1、$a=4, m=6, n=24$. $SST=10$. $SSE=2.5$

来源	SS	自由度	均方	F	p
A	7.5	3	2.5	20	$p=p(F_{(3,20)} \geq F_0=20) = 3.1\times10^{-6}$
误差	2.5	20	0.125		
	10	23			

p值使用python包计算: $p=1-p(F_{(3,20)} \leq F_0) = 3.1\times10^{-6}$

2、二样本:证明平衡设计 $a=2$ 下的 one-way ANOVA 等价于二样本t.

	二样本t	one-way ANOVA
H_0 v.s. H_1	$\mu_x=\mu_y$	$\mu_x=\mu_y$
检验统计量	$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}}}$, $t\sim t(2m-2)$	$F=\dfrac{SSA/(a-1)}{SSE/m(a-1)}$, $F\sim F(1,2m-2)$
拒绝域:	$\{t \mid \lvert t\rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$W=\{F \geq F_{1-\alpha}\}$

由t分布和F分布关系可得: $t^2(n)\sim F(1,n)$; $t^2\sim t^2(2m-2)\sim F(1,2m-2)$

且二样本t是在 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 未知的条件下,满足 one-way Anova 的方差齐性.

同时,二样本t所需的独立性与one-way ANOVA 的独立性条件一致.

由 $t^2\sim t^2(2m-2)\sim F(1,2m-2)$ 可知.

$$\lvert t\rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}} \iff \lvert t\rvert^2 \geq t^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \iff F \geq F_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

所以得证。

3. $\begin{cases} y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, & i=1\cdots a;\ j=1\cdots m_i; \\ \varepsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \end{cases}$

① 效应模型：$\begin{cases} y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, & i=1\cdots a;\ j=1\cdots m_i; \\ \varepsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \\ \sum_{i}^{a} m_i \alpha_i = 0 \\ \quad n = \sum_{i}^{a} m_i \end{cases}$

②
H_0: $m_1\alpha_1 = m_2\alpha_2 = \cdots = m_i\alpha_i = 0$

H_1: $m_1\alpha_1, m_2\alpha_2 \cdots, m_i\alpha_i$ 不全为0.

③ AnovaTable与原来一致：

来源	平方和	自由度	均方和	F比
A	S_A	$a-1$	$S_A/(a-1)$	$\frac{M_A}{M_E}$
e	S_E	$n-a$	$S_E/(n-a)$	
T	S_T	$n-1$		

$$S_T = \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$$

，这里 $\bar{y}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{m_i} y_{ij}$

$\bar{y}_{i.} = \frac{1}{m_i} \sum_{j}^{m_i} y_{ij}$

$$S_E = \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$$

$$S_A = \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{m_i} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$$

$M_A = S_A/(a-1)$

$M_E = S_E/(n-a)$