Le paradoxe de Banach-Tarski

Mai 2024

Sommaire

1 Introduction

Le Paradoxe de Banach-Tarski, publié en 1924 par Stefan Banach et Alfred Tarski, est le fruit de nombreuses recherches, nombreux théorèmes et nombreux résultats intermédiares.

Il s'agit d'un énoncé totalement contre-intuitif : il laisse penser qu'il est possible de dupliquer une balle en trois dimensions à l'aide de "découpages" et rotations. Cette simple phrase contient à elle seule toute la beauté de ce paradoxe et c'est pour cela que nous nous sommes intéressés à ce sujet.

Nous avons, au cours de ces 7 derniers mois, travaillé sous la direction de Yohann Genzmer, professeur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, qui nous a aidés et conseillés tout au long de ce travail.

Ainsi, nous sommes fiers de vous faire parvenir le résultat de nos travaux, sous la forme de ce compte rendu.

Ce rapport ne contient pas la liste exhaustive des découvertes menant au Paradoxe, mais explique les grands résultats nécéssaires à la preuve de celui-ci.

2 Première partie : une approche géométrique des paradoxes

Le théorème suivant n'est pas un paradoxe mais son résultat constitue une première approche à Banach-Tarski, qui manipule aussi des objets géométriques. Il s'agit du premier résultat que nous avons étudié.

Théorème 2.1. *Deux polygones sont congruents par dissection si et seulement si ils ont la même aire.*

Preuve. Si deux polygones sont congruents par dissection alors on peut "transformer" l'un en l'autre, donc ils ont forcément la même aire.

Montrons que la réciproque est aussi vraie. Soit P un polygone. On va montrer que P est congruent par dissection à un carré.

Premièrement, montrons qu'un triangle quelconque est congruent par dissection à un carré.

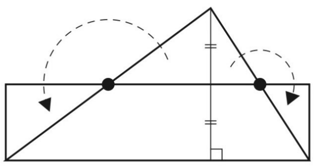

Figure A

1. La figure A nous montre que tout triangle est congruent par dissection à un rectangle. Il suffit de couper la hauteur en deux segments égaux et de "rabattre" les deux triangles supérieurs pour former un rectangle dont la longueur est la base du triangle initial et la largeur est la hauteur du triangle divisée par deux.

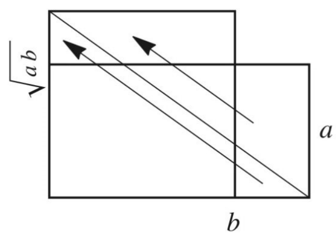

Figure B

2. Dans le cas où le rectangle obtenu satisfait la condition $L \leqslant 4l$ avec L la longueur et l la largeur, on peut alors obtenir un carré d'après la

figure B. On voit que les rectangles déplacés sont conservés tels qu'ils sont : le rectangle et le carré obtenus ont même aire et sont congruents par dissection.

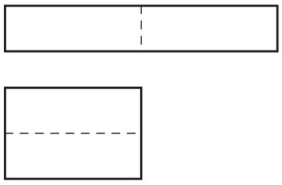

Figure C

3. Dans le cas où on a $L > 4l$, par une succession de découpes et d'empilages on obtient un rectangle de même aire (donc toujours congruent par dissection au triangle de départ) qui vérifie la condition du 2. On peut donc l'appliquer.

Donc un triangle quelconque est congruent par dissection à un carré.

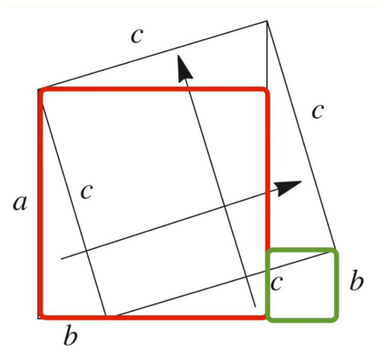

Figure D

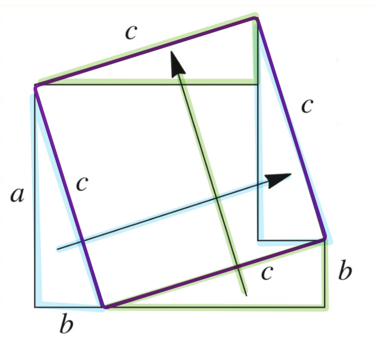

Figure E

De plus, les figures D et E, preuves du théorème de Pythagore, explicitent comment transformer deux carrés de côtés a et b en un seul de côté c. En utilisant ce résultat successivement, on obtient qu'un ensemble fini de carrés peut être transformé par dissection en un seul carré.

Ainsi, il ne reste qu'à monter que n'importe quel polygone peut être transformé par dissection en un ensemble de triangles. Une manière de procéder est de dessiner une ligne verticale à travers chaque sommet, ce qui donne des trapèzes, qui se transforment en triangles si on trace une de leurs diagonales comme le montre la figure F.

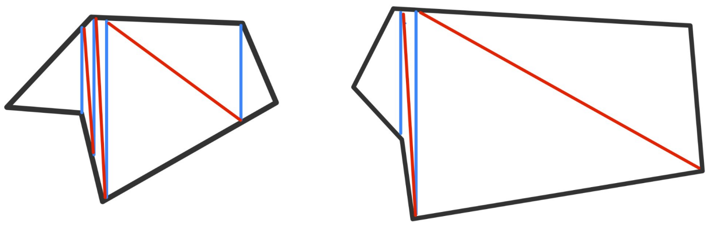

Figure F

Avec les résultats précédents, il ne reste plus qu'à transformer les triangles en carrés et les combiner, ce qui donne un carré congruent par dissection au polygone de départ.

3 Deuxième partie : théorèmes et résultats nécéssaires à la preuve du paradoxe

Définition 3.1. *Un groupe G est un ensemble :*

1. *muni d'une loi interne, généralement notée $+$ ou $\times$, c'est-à-dire une fonction qui à deux éléments de G associe un élement de G. Cette loi est associative, en d'autres termes : $\forall g, h, i \in G,\ g\times(h\times i) = (g\times h)\times i$*
2. *muni d'un élément neutre, noté e tel que : $\forall g \in G,\ g \times e = g$*
3. *qui respecte : $\forall g \in G,\ \exists h \in G,\ g \times h = e$*

Exemple 3.2. $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe ($e = 0$ et $-x$ est l'inverse de x)*

Exemple 3.3. $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \times)$ *est un groupe ($e = 1$ et $\frac{p}{q}$ est l'inverse de $\frac{q}{p}$)*

Définition 3.4. *L'action d'un groupe G sur un ensemble X est une fonction de $X \times G$ dans X qui à tout couple (x, g) dans $X \times G$ associe un élément $g \cdot x$, tel que :*

$$\forall g, h \in G \quad \forall x \in X \quad g \cdot (h \cdot x) = (g \times h) \cdot x$$

Exemple 3.5. *L'ensemble SO_2 des rotations du cercle muni de la loi $\circ$, la composition de deux rotations, agit sur $\mathbb{R}^2$:*

$$\forall \theta, \theta' \in SO_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad r_\theta \circ r_{\theta'}(x) = r_{\theta+\theta'}(x)$$

Exemple 3.6. *L'ensemble $(\mathbb{Z}, +)$ vu précedemment, agit sur $\mathbb{Z}$:*

$$\forall m \in (\mathbb{Z}, +) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad m \circ n = m + n$$

Définition 3.7. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X et soit $E \subset X$ non vide. On dit que E est G-paradoxal s'il existe m et n deux entiers strictements positifs, $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ des sous-ensembles de E disjoints deux-à-deux et $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m$ des éléments de G tels que :*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j)$$

Autrement dit, E est G-paradoxal si à partir d'une partition de E, on prend deux sous-ensembles disjoints A et B qui, en réarrangeant chacun d'entre eux via G, permettent chacun de reconstruire E.

Exemple 3.8. *C'est le Paradoxe de Banach-Tarski : on souhaite trouver une décomposition paradoxale de la boule en trois dimensions.*

Proposition 3.9. *Le groupe libre F de rang 2 est F-paradoxal.*

Un groupe libre avec pour ensemble de générateurs H est l'ensemble des mots finis utilisants comme lettres $\{\sigma, \sigma^{-1} : \sigma \in H\}$. Deux mots sont égaux si on peut passer de l'un à l'autre en ajoutant ou supprimant un nombre fini de paires $\sigma\sigma^{-1}$ ou $\sigma^{-1}\sigma$.

D'une façon semblable, F est dit libre sur H si chaque élément de F peut s'écrire d'une façon unique comme produit réduit d'éléments de H et d'inverses d'élements de H (où réduit signifie sans occurence d'un sous produit de la forme $\sigma\sigma^{-1}$)

Preuve. Ici les lettres utilisées sont $\{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ et F est composé des mots réduits (sans paires adjacentes). On note $W(\sigma)$ les mots commençants par σ. On a :

$$W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1}) \cup \{e\} = F$$

et :

$$W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1}) = W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1}) = F$$

Ainsi, F est bien la réunion du mot vide et des mots commençant par $\{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$: les mots de F sont soit vides, soit ils commencent par une des lettres de l'alphabet utilisé. De plus, tous ces ensembles sont disjoints : un mot ne peut pas commencer par deux lettres différentes.

Ainsi, l'ensemble $\sigma W(\sigma^{-1})$ désigne tous les mots de F, sauf ceux qui commencent par σ, car s'il existait un tel mot, il ne serait pas réduit.

En faisant l'union de $\sigma W(\sigma^{-1})$ avec $W(\sigma)$, on a alors tous les mots de F. Donc $F = W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1})$

Le même raisonnement est possible avec $W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1})$. On a alors bien une décomposition paradoxale de F.

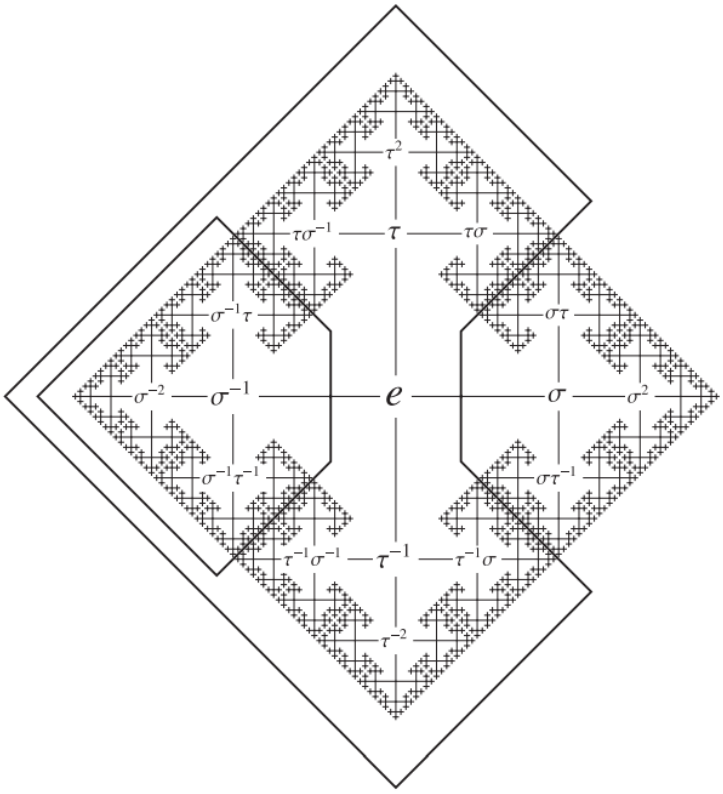

Figure 1: Un exemple visuel de la paradoxalité de F

Théorème 3.10 (Axiome du choix)**.** *Soit E un ensemble d'ensembles non vide. Alors il existe une fonction qui associe à chaque ensemble $A_i \subset E$, avec $i \in I$ l'ensemble qui indexe les élément de E, un élément de cet ensemble A_i. Donc :*

$$\exists f : I \to E \quad \forall i \in I \quad f(i) \in A_i$$

En d'autres termes, on peut choisir un élément de chaque A_i.

Théorème 3.11. *Le cercle unité $\mathbb{S}^1$ est SO_2-paradoxal.*

Preuve. Soit $\sim$ la relation d'équivalence suivante sur $\mathbb{S}^1$:

$$\forall x, y \in \mathbb{S}^1 \quad x \sim y \Leftrightarrow \exists \theta = \frac{p}{q} 2\pi \in \mathbb{Q} \quad r_\theta(x) = y$$

En d'autres termes, x et y sont équivalents si on peut obtenir y en effectuant une rotation par rapport à l'origine d'une multiple rationnel de 2π sur x.

D'après l'axiome du choix, il existe une fonction $f : \mathbb{S}^1 / \sim \to \mathbb{S}^1$ telle que pour toute classe d'équivalence c, on a $f(c) \in c$. Posons $M = f(\mathbb{S}^1 / \sim)$ un ensemble de représentants des classes qu'équivalences de $\sim$ choisi par l'axiome du choix.

Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, l'ensemble de rotations par un mutliple rationnel de 2π est dénombrable. Notons $\{r_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble de ces rotations, et pour tout entier n, $M_n = r_n(M)$ l'ensemble M pivoté par la rotation r_n.

Montrons que les M_n forment une partition de $\mathbb{S}^1$. Tout d'abord, montrons que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n = \mathbb{S}^1$ par double inclusion. Par définition : $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n \subset \mathbb{S}^1$. Soit $y \in \mathbb{S}^1$, on a :

$$y \in M_n \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad y = r_n(\alpha) \quad \alpha \in M \iff y \sim \alpha$$

Soit $\alpha = f(\overline{y})$. Par définition, α et y sont équivalents donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $y = r_n(\alpha)$ et ainsi $y \in M_n$. Donc $\mathbb{S}^1 \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n$ et par conséquent $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n = \mathbb{S}^1$.

Maintenant, montrons par l'absurde que $\forall i \neq j \in \mathbb{N},\ M_i \cap M_j = \emptyset$ en supposant qu'il existe x dans $M_i \cap M_j$, c'est-à-dire $x = r_i(y) = r_j(z)$. Alors on aurait :

$$y = r_i^{-1}(r_j(z)) = rot_{\frac{p}{q}2\pi}(z)$$

ce qui est absurde car cela voudrait dire que y appartient à la classe d'équivalence de z.

Comme les M_i sont congruents par rotation, c'est-à-dire que $\forall i, j \in \mathbb{N},\ M_j = r_j \circ r_i^{-1}(M_i)$, alors on peut effectuer une rotation sur chacun des M_i d'indices pairs $\{M_2, M_4, M_6, ...\}$ pour obtenir $\{M_1, M_2, M_3, ...\}$ dont l'union forme $\mathbb{S}^1$.

Formellement, on procède de la façon suivante : on sait que tout entier n, $M_n = r_n(M)$. Donc $M_{2n} = r_{2n}(M)$ et ainsi, $M_{2n} = r_{2n} \circ r_n^{-1}(M_n)$ ce qui équivaut à : $M_n = r_n \circ r_{2n}^{-1}(M_{2n})$. Ainsi :

$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} r_n \circ r_{2n}^{-1}(M_{2n})$$

De même,

$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} r_n \circ r_{2n+1}^{-1}(M_{2n+1})$$

Donc $\mathbb{S}^1$ est SO_2-paradoxal.

Définition 3.12. *Soit G un groupe. on dit que $\alpha, \beta \in G$ sont indépendants si :*

$$\alpha^{n_1}\beta^{m_1}.\alpha^{n_2}\beta^{m_2}...\alpha^{n_N}\beta^{m_N} = e \implies n_i = m_i = 0 \ \forall i \in \{1, ..., N\}$$

Définition 3.13. *Les deux rotations de Satô sont :*

$$\sigma = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad et \quad \tau = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Théorème 3.14. *Les deux rotations de Satô sont indépendantes dans le groupe $SO_3(\mathbb{Q})$. Donc si $n \geqslant 3$, $SO_n(\mathbb{Q})$ possède un groupe libre de rang 2.*

Preuve. Montrons tout d'abord que SO_3 possède un groupe libre de rang 2 en montrant que les deux rotations sont indépendantes. On va montrer par l'absurde qu'aucun mot ne donne l'identité. Soit ω un mot tel que :

$$\omega = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_\sigma^{k_n} M_\tau^{k_{n-1}} ... M_\tau^{k_2} M_\sigma^1 M_\sigma \text{ avec } k_i \neq 0\, \forall i \in \{2, ..., n\}$$

(en inversant et/ou en conjuguant à une puissance de σ, on peut supposer que σ est le terme le plus à droite de ω). Soit les matrices suivantes :

$$M_\sigma = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_\tau = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M_\sigma^- = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_\tau^- = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Nous allons travailler avec ces matrices plutôt que les rotations pour rendre le calcul plus simple. La seule différence est une puissance entière de 7. En effet on a $\det(7\sigma) = 7^3$ et $\det(\sigma) = 7^2$.

On va étudier $\omega(1, 0, 0)$ soit la première colonne de $M_\sigma^{k_n} M_\tau^{k_{n-1}} ... M_\tau^{k_2} M_\sigma^1 M_\sigma$. Soit les quatre familles de vecteurs suivantes :

$$V_\sigma = \{(3, 1, 2), (5, 4, 1), (6, 2, 4)\},$$
$$V_\sigma^- = \{(3, 2, 6), (5, 1, 3), (6, 4, 5)\},$$
$$V_\tau = \{(3, 5, 1), (5, 6, 4), (6, 3, 2)\},$$
$$V_\tau^- = \{(1, 5, 4), (2, 3, 1), (4, 6, 2)\}.$$

On remarque que $M_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [7] = (6, 2, 4) \in V_\sigma$ et on rappelle que σ est le terme le plus à droite de ω. On obtient, avec des multiplications successives :

$$M_\sigma \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (3, 1, 2)[7] \in V_\sigma, \quad M_\tau \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1, 5, 4)[7] \in V_\tau^-, \quad ...$$

On obtient alors le résultat suivant :
1. Pour tout $v \in V_\sigma \cup V_\tau \cup V_\tau^-,\ M_\sigma v \in V_\sigma$.
2. Pour tout $v \in V_\sigma^- \cup V_\tau \cup V_\tau^-,\ M_\sigma^- v \in V_\sigma^-$.
3. Pour tout $v \in V_\tau \cup V_\sigma \cup V_\sigma^-,\ M_\tau v \in V_\tau$.
4. Pour tout $v \in V_\tau^- \cup V_\sigma \cup V_\sigma^-,\ M_\tau^- v \in V_\tau^-$.

On peut donc en conclure que la première colonne de ω appartiendra à l'une de ces quatre familles. Or, la première colonne de l'identité $(1,0,0)$ ne s'y trouve pas. Donc ω ne peut pas être l'identité, et par conséquent les deux rotations de Satô sont libres et SO_3 possède un groupe libre de rang 2.

Montrons maintenant la véracité pour tout n supérieur ou égal à 3. On construit les deux matrices de taille n :

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tau \end{bmatrix} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{appartenant à } SO_n(\mathbb{Q}).$$

Elevées à des puissances entières n et m on obtient :

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix}^n & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tau \end{bmatrix} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tau \end{bmatrix}^m & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

En appliquant le même raisonnement que la preuve précédente pour $SO_3(\mathbb{Q})$, le produit de ces matrices ne peut pas être l'identité.
Par definition, un sous emsemble S d'un groupe G est dit indépendant si S est un groupe libre générant G. Le produit des matrices ne pouvant pas

être l'identité, on peut construire un groupe indépendant de rang 2, donc un groupe libre de rang 2 de $SO_n(\mathbb{Q})$

Définition 3.15. *Soient G un groupe agissant sur un ensemble X et g un élément de G. On dit qu'un élément x de X est un point fixe de g si et seulement si :*

$$g(x) = x \implies g = Id$$

Lemme 3.16. *Si G est G-paradoxal et que G agit sans point fixe sur X alors X est G-paradoxal.*

Preuve. On prend une décomposition G-paradoxale de G :

$$G = \bigcup A_i \ \cup \ \bigcup B_j = \bigcup \sigma_i(A_i) = \bigcup \tau_j(B_j)$$

avec les A_i et B_j qui forment une partition de G.
Sur X, on regarde la relation $\sim$:

$$x \sim y \iff \exists g \in G \quad x = g.y$$

En d'autres termes, x et y sont en relation s'ils sont dans le même orbite. On va vérifier que c'est bien une relation d'équivalence :

1. $\sim$ est réflèxive : $x = Id.x$
2. $\sim$ est transitive : si on a $x = g_1.y$ et $y = g_2.z$, alors $x = g_1(g_2.z) = (g_1 \times g_2)(z)$ avec $g_1 \times g_2 \in G$. Donc $x \sim z$.
3. $\sim$ est symétrique : si on a $x = g.y$, on pose h l'élément symétrique à g $(h \times g = e)$. On a alors : $h.x = h(g.y) = (h \times g).y = e.y = y$. Donc $x \sim y$.

Soit $f : X/\sim \to X$ une fonction de choix, on pose $M = f(X/\sim)$ une famille de points qui représente les classes d'équivalences de $\sim$.
On pose :

$$M_i = \{\alpha.x \mid \alpha \in A_i,\ x \in M\} \text{ et } N_j = \{\beta.x \mid \beta \in B_j,\ x \in M\}$$

On va montrer que les M_i et les N_j forment une partition de X. Par double-inclusion, montrons que $X = \bigcup M_i \cup \bigcup N_j$.
Par définition on a $\bigcup M_i \cup \bigcup N_j \subset X$. Soit x un élément de X, alors :

$$\exists g \in \bigcup A_i \cup \bigcup B_j \quad x = g.z \text{ avec } z \in M$$

donc x appartient à $\bigcup M_i \cup \bigcup N_j$, et par conséquent on a $X \subset \bigcup M_i \cup \bigcup N_j$, d'où l'égalité.
Montrons maintenant par l'absurde que $M_i \cap M_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Supposons qu'il existe y dans $M_i \cap M_j$. Donc on a $y = \alpha.x = \beta.x'$ et $x' = \beta^{-1}.y =$

$(\beta^{-1} \times \alpha).x$ ce qui nous donne que x et x' sont équivalents, et comme ils appartiennent tous les deux à M alors ils sont égaux. Ainsi on a $\alpha.x = \beta.x$, d'où $(\beta^{-1} \times \alpha).x = x$. Comme G agit sans point fixe, on en déduit que $\beta^{-1} \times \alpha = e$ et que donc $\beta = \alpha$. Or c'est impossible car on a $A_i \cap B_j$, $A_i \cap A_j$ et $B_i \cap B_j$ sont tous vides. D'où l'absurdité.

Proposition 3.17. *Soit $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ le groupe libre des rotations de Satô et D l'ensemble des points fixes de la sphère $\mathbb{S}^2$ par les rotations de G, alors $\mathbb{S}^2 \backslash D$ est G-paradoxal.*

Preuve. D'après l'exemple 3.9, G est G-paradoxal car c'est un groupe libre de rang 2. De plus, D est dénombrable car $SO_3(\mathbb{Q})$, l'ensemble des rotations de $\mathbb{R}^3$ à coefficient $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Donc G agit sans point fixe sur $\mathbb{S}^2 \backslash D$ et on en déduit par le lemme 3.16 que $\mathbb{S}^2 \backslash D$ est G-paradoxal.

4 Troisième partie : Le paradoxe de Banach-Tarski

Définition 4.1. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X, et A et B deux sous-ensembles de X. A et B sont G-equidécomposables, s'il existe $\{A_i, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{B_i, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ des partitions de A et B avec le même nombre fini de parties qui sont toutes G-congruentes.*

Exemple 4.2. *Soit $SO_2(\mathbb{R})$, le groupe des rotaions du cercle, agissant sur $X = \mathbb{S}^1$, le cercle centré à l'origine. Soient A et B respectivement le demi-cercle gauche et le demi-cercle droit. A et B sont bien deux sous-ensembles de X, et A est bien une partition finie de lui-même. De plus, en appliquant la rotation centrale de 180° à A, on obtient B, qui est également une partition finie de lui-même. Donc par la définition précédente, A et B sont $SO_2(\mathbb{R})$-equidécomposables.*

Proposition 4.3. *Soit D un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{S}^2$. Alors, $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^2 \backslash D$ sont équidécomposables.*

Preuve. On cherche une rotation de la sphere ρ telle que $\rho(D), \rho^2(D), ...$ sont tous disjoints. Posons $D^* = \bigcup_{n \geqslant 1} \rho^n(D)$. On a donc :

$$\mathbb{S}^2 = D^* \cup (\mathbb{S}^2 \backslash D^*) \ \sim \ \rho(D^*) \cup (\mathbb{S}^2 \backslash D^*) = \mathbb{S}^2 \backslash D$$

On applique la rotation à D^*, notons $D' = \rho(D^*)$. On a donc :

$$D' = \bigcup_{n \geqslant 0} \rho^{n+1}(D) = \bigcup_{n \geqslant 1} \rho^n(D^*) = D^* \backslash D$$

Ainsi, on a bien $\mathbb{S}^2 \backslash D \sim \mathbb{S}^2$.

Montrons maintenant que ρ existe. Soit l une droite passant par l'origine qui n'intersecte pas avec les points de D (ce qui est possible car l'ensemble des points fixes a été construit par rapport aux rotations rationnelles), et soit A l'ensemble des angles θ tels que :

$$\exists d \in D \quad \rho(d) \in D \quad \text{où } \rho \text{ est la rotation d'angle } n\theta \text{ autour de l}$$

A est dénombrable car $\{n\theta, \ n \in \mathbb{Z}, \ \theta \in \mathbb{Q}\}$ est dénombrable. Donc on peut choisir une rotation d'angle réel θ' qui n'est pas dans A. On pose ρ la rotation d'angle θ'. Donc on a $\rho^n(D) \cap D = \emptyset$ si $n > 0$, et donc :

$$\forall 0 \leqslant m < n \quad \rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \emptyset$$

En effet, en posant $i = m - n > 0$:

$$\rho^i(D) \cap D = \emptyset \ \Rightarrow \ \rho^n(\rho^i(D) \cap D) = \rho^n(\emptyset) \ \Rightarrow \ \rho^{n+i}(D) \cap \rho^n(D) = \emptyset \ \Rightarrow \ \rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \emptyset$$

Donc ρ existe.

Proposition 4.4. *Si X' est G-paradoxal et $X' \subset X$ avec X et X' G-équidécomposables, alors X est G-paradoxal. (admis)*

Théorème 4.5 (Banach-Tarski)**.** *$\mathbb{S}^2$ est $SO_3(\mathbb{R})$-paradoxal.*

Preuve. On a que $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^2 \backslash D$ sont équidécomposales d'après 4.3. De plus, d'après 4.4 et 3.16, On a $\mathbb{S}^2 \backslash D \subset \mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^2 \backslash D$ est $SO_3(\mathbb{R})$-paradoxal. Donc $\mathbb{S}^2$ est $SO_3(\mathbb{R})$-paradoxal.

5 Bibliographie

References

[1] Grzegorz Tomkowicz & Stan Wagon. *The Banach-Tarski Paradox - 2nd Edition - Part of Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. 2016

[2] Allison Wu. *The Banach-Tarski Paradox*. 2008