Ex.1.5 | ch.1 | P13 | Chloe | 2025.7.13

解：(a) $\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,t)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}\cdot Ae^{-\lambda|x|}e^{i\omega t}dx$

$=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\lambda|x|}dx=2A^2\int_0^{+\infty}e^{-2\lambda x}dx$ （$e^{-2\lambda|x|}$为偶函数）

$=\frac{A^2}{\lambda}$ （分部积分得出）$=1$

归一化此时 $A=\sqrt{\lambda}$

(b) $\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x|\Psi(x,t)|^2dx=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-2\lambda|x|}dx$ （被积函数为奇函数）

$=0$

$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|\Psi(x,t)|^2dx=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-2\lambda|x|}dx$ （被积函数为偶函数）

$=2A^2\int_0^{+\infty}x^2e^{-2\lambda x}dx=-\frac{A^2}{\lambda}\int_0^{+\infty}x^2de^{-2\lambda x}$

$=-\frac{A^2}{\lambda}\left[x^2e^{-2\lambda x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-2\lambda x}dx^2\right]$

$=-\frac{A^2}{\lambda^2}\int_0^{+\infty}xde^{-2\lambda x}$ （再次分部积分）

$=\frac{A^2}{2\lambda^3}=\frac{1}{2\lambda^2}$ （$A=\sqrt{\lambda}$）

(c) $\sigma^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle=\frac{1}{2\lambda^2}$ $\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}\lambda}$

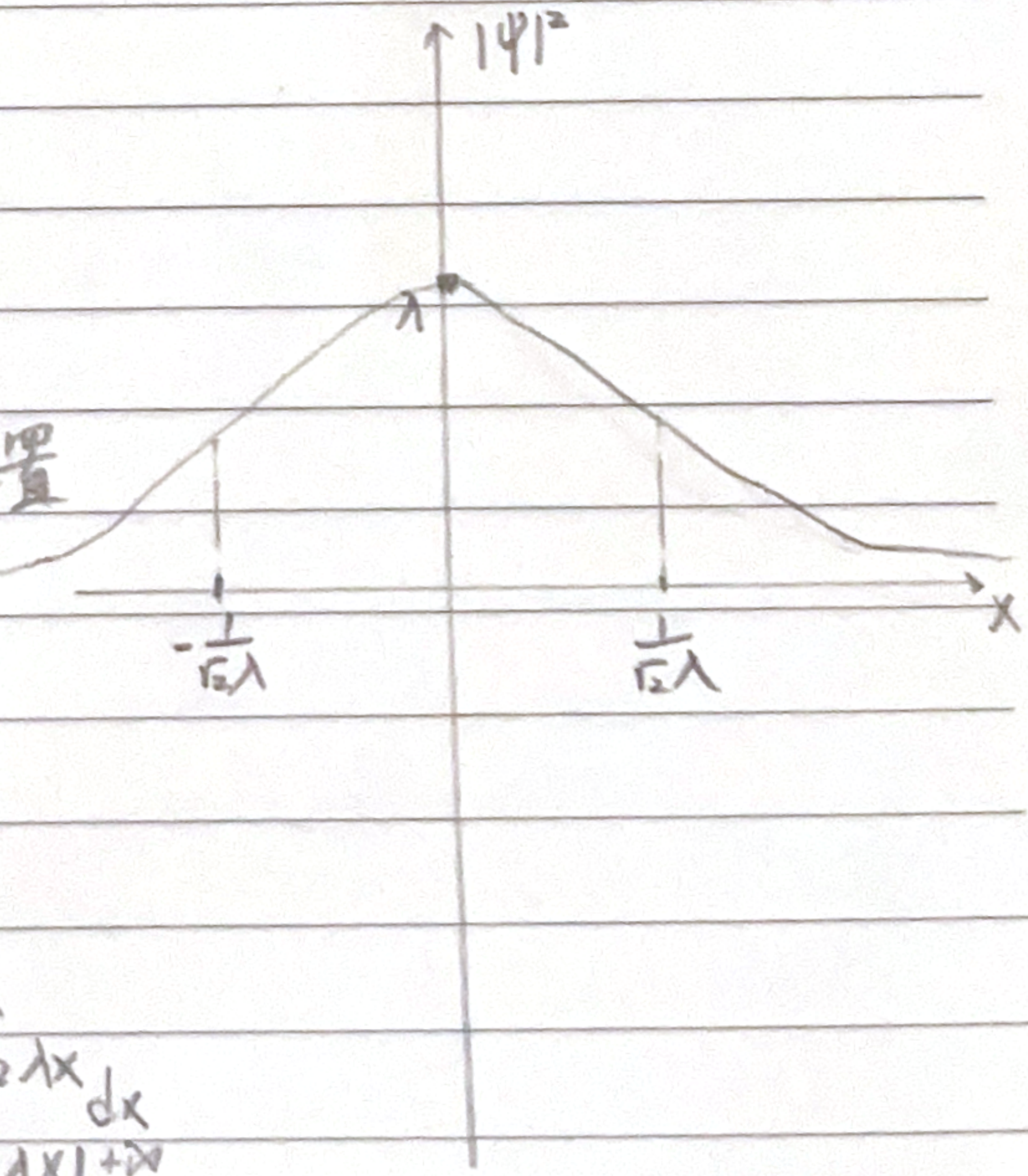
$|\Psi|^2=\lambda e^{-2\lambda|x|}$ 偶函数，关于 $x=0$ 对称

$x=0$时 $|\Psi|^2=\lambda$

$x\to\pm\infty$ $|\Psi|^2\to0$

$\langle x\rangle+\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}\lambda}$

$\langle x\rangle-\sigma=-\frac{1}{\sqrt{2}\lambda}$



解释"弥散"：σ衡量粒子位置x相对于期望<x>的分散程度

σ越小，靠近<x>的可能性更大，

σ越大，越分散

在$(-\sigma,+\sigma)$之外的概率

$p=\int_{-\infty}^{-\sigma}|\Psi|^2dx+\int_{\sigma}^{+\infty}|\Psi|^2dx$

$=2\int_\sigma^{+\infty}|\Psi|^2dx=2\int_\sigma^{+\infty}\lambda e^{-2\lambda x}dx$

$=-\int_\sigma^{+\infty}e^{-2\lambda x}d(-2\lambda x)=-e^{-2\lambda x}\Big|_\sigma^{+\infty}$

$=-(0-e^{-2\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\lambda}})=e^{-\sqrt{2}}\approx0.243$