

Differential Calculus and **Sage**

(revised edition)

William Anthony Granville,
with extra material added by David Joyner
and updates by Charles Ross

2015-02-21

Contents

0	Preface	v
1	Collection of Formulas	2
1.1	Formulas for Reference	2
1.2	Greek Alphabet	6
1.3	Rules for Signs of the Trigonometric Functions	6
1.4	Natural Values of the Trigonometric Functions	7
1.5	Logarithms of Numbers and Trigonometric Functions	8
1.6	Sage Testing	9
2	Variables and Functions	11
3	Theory of Limits	13
4	Differentiation	15
5	Rules for Differentiating Standard Elementary Forms	17
6	Simple Applications of the Derivative	19
7	Successive Differentiation	21
8	Maxima, Minima and Inflection Points	23
9	Differentials	25
10	Rates	27
11	Change of Variable	29
12	Curvature; Radius of Curvature	31
13	Theorem of Mean Value; Indeterminant Forms	33
14	Circle of Curvature; Center of Curvature	35

Forward

For further information on William granville, please see the Wikipedia article,¹ which has a short biography and links for further information. Granville's book "Elements of the Differential and Integral Calculus" fell into the public domain and then much of it (but not all, at the time of this writing) was scanned² primarily by P. J. Hall. This wikisource document uses MathML and L^AT_EX and some Greek letter fonts. The current L^AT_EX document is due to David Joyner, who is responsible for the formatting, editing for readability, the correction of any typos in the scanned version, and any extra material added (for example, the hyperlinked cross references, and the **Sage** material). Please email corrections to wdjoyner@gmail.com. In particular, the existence of this document owes itself primarily to three great open source projects: T_EX/L^AT_EX Wikipedia, and **Sage**. More information on **Sage** can be found at the **Sage** website³. Some material from Sean Mauch's public domain text on Applied Mathematics,⁴ was also included.

Though the original text of Granville is public domain, the extra material added in this version is licensed under the GNU Free Documentation License,⁵ as is most of Wikipedia.

Acknowledgements: I thank the following readers for reporting typos: Mario Pernici, Jacob Hicks.

DAVID JOYNER
2007

¹http://en.wikipedia.org/wiki/William_Anthony_Granville

²http://en.wikisource.org/wiki/Elements_of_the_Differential_and_Integral_Calculus

³<http://www.sagemath.org>

⁴<http://www.its.caltech.edu/~sean/book.html>

⁵<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>

Chapter 0

Preface

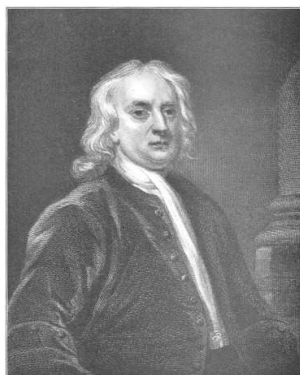


Figure 1: Sir Isaac Newton.

That teachers and students of the Calculus have shown such a generous appreciation of Granville's "Elements of the Differential and Integral Calculus" has been very gratifying to the author. In the last few years considerable progress has been made in the teaching of the elements of the Calculus, and in this revised edition of Granville's "Calculus" the latest and best methods are exhibited,—methods that have stood the test of actual classroom work. Those features of the first edition which contributed so much to its usefulness and popularity have been retained. The introductory matter has been cut down somewhat in order to get down to the real business of the Calculus sooner. As this is designed essentially for a drill book, the pedagogic principle that each result should be made intuitively as well as analytically evident to the student has been kept constantly in mind. The object is not to teach the student to rely on his intuition, but, in some cases, to use this faculty in advance of analytical investigation. Graphical illustration has been drawn on very liberally.

This Calculus is based on the method of limits and is divided into two main parts,—Differential Calculus and Integral Calculus. As special features, atten-

tion may be called to the effort to make perfectly clear the nature and extent of each new theorem, the large number of carefully graded exercises, and the summarizing into working rules of the methods of solving problems. In the Integral Calculus the notion of integration over a plane area has been much enlarged upon, and integration as the limit of a summation is constantly emphasized. The existence of the limit e has been assumed and its approximate value calculated from its graph. A large number of new examples have been added, both with and without answers. At the end of almost every chapter will be found a collection of miscellaneous examples. Among the new topics added are approximate integration, trapezoidal rule, parabolic rule, orthogonal trajectories, centers of area and volume, pressure of liquids, work done, etc. Simple practical problems have been added throughout; problems that illustrate the theory and at the same time are of interest to the student. These problems do not presuppose an extended knowledge in any particular branch of science, but are based on knowledge that all students of the Calculus are supposed to have in common.

The author has tried to write a textbook that is thoroughly modern and teachable, and the capacity and needs of the student pursuing a first course in the Calculus have been kept constantly in mind. The book contains more material than is necessary for the usual course of one hundred lessons given in our colleges and engineering schools; but this gives teachers an opportunity to choose such subjects as best suit the needs of their classes. It is believed that the volume contains all topics from which a selection naturally would be made in preparing students either for elementary work in applied science or for more advanced work in pure mathematics.

WILLIAM A. GRANVILLE
Gettysburg, Pa.



Figure 2: Gottfried Wilhelm Leibnitz.

Chapter 1

Collection of Formulas

1.1 Formulas for Reference

For the convenience of the student we give the following list of elementary formulas from Algebra, Geometry, Trigonometry, and Analytic Geometry.

1. Binomial Theorem (n being a postive integer):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1} + \dots$$

2. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) n$.

3. In the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$,

when $b^2 - 4ac > 0$, the roots are real and unequal;

when $b^2 - 4ac = 0$, the roots are real and equal;

when $b^2 - 4ac < 0$, the roots are imaginary.

4. When a quadratic equation is reduced to the form $x^2 + px + q = 0$,

p =sum of roots with sign changed, and

q =product of roots.

5. In an arithmetical series, $a, a + d, a + 2d, \dots$,

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} a + id = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d].$$

6. In a geometrical series, a, ar, ar^2, \dots ,

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}.$$

7. $\log ab = \log a + \log b$.

8. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

9. $\log a^n = n \log a$.

10. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$.

11. $\log 1 = 0$.

12. $\log e = 1$.

13. $\log \frac{1}{a} = -\log a$.

14. ¹ Circumference of circle $= 2\pi r$.

15. Area of circle $= \pi r^2$.

16. Volume of prism $= Ba$.

17. Volume of pyramid $= \frac{1}{3}Ba$.

18. Volume of right circular cylinder $= \pi r^2 a$.

19. Lateral surface of right circular cylinder $= 2\pi r a$.

20. Total surface of right circular cylinder $= 2\pi r (r + a)$.

21. Volume of right circular cone $= \frac{1}{3}\pi r^2 s$.

22. Lateral surface of right circular cone $= \pi r s$.

23. Total surface of right circular cone $= \pi r (r + s)$.

24. Volume of sphere $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

25. Surface of sphere $= 4\pi r^2$.

26. $\sin x = \frac{1}{\csc x}$, $\cos x = \frac{1}{\sec x}$, $\tan x = \frac{1}{\cot x}$.

27. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$,

28. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$; $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

29. $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

¹In formulas 14-25, r denotes radius, a altitude, B area of base, and s slant height.

30. $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\tan(\pi - x) = -\tan x$.
31. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
32. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.
33. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.
34. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.
35. $\tan(x - y) = \frac{\tan x \tan y}{1 + \tan x \tan y}$.
36. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.
37. $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$; $\tan x = \frac{2 \tan \frac{1}{2}x}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x}$.
38. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$; $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$.
39. $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$; $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.
40. $\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$; $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$; $\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.
41. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$.
42. $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$.
43. $\cos x + \cos y = -2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$.
44. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$.
45. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$; Law of Sines.
46. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; Law of Cosines.
47. $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$; distance between points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) .
48. $d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$; distance from line $Ax + By + C = 0$ to (x_1, y_1) .
49. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; coördinates of middle point.
50. $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$; transforming to new origin (x_0, y_0) .
51. $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$, $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$; transforming to new axes making the angle θ with old.

52. $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$; transforming from rectangular to polar coördinates.

53. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$; transforming from polar to rectangular coördinates.

54. Different forms of equation of a straight line:

- (a) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, two-point form;
- (b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; intercept form;
- (c) $y - y_1 = m(x - x_1)$; slope-point form;
- (d) $y = mx + b$, slope-intercept form;
- (e) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, normal form;
- (f) $Ax + By + C = 0$, general form.

55. $\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, angle between two lines whose slopes are m_1 and m_2 .

$m_1 = m_2$ when lines are parallel, and

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ when lines are perpendicular.

56. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, equation of circle with center (α, β) and radius r .

Many of these facts are already known to Sage:

Sage

```
sage: a,b = var("a,b")
sage: log(sqrt(a))
log(a)/2
sage: log(a/b).simplify_log()
log(a) - log(b)
sage: sin(a+b).simplify_trig()
cos(a)*sin(b) + sin(a)*cos(b)
sage: cos(a+b).simplify_trig()
cos(a)*cos(b) - sin(a)*sin(b)
sage: (a+b)^5
(b + a)^5
sage: expand((a+b)^5)
b^5 + 5*a*b^4 + 10*a^2*b^3 + 10*a^3*b^2 + 5*a^4*b + a^5
```

Sage

```
a,b = var("a,b")
log(sqrt(a))
log(a/b).simplify_log()
sin(a+b).simplify_trig()
cos(a+b).simplify_trig()
(a+b)^5
expand((a+b)^5)
```

```

a,b = var("a,b")
log(sqrt(a))
log(a/b).simplify_log()
sin(a+b).simplify_trig()
cos(a+b).simplify_trig()
(a+b)^5
expand((a+b)^5)

```

```

a,b = var("a,b")
log(sqrt(a))
log(a/b).simplify_log()
sin(a+b).simplify_trig()
cos(a+b).simplify_trig()
(a+b)^5
expand((a+b)^5)

```

“Under the hood” **Sage** used Maxima to do this simplification.

1.2 Greek Alphabet

Letters	Names	Letters	Names	Letters	Names
A, α	alpha	I, ι	iota	P, ρ	rho
B, β	beta	K, κ	kappa	Σ , σ	sigma
Γ , γ	gamma	Λ , λ	lambda	T, τ	tau
Δ , δ	delta	M, μ	mu	Y, υ	upsilon
E, ϵ	epsilon	N, ν	nu	Φ , ϕ	phi
Z, ζ	zeta	Ξ , ξ	xi	X, χ	chi
H, η	eta	O, \omicron	omicron	Ψ , ψ	psi
Θ , θ	theta	Π , π	pi	Ω , ω	omega

1.3 Rules for Signs of the Trigonometric Functions

Quadrant	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc
First	+	+	+	+	+	+
Second	+	-	-	-	-	+
Third	-	-	+	+	-	-
Fourth	-	+	-	-	+	-

1.4 Natural Values of the Trigonometric Functions

Angle in Radians	Angle in Degrees	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc
0	0	0	1	0	∞	1	∞
$\pi/6$	30	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
$\pi/4$	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	60	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	90	1	0	∞	0	∞	1
π	180	0	-1	0	∞	-1	∞
$3\pi/2$	270	-1	0	∞	0	∞	-1
2π	360	0	1	0	∞	1	∞

Angle in Radians	Angle in Degrees	Sin	Cos	Tan	Cot		
.0000	0	.0000	1.0000	.0000	Inf.	90	1.5708
.0175	1	.0175	.9998	.0175	57.290	89	1.5533
.0349	2	.0349	.9994	.0349	28.636	88	1.5359
.0524	3	.0523	.9986	.0524	19.081	87	1.5184
.0698	4	.0698	.9976	.0699	14.300	86	1.5010
.0873	5	.0872	.9962	.0875	11.430	85	1.4835
.1745	10	.1736	.9848	.1763	5.671	80	1.3963
.2618	15	.2588	.9659	.2679	3.732	75	1.3090
.3491	20	.3420	.9397	.3640	2.747	70	1.2217
.4863	25	.4226	.9063	.4663	2.145	65	1.1345
.5236	30	.5000	.8660	.5774	1.732	60	1.0472
.6109	35	.5736	.8192	.7002	1.428	55	.9599
.6981	40	.6428	.7660	.8391	1.192	50	.8727
.7854	45	.7071	.7071	1.0000	1.000	45	.7854
		Cos	Sin	Cot	Tan	Angle in Degrees	Angle in Radians

You can create a table like this in Sage:

```

Sage
sage: RR15 = RealField(15)
sage: rads1 = [n*0.0175 for n in range(1,6)]
sage: rads2 = [0.0875+n*0.0875 for n in range(1,9)]
sage: rads = rads1+rads2
sage: trigs = ["sin", "cos", "tan", "cot"]
sage: tbl = [[eval(x+"(%s)"%y) for x in trigs] for y in rads]
sage: tbl = [[RR15(eval(x+"(%s)"%y)) for x in trigs] for y in rads]
sage: print Matrix(tbl)
[0.01750  0.9998 0.01750  57.14]
[0.03499  0.9994 0.03502  28.56]
[0.05247  0.9986 0.05255  19.03]
[0.06994  0.9976 0.07011  14.26]
[0.08739  0.9962 0.08772  11.40]
[ 0.1741  0.9847 0.1768  5.656]
[ 0.2595  0.9658 0.2687  3.722]

```

[0.3429	0.9394	0.3650	2.740]
[0.4237	0.9058	0.4677	2.138]
[0.5012	0.8653	0.5792	1.726]
[0.5749	0.8182	0.7026	1.423]
[0.6442	0.7648	0.8423	1.187]
[0.7086	0.7056	1.004	0.9958]

The first column are the values of $\sin(x)$ at $x \in \{0.01750, 0.03500, \dots, 0.7875\}$ (measured in radians). The second, third and fourth rows are the corresponding values for cos, tan and cot, resp.

1.5 Logarithms of Numbers and Trigonometric Functions

The common logarithm is the logarithm with base 10. The fractional part of the logarithm of x is known as the *mantissa* of the common logarithm of x . For example, if $x = 120$, then

$$\log_{10} 120 = \log_{10} (10^2 \times 1.2) = 2 + \log_{10} 1.2 \approx 2 + 0.079181,$$

so the very last number (0.079181...) is the mantissa. In the table below, this is given simply as 0792.

Table of mantissas of the common logarithms of numbers:

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989

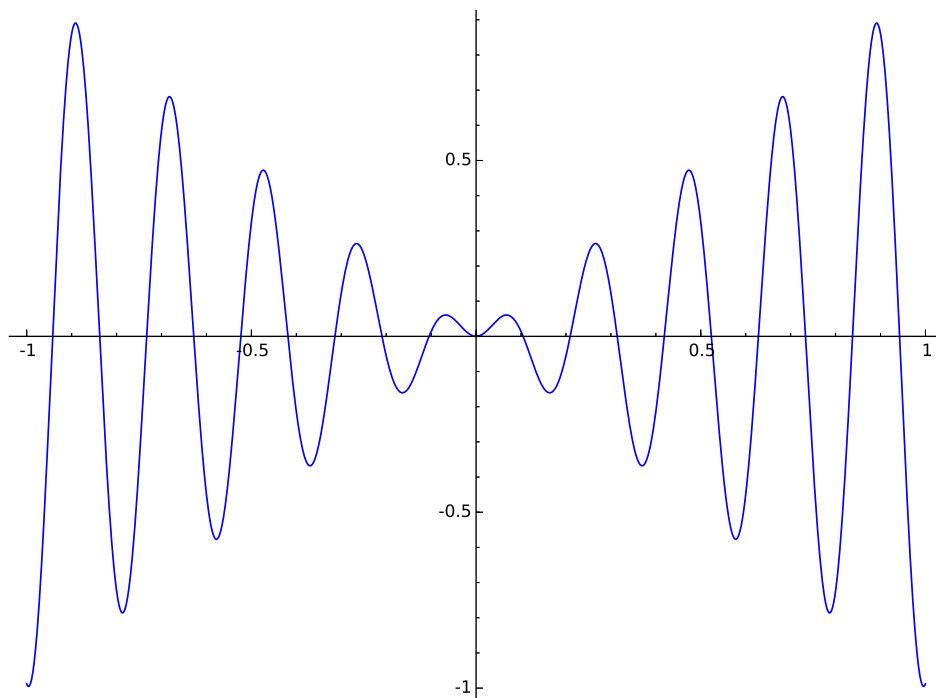
The table of logarithms of the trigonometric functions (given in Granville's original text) is omitted as they can be computed using a hand calculator or Sage.

1.6 Sage Testing

This is an example of using Sage within a T_EX document. We can compute extended values like

$$32^{31} = 45671926166590716193865151022383844364247891968$$

We can plot functions like $x \sin x$:



We can integrate:

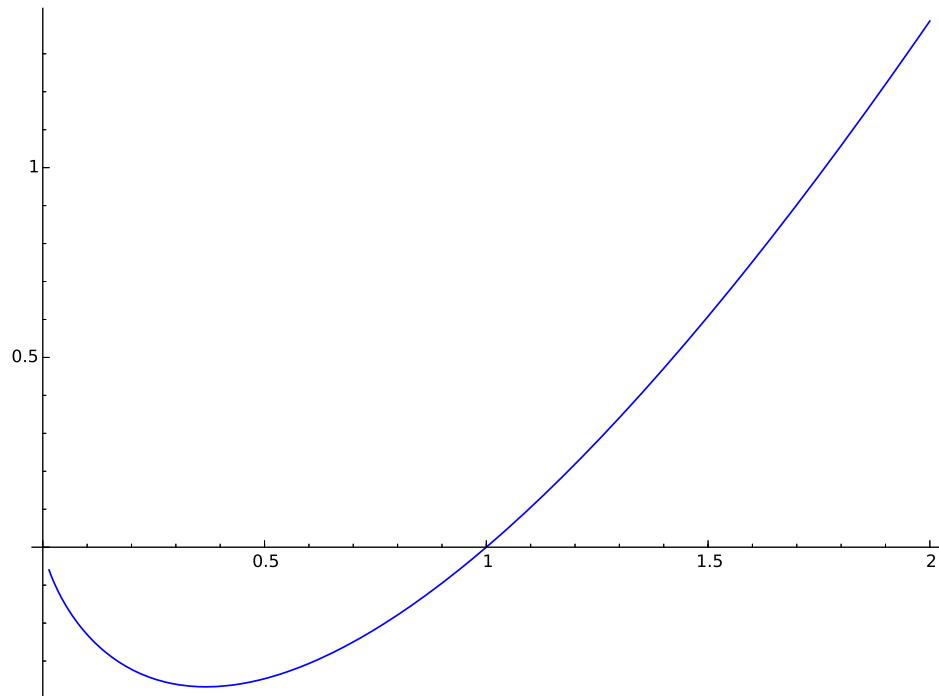
$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3(x^2 + x + 2)} dx$$

$$= -\frac{9}{448} \sqrt{7} \arctan\left(\frac{1}{7} \sqrt{7}(2x+1)\right) - \frac{3(x+1)}{16(x^2-2x+1)} + \frac{5}{128} \log(x^2+x+2) - \frac{5}{64} \log(x-1)$$

We can perform matrix calculations:

$$\begin{pmatrix} 468 & 576 & 684 \\ 1062 & 1305 & 1548 \\ 1656 & 2034 & 2412 \end{pmatrix}$$
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 22 \\ 39 & 50 \end{pmatrix}$$

Plots are fun; here is a second one showing $x \ln x$. The “width” command in the source is sent to the `include graphics` command in LaTeX rather than to Sage.



Sage understands mathematical constants and writes them symbolically unless it is told to produce a numerical approximation. The term $e\pi$ below is not in the LaTeX source; instead it is the result of a Sage calculation, as is the numerical value on the other side of the equal sign.

The product of e and π is $\pi e = 8.53973422267357$.

Chapter 2

Variables and Functions

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat.

Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 3

Theory of Limits

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat.

Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 4

Differentiation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat.

Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 5

Rules for Differentiating Standard Elementary Forms

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris

venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat. Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 6

Simple Applications of the Derivative

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris

venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat. Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 7

Successive Differentiation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat.

Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 8

Maxima, Minima and Inflection Points

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris

venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat. Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 9

Differentials

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat.

Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 10

Rates

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat.

Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 11

Change of Variable

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat.

Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 12

Curvature; Radius of Curvature

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris

venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat. Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 13

Theorem of Mean Value; Indeterminant Forms

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris

venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat. Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 14

Circle of Curvature; Center of Curvature

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris

venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat. Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.

Chapter 15

References

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Suspendisse a venenatis dolor. Fusce in elit vel ex feugiat rhoncus. Mauris vitae mi non odio sagittis ornare. Curabitur feugiat metus blandit suscipit pulvinar. In sed dui ipsum. Integer porta molestie ullamcorper. Morbi vitae vestibulum tortor.

Quisque risus urna, vulputate vitae faucibus sed, aliquet non purus. Integer rutrum pharetra tellus et cursus. Proin eget lorem posuere lectus placerat varius eget a turpis. Maecenas malesuada, augue eu varius euismod, neque est porta risus, nec fringilla magna sem nec eros. Pellentesque imperdiet, eros ac ultricies auctor, lectus neque laoreet lorem, vulputate feugiat arcu massa eget ex. Aliquam finibus interdum ex, nec convallis turpis blandit in. Curabitur ac sem felis. Sed euismod nec odio a condimentum. Aliquam hendrerit non nunc id placerat. Pellentesque eget viverra tortor, in accumsan erat. Praesent semper facilisis turpis, non placerat urna egestas ac. Vestibulum dignissim ac enim et facilisis. Vestibulum rutrum faucibus quam, ac posuere velit ornare eget. Etiam sollicitudin, lorem a lacinia accumsan, dolor est eleifend lacus, ac ornare lectus metus ullamcorper ex. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Etiam pellentesque risus nulla, eu sollicitudin orci sodales vitae. Aliquam erat volutpat. Praesent a augue pharetra, molestie ante volutpat, gravida ligula. Fusce non consequat mauris, vitae ultricies nulla. Donec vitae neque id eros luctus tempus quis sit amet tellus. Vivamus ac pellentesque eros, nec fermentum sapien. Morbi tincidunt risus at ex finibus convallis. Donec at lacinia augue. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean ultrices faucibus est in ullamcorper. Suspendisse porttitor ipsum a eros porta ornare. Fusce pellentesque pulvinar ligula, vitae suscipit sapien. Aenean pretium dolor quis ex placerat, eget ultrices nulla bibendum. Pellentesque pretium volutpat ipsum, et sollicitudin elit vehicula ultricies.

Duis varius turpis quis ultricies tincidunt. Suspendisse vitae ex id mauris venenatis pharetra id eu arcu. Integer libero ex, facilisis et dictum at, faucibus id lorem. Duis a purus at est malesuada vulputate. Cras a imperdiet arcu, sit amet elementum nisi. Praesent accumsan metus sed justo malesuada placerat.

Mauris ante neque, venenatis sit amet tellus sit amet, mattis tristique lorem. Nulla facilisi.

Vestibulum blandit eros sit amet pretium suscipit. Suspendisse ornare justo a tincidunt feugiat. Aliquam tristique non diam ac gravida. Donec et viverra nibh. Praesent quis nisl ac orci bibendum commodo. Aenean vestibulum ligula neque, in lacinia justo vestibulum quis. Donec volutpat scelerisque iaculis. Nulla convallis massa eget arcu iaculis, ac accumsan leo vestibulum. Mauris rhoncus arcu vitae est scelerisque, et malesuada arcu aliquet. Proin ut vulputate ipsum, quis posuere velit. Donec mollis risus et nulla auctor, sed lacinia magna congue. Praesent a commodo nisl. Suspendisse potenti.