Алгебра и мат. анализ (Interview Preparation Kit)

1 Алгебра

1.1 Подстановки

Множество $S(U)$ всех биекций $f : U \to U$ с операцией произведения отображений gf обладает следующими свойствами:

- операция произведения ассоциативна ($h(gf) = (hg)f$),
- нейтральный элемент – тождественное отображение 1_U ($1_U f = f = f 1_U$),
- для всякой биекции f существует обратный элемент f^{-1} ($ff^{-1} = 1_U = f^{-1}f$).

Подстановки – группа биекций $S(U)$ относительно операции произведения отображений. В случае $U = \{1, 2, ..., n\}$ множество $S_n = S(\{1, 2, ..., n\})$ – **группа подстановок** множества $\{1, 2, ..., n\}$. $|S_n| = n!$

Перестановки элементов $1, 2, ..., n$ – строчки элементов $(i_1, ..., i_n)$, $1 \leq i_j \leq n$, где каждый элемент i_j встречается один и только один раз.

Инверсия: в перестановке $(..., i, ..., j, ...)$ число i расположено левее, но $i > j$.

Чётность подстановки – чётность суммы числа инверсий в верхней строчке и числа инверсий в нижней строчке.

Траспозиция перестановки $(i_1, ..., i_n)$ – перестановка двух элементов i и j, $i \neq j$ (все остальные элементы остаются на своих местах).

Цикл $(i_1 i_2 ... i_r)$ **длины** r в группе подстановок S_n – подстановка, переводящая i_k в i_{k+1} для $1 \leq k \leq r-1$, i_r в i_1, и оставляющая остальные элементы из $\{1, 2, ..., n\}$ на месте.

Разложение подстановок в произведение транспозиций. Каждая подстановка $\tau \in S_n$ является произведением $\tau = \tau_r ... \tau_1$ конечного числа транспозиций τ_i (циклов длины два).

Орбита цикла $(i_1 i_2 ... i_r)$ – множество $\{i_1, ..., i_r\}$.

Разложение подстановок в произведение независимых циклов. Каждая подстановка $\tau \in S_n$ разлагается (и притом единственным образом) в произведение циклов с непересекающимися орбитами.

1.2 Комплексные числа

Комплексные числа – элементы поля $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$ со следующими операциями сложения и умножения: $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$, $(ab, cd) = (ac - bd, ad + bc)$. $i = (0,1)$, $i^2 = -1$.

Алгебраическая форма записи: $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

В **геометрической интерпретации** комплексное число $z = a + bi$ изображается вектором в прямоугольной системе координат, выходящим из точки $(0,0)$ в точку (a,b).

Тригонометрическая форма записи: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $z = a + bi$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \arg z$ – угол между положительной полуосью абсцисс и радиусом-вектором точки (a,b), отсчитываемый против часовой стрелки (аргумент точки $0 = (0,0)$ не определён).

Извлечение корней из комплексных чисел. Пусть $n \geq 1$, $0 \neq z \in \mathbb{C}$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$. Тогда существует ровно n различных корней n-й степени из z:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Корни из единицы. Так как $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$, $r = 1$, $\varphi = 0$, то формула для корней n-й степени из 1 принимает вид

$$w_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

1.3 Системы линейных уравнений

Система m **линейных уравнений** от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$: i-е уравнение, $1 \leq i \leq m$, записывается в виде $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$, где $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in K$.

Матрица коэффициентов системы линейных уравнений – прямоугольная $(m \times n)$-таблица коэффициентов $a_{ij} \in K$. **Расширенная матрица** системы линейных уравнений – прямоугольная $(m \times (n+1))$-матрица.

Ступенчатая система линейных уравнений – система линейных уравнений со **ступенчатой матрицей** коэффициентов, т.е.:

- все нулевые строки находятся в матрице ниже ненулевых строк,
- если $a_{ik} \neq 0$ – первый ненулевой элемент в i-й строке, то $a_{rs} = 0$ для всех $i < r \leq m$, $1 \leq s \leq k$.

Элементарное преобразование 1-го типа. При $i \neq k$ к i-му уравнению системы прибавляется k-е уравнение, умноженное на число $c \in K$.

Элементарное преобразование 2-го типа. При $i \neq k$ i-е и k-е уравнения меняются местами, остальные уравнения не изменяются.

Элементарное преобразование 3-го типа. i-е уравнение умножается на ненулевое число $0 \neq c \in K$.

Метод Гаусса. Всякую систему линейных уравнений можно конечным числом элементарных преобразований 1-го и 2-го типов привести к ступенчатому виду.

1.4 Линейная зависимость и ранг

Линейно зависимая система элементов $v_1, ..., v_r$ линейного пространства V над полем K: найдутся элементы $k_1, ..., k_r \in K$ такие, что $k_1 v_1 + ... + k_r v_r = 0$, где хотя бы один элемент k_i отличен от нуля.

Линейно независимая система элементов $v_1, ..., v_r$ линейного пространства V над полем K: система не является линейно зависимой.

Основная теорема о линейной зависимости. Пусть в линейном пространстве V над полем K линейно независимая система элементов $v_1, ..., v_r$ линейно выражается через другую систему элементов $u_1, ..., u_s$. Тогда $r \leq s$.

Максимальная линейно независимая подсистема в S – такая подсистема $v_1, ..., v_r \in S$ (S содержится в линейном пространстве V над полем K), что $v_1, ..., v_r$ – линейно независимая система, а любой элемент $v \in S$ является линейной комбинацией элементов $v_1, ..., v_r$.

Базис – максимальная линейно независимая подсистема $v_1, ..., v_r$ в линейном пространстве V над полем K (если в линейном пространстве V существует такая конечная система).

Конечномерное линейное пространство – линейное пространство с конечным базисом.

Ранг системы S – число элементов $r(S)$ в максимальной линейно независимой подсистеме системы S конечномерного линейного пространства V над полем K.

Минор k-го порядка матрицы A – определитель $M_{i_1,...,i_k;j_1,...,j_k}$ квадратной матрицы, состоящей из элементов на пересечении k первых строк и k первых столбцов матрицы

A.

Теорема о ранге матрицы. Следующие четыре числовые характеристики матрицы $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ совпадают:

- $r(A_1, ..., A_m)$ – ранг системы строк в K^n,
- $r(\hat{A}_1, ..., \hat{A}_m)$ – ранг системы столбцов в K^n,
- $r(A)$ – наивысший порядок ненулевого минора,
- число ненулевых строк r в ступенчатом виде $\bar{A}$ матрицы A.

Это совпадающее число называется **рангом матрицы** A и обозначается $r(A)$.

Теорема Кронекера-Капелли: критерий совместности и определённости системы линейных уравнений в терминах рангов матриц. Пусть $(a_{ij}|b_i)$ – система m линейных уравнений с n неизвестными, A – матрица коэффициентов, A' – расширенная матрица системы линейных уравнений.

- Система линейных уравнений совместна (система имеет решение) $\Longleftrightarrow r(A) = r(A')$.
- Система линейных уравнений определённая (система имеет только одно решение) $\Longleftrightarrow r(A) = r(A') = n$.

Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений – любой базис линейного пространства решений однородной системы линейных уравнений. Размерность пространства решений равна числу свободных неизвестных, то есть $n - r(A)$.

1.5 Определители

Определитель квадратной матрицы A – число $|A| = \sum\limits_{\alpha \in S_n} \varepsilon(\alpha) a_{1\alpha(1)} ... a_{n\alpha(n)}$, где α – подстановка из S_n. $\varepsilon(\alpha) = 1$, если подстановка α чётная, $\varepsilon(\alpha) = -1$, если подстановка α нечётная.

Свойство 1. $|E_n| = 1$.

Свойство 2. При перестановке двух строк матрицы A определитель меняет знак.

Свойство 3. $A'_i = cA_i \Longrightarrow |A'| = c|A|$.

Свойство 4. Если A_i представлена суммой двух строк B и C, то $|A| = |A'| + |A''|$, где A', A'' – матрицы, в которых вместо A_i в A стоят соответственно строки B и C.

Свойство 5. Если $A_i = (0, ..., 0)$, то $|A| = 0$.

Свойство 6. Если $A_i = A_j$, $i \neq j$, то $|A| = 0$.

Свойство 7. Если от матрицы A переходим к матрице A' с помощью элементарного преобразования 1-го типа $A'_i = A_i + cA_j$, $i \neq j$, $c \in K$, то $|A'| = |A|$.

Критерий равенства определителя нулю. Строка A_i является линейной комбинацией остальных строк квадратной матрицы $A \iff |A| = 0$.

Минор элемента a_{ij} – определитель M_{ij} матрицы A без i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} – число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Разложение определителя по i-й строке и по j-му столбцу, $1 \leq i, j \leq n$:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + ... + a_{in}A_{in},$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + ... + a_{1j}A_{1j}.$$

1.6 Операции над матрицами

Произведение матриц $A = (a_{ij}) \in M_{r,m}(K)$ и $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$:

$$AB = U = (u_{ij}) \in M_{r,n}(K), u_{il} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}.$$

Свойства произведения матриц:

- Умножение матриц некоммутативно.
- Имеются делители нуля (ненулевые элементы, произведение которых равно нулю).
- Умножение матриц ассоциативно: $(AB)C = A(BC)$.
- Умножение матриц дистрибутивно: $C(A+B) = CA+CB, (A+B)D = AD+BD$.

Транспонирование произведения матриц. $(AB)^* = B^*A^*$.

Определитель произведения квадратных матриц. $|AB| = |A||B|$.

Ранг произведения матриц. $r(AB) \leq r(A), r(AB) \leq r(B)$. При умножении на квадратную матрицу A с $|A| \neq 0$ ранг не меняется.

Матрица $B \in M_n(K)$ – **обратная** к матрице $A \in M_n(K)$, если $AB = E = BA$.

Теорема об обратной матрице. $A \in M_n(K)$.

- Существует обратная матрица $B = (b_{ij}) = A^{-1} \iff |A| \neq 0$.

- В этом случае $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$.

- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Нахождение обратной матрицы. Пусть $A \in M_n(K)$ такая, что $|A| \neq 0$. Найдем матрицу $X \in M_n(K)$ такую, что $AX = E$. Применяя элементарные преобразования строк трёх типов к $(A|E)$, получаем $(A|E) \to ... \to (E|B)$, где $B = A^{-1}$.

1.7 Векторные пространства

Линейное (векторное) пространство над полем K – множество V с операциями сложения векторов и умножения векторов на элементы поля K.

Базис линейного пространства V – всякое линейно независимое подмножество E, через которое пространство V линейно выражается.

Размерность линейного пространства – число векторов произвольного базиса.

Матрица перехода от базиса $(e) = (e_1, ..., e_n)$ к базису $(e') = (e'_1, ..., e'_n)$ – матрица $C = (c_{ij})$ такая, что $(e') = (e)C$. $(e) = (e')C^{-1}$.

Преобразования координат в векторном пространстве. $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n = x'_1e'_1 + ... + x'_ne'_n$, $(e') = (e)C$. Тогда $(x'_1, ..., x'_n) = (x_1, ..., x_n)(C^{-1})^*$.

Подпространство пространства V – непустое подмножество M линейного пространства V над полем K, если $a + b \in M$, $\alpha a \in M$ для любых $a, b \in M, \alpha \in K$.

Подпространства как множества решений систем однородных линейных уравнений. Пространство $L(\Sigma)$ всех решений системы однородных линейных уравнений от n неизвестных является подпространством пространства $\mathbb{R}^n$.

Формула размерности. M, N – подпространства линейного пространства V. Тогда $\dim(M + N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N)$.

Прямая сумма подпространств (определение). $M_1, ..., M_s$ – подпространства линейного пространства V. $V = M_1 \oplus ... \oplus M_s$, если $V = M_1 + ... + M_s$ и для всякого i верно, что $M_i \cap (M_1 + ... + M_{i-1} + M_{i+1} + ... + M_s) = \{0\}$.

Базис и размерность прямой суммы подпространств. $V = M_1 + ... + M_s$. Следующие условия эквивалентны:

- $V = M_1 \oplus ... \oplus M_s$,

- E_i – базис в $M_i \Longrightarrow E_1 \cup ... \cup E_s$ – базис в V,

- $\dim V = \dim M_1 + ... + \dim M_s$.

1.8 Линейные отображения и линейные операторы

Линейное отображение – отображение $\varphi : V \to W$ линейных пространств над одним и тем же полем K, при котором для любых $a, b \in V$ и $\alpha \in K$: $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$.

Задание линейного отображения образом базиса. Пусть $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$, где $(e) = (e_1, ..., e_n)$ – базис пространства V. Тогда $\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + ... + x_n\varphi(e_n)$.

Образ и ядро линейного отображения. $\varphi : V \to W$ – линейное отображение. Ядро $\mathrm{Ker}\ \varphi$ отображения φ – множество $\{x \in V : \varphi(x) = 0\}$. Образ $\mathrm{Im}\ \varphi$ отображения φ – множество $\varphi(V)$. Множества $\mathrm{Ker}\ \varphi$ и $\mathrm{Im}\ \varphi$ являются линейными подпространствами пространств V и W соответственно.

Связь между размерностями образа и ядра. Для всякого линейного отображения $\varphi : V \to W$ справедливо $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\ \varphi + \dim \mathrm{Im}\ \varphi$.

Линейный функционал (ковектор) на пространстве V – линейное отображение $\xi : V \to K$.

Сопряжённое пространство. Пространство V^*, сопряжённое к пространству V, – множество всех функционалов на линейном пространстве V. Сопряжённое пространство является линейным пространством.

Сопряжённый базис. Базис, сопряжённый к базису $e_1, ..., e_n$, – базис сопряжённого пространства V^*, состоящий из функционалов $\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n$, где $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$.

Линейный оператор в линейном пространстве V – линейное отображение $\varphi : V \to V$.

Матрица оператора. $(e) = (e_1, ..., e_n)$ – базис линейного пространства V. Для оператора $\varphi : V \to V$ пусть $\varphi(e_j) = a_{1j}e_1 + ... + a_{nj}e_n$, $j = 1, ..., n$. Матрица $A^{(e)}_\varphi$, в j-м столбце которой стоят координаты $\varphi(e_j)$, – матрица оператора φ в базисе (e). $(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)) = (e_1, ..., e_n)A^{(e)}_\varphi$.

Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Пусть C – матрица перехода от базиса $(e) = (e_1, ..., e_n)$ пространства V к базису $(e') = (e'_1, ..., e'_n)$. Тогда для произвольного оператора $\varphi : V \to V$ его матрицы в базисах (e) и (e') связаны соотношением $A^{(e')}_\varphi = C^{-1}A^{(e)}_\varphi C$.

1.9 Билинейные и квадратичные функции

Билинейная функция на пространстве V – отображение $\xi : V \times V \to K$, при котором для каждого фиксированного значения одного аргумента оно линейно по другому аргументу.

Симметрическая билинейная функция: $\xi(x, y) = \xi(y, x)$ для любых векторов $x, y \in V$.

Матрица билинейной функции ξ в базисе (e). ξ – билинейная функция на пространстве V, $(e) = (e_1, ..., e_n)$ – базис этого пространства. Положим $b_{ij} = \xi(e_i, e_j)$. Матрица $B_\xi^{(e)}$ – матрица билинейной функции ξ в базисе (e). Элементы b_{ij} – коэффициенты функции ξ в базисе (e).

Изменение матрицы билинейной функции при переходе к другому базису. Пусть C – матрица перехода от базиса $(e) = (e_1, ..., e_n)$ пространства V к базису $(e') = (e'_1, ..., e'_n)$. Тогда для любой билинейной функции $\xi : V \times V \to K$ её матрицы в этих базисах связаны соотношением $B_\xi^{(e')} = C^* B_\xi^{(e)} C$.

Ранг билинейной функции – число $r(\xi)$, равное рангу $r(B_\xi)$ её матрицы в некотором базисе.

Левое ядро билинейной функции ξ – множество $\mathrm{Ker}_\xi^{\text{лев}} = \{x \in V : \xi(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in V\}$. Левое ядро является линейным подпространством пространства V.

Ортогональное дополнение к подпространству относительно симметрической билинейной функции. Для любой билинейной функции ξ на n-мерном пространстве V размерности левого и правого ядра равны $n - r(\xi)$. Для симметрической билинейной функции ξ левое и правое ядра равны.

Квадратичная функция – отображение $b : V \to K$, для которого существует такая билинейная функция ξ, что $b(x) = \xi(x, x)$ для любого вектора $x \in V$.

Связь между симметрическими билинейными и квадратичными функциями. Для любой квадратичной функции b существует единственная симметрическая билинейная функция ξ, удовлетворяющая условию $b(x) = \xi(x, x)$ для любого вектора $x \in V$.

Существование ортогонального базиса для симметрической билинейной функции. Пусть V – линейное пространство над K, ξ – симметрическая билинейная функция на V. Если $\dim V \geq 1$, то в V существует ортогональный базис $(\xi(e_i, e_j) = 0)$.

Функция, полярная к квадратичной фукнции b, – билинейная симметрическая функция $\xi_b(x, y) = \frac{1}{2}[b(x + y) - b(x) - b(y)]$.

Матрица квадратичной функции b в базисе $(e) = (e_1, ..., e_n)$ – матрица B_{ξ_b} полярной к ней симметрической билинейной функции ξ_b.

Канонический базис для квадратичной функции $b : V \to K$ – базис $(e) = (e_1, ..., e_n)$ пространства V, для которого матрица функции b диагональна. Для каждой квадратичной функции существует канонический базис.

Канонический вид квадратичной функции – запись квадратичной функции b в каноническом базисе $b(x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$.

Нормальный вид вещественной квадратичной функции. Всякая квадратичная функция в вещественном пространстве может быть приведена к нормальному виду $b(x) = y_1^2 + ... + y_p^2 - y_{p+1}^2 - ... - y_r^2$. Нормальный базис – базис вещественного пространства V, в котором квадратичная функция b принимает нормальный вид. Положительный индекс инерции – число p положительных членов в формуле, отрицательный индекс инерции – число $q = r - p$ отрицательных членов в формуле.

Закон инерции. Положительный и отрицательный индексы инерции вещественной квадратичной функции не зависят от выбора нормального базиса.

1.10 Евклидовы пространства

Скалярное произведение на пространстве V – положительно определённая симметрическая билинейная функция $\xi : V \times V \to \mathbb{R}$.

Евклидово пространство – пространство V с заданным на нём скалярным произведением.

Неравенство Коши-Буняковского. V – евклидово пространство $\Longrightarrow$ для любых векторов x и y верно $-\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} \le \langle x, y\rangle \le \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$. Векторы x и y неотрицательно пропорциональны $\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$.

Ортогональная система ненулевых векторов – система попарно ортогональных векторов ($\langle x, y\rangle = 0$).

Ортогональный базис. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортогональный базис.

Ортогонализация Грама-Шмидта. Пусть в евклидовом пространстве V дана линейно независимая система векторов $(x) = (x_1, ..., x_r)$. Тогда существует единственная такая ортогональная система векторов $(e) = (e_1, ..., e_r)$, которая получается из системы (x) посредством преобразования с единично треугольной матрицей C, т.е. $(e_1, ..., e_r) = (x_1, ..., x_r)C$. Процесс:

$$e_1 = x_1,$$

$$e_k = \beta_1 e_1 + ... + \beta_{k-1} e_{k-1} + x_k,\ \beta_i = -\frac{\langle x_k, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}.$$

Ортогональный оператор в евклидовом пространстве V – линейный оператор $\varphi :$

$V \to V$, сохраняющий скалярное произведение, т.е. $\langle x, y \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$ для любых векторов $x, y \in V$.

1.11 Собственные векторы и собственные значения

Собственный вектор оператора $\varphi : V \to V$ – ненулевой вектор $x \in V$, для которого существует такое число $\lambda \in K$ (собственное значение), что $\varphi(x) = \lambda x$.

Собственное подпространство оператора φ (отвечающее собственному значению λ) – пространство $M_\lambda = \{x \in V : \varphi(x) = \lambda x\}$.

Линейная независимость собственных подпространств. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_s$ – попарно различные собственные значения оператора φ, соответствующие собственным векторам $x_1, ..., x_s$. Тогда векторы $x_1, ..., x_s$ линейно независимы, а сумма собственных подпространств $M_{\lambda_1} + ... + M_{\lambda_s}$ является прямой.

Диагонализируемый оператор $\varphi : V \to V$ – оператор, матрица которого диагональна в некотором базисе. Очевидно, этот базис состоит из собственных векторов оператора φ.

Условие диагонализируемости оператора. Оператор $\varphi : V \to V$ диагонализируем $\Longleftrightarrow V = M_{\lambda_1} \oplus ... \oplus M_{\lambda_s}$, где $\{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$ – спектр оператора φ (множество всех его собственных значений).

2 Математический анализ

2.1 Пределы и непрерывность

Бесконечно малая последовательность $\{x_n\}$: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > n_0 \Longrightarrow |x_n| < \varepsilon$.

Сходящаяся последовательность $\{a_n\}$: $\exists\ l \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > n_0 \Longrightarrow |a_n - l| < \varepsilon$. В этом случае говорят, что $\{a_n\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

Предел функции $f(x)$ в точке x_0: $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\ x : (x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. $A \subset \mathbb{R}$ – область определения $f(x)$.

Правый предел функции $f(x)$ в точке x_0: $l = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\ x : (x \in A,\ 0 < x - x_0 < \delta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. $A \subset \mathbb{R}$ – область определения $f(x)$.

Левый предел функции $f(x)$ в точке x_0: $l = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\ x : (x \in A,\ -\delta < x - x_0 < 0) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. $A \subset \mathbb{R}$ – область определения

$f(x)$.

Предел функции $f(x)$ **при** $x \to \infty$**:** $l = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ c = c(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\ x : (x \in A,\ |x| > c) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. $A \subset \mathbb{R}$ – область определения $f(x)$.

Предел функции $f(x)$ **при** $x \to +\infty$**:** $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ c = c(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\ x : (x \in A,\ x > c) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. $A \subset \mathbb{R}$ – область определения $f(x)$.

Предел функции $f(x)$ **при** $x \to -\infty$**:** $l = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ c = c(\varepsilon) < 0$ такое, что $\forall\ x : (x \in A,\ x < c) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. $A \subset \mathbb{R}$ – область определения $f(x)$.

Непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывная справа в точке x_0 функция $f(x)$: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывная слева в точке x_0 функция $f(x)$: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

$f(x)$ – непрерывная в точке $x_0 \Longleftrightarrow f(x)$ – одновременно непрерывная справа и слева в точке x_0.

2.2 Ряды

Числовой ряд – формальная бесконечная сумма вида $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Числовой ряд сходится, если последовательность его частичных сумм имеет предел.

Признак Даламбера. $p_n > 0$ начиная с некоторого n_0. Если при $n \geq n_0$ выполнено $\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq q, 0 < q < 1$, тогда $\sum p_n$ сходится. Если при $n \geq n_0$ выполнено $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq 1$, тогда $\sum p_n$ расходится.

Признак Коши. $p_n \geq 0$ начиная с некоторого n_0. Если при $n \geq n_0$ выполнено $p_n^{1/n} \leq q, q < 1$, тогда $\sum p_n$ сходится.

Несобственный интеграл первого рода функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$ – предел $I = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$, где $F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$ (для любого $A > a$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману по отрезке $[a, A]$). Несобственный интеграл сходится, если этот предел существует.

Интегральный признак Коши-Маклорена. $f(x)$ определена на промежутке $[1, +\infty)$ и убывает на нем. Если $0 \leq p_n \leq f(n)$ начиная с некоторого n_0 и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то $\sum p_n$ сходится. Если $p_n \geq f(n) \geq 0$ начиная с некоторого n_0 и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то $\sum p_n$ расходится.

Абсолютно сходящийся числовой ряд $\sum a_n$: $\sum |a_n|$ – сходится. При перестановке слагаемых сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяется.

Условно сходящийся числовой ряд $\sum a_n$: $\sum a_n$ – сходится, $\sum |a_n|$ – расходится.

Признак Лейбница. $\sum a_n$ – знакочередующийся ряд, $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ начиная с некоторого n_0, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. $\sum a_n$ сходится.

Функциональный ряд – формальная бесконечная сумма вида $a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)+ ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, где $\{a_n(x)\}$ – функциональная последовательность, определенная на множестве D.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ и другие изестные ряды

2.3 Дифференцирование

Производная функции $f(x)$ – выражение $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Правила нахождения производной.

- $(uv)' = u'v + v'u$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
- $y'_x = y'_u u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ имеют производные

Основные формулы.

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ a > 0$
- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
- $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
- $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Формула Тейлора. Если на $[a, b]$ $f(x)$ определена и имеет непрерывные производные $f'(x), ..., f^{(n-1)}(x)$, а на (a, b) существует конечная производная $f^{(n)}(x)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \ (a \le x \le b, 0 < \theta < 1).$$

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m+1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ...,\ |x| < 1, m \in \mathbb{C}$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...,\ -1 < x \le 1$

Необходимое условие экстремума. В точке экстремума производная $f'(x_0) = 0$, если она существует.

Достаточные условия экстремума. Если $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ и в некоторой точке x_0 $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то в этой точке $f(x)$ имеет экстремум: максимум при $f''(x_0) < 0$, минимум при $f''(x_0) > 0$.

2.4 Функции многих переменных

Частные производные. Результат частного дифференцирования функции нескольких переменных не зависит от порядка дифференцирования, если все производные, входящие в вычисление, непрерывны.

Градиент функции $u = f(x, y, z)$ – вектор $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$. Градиент определяет скорость наибольшего роста функции в данной точке. $|\nabla u| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2}$.

Гессиан функции $f(x_1, ..., x_n)$, дважды дифференцируемой в точке $x \in \mathbb{R}^n$, – симметрическая квадратичная форма $H(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Определитель Гессе – определитель матрицы (a_{ij}).

Метод градиентного спуска. $F(x) : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Задача оптимизации: $F(x) \to \min\limits_{x \in \mathbb{X}}$. Идея метода – идти в направлении наискорейшего спуска, т.е. $-\nabla F$.

- Задать начальное приближение и точность расчета: $x^{[0]}, \varepsilon$.
- Рассчитать $x^{[j+1]} = x^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F(x^{[j]})$.
- Условие остановки: $|x^{[j+1]} - x^{[j]}| \le \varepsilon, |F(x^{[j+1]}) - F(x^{[j]})| \le \varepsilon \Longrightarrow x = x^{[j+1]}$.

Необходимое условие экстремума. Точки экстремума удовлетворяют системе уравнений $f'_{x_i}(x_1, ..., x_n) = 0$ $(i = 1, ..., n)$.

Достаточное условие экстремума. Функция $f(P)$ в точке P_0 имеет максимум (минимум), если $df(P_0) = 0$, $d^2 f(P_0) < 0$ (> 0) при $\sum\limits_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$.

2.5 Интегрирование

Неопределенный интеграл. $f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a, b), $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b \Longrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$, $a < x < b$, где C – произвольная постоянная.

Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ – число

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Методы интегрирования функций.

- Метод введения нового аргумента: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция.
- Метод подстановки: если $f(x)$ – непрерывна, $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной, то $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Метод интегрирования по частям: u, v – дифференцируемые функции от x, тогда $\int udv = uv - \int vdu$.

Первообразные различных элементарных функций.

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1)$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
- $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
- $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$, распространенным на ограниченную замкнутую квадрируемую область Ω, называется число

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \to 0 \\ \max|\Delta y_j| \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ и сумма распространяется на те значения i и j, для которых $(x_i, y_j) \in \Omega$.

Если область Ω задана неравенствами $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные функции на сегменте $[a, b]$, то соответствующий двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Тройной интеграл. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна и область V ограничена и определяется следующими неравенствами: $x_1 \le x \le x_2$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, где $y_1(x), y_2(x), z_1(x,y), z_2(x,y)$ – непрерывные функции, то тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$, распространенный на область V, может быть вычислен по формуле

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Иногда удобно также применять формулу

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)dydz,$$

где $S(x)$ – сечение области V плоскостью $x = const$.

Замена переменных в тройном интеграле. Если ограниченная кубируемая замкнутая область V пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается на область V' пространства $O'uvw$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$, причем $I = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \ne 0$ при $(u,v,w) \in V'$, то справидлива формула

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|I|dudvdw.$$

Цилиндрическая система координат φ, r, h: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = h$ и $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = r$.

Сферическая система координат φ, ψ, r: $x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi$ и $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = r^2\cos\psi$.

2.6 Элементы функционального анализа

Метрика множества X – функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$, такая, что $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ при всех $x, y \in X$, $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ при всех $x, y, z \in X$, $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

Метрическое пространство – пара (X, ρ).

Норма в линейном пространстве E над полем $\mathbb{F}$ – функция $p : E \to \mathbb{R}_+$, такая, что $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in E$, $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ при всех $x, y \in E$, $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Нормированное пространство – пара (E, p).

Ограниченная функция f на множестве X – функция $f : X \to \mathbb{F}$, такая, что существует $c > 0$, что $|f(x)| \le c$ при всех $x \in X$.

Пространство ограниченных функций – нормированное пространство $B(X$, состоящее из всех ограниченных функций $f : X \to \mathbb{F}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Непрерывная функция f на метрическом пространстве X – функция $f : X \to \mathbb{F}$, такая, что для любого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при всех $y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$.

Пространство непрерывных функций – нормированное пространство $C(X)$, состоящее из всех ограниченных и непрерывных функций $f : X \to \mathbb{F}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.