

# Toán rời rạc - Buổi 1 - Bài tập

1. Ví dụ. (tự làm) Chứng minh

$$(\neg(x \wedge y) \vee z) \rightarrow (y \rightarrow z) \Leftrightarrow y \rightarrow (x \vee z),$$

trong đó  $x, y, z$  là các biến mệnh đề.

$$\text{Câu 1: } \neg(x \wedge y) \vee z$$

$$= \neg x \vee \neg y \vee z = A$$

$$y \rightarrow z = \neg y \vee z = B,$$

2. Ví dụ. (tự làm) Cho các biến mệnh đề  $p, q, r$ . Chứng minh  $A \Leftrightarrow B$  trong đó

$$A = (p \rightarrow q) \wedge \neg(r \rightarrow q) \text{ và } B = \neg(r \rightarrow (p \vee q)).$$

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &= (\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg r \vee q) \rightarrow (\neg(r \rightarrow (p \vee q))) \\ &= (\neg p \vee q) \wedge (r \wedge \neg q) \rightarrow (\neg(\neg r \vee (p \vee q))) \\ &= (\neg p \vee q) \wedge (r \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg(p \vee q)) \\ &= (\neg p \vee q) \wedge (r \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg p \wedge \neg q) \\ &= (\neg p \vee q) \wedge (r \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg p \wedge \neg q) \\ &= (\neg p \vee q) \wedge (r \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg p \wedge \neg q) \\ &= (\neg p \vee q) \wedge (r \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg p \wedge \neg q) \\ &= (\neg p \vee q) \wedge (r \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg p \wedge \neg q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Câu 2: } &(\neg p \vee q) \wedge (r \wedge \neg q) \\ &= (\neg p \vee q) \wedge r \wedge \neg q \\ &= (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee (q \wedge r \wedge \neg q) \\ &= (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee 0 = \neg p \wedge r \wedge \neg q \\ &= \neg(p \vee q) \wedge r = \neg(r \rightarrow (p \vee q)) \end{aligned}$$

Câu 3.

Ví dụ. (tự làm) Cho 3 biến mệnh đề  $x, u$  và  $v$ . Đặt

$$A = (u \rightarrow \neg x) \rightarrow (v \rightarrow \neg x) \text{ và } B = [x \rightarrow (v \rightarrow u)].$$

Chứng minh  $A \Leftrightarrow B$ .

$$\begin{aligned} A &= (\neg u \vee \neg x) \rightarrow (\neg v \vee \neg x) = (u \vee \neg v \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg v \vee \neg x) \\ &= \neg(\neg u \vee \neg x) \vee (\neg v \vee \neg x) = x \vee (\neg v \vee \neg x) \\ &= (x \wedge \neg x) \vee \neg v \vee \neg x = \neg v \vee \neg x \\ &= \neg(v \wedge x) = \neg(v \rightarrow u) \end{aligned}$$

Câu 4. Ví dụ. (tự làm) Cho 3 biến mệnh đề  $x, y$  và  $z$ . Đặt

$$A = [(x \vee y) \rightarrow (x \vee z)], B = [\neg x \rightarrow (y \rightarrow z)].$$

a) Chứng minh  $A \Leftrightarrow B$ .

b) Nếu  $y$  sai thì chân trị của  $A$  ra sao ?

$$\begin{aligned} A &= \neg(x \vee y) \vee (x \vee z) = (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \vee z) \\ &= (\neg x \vee z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg y) = \neg x \vee (z \vee \neg y) \\ &= \neg x \vee (y \rightarrow z) = \neg x \rightarrow (y \rightarrow z) \end{aligned}$$

y Sai  $\Rightarrow (y \rightarrow z)$  đúng.  $A = x \vee \text{đúng} = \text{đúng}$   
 Câu 5.

**Ví dụ.** (tự làm) Cho 3 biến mệnh đề  $p, q$  và  $r$ . Chứng minh

$$\{(p \rightarrow \neg q) \rightarrow [(p \rightarrow r) \rightarrow \neg q]\} \Leftrightarrow (q \rightarrow p)$$

$$\begin{aligned} &= (\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg(p \rightarrow r) \vee \neg q) \\ &= \neg(\neg p \vee \neg q) \vee ((p \wedge \neg r) \vee \neg q) \\ &= (p \wedge q) \vee [(p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg q)] \\ &= \underbrace{[(p \wedge q) \vee (p \vee \neg q)]}_C \wedge \underbrace{[(p \wedge q) \vee (\neg r \vee \neg q)]}_D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (p \wedge q) \vee p \vee \neg q \\ &= (p \vee p \vee \neg q) \wedge (q \vee p \vee \neg q) \\ &= p \vee \neg q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (p \wedge q) \vee \neg r \vee \neg q \\ &= (p \vee \neg r \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg q) \\ &= p \vee \neg q \vee r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C \wedge D = p \vee \neg q = q \rightarrow p$$

Câu 6.

**Ví dụ.** (tự làm) Cho 3 biến mệnh đề  $p, q$  và  $r$ . Đặt  $A = [(r \vee q) \rightarrow q]$ ,  $B = [p \rightarrow (p \wedge q)]$ ,  $C = (A \rightarrow B)$  và  $D = [\neg q \rightarrow (p \rightarrow r)]$ . Dùng các luật logic để rút gọn  $A$  và  $B$  rồi chứng minh  $C \Leftrightarrow D$ .

$$\begin{aligned} A &= \neg(r \vee q) \vee q = (\neg r \wedge \neg q) \vee q \\ &= (\neg r \vee q) \wedge (\neg q \vee q) = \neg r \vee q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \neg p \vee (p \wedge q) = (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \\ &= \neg p \vee q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= A \rightarrow B = (r \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q \\ &= (r \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \\ &= q \vee (\neg p \vee r) = q \vee (p \rightarrow r) = \neg q \rightarrow (p \rightarrow r) \end{aligned}$$

Câu 7.

**Ví dụ.** (tự làm) Cho các biến mệnh đề  $p, q$  và  $r$ . Chứng minh

$$(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow r \rightarrow (p \rightarrow q).$$

$$= \neg p \vee \neg r \vee (q \wedge r) = (\neg p \vee \neg r \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee r)$$

$$= \neg p \vee \neg r \vee q = \neg r \vee (\neg p \vee q) = r \rightarrow (p \rightarrow q)$$

Câu 8.

**Ví dụ.** (tự làm) Cho các biến mệnh đề  $p, q$  và  $r$ . Đặt

$$A = [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \text{ và } B = p \rightarrow (q \vee r).$$

Chứng minh  $A \Leftrightarrow B$ .

$$A = (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \vee r)$$

$$= (p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$$

$$= q \vee \neg p \vee r = \neg p \vee (q \vee r) = p \rightarrow (q \vee r)$$