Rappel rapide introduction aux probabilités

IG3

2022

expérience aléatoire *(épreuve)*
C'est une expérience dont les résultats sont dus au hasard. Même si elle est répétée dans les mêmes conditions, elle ne donnera pas nécessairement les mêmes résultats.

univers *(ensemble fondamental)*
C'est l'ensemble de tous les résultats possible d'une expérience aléatoire. On le notera en général Ω*. Un élément de* Ω *est généralement noté* ω *et est appelé éventualité.*

Exemple : On jette un dé une fois et on regarde le résultat. Alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemple : On considère une population animale composée a part égale d'individus des deux sexes (F : Femelle, M : Mâle).
On s'intéresse à l'épreuve suivante : extraire trois individus de cette population.
L'univers, donc les différents résultats possibles de cette épreuve, est

$$\Omega = \{FFF, FFM, FMF, MFF, MMF, MFM, FMM, MMM\}.$$

Très souvent, ce qui va nous intéresser c'est de savoir si le résultat de l'expérience appartient à un sous-ensemble de Ω.

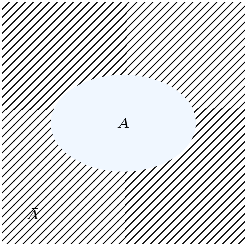
événement

On appelle événement n'importe quel sous-ensemble de Ω.

Exemple : Dans l'exemple précédent, un événement E possible est d'avoir extrait au moins deux femelles. On a alors

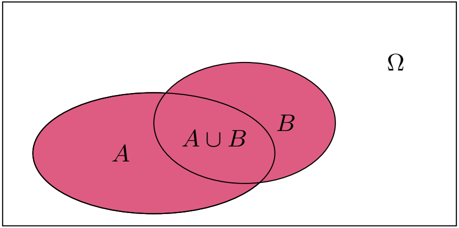
$$E = \{FFF, FFM, FMF, MFF\}.$$

$\bar{A}$ (A^c) est **l'événement complémentaire** (ou contraire) de A. C'est l'événement qui se réalise si A ne l'est pas.

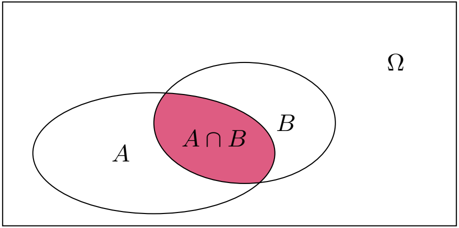


La réunion

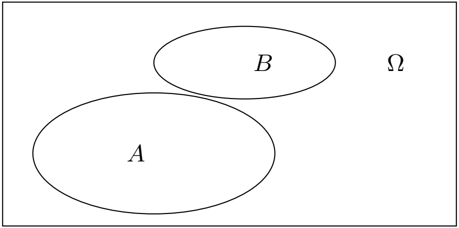
Si A et B sont deux événements, la **réunion** des événements A et B, $A \cup B$ est l'événement qui se réalise dès que A ou B s'est réalisé.



Si A et B sont deux événements, l'**intersection** des événements A et B, $A \cap B$ est l'événement qui se réalise dès que A ET B se sont réalisés.



Les événements A et B sont disjoints, **incompatibles** ou mutuellement exclusifs si $A \cap B = \emptyset$.



1. $A \cup \overline{A} = \Omega$
2. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ où $A \setminus B = \{\omega \in A | \omega \notin B\}$
3. associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. distributivité : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
5. $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

Exemples : On considère l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et les événements $A = \{1, 2, 3\}, B = \{5, 6\}$ et $C = \Omega$.

- $\overline{A} = \{4, 5, 6\}$
- $\overline{C} = \emptyset$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
- $A \cap B = \emptyset$

Système complet d'événements

Un système complet d'événements est une suite $E_1, E_2, ..., E_m$ de sous-ensembles non vides de Ω vérifiant

- $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$
- $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_m = \Omega$

Autrement dit, $E_1, E_2, ..., E_m$ est une partition de Ω.

Remarque : Si $E_1, E_2, ..., E_m$ est un système complet de Ω et A est un événement de Ω, alors $E_1 \cap A$, $E_2 \cap A$, ... et $E_m \cap A$ constituent une partition de A.

Exemple : Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les événements $\{i\}$ avec $i \in [\![1, 6]\!]$ constituent un système complet d'événements de Ω. Donner un autre système complet d'événements de Ω.

TD : Exercice 1

Tribu

Une tribu sur un ensemble Ω correspond à tout ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω tel que :

- *Toute réunion dénombrable d'ensembles de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$*
- *Le complémentaire de tout élément de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$,*
- $\Omega \in \mathcal{T}$.

L'ensemble $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω et $\{\emptyset, B, \overline{B}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω pour tout $B \subset \Omega$.

Mesure de probabilité

Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.
Une mesure de probabilité est une application $P : \mathcal{T} \to [0, 1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$, *pour toute suite dénombrable d'événements* $E_1, E_2, \ldots$ *disjoints deux à deux appartenant à $\mathcal{T}$.*

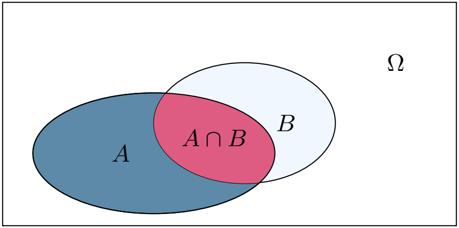
On dit que $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un ***espace probabilisé****.*

Propriétés

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



- $A \cup B = A + B \setminus A$
- $B \setminus A = B \cap \overline{A}$
- $B = B \cap \overline{A} + B \cap A$

$$\Rightarrow A \cup B = A + B - A \cap B$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ (fini) et chaque élément de l'univers a la même probabilité (équiprobabilité) alors pour tout élément ω_i de Ω, on a

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{n},$$

avec $\#\Omega = Card(\Omega)$.

La probabilité de tout événement A est

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Exemple

On considère un dé à 6 faces, non pipé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*, et* A *l'événement "on obtient une face paire"* $A = \{2, 4, 6\}$*. Alors* $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$*.*

TD : Exercice 2

La question est "*Combien y a-t-il de façons de ranger k objets pris au hasard parmi n objets distincts ?*"

Les arrangements correspondent à un tirage avec ordre et sans répétition (sans remise).

$$\text{il y a } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ possibilités.}$$

Exemple

Lors de la finale olympique du 100m il y a huit finalistes. Combien y a-t-il de possibilités de répartition des médailles d'or, d'argent et de bronze ?
On a $k = 3, n = 8$, et donc $A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités.

TD : Exercice 6, Exercice 8

Les combinaisons correspondent à un tirage sans ordre et sans répétition.

$$\text{il y a } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ possibilités.}$$

Exemple

Le nombre de façons de tirer 4 as d'un paquet de 32 cartes est

$$C_{32}^4 = \frac{32!}{4!28!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4 \times 3 \times 2} = 35960.$$

TD : Exercice 3, Exercice 4, Exercice 5

On dispose de 2 dés parfaits, un noir et un blanc. On lance les 2 dés et on s'intéresse à l'événement $A = \{\text{la somme des dés vaut 5}\}$. Il y a quatre couples de solutions possibles, on a donc $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Supposons maintenant que nous disposions d'une information supplémentaire :

a) l'événement $B = \{\text{le dé blanc vaut } 5\}$ est réalisé. Il est alors clair que l'événement A ne se réalisera pas quelle que soit la valeur du dé noir. On dit que la probabilité que A se réalise sachant B est nulle : $P(A|B) = 0$.

b) l'événement $C = \{\text{le dé blanc vaut } 1\}$ est réalisé. Dans ce cas la seule situation qui permette d'obtenir 5 est que le dé noir prenne la valeur 4, ce qui a une chance sur 6 de se produire : $P(A|C) = \frac{1}{6}$.

Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé. Soient* E_1 *et* E_2 *deux événements, la probabilité conditionnelle de* E_2 *étant donné* E_1, $P(E_2|E_1)$, *indique la probabilité que* E_2 *se produise sachant que* E_1 *s'est déjà produit* $(P(E_1) \neq \emptyset)$

Théorème de Bayes

Soient A *et* B *deux événements de probabilité non nulle. Alors*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A|B)\frac{P(B)}{P(A)}$$

Remarque : Si la réalisation ou la non réalisation de E_1 n'affecte pas E_2,

$$P(E_2|E_1) = P(E_2).$$

TD : Exercice 7, Exercice 9, Exercice 10

Exemple

On considère les résultats d'un test médical donnés dans le tableau suivant.

Sexe / Test	*positif*	*négatif*
homme	*12*	*30*
femme	*18*	*40*

Quelle est la probabilité d'avoir un test positif ? Un test positif chez les hommes ?

Formule des probas totales

Soit $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ *une partition de* Ω *et* A *un événement.*

- $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A, B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$
- *Si de plus* $\forall i, P(B_i) \neq 0$,

$$P(A) = \sum_{j} P(A|B_j)P(B_j).$$

Exercice

Un laboratoire a mis au point un alcootest. 2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété. Les premiers essais ont conduit aux résultats suivants :

- lorsqu'une personne est réellement en état d'ébriété, 95 fois sur 100 l'alcootest se révèle positif ;
- lorsqu'une personne n'est pas en état d'ébriété, 96 fois sur 100 l'alcootest se révèle négatif.

Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootest est positif ?

On s'attachera a bien définir les événements considérés avant de se lancer dans les calculs !

L'indépendance est un concept fondamental de la théorie des probabilités. Elle permet de conceptualiser le fait que 2 événements ne peuvent pas interagir l'un sur l'autre.

Événements **indépendants**

E_1 et E_2 sont indépendants si $P(E_1 \text{ et } E_2) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$.

Plus généralement : $E_1, ..., E_k$ sont des événements indépendants si

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{k-1} \cap E_k) = P(E_1) \times P(E_2) \times ... \times P(E_{k-1}) \times P(E_k)$$

Remarque

Il est équivalent de dire que $P(E_1|E_2) = P(E_1)$ et/ou que $P(E_2|E_1) = P(E_2)$. On écrit alors $E_1 \perp\!\!\!\perp E_2$.

Événements **indépendants 2 à 2**

Les n événements A_1, ..., A_n sont dits indépendants 2 à 2 si pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, $A_i \perp\!\!\!\perp A_j$.

Exemple

On considère un dé à 6 faces, non pipé et les événements $A = \{2, 4, 6\}$ *et* $B = \{3, 6\}$. A *et* B *sont indépendants. En effet,*

- $P(A) = 3/6$,
- $P(B) = 2/6$ *et*
- $P(A \cap B) = 1/6$

On vérifie donc que $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Exemple

On considère le résultat de deux jets d'un dé à 6 faces. A_1 *: "obtenir un nombre pair avec le premier jet",* A_2 *: "obtenir un nombre impair avec le second jet" et* A_3 *: "obtenir deux jets de même parité". On a* $P(A_1) = 1/2$, $P(A_2) = 1/2$ *et* $P(A_3) = 1/2$.
Les événements A_1, A_2 *et* A_3 *sont-ils indépendants deux à deux ? Sont-ils mutuellement indépendants ?*

Remarque

- *Un événement de probabilité nulle est toujours indépendant de tous les autres.*
- *Indépendance et incompatibilité n'ont rien à voir !*
- *L'indépendance mutuelle des E_i implique leur indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse.*

Proposition

Si A et B sont deux événements indépendants, alors les paires $\{A, \overline{B}\}$, $\{\overline{A}, B\}$ et $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ sont constituées d'événements indépendants.