总和型装箱问题的渐近上界改进

结题答辩

李程晖

2019 年 9 月 2 日

问题描述

已有成果

上界改进

装箱问题描述

- 将大小为$w_1, w_2, \ldots, w_n$的n个物品放入容量为1的m个箱子中，放入每个箱子的物品大小之和不超过箱子容量，且$|B_1| \geq |B_2| \geq \cdots \geq |B_n|$.
- 目标为极小化 $\sum_{i=1}^{m} i|B_i|$.

FFI算法

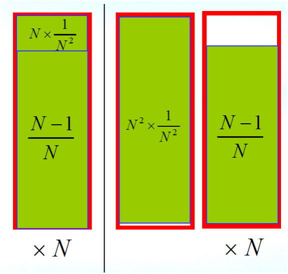
- FF算法

FFI算法

- FF算法
- 动机：FFD算法

一个实例

FFD算法



$$C^{FFD} = (N+1)\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)^2}{2}$$

$$C^{*} = N^2 + \sum_{i=1}^{N}(i+1) = \frac{3N(N+1)}{2}$$

已有成果

- FFI算法比最优算法的上界不超过1.618803
- 存在实例，目标值比值下界不少于1.3544683[1]
  - $\frac{1}{2}+\epsilon, \frac{1}{3}+\epsilon, \frac{1}{7}+\epsilon, \frac{1}{43}+\epsilon, \ldots$

[1] Epstein, L., Johnson, D.S. & Levin, A. J Comb Optim (2018) 36: 508. https://doi.org/10.1007/s10878-018-0310-x

改进结果

渐近上界改进到1.5.

- 如何定义渐近?
  - 实例最优算法箱子数(或者重量)
  - 实例物品数

改进思路
上界

- 用新定义的“最差实例”进行实例改进
- FF算法的性质[2]
- 通过最差实例的箱子个数趋向于无穷来得到渐近性质

[2] GyorgyDosa http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2015.06.046

一些记号

A是一个实例

- $n^F(A), n(A)$
- $C^F(A), C^*(A)$

最差实例

定义 (最差实例)

最差实例定义为在满足若干条件限制下的所有实例中使得$\frac{C^F(A)}{C^*(A)}$最大的实例. 若存在若干个使得$\frac{C^F(A)}{C^*(A)}$达到这些实例中最大值的实例, 那么我们认为他们都是最差实例.

例

对任意k为整数, 在物品数为k个的所有实例中必然存在最差实例.

例

对于任意一个实例A, $A, A \cup \{1\}, A \cup 2 * \{1\}, \ldots$ 的所有实例中必然存在最差实例.

实例对应

引理

对于任一k为正整数，实例B是恰有k个物体的所有实例中的最差实例，实例A定义为 $B, B \cup \{1\}, B \cup 2 * \{1\}, \ldots$实例中的最差实例. 则实例$A$会满足

$$\frac{n^F(A)+1}{n(A)+1} \leq \frac{C^F(A)}{C^*(A)} \leq \frac{n^F(A)-1}{n(A)-1} \tag{1}$$

证明.

- 对于原实例A，构造一个去掉A中最重的物体，再增加一个重量为0的物体得到实例B.

$$\frac{C^F(A)}{C^*(A)} \geq \frac{C^F(A) - n^F(A) + 1}{C^*(A) - n(A) + 1} \tag{2}$$

- 对于原实例A，构造一个$A \cup i * \{1\}$的实例. 定义$A^i = A \cup i * \{1\}$.

$$\frac{C^F(A^{i-1}) + n^F(A^{i-1}) + 1}{C^*(A^{i-1}) + n(A^{i-1}) + 1} \geq \frac{C^F(A^{i-1})}{C^*(A^{i-1})} \tag{3}$$

□

实例对应

引理

对于任一k为正整数, 实例B是恰有k个物体的所有实例中的最差实例, 实例A定义为 $B, B \cup \{1\}, B \cup 2 * \{1\}, \ldots$实例中的最差实例. 则实例$A$会满足

$$\frac{n^F(A)+1}{n(A)+1} \leq \frac{C^F(A)}{C^*(A)} \leq \frac{n^F(A)-1}{n(A)-1} \tag{4}$$

渐近情况下最差实例

引理

假设存在一个单调趋向于*0*的数列$\{1, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \}$, 其中$\epsilon_i > 0, \forall i$. 我们考虑以下的情况: 对于所有物品数大于$k$, 且其中重量不小于$\epsilon_s$的物体数量不小于$\log(k+1)$的所有实例中的最差实例, 当$k \to \infty$, 对于最差实例$A$有

$$\frac{C^F(A)}{C^*(A)} = \frac{n^F(A)}{n(A)} \tag{5}$$

注意到这里的ϵ_s是独立于k的, 也即这个值不随着k的增大而增大, 是个固定值.

Gyorgy Dosa

引理

考虑对于任意物品重量不超过$\frac{1}{k}$的实例，FF算法的箱子数与其他任意一种排列方式的箱子数之比不超过$\frac{k+1}{k}$.

后续证明

利用Gyorgy Dosa的结论对于实例A去构造新的去掉所有的重量大于$\frac{1}{2}$的重量的物体的新实例.

谢谢!