No.

Date.

Ex. 2.11 | Ch.2 | P_{40} | Chloe | [2025.7.1]

解: (a) 令 $\alpha=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$, $\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\cdot x$, $\psi_0(x)=\alpha\cdot e^{-\xi^2/2}$, $\psi_1(x)=\sqrt{2}\,\xi e^{-\xi^2/2}$

$$\langle x\rangle_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0^*(x)\,x\,\psi_0(x)dx=\alpha^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}x\,dx=\alpha^2\frac{\hbar}{m\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\xi^2}d\xi=0\ (\text{奇})$$

$$\langle x^2\rangle_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0^*(x)x^2\psi_0(x)dx=\alpha^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}x^2dx=\alpha^2\frac{\hbar}{m\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2e^{-\xi^2}d\xi=\frac{m\omega}{\pi\hbar}\cdot\frac{\hbar}{m\omega}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle p\rangle_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi(x)dx=-i\hbar\alpha^2\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\xi^2}d\xi=0\ (\text{奇})$$

$$\langle p^2\rangle_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0^*(x)\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x)dx=-\hbar^2\alpha^2\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\xi^2\frac{m\omega}{\hbar}-\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)e^{-\xi^2}d\xi=\frac{m\omega\hbar}{2}$$

$$\langle x\rangle_1=2\alpha^2\frac{\hbar}{m\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^3e^{-\xi^2}d\xi=0\ (\text{奇})$$

$$\langle x^2\rangle_1=2\alpha^2\frac{\hbar}{m\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^4e^{-\xi^2}d\xi=2\cdot\frac{m\omega}{\pi\hbar}\cdot\frac{\hbar}{m\omega}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4}=\frac{3\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle p\rangle_1=-2i\hbar\alpha^2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi\left(e^{-\xi^2}-\xi^2e^{-\xi^2}\right)dx=0\quad(\text{奇})$$

$$\langle p^2\rangle_1=-2\hbar^2\alpha^2\frac{m\omega}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(-3\xi+\xi^3)e^{-\xi^2}dx=\frac{3m\omega\hbar}{2}$$

(b) 验证不确定性原理

$\sigma_{x_0}=\sqrt{\langle x^2\rangle_0-\langle x\rangle_0^2}=\sqrt{\hbar/2m\omega}$ $\quad\sigma_{p_0}=\sqrt{\langle p^2\rangle_0-\langle p\rangle_0^2}=\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}$

$\sigma_{x_0}\cdot\sigma_{p_0}=\hbar/2$, 满足

$\sigma_{x_1}=\sqrt{\langle x^2\rangle_1-\langle x\rangle_1^2}=\sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}}$ $\quad\sigma_{p_1}=\sqrt{\langle p^2\rangle_1-\langle p\rangle_1^2}=\sqrt{\frac{3m\omega\hbar}{2}}$

$\sigma_{x_1}\cdot\sigma_{p_1}=\frac{3\hbar}{2}>\frac{\hbar}{2}$ 满足

(c) $\langle T\rangle_0=\frac{1}{2m}\langle p^2\rangle_0=\frac{1}{2m}\cdot\frac{m\omega\hbar}{2}=\frac{\hbar\omega}{4}$, $\langle V\rangle_0=\frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle_0=\frac{1}{2}m\omega^2\cdot\frac{\hbar}{2m\omega}=\frac{\hbar\omega}{4}$

$\langle T\rangle_0+\langle P\rangle_0=\frac{\hbar\omega}{2}=E_0$

$\langle T\rangle_1=\frac{1}{2m}\langle p^2\rangle_1=\frac{3}{4}\hbar\omega$, $\langle V\rangle_1=\frac{1}{2}m\omega^2\langle P^2\rangle_1=\frac{3}{4}\hbar\omega$

$\langle T\rangle_1+\langle V\rangle_1=\frac{3}{2}\hbar\omega=E_1$