二階線形常微分方程式の数値計算

Chiu Takae

2016 年 3 月 12 日

二階線形常微分方程式

$$y'' + 10y' + 16y = 0 \tag{1}$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 0 \tag{2}$$

は減衰振動を表す。この微分方程式の厳密解は、$y = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入し、基本解を求めるという方法で求めることができる。その解は

$$y(t) = \frac{1}{3}(4\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-8t}) \tag{3}$$

である。この微分方程式を数値計算で解くことを考える。まず、上式を連立一階常微分方程式に変形する:

$$y_1' = y_2 \tag{4}$$
$$y_2' = -16y_1 + -10y_2 \tag{5}$$
$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0 \tag{6}$$

これにより通常の差分法で数値計算を行なうことができる。今回は 4 段 4 次ルンゲ=クッタ法を用いた。

独立変数 t の刻み幅 Δt を $0.01, 0.3$ としたときの解をそれぞれ Fig. 1,Fig. 2 に示す。実線が数値計算の結果、点線が厳密解である。

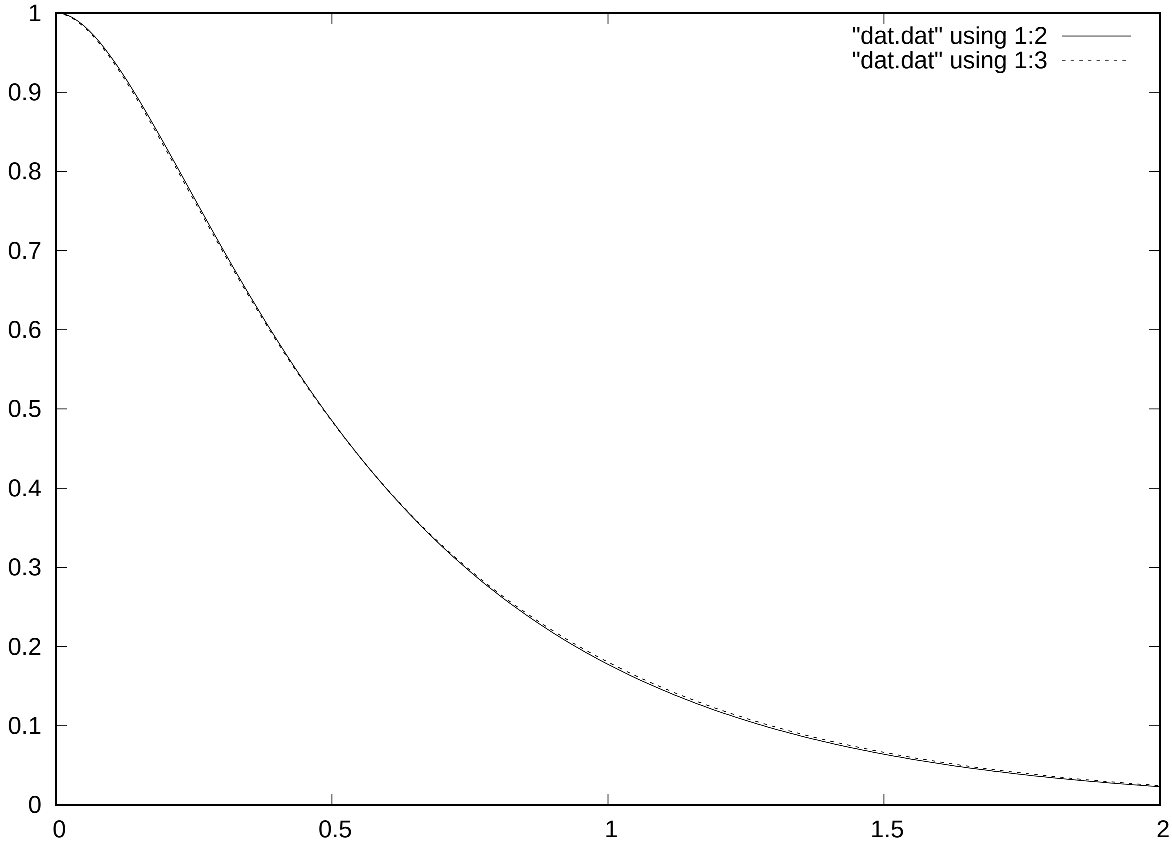

Fig.1　t-y のグラフ:厳密解と差分解 ($\Delta t = 0.01$)

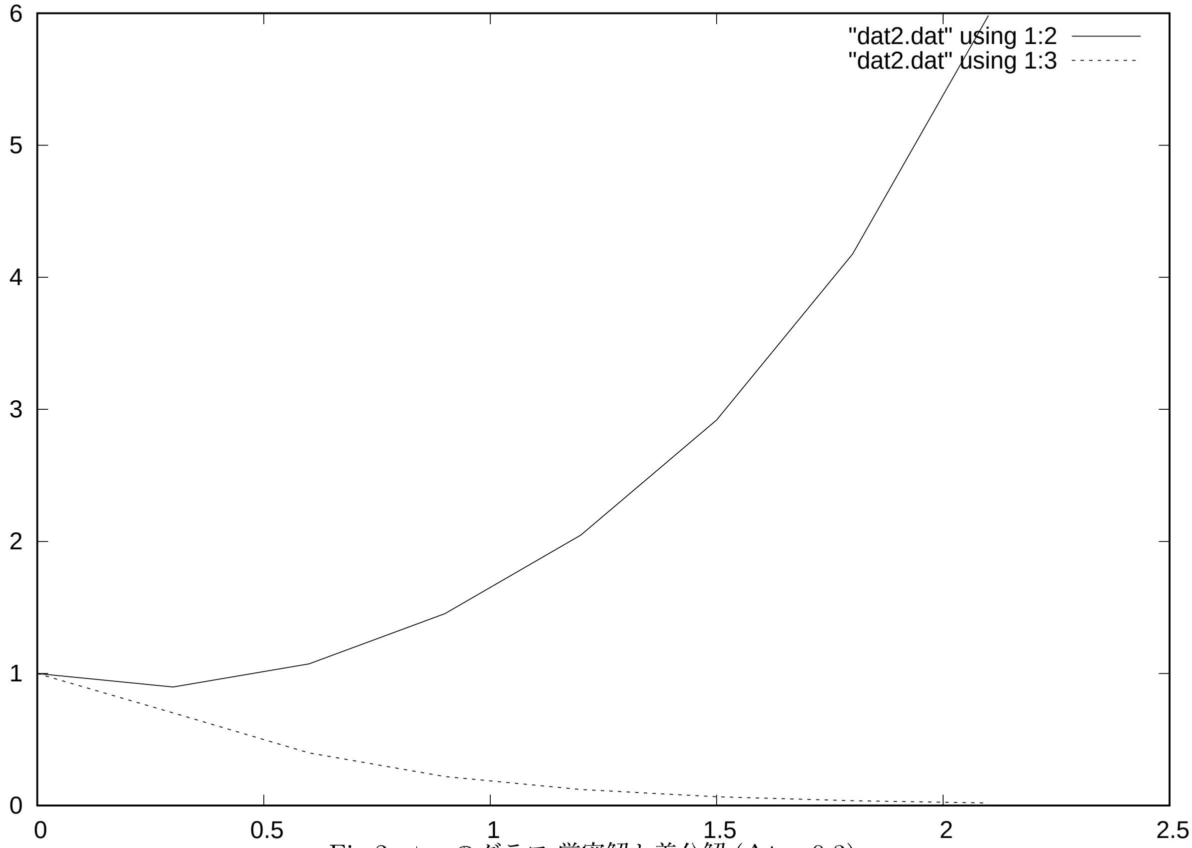

Fig.2　t-y のグラフ:厳密解と差分解 ($\Delta t = 0.3$)

これを見ると、刻み幅が 0.01 のときは数値計算の結果と厳密解はよい一致を見せているが、0.3 のときは数値計算の結果が発散しており厳密解とはほど遠いグラフになっている。これについて考察する。（途中）