第2章　述語論理

- 個体定数: a, b, c など
- 個体変数: x, y, z など
- 関数記号: f, g, h など
- 述語記号: P, Q, R など

項の (再帰的) 定義

(1) 個体定数および個体変数は項である．

(2) $t_1, \ldots t_n$ が項で，f が関数記号のとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ も項である．

述語論理式の (再帰的) 定義

(1) 命題定数は述語論理式である．

(2) $t_1, \ldots t_n$ が項で，P が述語記号のとき，$P(t_1, \ldots, t_n)$ は述語論理式 (素式，原子論理式) である．

(3) A, B が述語論理式のとき，以下も述語論理式である．

$$(\neg A), \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \Rightarrow B)$$

(4) A が述語論理式で，x が個体変数のとき，以下も述語論理式である．

$$\begin{array}{ll} (\forall x A) & (\text{全称, for all, any: すべての } x \text{ について } A) \\ (\exists x A) & (\text{存在, exists, some: ある } x \text{ について } A) \end{array}$$

対象領域が有限なら，全称は連言で，存在は選言で表現できる．たとえば，対象領域 $D = \{a_1, \ldots, a_n\}$ とすると以下のようになる．

$$\begin{array}{rcl} \forall x P(x) & = & P(a_1) \wedge \cdots \wedge P(a_n) \\ \exists x P(x) & = & P(a_1) \vee \cdots \vee P(a_n) \end{array}$$

2.0.1　述語論理式のいくつかの性質

$$\begin{array}{cc} \forall x(A \wedge B) \equiv \forall x A \wedge \forall x B & \exists x(A \vee B) \equiv \exists x A \vee \exists x B \\ \neg \forall x A \equiv \exists x \neg A & \neg \exists x A \equiv \forall x \neg A \\ \neg \forall x(A \Rightarrow B) \equiv \exists x(A \wedge \neg B) & \neg \exists x(A \wedge B) \equiv \forall x(A \Rightarrow \neg B) \end{array}$$

Exercise 2.0.1　論理式による記述の練習 (別紙)

2.0.2 述語論理の節形式と導出原理

節形式 (clausal form)

- リテラル: 素式 (原子論理式) またはその否定.
- 節 (clause): 0 個以上のリテラルの集合. リテラルの選言の全称閉包を表す. (例: $\{P(x), \neg Q(x,y)\}$ は $\forall x \forall y(P(x) \vee \neg Q(x,y))$ を表す)
- 節集合: 0 個以上の節の集合. 節の連言を表す.

節形式への変換方法

(1) $A \Rightarrow B$ の形の論理式を $\neg A \vee B$ に変換する.

(2) ド・モルガンの法則および二重否定の法則を用いて, リテラル以外に $\neg$ が現れないように変換する.

(3) $\exists y$ があれば, その外側に現れている全称束縛されている変数を x_1, ..., x_n として, y を $f(x_1,\ldots,x_n)$ (スコーレム関数) で置き換える. ただし f は論理式中に現れていない新しい関数記号である.

(4) すべての変数名が異なるように, 変数名を付け換える.

(5) 全称記号, 存在記号を一番前に移す (冠頭形).

(6) 分配法則を用いて, 連言標準形に変換する.

導出

C_1, C_2 を節とし, それぞれの変数に適当な項を代入すると $\{P_1,\ldots,P_m\}$, $\{Q_1,\ldots,Q_n\}$ となり, P_1 が原子論理式で Q_1 がその否定となっているとする (すなわち $\neg P_1 = Q_1$). このとき節 $C = \{P_2,\ldots,P_m,Q_2,\ldots,Q_n\}$ を得ることを導出と呼び, C を導出節と呼ぶ. C はリテラルの集合であるので, 同一のリテラルは一つにまとめられる点に注意すること.

述語論理に対しても, 導出原理は健全かつ完全である.

Exercise 2.0.2 以下を導出法で証明せよ (Kowalski 著「論理による問題の解法」より).

> すべてのキノコ (Fungus) は食用キノコ (Mushroom) であるか毒キノコ (Toadstool) である. すべてのイグチ属キノコ (Boletus) はキノコである. すべての毒キノコは毒である. イグチ属キノコは食用キノコではない. このとき, すべてのイグチ属キノコは毒であることを示せ.

Exercise 2.0.3 以下を導出法で証明せよ (Genesereth, Nilsson 著「人工知能基礎論」より).

> もしも講座がやさしいものであれば, 幸せな受講生が存在する. もしも講座に期末試験があるのであれば, すべての受講生は不幸である. このとき, 期末試験のある講座はやさしくないことを示せ.

述語論理式による記述の練習

対象領域は，人間の集合とする．

$$\begin{aligned} S(x) &\equiv \text{“}x\text{ は学生である”} \\ T(x) &\equiv \text{“}x\text{ は教師である”} \\ L(x) &\equiv \text{“}x\text{ は怠け者である”} \\ H(x) &\equiv \text{“}x\text{ は幸福である”} \\ Q(x,y) &\equiv \text{“}x\text{ は }y\text{ を好きだ”} \end{aligned}$$

論理式	意味
$\forall x H(x)$	すべての人は幸福である．
	すべての人は怠け者である．
$\exists x L(x)$	怠け者の人がいる．ある人は怠け者だ．
$\exists x H(x)$	
$\neg\exists x L(x)$	怠け者の人はいない．
$\forall x \neg L(x)$	すべての人は怠け者でない．
	すべての人は不幸である．
$\neg\forall x H(x)$	すべての人が幸福，ということではない．
$\exists x \neg H(x)$	幸福でない人がいる．不幸な人がいる．
$\exists x \neg L(x)$	

論理式	意味
$\exists x(S(x) \wedge H(x))$	学生であり幸福な人がいる．幸福な学生がいる．
$\exists x(L(x) \wedge \neg H(x))$	怠け者であり不幸な人がいる．不幸な怠け者がいる．
$\forall x(S(x) \Rightarrow H(x))$	すべての人は，その人が学生ならば幸福である．すべての学生は幸福である．
	すべての教師は怠け者である．
$\forall x(L(x) \Rightarrow \neg H(x))$	
$\neg\exists x(S(x) \wedge H(x))$	幸福な学生はいない．
$\forall x(S(x) \Rightarrow \neg H(x))$	すべての学生は幸福でない．どんな学生も不幸である．
$\neg\forall x(S(x) \Rightarrow H(x))$	すべての学生が幸福，ということではない．学生がすべて幸福であるとは限らない．
$\exists x(S(x) \wedge \neg H(x))$	学生で幸福でない人がいる．不幸な学生がいる．
$\neg\exists x(T(x) \wedge L(x))$	
	すべての教師は怠け者でない．
	教師がすべて怠け者であるとは限らない．

論理式	意味
$\forall x(S(x) \Rightarrow (H(x) \wedge L(x)))$	すべての学生は，幸福かつ怠け者である．
$\forall x((T(x) \wedge L(x)) \Rightarrow H(x))$	すべての人は，その人が教師であり怠け者ならば，幸福である．すべての怠け者の教師は幸福である．
$\forall x(T(x) \Rightarrow (L(x) \Rightarrow H(x)))$	すべての人は，その人が教師のとき，その人が怠け者ならば幸福である．すべての怠け者の教師は幸福である．

論理式	意味
$\forall x \forall y Q(x,y)$	すべての人は，すべての人を好きだ．人類みな愛しあっている．
$\exists x \exists y Q(x,y)$	ある人は，ある人を好きだ．誰かが誰かを好きだ．
$\exists x \forall y Q(x,y)$	ある人は，すべての人を好きだ．マリア様みたいな人．
$\forall x \exists y Q(x,y)$	すべての人は，ある人を好きだ．誰にでも好きな人がいる．
$\forall y(T(y) \Rightarrow Q(x,y))$	x は，すべての教師を好きだ．
$\forall x \forall y(T(y) \Rightarrow Q(x,y))$	
	すべての学生は，すべての教師を好きだ．
	ある学生は，すべての教師を好きだ．すべての教師を好きな学生がいる．
$\exists y(T(y) \wedge Q(x,y))$	x は，ある教師を好きだ．x には好きな教師がいる．
	すべての学生は，ある教師を好きだ．どんな学生にも好きな教師がいる．
$\exists x(S(x) \wedge \exists y(T(y) \wedge Q(x,y)))$	
$T(y) \wedge \forall x(S(x) \Rightarrow Q(x,y))$	y は，全学生から好かれている教師である．
	全学生から好かれている教師は幸福である．
$\forall y(T(y) \Rightarrow ((\forall x(S(x) \Rightarrow Q(x,y))) \Rightarrow H(y)))$	
	怠け者は幸福な人が好きではない．
$\forall y((H(y) \wedge S(y)) \Rightarrow \neg Q(x,y))$	x は，
	怠け者の学生は幸福な学生が好きではない．
$\forall x((L(x) \wedge S(x)) \Rightarrow \forall y((L(y) \wedge T(y)) \Rightarrow Q(x,y)))$	
$\exists x(L(x) \wedge S(x) \wedge \forall y((L(y) \wedge T(y)) \Rightarrow Q(x,y)))$	
	x は，ある怠け者の教師が好きだ．x には，好きな怠け者の教師がいる．
	好きな怠け者の教師がいる学生は，みな怠け者である．