解：(a) 归一化$\Psi(x,0)$。 $\Psi(x,0)=Ae^{-ax^2}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,0)|^2dx=|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2ax^2}dx=1$

由高斯积分，$|A|^2\sqrt{\frac{\pi}{2a}}=1$，$A=(\frac{2a}{\pi})^{1/4}$，$\Psi(x,0)=(\frac{2a}{\pi})^{1/4}e^{-ax^2}$

(b) 求解$\Psi(x,t)$。 首先，求解$\phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,0)e^{-ikx}dx$（傅里叶变换）

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{2a}{\pi})^{1/4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2-ikx}dx$（又，$-ax^2-ikx=-a(x+\frac{ik}{2a})^2-\frac{k^2}{4a}$，令$u=x+\frac{ik}{2a}$）

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{2a}{\pi})^{1/4}\cdot e^{-k^2/4a}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-au^2}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{2a}{\pi})^{1/4}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-k^2/4a}$（高斯积分）

$=(\frac{2}{\pi a})^{1/4}e^{-k^2/4a}$； $\Psi(x,t)=(\frac{2}{\pi a})^{1/4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{k^2}{4a}+ikx-\frac{i\hbar k^2t}{2m}}dk$（书中式2.101）

（令$r_0^2=\frac{1}{4a}+\frac{i\hbar t}{2m}$，$-k^2r_0^2+ikx=-r_0^2(k-\frac{ix}{2r_0^2})^2-\frac{x^2}{4r_0^2}$，积分为：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-k^2(\frac{1}{4a}+\frac{i\hbar t}{2m})+ikx}dk$

$=e^{-x^2/4r_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r_0^2(k-\frac{ix}{2r_0^2})^2}dk=e^{-x^2/4r_0^2}\cdot\sqrt{\pi}/r_0$（高斯积分））

现在$\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{2}{\pi a})^{1/4}\cdot e^{-x^2/4r_0^2}\cdot\sqrt{\pi}/r_0$（接下来化成题目中的答案形式）

$=(\frac{2}{\pi a})^{1/4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2r_0^2}}\cdot e^{-x^2/4r_0^2}=(\frac{2}{\pi a})^{1/4}\cdot\frac{\sqrt{2a}}{r}\cdot e^{-ax^2/r^2}$（$r_0^2=r^2/4a$）

$=(\frac{2a}{\pi})^{1/4}\cdot\frac{1}{r}\cdot e^{-ax^2/r^2}$，（$r\equiv\sqrt{1+(2i\hbar at/m)}$）

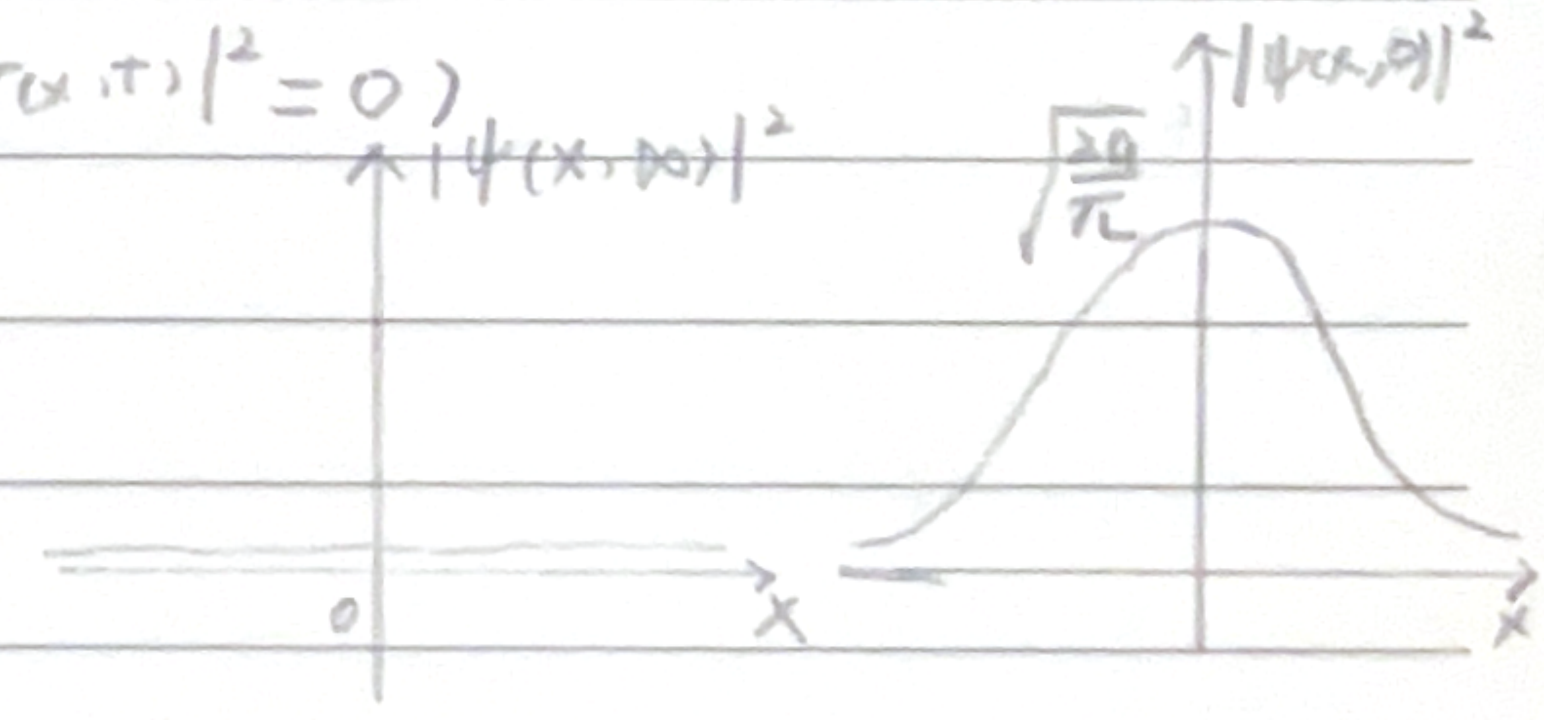
(c) 令$w\equiv\sqrt{a/[1+(2\hbar at/m)^2]}$，$|\Psi(x,t)|^2=\sqrt{\frac{2}{a\pi}}\cdot w^2e^{-2w^2x^2}$

$|\Psi(x,t)|^2$为偶，$x=0$时，极大值为$\sqrt{\frac{2}{a\pi}}\cdot w^2$，钟形

$t=0$时，$|r|^2=1$，$w=\sqrt{a}$，$|\Psi(x,0)|^2=\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\cdot e^{-2ax^2}$，满足归一化

$t\to\infty$时，$w\to 0$，$e^{-2w^2x^2}$衰减变慢，波包空间分布展宽，粒子位置不确定大，趋于均匀分布

也即概率密度在单点趋于0，总概率仍为1（$\lim_{w\to 0}|\Psi(x,t)|^2=0$）



(d) $\langle x\rangle=0$（被积函数奇）

$\langle p\rangle=0$（同上）

$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|\Psi(x,t)|^2dx=\frac{1}{4aw^2}=\frac{|r|^2}{4a}$

$=\frac{1}{4a}(1+(\frac{2\hbar at}{m})^2)$（高斯积分）

$\langle p^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(k)|^2(\hbar k)^2dk=\hbar^2(\frac{2}{\pi a})^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}k^2e^{-k^2/2a}dk$（高斯积分）

$=\hbar^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi a}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot a^{3/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=a\hbar^2$

$\sigma_x=\frac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{1+(\frac{2\hbar at}{m})^2}$ $\sigma_p=\hbar\sqrt{a}$

$\sigma_x\cdot\sigma_p=\frac{\hbar}{2}\sqrt{1+(\frac{2\hbar at}{m})^2}\geq\hbar/2$ $t=0$时最接近极限