồ thị hai phía**:



Thuật toán

Để tô màu đồ thị, ta sẽ sử dụng 11 mảng để lưu trạng thái của mỗi đỉnh. Có 33 trạng thái:

- **Trạng thái -1:** Đỉnh vẫn chưa được tô màu *(đỉnh chưa được duyệt)*.
- **Trạng thái 0:** Đỉnh được tô màu đen.
- **Trạng thái 1:** Đỉnh được tô màu xanh.

Ban đầu, tất cả các đỉnh của đồ thị đều ở **trạng thái -1**.

Ta sử dụng BFSBFS để tô màu đồ thị:

- Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ và tô màu đen cho đỉnh đó.
- Với mỗi đỉnh vv kề với đỉnh đang xét uu, nếu đỉnh vv chưa được duyệt, ta sẽ tô màu vv ngược với màu của uu (nếu uu là màu xanh, ta sẽ tô vv màu đen và ngược lại).
- Nếu uu đã được thăm trước đó và có cùng màu với vv, ta sẽ dừng thuật toán và kết luận đồ thị **không phải** đồ thị hai phía.

Cuối cùng, nếu ta có thể tô màu tất cả các đỉnh mà **không** vi phạm quy tắc tô màu, ta có thể kết luận đồ thị là hai phía.

Cài đặt

Cấu trúc dữ liệu:

- Hằng số `maxN = 210`.
- Mảng `color[]` - Mảng lưu trạng thái tô màu của mỗi đỉnh.
- Vector `g[]` - Danh sách cạnh kề của mỗi đỉnh.
- Hàng đợi `q` - Chứa các đỉnh sẽ được duyệt theo thứ tự ưu tiên chiều rộng.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int maxN  = 210;

int n, l;
int color[maxN];
```

```
vector <int> g[maxN];

bool checkBipartiteGraph() {
    fill_n(color, n + 1, -1);

    queue <int> q;
    q.push(0);
    color[0] = 0;
    while (!q.empty()) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        for (auto v : g[u]) {
            if (color[v] == color[u]) return false;
            if (color[v] == -1) {
                color[v] = !color[u];
                q.push(v);
            }
        }
    }
    return true;
}

int main() {
    while (cin >> n){
        if (!n) return 0;

        cin >> l;
        while (l--) {
            int u, v;
            cin >> u >> v;
            g[u].push_back(v);
            g[v].push_back(u);
        }
        if (!checkBipartiteGraph()) cout << "NOT ";
        cout << "BICOLORABLE.\n";

        for (int i = 0; i < n; ++i) g[i].clear();
    }
}
```

Đánh giá

Ta cũng có thể sử dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu *(Depth First Search – DFS)* để kiểm tra đồ thị hai phía.

Độ phức tạp

Độ phức tạp của thuật toán là $O(t \times (n+l))$O(t×(n+l)). Với tt là số lượng bộ test.