Các phương pháp chứng minh

- Chứng minh trực tiếp
- Chứng minh gián tiếp
- Chứng minh phản chứng
- Chứng minh theo từng trường hợp

1. Chứng minh trực tiếp.
   - Để cm $A \to B$, ta cm A đúng $\to$ B đúng
2. Chứng minh gián tiếp.
   - $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow B \vee \neg A \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

   $\Rightarrow$ Để chứng minh $A \to B$, ta có thể cm $\neg B \to \neg A$
3. Chứng minh phản chứng

Ta có

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B.$$

Suy ra

$$\neg(A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B.$$

Như vậy để chứng minh từ A đúng suy ra B đúng, ta có thể giả sử B sai. Sau đó dùng các tiền đề, các luật logic, các quy tắc suy luận,... chứng tỏ điều này mâu thuẫn.

Ví dụ. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Giải. Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, nghĩa là $\sqrt{2}$ có thể biểu diễn thành

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Ta có thể giả sử m, n là hai số nguyên tố cùng nhau. Bình phương 2 vế ta có

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Từ đây suy ra m là số chẵn (vì bình phương số lẻ là số lẻ). Do đó $m = 2k$ (với $k \in \mathbb{Z}$). Ta có

$$(2k)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2n^2.$$

Suy ra $n^2 = 2k^2$. Như vậy n cũng là một số chẵn. Do m, n đều là số chẵn nên chúng không là số nguyên tố cùng nhau (mâu thuẫn) ∎

Ví dụ.(tự làm) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng khác nhau cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

$A \to B$

Phản chứng: $\neg(A \to B) = A \wedge \neg B$

Nghĩa là cm 2 đt khác nhau cùng // với đt$_3$ và 2 đt$_{1,2}$ không // với nhau

Gọi $A = d_1 \cap d_2$.

theo tiên đề Euclide, chỉ $\exists!$ 1 đt đi qua A và // d_3.

Mà theo đề bài thì $\exists$ 2 đt // với d_3 và cùng đi qua A $\Rightarrow$ mâu thuẫn

4. Chứng minh theo trường hợp.

$(A \vee B) \to C \Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee C$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C \Leftrightarrow (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$

$\Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

Ví dụ. Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ luôn chia hết cho 3 với mọi số nguyên n.

Giải. Chia hai trường hợp

Trường hợp 1. n chia hết cho 3, hiển nhiên $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

Trường hợp 2. n không chia hết cho 3, khi ấy ta có thể viết $n = 3k \pm 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ nào đó. Ta có

$$n^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3(3k^2 \pm 2k + 1).$$

Suy ra $n(n^2 + 2)$ cũng chia hết cho 3.

Như vậy $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n.

CM: $n = 3k \pm 2, \forall k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$n^2 + 2 = 9k^2 \pm 12k + 4 + 2 = 3(3k^2 \pm 4k + 2) \vdots 3$

* Nguyên lí quy nạp $<$ Quy nạp yếu / Quy nạp mạnh

- Quy nạp yếu: Cấp 3.

- Quy nạp mạnh:

Quy nạp mạnh

Gồm 2 bước:

- **Bước cơ sở**: Chỉ ra $P(N_0) \wedge P(N_0+1) \wedge \ldots \wedge P(K_0)$ đúng.
- **Bước quy nạp mạnh**: Với $k \geq K_0$, chứng minh nếu $P(m)$ đúng với mọi $m \leq k$ thì $P(k+1)$ đúng.

Ví dụ. Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được thành tích những thừa số nguyên tố.

Giải. Gọi $P(n)$ = "n phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố"

- **Bước cơ sở:** Hiển nhiên $P(2)$ đúng vì $2 = 2$ là số nguyên tố.
- **Bước quy nạp mạnh:** Với $k \geq 2$, giả sử $P(m)$ đúng với mọi $m \leq k$, tức là, với $1 < m \leq k$ thì m phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố.

Ta cần chứng minh $P(k+1)$ đúng, tức là $k+1$ phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố.

- Nếu $k+1$ là số nguyên tố thì $P(k+1)$ đúng,
- Ngược lại, nếu $k+1$ không là số nguyên tố. Gọi p là một ước nguyên tố của $k+1$. Khi đó $k+1 = p.a$ với $1 < p, a < k+1$. Vì a nhỏ hơn $k+1$ nên theo giả thiết quy nạp a phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố.

Do đó $k+1$ phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố. ■

Ví dụ.(tự làm) Cho dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ được định bởi

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ và } a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng $a_n = 2^n - 1$ với mọi $n \geq 0$.

Giải

- Với $n = 0$ $a_0 = 2^0 - 1 = 0$ (đúng)

  $n = 1$ $a_1 = 2 - 1 = 1$ (đúng)
- Với $k \geqslant 2$ giả sử với $n = m$ đúng với $0 \leq m \leq k$.

$\Rightarrow a_m = 3a_{m-1} - 2a_{m-2} = 2^m - 1$

- Với $n = k+1$, prove $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 2^{k+1} - 1$

$$a_{k+1} = 3(2^k - 1) - 2.(2^{k-1} - 1)$$
$$= 3.2^k - 3 - 2^k + 2$$
$$= 2.2^k - 1 = 2^{k+1} - 1 \text{ (đpcm)}$$

$\Rightarrow$ ___