No.

Date.

Ex.2.1 | Ch.2 | P24 | Chloe | 2025.7.15

解. (a) 设$E=E_0+i\Gamma$ $\Psi(x,t)=\psi(x)e^{\frac{\Gamma}{\hbar}\cdot t}e^{-\frac{iE_0}{\hbar}\cdot t}$

$|\Psi(x,t)|^2=|\psi(x)|^2A^2e^{\frac{2\Gamma}{\hbar}t}$

由于$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,t)|^2dx=1$ 对任意t都成立

故Γ必为0，$E=E_0\in R$

(b) 由$\hat{H}\psi(x)=E\psi(x)$ 则$[\hat{H}\psi(x)]^*=[E\psi(x)]^*$

$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$ $\hat{H}^*=-\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{d^2}{dx^2})^*+V^*(x)$ V(x)是物理量为实函数

$\frac{d^2}{dx^2}$是实算符，确保本征值为实数 故$\hat{H}^*=\hat{H}$

由(a)知$E\in R$ 故$[\hat{H}\psi(x)]^*=\hat{H}^*\psi^*(x)=\hat{H}\psi^*(x)$, $[E\psi(x)]^*=E\psi^*(x)$

故$\hat{H}\psi^*(x)=E\psi^*(x)$ $\psi^*(x)$为定态薛定谔的解

令$\psi_1(x)=\psi(x)+\psi^*(x)$ $\psi_1^*(x)=\psi^*(x)+\psi(x)=\psi_1(x)$ 为实函数

$\psi_2(x)=i(\psi(x)-\psi^*(x))$ $\psi_2^*(x)=-i(\psi^*(x)-\psi(x))=i(\psi(x)-\psi^*(x))=\psi_2(x)$ 为实

那么$\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$是不是定态薛的实数解呢?

$\hat{H}\psi_1(x)=\hat{H}(\psi(x)+\psi^*(x))=\hat{H}\psi(x)+\hat{H}\psi^*(x)=E\psi(x)+E\psi^*(x)=E(\psi(x)+\psi^*(x))$

$=E\psi_1(x)$ $\psi_1(x)$是实数解

$\hat{H}\psi_2(x)=\hat{H}[i(\psi(x)-\psi^*(x))]=i[\hat{H}\psi(x)-\hat{H}\psi^*(x)]=i[E\psi(x)-E\psi^*(x)]$

$=E\psi_2(x)$ $\psi_2(x)$是实解 证毕

(c) 已知$\hat{H}\psi(x)=E\psi(x)$ $\hat{H}\psi(-x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(-x)}{dx^2}+V(x)\psi(-x)$ 由于$V(-x)=V(x)$

而令$u=-x$, $\frac{d^2\psi(-x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{d\psi(u)}{dx})=-\frac{d}{dx}\frac{d\psi}{du}=-\frac{d\psi'(u)}{dx}=\psi''(u)=\psi''(-x)$

故$\hat{H}\psi(-x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(-x)+V(-x)\psi(-x)=E\psi(-x)$

故$\psi(-x)$是解

令$\psi_1(x)=\psi(x)+\psi(-x)$ $\psi_1(-x)=\psi(-x)+\psi(x)=\psi_1(x)$ 偶

$\psi_2(x)=\psi(x)-\psi(-x)$ $\psi_2(-x)=\psi(-x)-\psi(x)=-\psi_2(x)$ 奇

$\hat{H}\psi_1(x)=\hat{H}[\psi(x)+\psi(-x)]=E\psi(x)+E\psi(-x)=E\psi_1(x)$

$\hat{H}\psi_2(x)=\hat{H}[\psi(x)-\psi(-x)]=E\psi(x)-E\psi(-x)=E\psi_2(x)$

故V(x)偶时，$\psi(x)$总可以取奇或偶函数。