

MODÉLISATION STATISTIQUE DE PRÉCIPITATIONS URBAINES À FINE ÉCHELLE SPATIO-TEMPORELLE

28 Septembre 2023

Chloé SERRE-COMBE¹ Nicolas MEYER¹ Thomas OPITZ² Gwladys TOULEMONDE¹

¹IMAG, Université de Montpellier, LEMON Inria

²INRAE, BioSP, Avignon



ZONE D'ÉTUDE



- ▶ **Situation géographique :**
Bassin versant du Verdanson, affluent du Lez, situé en zone urbaine
- ▶ **Contexte :**
Épisodes méditerranéens, risque d'inondations

STATIONS DE MESURES



$$\mathcal{S} = \{17 \text{ pluviomètres}\}$$

- ▶ **Source :** Observatoire urbain de l'HydroScience Montpellier¹
- ▶ **Période :** 2019 à 2022
- ▶ **Fine échelle temporelle :**
À la minute avec agrégation à 5 minutes
- ▶ **Fine échelle spatiale :**
Inter-distance entre 77 et 1531 mètres

¹FINAUD-GUYOT et al. 2023

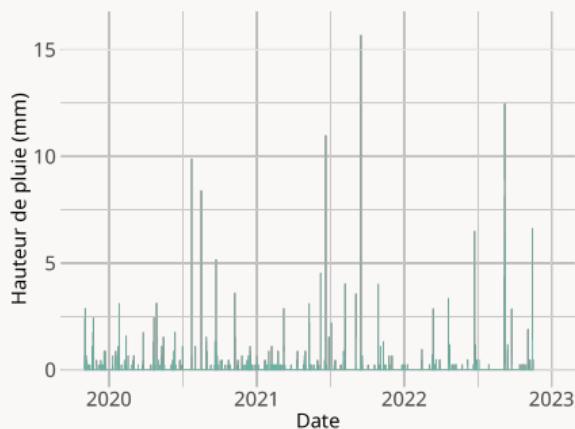
MODÉLISATION UNIVARIÉE DE LA PLUIE

Generalized Pareto Distribution

$$\bar{H}_\xi \left(\frac{y}{\sigma} \right) = \begin{cases} \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma} \right)_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ e^{-\frac{y}{\sigma}} & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

où $a_+ = \max(a, 0)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $y > 0$

- ▶ Modélise les pluies extrêmes
- ▶ Dépend d'un choix de seuil

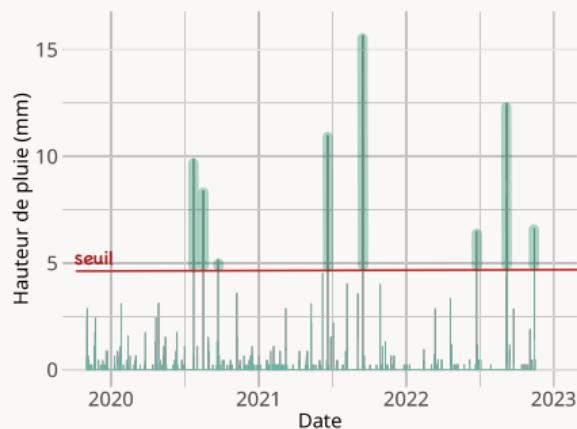


Generalized Pareto Distribution

$$\bar{H}_\xi \left(\frac{y}{\sigma} \right) = \begin{cases} \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma} \right)_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ e^{-\frac{y}{\sigma}} & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

où $a_+ = \max(a, 0)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $y > 0$

- ▶ Modélise les pluies extrêmes
- ▶ Dépend d'un choix de seuil



MODÉLISATION UNIVARIÉE DE LA PLUIE

Generalized Pareto Distribution



Extended GPD¹

$$\bar{H}_\xi \left(\frac{y}{\sigma} \right) = \begin{cases} \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma} \right)_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ e^{-\frac{y}{\sigma}} & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

où $a_+ = \max(a, 0)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $y > 0$

$$F_Y(y) = G \left(H_\xi \left(\frac{y}{\sigma} \right) \right),$$

avec $G(x) = x^\kappa$, $\kappa > 0$

- ▶ Modélise les pluies extrêmes
- ▶ Dépend d'un choix de seuil
- ▶ Modélise les pluies hautes et modérées
- ▶ Évite le choix d'un seuil

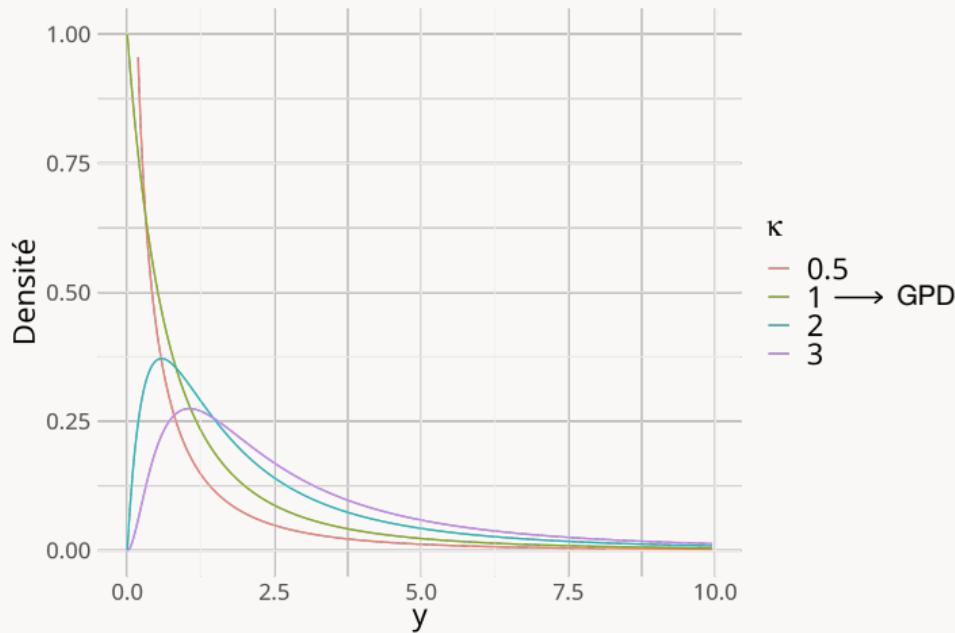
¹NAVEAU et al. 2016

MODÉLISATION UNIVARIÉE DE LA PLUIE

Generalized Pareto Distribution

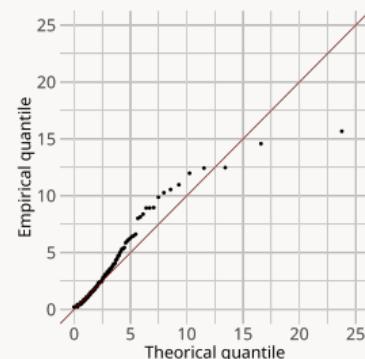
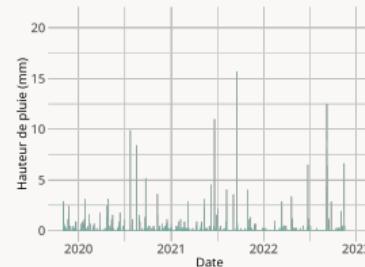
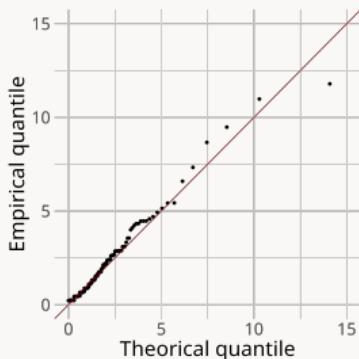
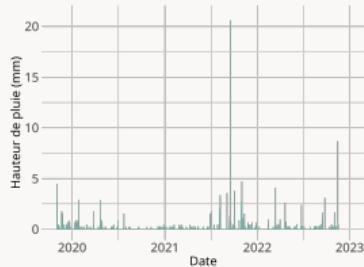


Extended GPD



$$\sigma = 1, \xi = 0.5$$

AJUSTEMENT D'UNE ECPD



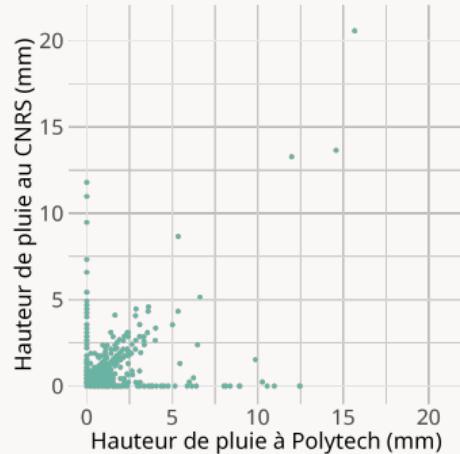
Ajustement sur les sites du CNRS et de Polytech
 $(\hat{\kappa} = 0.56, \hat{\sigma} = 0.26 \text{ et } \hat{\xi} = 0.51)$

MODÉLISATION DE LA DÉPENDANCE SPATIO-TEMPORELLE

Mesure de dépendance extrémale

Soient $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ et $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$. On définit

$$\chi = \lim_{u \rightarrow 1} \chi(u), \text{ avec } \chi(u) = \mathbb{P}(U > u \mid V > u)$$



Variogramme

Soit $X = \{X_s, s \in \mathcal{S}\}$ un processus. Pour tout lag spatial h , le variogramme γ est défini

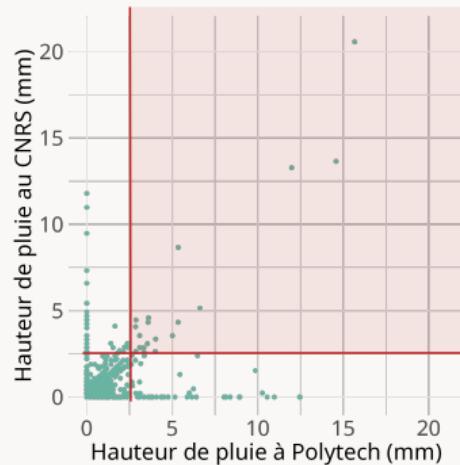
$$2\gamma(h) = \mathbb{V}(X_{s+h} - X_s)$$

MODÉLISATION DE LA DÉPENDANCE SPATIO-TEMPORELLE

Mesure de dépendance extrémale

Soient $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ et $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$. On définit

$$\chi = \lim_{u \rightarrow 1} \chi(u), \text{ avec } \chi(u) = \mathbb{P}(U > u \mid V > u)$$



Variogramme

Soit $X = \{X_s, s \in \mathcal{S}\}$ un processus. Pour tout lag spatial h , le variogramme γ est défini

$$2\gamma(h) = \mathbb{V}(X_{s+h} - X_s)$$

MODÉLISATION DE LA DÉPENDANCE SPATIO-TEMPORELLE

Cadre : $X = \{X_{s,t}, (s, t) \in \mathcal{S} \times [0, \infty)\}$ un processus max-stable de Brown-Resnick, strictement stationnaire et isotrope (BUHL et al. 2019).

Extrémogramme spatio-temporel d'un processus de Brown-Resnick

Soient $h \geq 0$ un lag spatial et $\tau \geq 0$ un lag temporel. On a

$$\chi(h, \tau) = 2 \left(1 - \phi \left(\sqrt{\frac{1}{2} \delta(h, \tau)} \right) \right)$$

avec ϕ la f.d.r. d'une loi normale centrée-réduite et δ le variogramme associé.

MODÉLISATION DE LA DÉPENDANCE SPATIO-TEMPORELLE

Hypothèse de séparabilité additive: $\frac{\delta(h, \tau)}{2} = \theta_1 h^{\alpha_1} + \theta_2 \tau^{\alpha_2}$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 2$, $\theta_1, \theta_2 > 0$

Spatio-temporel

$$\chi(h, \tau) = 2 \left(1 - \phi \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \delta(h, \tau) \right) \right)$$

Transformation:

$$\eta(\chi) = 2 \log \left(\phi^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \chi \right) \right)$$

Spatial

$$\eta(\chi(h, 0)) = \log \theta_1 + \alpha_1 \log h, \quad h > 0$$

Temporel

$$\eta(\chi(0, \tau)) = \log \theta_2 + \alpha_2 \log \tau, \quad \tau > 0$$

MODÉLISATION DE LA DÉPENDANCE SPATIO-TEMPORELLE

Hypothèse de séparabilité additive: $\frac{\delta(h, \tau)}{2} = \theta_1 h^{\alpha_1} + \theta_2 \tau^{\alpha_2}$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 2$, $\theta_1, \theta_2 > 0$

Spatio-temporel

$$\chi(h, \tau) = 2 \left(1 - \phi \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \delta(h, \tau) \right) \right)$$

Transformation:

$$\eta(\chi) = 2 \log \left(\phi^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \chi \right) \right)$$

Spatial

$$\eta(\chi(h, 0)) := c_1 + \alpha_1 x_h, \quad h > 0$$

Temporel

$$\eta(\chi(0, \tau)) := c_2 + \alpha_2 x_\tau, \quad \tau > 0$$

Modèle linéaire pondéré (BUHL et al. 2019)

ESTIMATION DE LA DÉPENDANCE SPATIALE

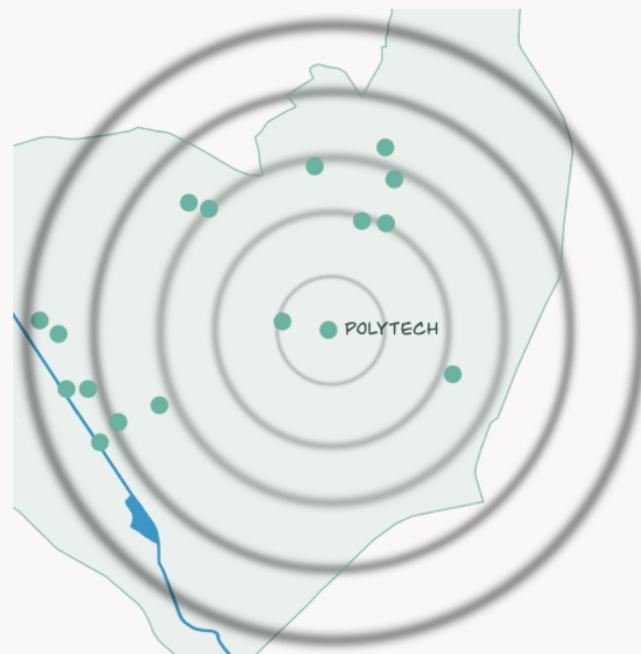
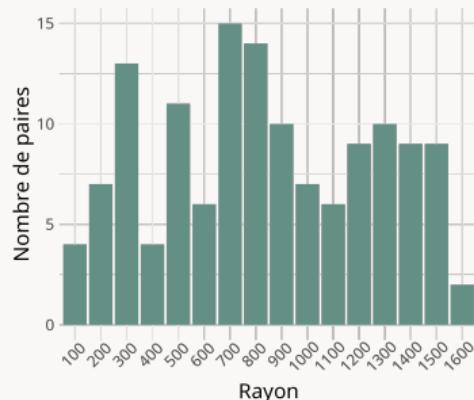
Considération de rayons autour de chaque site

Chaque lag h représente un rayon.

L'ensemble des paires de même lag spatial h est

$$N(h) = \{(s_i, s_j) \mid \|s_i - s_j\| \in [h - \Delta h, h]\}$$

Nous prenons $\Delta h = 100$ mètres.



ESTIMATION DE LA DÉPENDANCE SPATIALE

Extrémogramme spatial

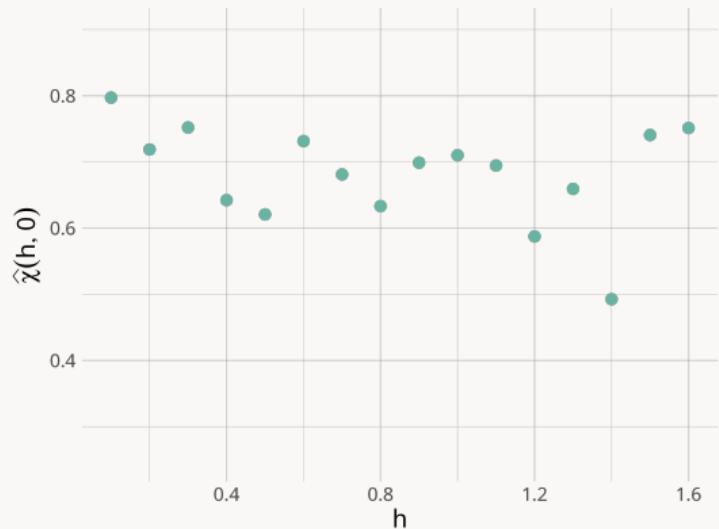
Pour tout temps t et pour tout $(s_i, s_j) \in N(h)$,

$$\chi_{ij,q}^{(t)}(h, 0) = \frac{\mathbb{P}(X(s_i, t) > q, X_{s_j, t} > q)}{\mathbb{P}(X_{s_i, t} > q)}$$

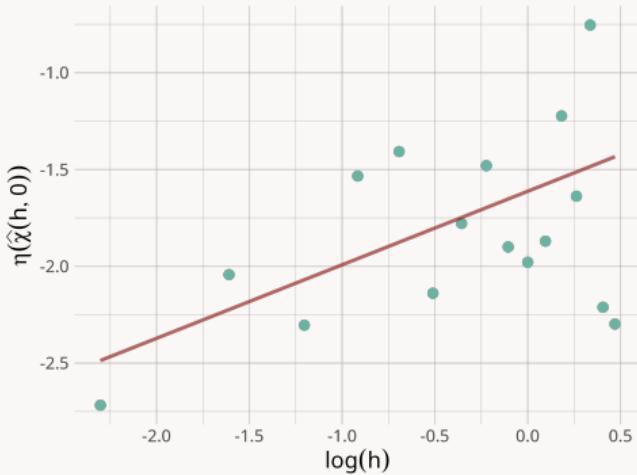
Estimateur:

$$\hat{\chi}_q^{(t)}(h, 0) = \frac{\frac{1}{|N(h)|} \sum_{i,j \mid (s_i, s_j) \in N(h)} \mathbb{1}_{\{X_{s_i, t} > q, X_{s_j, t} > q\}}}{\frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{i=1}^{|\mathcal{S}|} \mathbb{1}_{\{X_{s_i, t} > q\}}}$$

avec q un quantile assez grand.



MODÈLE LINÉAIRE PONDÉRÉ SPATIAL



Estimation des paramètres

$$\begin{pmatrix} \widehat{c}_1 \\ \widehat{\alpha}_1 \end{pmatrix} = \underset{c_1, \alpha_1}{\operatorname{argmin}} \sum_h w_h (\eta(\widehat{\chi}(h, 0)) - (c_1 + \alpha_1 x_h))^2$$

Résultats

	Estimation	Écart-type
\widehat{c}_1	-1.612***	0.128
$\widehat{\alpha}_1$	0.380**	0.113

** p-value < 0.01; *** p-value < 0.001

ESTIMATION DE LA DÉPENDANCE TEMPORELLE

Extrémogramme temporel

Soit t fixé.

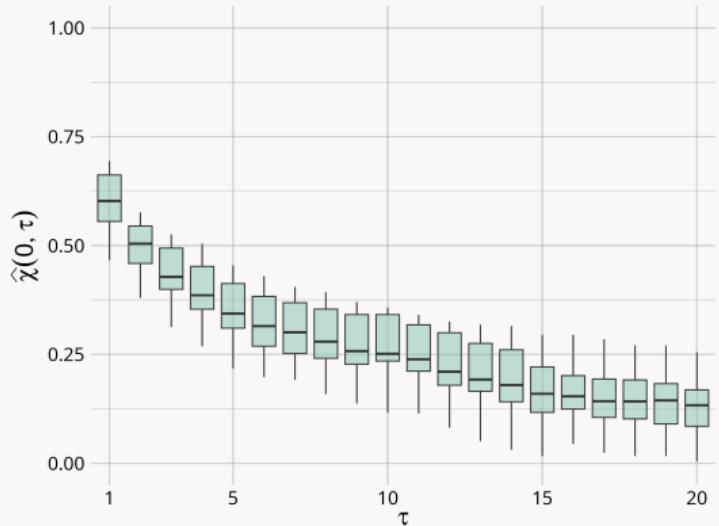
Pour tout site s on a

$$\chi_q^{(s)}(0, \tau) = \frac{\mathbb{P}(X_{s,t} > q, X_{s,t+\tau} > q)}{\mathbb{P}(X_{s,t} > q)}$$

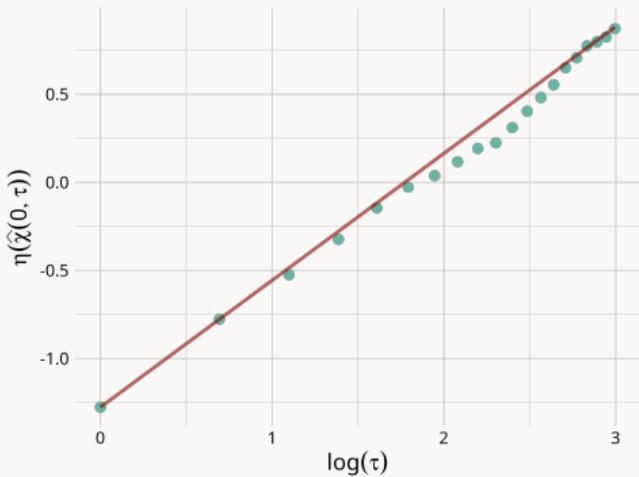
Estimateur:

$$\widehat{\chi}_q^{(s)}(0, \tau) = \frac{\frac{1}{T-\tau} \sum_{k=1}^{T-\tau} \mathbb{1}_{\{X_{s,t_k} > q, X_{s,t_k+\tau} > q\}}}{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \mathbb{1}_{\{X_{s,t_k} > q\}}}$$

avec q un quantile assez grand et $t_k \in \{t_1, \dots, t_T\}$.



MODÈLE LINÉAIRE PONDÉRÉ TEMPOREL



Estimation des paramètres

$$\begin{pmatrix} \widehat{c}_2 \\ \widehat{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \underset{c_2, \alpha_2}{\operatorname{arg\!min}} \sum_{\tau} w_{\tau} (\eta(\widehat{\chi}(0, \tau)) - (c_2 + \alpha_2 x_{\tau}))^2$$

Résultats

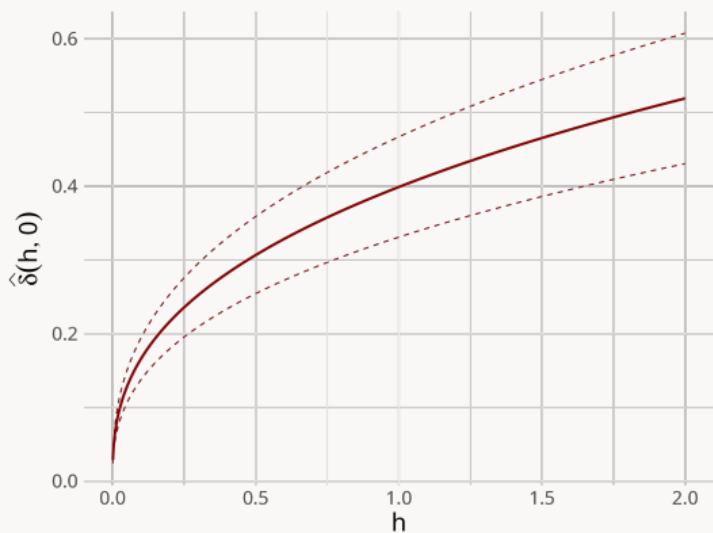
	Estimation	Écart-type
\widehat{c}_2	-1.276***	0.0002
$\widehat{\alpha}_2$	0.720***	0.001

*** p-value < 0.001

VARIOGRAMME

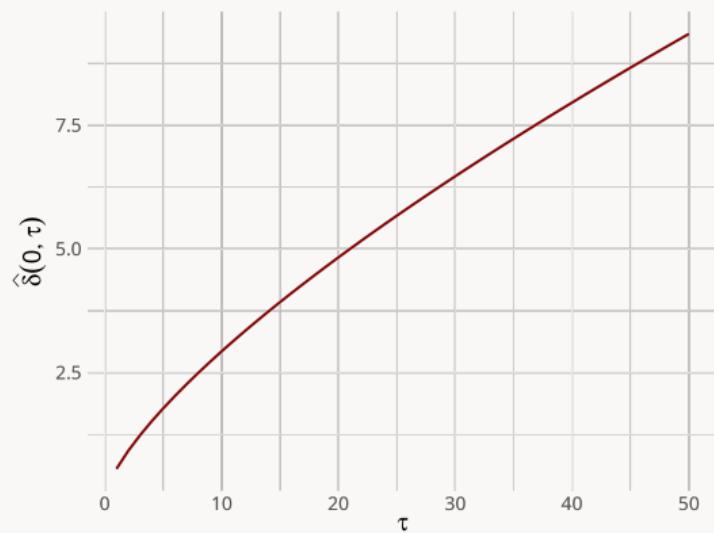
Spatial

$$\hat{\delta}(h, 0) = 2\hat{\theta}_1 h^{\hat{\alpha}_1}$$



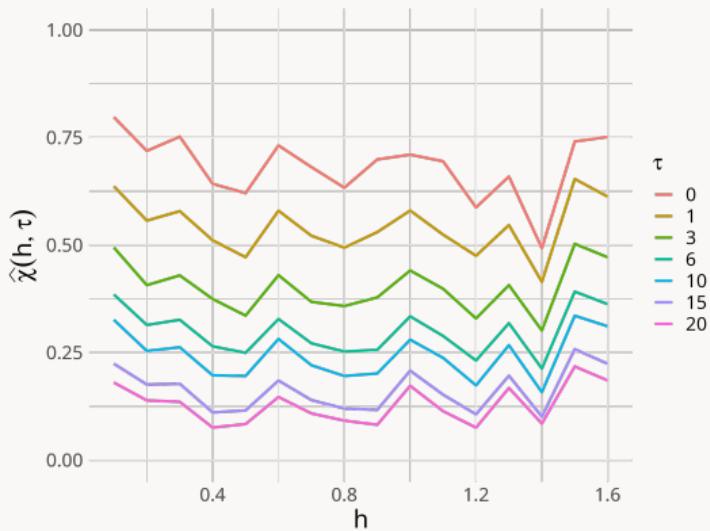
Temporel

$$\hat{\delta}(0, \tau) = 2\hat{\theta}_2 \tau^{\hat{\alpha}_2}$$

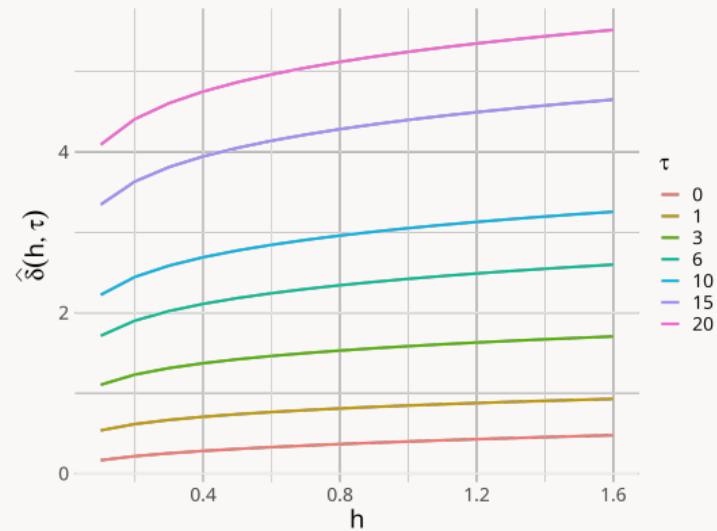


STRUCTURE NON SÉPARABLE?

Extrémogramme spatial



Variogramme spatial



AJOUT DE L'ADVECTION

Advection

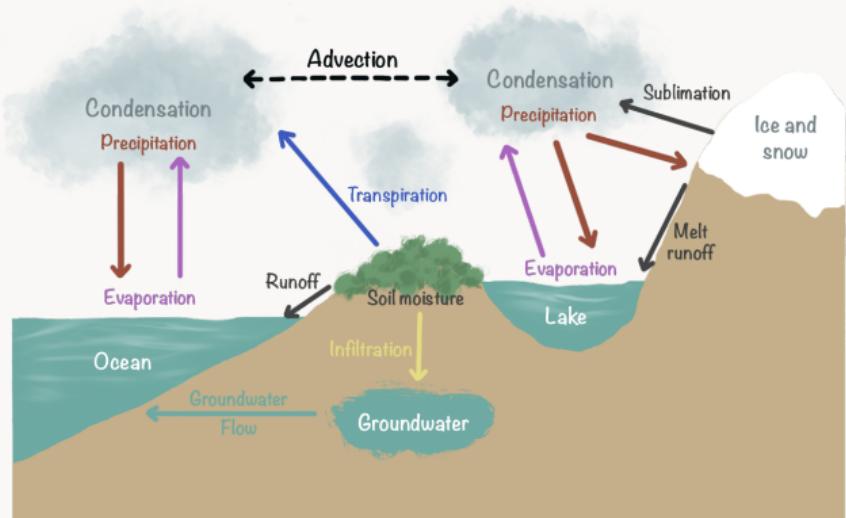
- déplacement horizontal des masses d'air
- vecteur de vitesse \mathbf{V}
- direction fixée

Modélisation de la dépendance

Dans le référentiel Lagrangien, on a

$$\delta_L(\mathbf{h}, \tau) = \delta(\mathbf{h} - \tau\mathbf{V}, \tau)$$

avec $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$



Cycle hydrologique²

²Inspiration : FRITSCHÉ 1999

PERSPECTIVES

- ▶ Structure des décalages spatiaux
- ▶ Cas de non séparabilité avec variogrammes plus complexes
- ▶ Structure anisotrope et advection
- ▶ Modélisation multi-échelle

RÉFÉRENCES

- BUHL, Sven et al. (2019). "Semiparametric estimation for isotropic max-stable space-time processes". In : DOI : [10.3150/18-BEJ1061](https://doi.org/10.3150/18-BEJ1061).
- FINAUD-GUYOT, Pascal et al. (2023). *Rainfall data collected by the HSM urban observatory (OMSEV)*. DOI : [10.23708/67LC36](https://doi.org/10.23708/67LC36).
- FRITSCHE, Eugene (1999). *The Hydrologic Cycle and Rivers*.
- NAVEAU, Philippe et al. (2016). "Modeling jointly low, moderate, and heavy rainfall intensities without a threshold selection". In : *Water Resources Research*. DOI : [10.1002/2015WR018552](https://doi.org/10.1002/2015WR018552).