Two-anova:

1、$y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\epsilon_{ijk}$

$$\begin{cases}\sum \alpha_i=0\\ \sum \beta_j=0\\ \sum_i (\alpha\beta)_{ij}=0\\ \sum_j (\alpha\beta)_{ij}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\bar{y}=\mu+\bar{\epsilon}\\ \overline{y_{ij\cdot}}=\mu+\overline{\epsilon_{ij\cdot}}+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}\\ \overline{y_{i\cdot\cdot}}=\mu+\alpha_i+\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}\\ \overline{y_{\cdot j\cdot}}=\mu+\beta_j+\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}\end{cases}$$

$$SSE=\sum_{ijk}(y_{ijk}-\overline{y_{ij\cdot}})^2$$

$$y_{ijk}-\overline{y_{ij\cdot}}=\epsilon_{ijk}-\overline{\epsilon_{ij\cdot}}$$

$$SSE=\sum_{ijk}(\epsilon_{ijk}-\overline{\epsilon_{ij\cdot}})^2$$

$$\epsilon_{ijk}\overset{iid}{\sim}N(0,\sigma^2)$$

$\sum_{k=1}^{m}(\epsilon_{ijk}-\overline{\epsilon_{ij\cdot}})^2$ 可看成 ϵ_{ijk} 为样本，可类比 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{m}(\epsilon_{ijk}-\overline{\epsilon_{ij\cdot}})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1) \Rightarrow SSE/\sigma^2\sim\chi^2\left(\sum_i\sum_j\chi^2(m-1)\right)\sim\chi^2(ab(m-1))$$

故：$E[SSE]=ab(m-1)\sigma^2$ $\quad MSE=SSE/ab(m-1)$

$E[MSE]=\sigma^2$

$SSA=\sum_i\sum_j\sum_k(\overline{y_{i\cdot\cdot}}-\bar{y})^2$; $\overline{y_{i\cdot\cdot}}-\bar{y}=\alpha_i+\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}-\bar{\epsilon}$

$$SSA=(\alpha_i+\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}-\bar{\epsilon})^2$$

$$SSA=(\alpha_i+\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}-\bar{\epsilon})^2 + (\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}-\bar{\epsilon})^2]\,bm$$

$$\begin{aligned}E[SSA]&=E[\alpha_i^2+2\alpha_i(\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}-\bar{\epsilon})+(\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}-\bar{\epsilon})^2]\\&=bm\sum E[\alpha_i^2+2\alpha_i(\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}-\bar{\epsilon})+(\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}-\bar{\epsilon})^2]\\&=bm\sum\alpha_i^2+\sigma^2(a-1)\ ;\ \overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}\sim N(0,\sigma^2/bm)\end{aligned}$$

同理：$E[SSB]=(b-1)\sigma^2+am\sum\beta_j^2$

$$E[MSA]=\frac{bm}{a-1}\sum\alpha_i^2+\sigma^2\ ;\ E[MSB]=\frac{am}{b-1}\sum\beta_j^2+\sigma^2$$

$SSAB=\sum_{ijk}(\overline{y_{ij\cdot}}+\bar{y}-\overline{y_{i\cdot\cdot}}-\overline{y_{\cdot j\cdot}})^2$

由之前 $\overline{y_{ij\cdot}}=\mu+\overline{\epsilon_{ij\cdot}}+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}$ 之类的公式代入化简可得：

$\Rightarrow SSAB=\sum_{ijk}(\overline{\epsilon_{ij\cdot}}+\bar{\epsilon}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}-\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}+(\alpha\beta)_{ij})^2$

$=\sum_{ijk}((\overline{\epsilon_{ij\cdot}}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}})-(\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}-\bar{\epsilon})+(\alpha\beta)_{ij})^2$

$$=\sum\Big[(\overline{\epsilon_{ij\cdot}}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}})^2+(\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}-\bar{\epsilon})^2+(\alpha\beta)^2_{ij}+\underbrace{2(\alpha\beta)_{ij}(\overline{\epsilon_{ij\cdot}}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}})}_{\text{交叉项①}}-\underbrace{2(\overline{\epsilon_{ij\cdot}}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}})(\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}-\bar{\epsilon})}_{\text{交叉项}}-\underbrace{2(\alpha\beta)_{ij}(\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}-\bar{\epsilon})}_{\text{交叉项②}}\Big]$$

"交叉项"的期望为0（①、②）

$$E[SSAB]=E\Big[\sum(\alpha\beta)^2_{ij}+\underbrace{\sum 2(\alpha\beta)_{ij}(\overline{\epsilon_{ij\cdot}}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}})}_{\text{为0}}-\underbrace{2\sum(\alpha\beta)_{ij}(\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}-\bar{\epsilon})}_{\text{为0}}\Big]$$
$$+E\Big[\sum(\overline{\epsilon_{ij\cdot}}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}})^2\Big]+E\Big[\sum(\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}-\bar{\epsilon})^2\Big]$$

$$=E\Big[\sum(\alpha\beta)^2_{ij}\Big]+E\Big[\sum(\underbrace{\overline{\epsilon_{ij\cdot}}}_{\text{变量}}-\underbrace{\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}}_{\text{均值}})^2\Big]+E\Big[\sum(\underbrace{\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}}_{\text{变量}}-\overset{\text{均值(对j)}}{\bar{\epsilon}})^2\Big]$$

$\overline{\epsilon_{ij\cdot}}$ 作为变量 $\sim N(0,\sigma^2/m)$

$\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}$ 作为变量：$\sim N(0,\sigma^2/am)$

$E[\sum_{ijk}(\overline{\epsilon_{ij\cdot}}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}})^2]=(b-1)\sigma^2/m\cdot am=a(b-1)\sigma^2$

$E[\sum_{ijk}(\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}-\bar{\epsilon})^2]=(b-1)\sigma^2/am\cdot am=(b-1)\sigma^2$

$E[\sum(\overline{\epsilon_{ij\cdot}}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}})(\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}-\bar{\epsilon})]=E[\sum(\overline{\epsilon_{ij\cdot}}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}})\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}-\sum\bar{\epsilon}(\overline{\epsilon_{ij\cdot}}-\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}})]$

$=E[\sum\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}\,\overline{\epsilon_{ij\cdot}}]-E[\sum\overline{\epsilon_{\cdot j\cdot}}\,\overline{\epsilon_{i\cdot\cdot}}]$

$=b\sigma^2/m-\sigma^2/m=(b-1)\sigma^2/m$

故 $ESSAB=\sum(\alpha\beta)^2_{ij}+a(b-1)\sigma^2+(b-1)\sigma^2-2\cancel{m}(b-1)\sigma^2/\cancel{m}$

$=\sum(\alpha\beta)^2_{ij}+[a(b-1)+b-1-2(b-1)]\sigma^2$

$=\sum(\alpha\beta)^2_{ij}+(a-1)(b-1)\sigma^2$;

$E[MSB]=\frac{am}{b-1}\sum\beta_j^2+\sigma^2$

$E[MSSA]=\frac{bm}{a-1}\sum\alpha_i^2+\sigma^2$

综上 $E[MSSAB]=\frac{m\sum(\alpha\beta)^2_{ij}}{(a-1)(b-1)}+\sigma^2$ 且 $E[MSE]=\sigma^2$; ~~$E[SSB]=(b-1)\sigma^2+am\sum\beta_j^2$~~