

IMT Atlantique
Campus de Brest
Technopôle de Brest-Iroise - CS 83818
29238 Brest Cedex 3
Campus de Nantes
4, rue Alfred Kastler
CS 20722
44307 Nantes Cedex 3
URL : www.imt-atlantique.fr



UE Electrical Engineering : Signaux et Systèmes

Support de Cours
UE Electrical Engineering (A1)

K. AMIS, F. CLAVEAU, F. GUILLOUD, R.A. NOGUEIRA, F.X. SOCHE-
LEAU, M. YAGOUBI

Date d'édition : 17 février 2025
Version : 1.0



IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Sommaire

1. Caractérisation des signaux	11
1.1. Rappels d'analyse	11
1.1.1. Convolution	11
1.1.2. Transformées et séries de Fourier	11
1.1.3. Transformée de Laplace	13
1.2. Notions de signal	15
1.2.1. Classification des signaux	16
1.2.2. Définition des signaux tests	17
1.2.3. Notions de fréquence	17
1.3. Signaux à spectre borné	19
1.4. Signaux causaux	20
1.5. Propriétés énergétiques	22
1.5.1. Signaux d'énergie totale finie	22
1.5.2. Signaux de puissance moyenne finie	24
2. Filtrage linéaire	27
2.1. Caractérisation d'un système physique linéaire, continu et stationnaire : le filtre	27
2.1.1. Généralités	28
2.1.2. Considérations énergétiques	29
2.2. Fonction de transfert	30
2.2.1. Mise en cascade de filtres	31
2.2.2. Systèmes bouclés	31
2.2.3. Réponse à un mélange d'ondes monochromatiques	33
2.2.4. Principaux rôles du filtre dans une chaîne de traitement	33
2.3. Filtres réalisables	34
2.3.1. Propriétés de la réponse impulsionnelle $h(x)$ d'un filtre réalisable (cas des fonctions ordinaires)	35
2.3.2. Propriétés de la fonction de transfert $L[h](p)$ d'un filtre réalisable (cas des fonctions ordinaires)	36
2.4. Filtres stables	36
2.4.1. Stabilité et réponse impulsionnelle	36
2.4.2. Stabilité et fonction de transfert	37
2.4.3. Critère de Routh-Hurwitz	38
2.5. Identification d'un filtre	40
2.5.1. Rappels	40
2.5.2. Réponse impulsionnelle	40
2.5.3. Identification à partir de l'équation différentielle reliant l'excitation et la réponse du système	41
2.5.4. Réponse à une excitation exponentielle : obtention de la fonction de transfert	42

2.6. Amplitude et phase de transfert	42
2.6.1. Réponse à une entrée sinusoïdale	42
2.6.2. Réponse à une entrée à spectre étroit	44
2.7. Classification des filtres et réponse fréquentielle asymptotique (diagrammes de Bode)	44
2.7.1. Généralités	44
2.7.2. Diagramme de Bode asymptotique	45
3. Signaux numériques	49
3.1. Théorème d'échantillonnage	49
3.2. Limites pratiques du théorème d'échantillonnage	53
3.3. Quantification	54
3.4. De l'acquisition à la reconstruction	56
3.5. Signaux discrets	57
4. Transformées de Fourier de signaux discrets	59
4.1. Transformée de Fourier	59
4.2. Densités spectrales	60
4.3. Transformée de Fourier discrète	60
4.3.1. Discrétisation de la variable fréquentielle	61
4.3.2. Transformée de Fourier discrète d'un signal de longueur finie	62
4.3.3. Cas des signaux de longueur infinie	64
4.3.4. Zero-padding	64
4.3.5. TFD rapide : FFT	65
5. Filtrage discret	67
5.1. Généralités sur les systèmes discrets	67
5.1.1. Convolution et réponse impulsionnelle	67
5.1.2. Equation aux différences finies	68
5.1.3. Représentation fréquentielle	69
5.1.4. Synoptique des filtres discrets	70
5.2. Filtres à réponse impulsionnelle finie	70
5.3. Filtres à réponse impulsionnelle infinie	72
6. Liste d'exercices	73
6.1. Propriétés énergétiques des signaux	73
6.2. Filtrage	74
6.3. Filtrage et distorsions	76
6.4. Stabilité des systèmes linéaires	78

6.5. Simplifications de Schéma-bloc et Diagrammes de Bode	79
6.6. Analyse des performances temporelles d'un système linéaire	81
6.7. Exercice de synthèse signal analogique (TD4)	82
6.7.1. Etude des signaux u_k , x et y	83
6.7.2. Etude du filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$	83
6.7.3. Etude du signal z	83
6.8. Signaux numériques	83
6.9. Transformées de Fourier de signaux discrets	85
6.10. Filtrage de signaux discrets	86
Annexes	89
A. Filtres passe-bas du 1er ordre	91
A.1. Analyse temporelle	91
A.1.1. La réponse impulsionnelle	91
A.1.2. La réponse indicielle	92
A.1.3. La réponse à une rampe	93
A.2. Analyse fréquentielle (diagrammes de Bode)	93
B. Passe-bas du 2nd ordre	95
B.1. Analyse temporelle	95
B.1.1. Cas $\Delta > 0$ ($\xi > 1$) : système hyper-amorti	96
B.1.2. Cas $\Delta = 0$ ($\xi = 1$) : système à amortissement critique	97
B.1.3. Cas $\Delta < 0$ ($0 < \xi < 1$) : système sous-amorti	98
B.2. Analyse fréquentielle	101
C. Formulaire et savoir-faire minimum	105
C.1. Rappels de formules d'analyse essentielles en traitement du signal	105
C.2. Signaux et systèmes à temps continu	105
C.2.1. Eléments fondamentaux sur les signaux	105
C.2.2. Signaux mesurés - Echantillonnage	106
C.2.3. Filtrage linéaire	106
C.3. Signaux aléatoires réels	108
C.3.1. Signaux aléatoires stationnaires du second ordre au sens large	108
C.3.2. Propriétés énergétiques	108
C.4. Signaux et systèmes discrets	109
C.4.1. Conversion analogique-numérique	109
C.4.2. Propriétés énergétiques des signaux discrets	109
C.4.3. Transformées de signaux discrets	109
C.4.4. Systèmes discrets	110
Bibliography	111

Liste des figures

1.1.	Illustration des zones de convergence d'une transformée de Laplace $\mathcal{L}[x](p)$ pour des signes différents de $\sigma(x)$	14
1.2.	Exemple d'un signal analogique : signal audio	16
1.3.	Exemple d'un signal numérique : image cameraman sous-échantillonnée	16
1.4.	Illustration des fréquences négatives	19
1.5.	Illustration de l'intercorrélacion entre deux signaux $s(x) = \Pi(x - \frac{1}{2})$ et $r(x) = s(x - \frac{3}{2})$. . .	24
2.1.	Illustration d'un système dont la réponse à l'excitation $s(x)$ est $r(x)$	27
2.2.	Illustration d'un système avec deux entrées et une sortie	28
2.3.	Mise en cascade de filtres.	31
2.4.	Un système asservi : structure de commande en boucle fermée	31
2.5.	Boucle fermée avec une perturbation en entrée et bruit de mesure	32
2.6.	Circuit RC	41
2.7.	Représentation de la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal retardé.	43
2.8.	Illustration de la dispersion introduite par le filtrage - a) avant filtrage b) après filtrage . . .	45
3.1.	Étapes de conversion analogique-numérique.	50
3.2.	Exemple d'un signal échantillonné.	51
3.3.	Haut : spectre du signal échantillonné, gauche : $\nu_e = 30$ Hz, droite : $\nu_e = 15$ Hz. Bas : spectre du signal à temps continu.	52
3.4.	Reconstruction de $s(t)$ à partir de $s_e(t)$	53
3.5.	Echantillonneur moyennneur.	53
3.6.	Exemple de quantification sur 2 bits.	54
3.7.	Exemple de quantificateur uniforme.	54
3.8.	Exemple d'erreur ou bruit de quantification.	55
3.9.	Chaîne complète de traitement numérique.	56
4.1.	Exemple de fenêtres de pondération. Gauche : représentation temporelle (discrète), droite : représentation fréquentielle.	64
4.2.	Signal rectangulaire $s(k) = \text{rect}_4(k)$	65
4.3.	TFD de $s(k) = \text{rect}_4(k)$ avec zero-padding.	66
5.1.	Exemple de schéma synoptique d'un filtre discret.	70
5.2.	De gauche à droite et haut en bas : réponse impulsionnelle, spectre d'amplitude, spectre de phase du filtre RIF de fréquence de coupure $\nu_c = 0.2$ pour $M = 20$ et $M = 60$	71
5.3.	De gauche à droite et haut en bas : réponse impulsionnelle, spectre d'amplitude, spectre de phase du filtre RII de fréquence de coupure $\nu_c = 0.2$ pour $N = M = 20$ et $N = M = 60$. . .	72
6.1.	Représentation de $I_B = 2 \int_0^B \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx$ en fonction de B	73
6.2.	Gain des filtres de Butterworth	75
6.3.	Gain des filtres de Tchebycheff	76
6.4.	Moteur à courant continu	76
6.5.	Chaîne de traitement	77
6.6.	Boucle fermée	78
6.7.	Boucle fermée	79
6.8.	Schéma-bloc	79
6.9.	Boucle fermée équivalente	79
6.10.	Schéma-bloc	80
6.11.	Boucle fermée	81

6.12. Boucle fermée avec une perturbation de sortie	81
6.13. Boucle fermée avec une perturbation d'entrée	82
6.14. Partie positive du spectre d'amplitude issu de l'analyse vibratoire d'un logement de roulement en rotation à 7 tours/sec.	84
A.1. Réponse impulsionnelle d'un 1er ordre	91
A.2. Réponse indicielle d'un 1er ordre	92
A.3. Réponses indicielles d'un 1er ordre pour différentes constantes de temps	92
A.4. Réponse à une rampe d'un système de 1er ordre	93
A.5. Tracé de Bode d'un 1er ordre	94
B.1. Réponses indicielles d'un système de second ordre hyper-amortis ou à amortissement critique	98
B.2. Réponse indicielle d'un système de second ordre sous-amortis	101
B.3. Réponses indicielles d'un système de second ordre sous-amortis avec différents coefficients d'amortissement	102
B.4. Le gain en dB dans le plan de Bode d'un second ordre avec résonance	104
B.5. Tracé de Bode d'un second ordre pour ξ variant	104

Liste des tableaux

1.1. Transformées de Laplace usuelles	14
3.1. Définition de la puissance moyenne, l'énergie, la corrélation et la convolution pour les signaux discrets.	58

Notations

\bar{x}	nombre complexe conjugué de x
x^\star	nombre complexe conjugué de x
$x * y$	convolution entre x et y
δ	distribution de Dirac
III	distribution "peigne de Dirac"
$Y(x)$	distribution de Heaviside
νp	distribution "valeur principale de Cauchy"
$\mathcal{F}[h]$	transformée de Fourier de h
\hat{h}	transformée de Fourier de h
$L[h]$	transformée de Laplace de h
\mathcal{D}	espace des fonctions test (fonctions de la variable réelle à valeurs complexes, indéfiniment dérivables de support borné)
\mathcal{D}'	espace des distributions sur \mathcal{D}
φ	fonction test de \mathcal{D}
$\langle T, \varphi \rangle$	résultat de l'application de la distribution T sur φ
$H(p) = L[h](p)$	fonction de transfert d'un filtre de réponse impulsionnelle h
$R_x(\tau)$	fonction d'autocorrélation du signal x
$S_x(\nu)$	densité spectrale de puissance du signal x
f_X	densité de probabilité de la variable aléatoire X ou du processus aléatoire X
F_X	fonction de répartition de la variable aléatoire X ou du processus aléatoire X
$d(k)$	impulsion unité
$\text{rect}_K(k)$	fonction porte discrète de longueur $K \in \mathbb{N}$
$\mathcal{Z}[s]$	transformée en Z d'un signal discret
$x *_N y$	convolution cyclique entre x et y

Introduction

Selon le dictionnaire Larousse, un signal est une *variation d'une grandeur physique de nature quelconque, transportant de l'information, et grâce à laquelle, dans une installation, un élément en influence un autre*. Cette définition permet d'identifier un modèle où une excitation (l'entrée) agit sur un milieu ou un dispositif (système) qui produit alors une réponse (la sortie). Le traitement du signal et l'automatique sont deux disciplines liées ; il est communément admis que le traitement du signal se focalise plus sur l'analyse, la modélisation et les techniques de traitement des signaux eux-mêmes, alors que l'automatique considère les mêmes problématiques en ayant pour objet d'étude le système. L'objectif de ce cours est de découvrir les concepts et outils fondamentaux communs aux deux. Nous verrons ainsi l'ensemble des techniques qui permettent de produire un signal porteur d'une information ou, au contraire, d'extraire une information à partir d'un signal observé (mesuré, collecté). Cela nécessite d'avoir des outils de modélisation et de caractérisation des signaux et des systèmes.

En ce qui concerne les systèmes, nous nous limitons à ceux ayant une réponse linéaire et invariant par translation (SLIT). Ces systèmes pourront avoir ou pas une boucle de retour appelée contre-réaction. En ce qui concerne les signaux, deux classes sont abordées : les signaux analogiques et les signaux numériques. Nous nous intéressons tout d'abord aux signaux analogiques (Ch. 1 & 2) qui sont définis par une fonction d'une variable continue (très souvent le temps ou la fréquence) qui prend ses valeurs dans un alphabet indénombrable. Les signaux physiques naturels sont principalement des signaux analogiques et ont été pendant longtemps traités à l'aide de circuits actifs et passifs eux-mêmes analogiques. Avec le développement de l'électronique numérique, ces signaux peuvent maintenant être traités avec des calculateurs numériques qui offrent des capacités de traitement accrues ainsi qu'une meilleure flexibilité de développement. Cependant, les signaux analogiques doivent être convertis, au préalable, en une forme appropriée pour le matériel numérique. Cette forme est appelée signal numérique et est définie par une fonction d'une variable discrète qui prend ses valeurs dans un alphabet fini ou infini dénombrable. Les signaux numériques sont étudiés dans la deuxième partie du cours (Ch. 3-5).

Le document est organisé comme suit. Les notions de cours sont présentées dans les chapitres 1 à 5. Les énoncés des exercices sont disponibles au chapitre 6. Un récapitulatif des formules essentielles et des savoir-faire minimaux figure en annexe.

Chapitre 1

Caractérisation des signaux

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux signaux physiques et à leur caractérisation (représentation, propriétés énergétiques, etc...). Ce cours fait appel à un certain nombre de résultats mathématiques, notamment la transformée de Fourier dont nous rappelons la définition au sens des fonctions usuelles (la définition au sens des distributions sera rappelée lorsque son utilisation sera nécessaire). Dans toute la suite du polycopié, sous réserve d'existence, \hat{s} désignera la transformée de Fourier du signal s .

1.1. Rappels d'analyse

1.1.1. Convolution

Définition 1.1 (Convolution de fonctions) *Sous réserve d'existence, le produit de convolution de deux fonctions f et g de la variable réelle, localement sommables, est une fonction h de la variable réelle définie par*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt \quad (1.1)$$

Proposition 1.1 (Conditions suffisantes d'existence de la convolution de fonctions) *Si f et g sont des fonctions localement sommables, à support dans \mathbb{R}_+ , leur produit de convolution existe toujours. Il s'agit d'une fonction h localement sommable de support dans \mathbb{R}_+ définie par*

$$h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt, \quad x > 0 \quad (1.2)$$

et $h(x) = 0$ si $x \leq 0$.

Remarque 1.1 *Un signal dont le support de la représentation temporelle est dans \mathbb{R}_+ est un signal causal. Nous verrons que c'est le cas de la majorité des signaux physiques.*

1.1.2. Transformées et séries de Fourier

Définition 1.2 (Transformée de Fourier) *Soit f une fonction de la variable réelle x . Sous réserve d'existence, la transformée de Fourier de f , notée \hat{f} , est une fonction complexe de la variable réelle ν définie par :*

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-2i\pi\nu x)dx \quad (1.3)$$

Proposition 1.2 (Transformée de Fourier - Conditions suffisantes d'existence) *Si f est une fonction sommable de la variable réelle x (i.e. $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$ existe et est finie), alors sa transformée de Fourier existe et vérifie*

$$|\hat{f}(\nu)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \quad (1.4)$$

De plus \hat{f} est une fonction continue et $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} |\hat{f}(\nu)| = 0$.

Certains signaux sont dits **périodiques**. Ceci signifie que $s(x)$ est périodique, c'est-à-dire qu'il existe un réel $a > 0$ tel que pour tout réel x , $s(x + a) = s(x)$. La plus petite valeur positive a qui satisfait cette propriété est appelée période et est notée T dans la suite. Ces signaux périodiques ne sont pas dans L^2 et il n'est donc pas possible d'en calculer la transformée de Fourier. Les séries de Fourier sont un outil mathématique très performant pour manipuler de tels signaux. Nous rappelons ci-après les principaux résultats sur les séries de Fourier.

Définition 1.3 (Série de Fourier à coefficients réels) Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} , T -périodique et localement sommable.

On appelle coefficients de Fourier de f les réels

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx, \quad (1.5)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (1.6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.7)$$

On appelle série de Fourier de f la série de terme général

$$x \mapsto a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

En pratique, nous manipulerons plutôt le développement en série de Fourier à coefficients complexes défini par

$$x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp\left(i2n\pi \frac{x}{T}\right) \quad (1.8)$$

avec

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n > 0 \quad (1.9)$$

$$c_0 = a_0 \quad (1.10)$$

$$c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, \quad n < 0. \quad (1.11)$$

Théorème 1.1 (Dirichlet) Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} , T -périodique dérivable par morceaux sur $[0, T]$. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge. Sa somme en x_0 vaut

- $f(x_0)$ si f est continue en x_0 ,
- $\frac{1}{2}(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x))$ si x_0 est un point de discontinuité de f .

Corollaire 1.1 (Convergence de la série de Fourier) Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} , T -périodique de classe C^2 . La série de Fourier de f converge normalement sur \mathbb{R} et a pour somme f .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp\left(i2n\pi \frac{x}{T}\right) \quad (1.12)$$

Ce dernier théorème sera particulièrement intéressant pour déterminer le spectre des signaux périodiques. La distribution de Dirac étudiée en analyse est un outil mathématique nous permettant alors de définir le spectre d'un signal périodique comme une somme de raies spectrales situées en $\nu = \frac{n}{T}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, si s désigne la représentation temporelle du signal telle que s soit T -périodique, son spectre est défini à partir du développement en série de Fourier à coefficients réels

$$\hat{s} = a_0 \delta_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n - ib_n}{2} \delta_{\frac{n}{T}} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n + ib_n}{2} \delta_{-\frac{n}{T}} \quad (1.13)$$

Le spectre du signal T -périodique peut également être exprimé en utilisant le développement en série de Fourier à coefficients complexes de s :

$$\hat{s} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_{\frac{n}{T}}. \quad (1.14)$$

Il nous reste à rappeler l'égalité de Parseval qui sera utilisée pour déterminer la puissance des signaux périodiques.

Proposition 1.3 (Égalité de Parseval) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , T -périodique et localement sommable. Alors les séries numériques $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n^2$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$ convergent et on a

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \quad (1.15)$$

1.1.3. Transformée de Laplace

Certains signaux non-périodiques ne sont pas non plus dans L^2 ni même dans L^1 [1]. Leur transformée de Fourier n'est donc pas définie. Ce ne sont pas des signaux physiques mais ils permettent de modéliser simplement certains phénomènes physiques (voir la section 1.2.2 sur les signaux tests page 17).

La transformée de Laplace est une transformation intégrale qui peut être vue comme une généralisation de la transformée de Fourier. Cette généralisation permet en effet de calculer la transformées dans une partie du plan complexe où l'intégrale est définie. Cette section n'est pas un cours sur la transformée de Laplace, mais nous y donnons la définition et les principales propriétés afin de permettre son utilisation. La définition de la transformée de Laplace peut être formulée ainsi :

Définition 1.4 (Définition : Transformée de Laplace unilatérale d'un signal causal) Soit un signal $x(t)$ *causal* (nul pour $t < 0$), localement sommable pour $t \geq 0$ et tel que $\sigma(x) = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\alpha t} dt < \infty \right\} \in \bar{\mathbb{R}}^+$ (abscisse de sommabilité). On appelle **transformée de Laplace** de $x(t)$, la fonction $\mathcal{L}[x](p)$ (aussi notée $X(p)$), de la variable complexe p , définie par :

$$\mathcal{L}[x](p) = X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \quad p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}[p] > \sigma(x) \quad (1.16)$$

Le réel $\sigma(x)$ est souvent appelé *abscisse de sommabilité* (ou *abscisse de convergence*) de x . La zone de convergence de la transformée de Laplace est donc le demi-plan complexe à droite de la partie réelle $\sigma(x)$ comme illustré sur la figure 1.1.

Remarque 1.2 Dans les ouvrages anglosaxons, et plus généralement à l'international, la variable de Laplace est notée s au lieu de p .

La formule d'inversion de la transformée de Laplace est la suivante :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(p)](t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(p) e^{pt} dp$$

1. $\bar{\mathbb{R}}$ désigne la droite réelle étendue

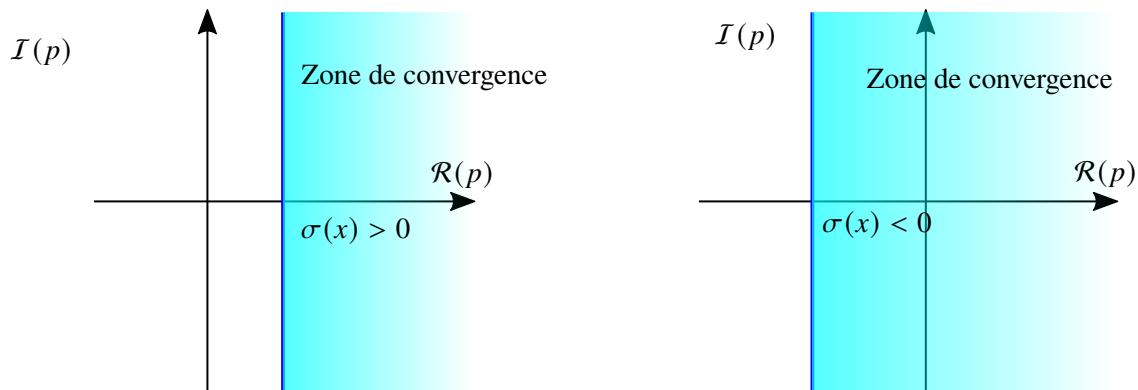


FIGURE 1.1 – Illustration des zones de convergence d'une transformée de Laplace $\mathcal{L}[x](p)$ pour des signes différents de $\sigma(x)$

1.1.3.1. Quelques transformées usuelles

Il faut garder à l'esprit quelques transformées de Laplace largement utilisées dans ce cours. Le tableau 1.1 répertorie les transformées de Laplace de quelques **signaux causaux**. Notons qu'en automatique l'échelon unité (distribution de Heaviside) est souvent noté Γ (alors que dans le cours d'Analyse et de traitement du signal ce dernier est souvent noté Y).

Fonction temporelle	$x(t)$	Transformée de Laplace $\mathcal{L}(x)(p)$
Impulsion de Dirac	δ	1
Échelon unité	Γ	$\frac{1}{p}$
Rampe unité	t	$\frac{1}{p^2}$
Puissance de t	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Exponentielle	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
Sinus	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
Cosinus	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
Sinus amorti	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
Cosinus amorti	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

TABLE 1.1 – Transformées de Laplace usuelles

1.1.3.2. Propriétés

La transformée de Laplace telle qu'elle vient d'être définie possède plusieurs propriétés remarquables. Nous rappelons ici également des propriétés nécessaires particulièrement à l'analyse temporelle et

fréquentielle des systèmes asservis.

Théorème 1.2 *Propriétés de la Transformée de Laplace Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux causaux, localement intégrables sur \mathbb{R}^+ et d'abscisse de sommabilité finie. On suppose également, quand cela est nécessaire, que les dérivées de ces signaux et leur produit de convolution $x * y$ possèdent ces mêmes propriétés. Alors :*

1. **Linéarité** : $\mathcal{L}[\alpha x + \beta y](p) = \alpha \mathcal{L}[x](p) + \beta \mathcal{L}[y](p)$;
2. **Décalage** : $\mathcal{L}[e^{at} x(t)](p) = \mathcal{L}[x](p - a)$;
3. **Retard** : $\mathcal{L}[x(t - \tau)](p) = e^{-p\tau} \mathcal{L}[x](p)$;
4. **Changement d'échelle** : soit $a > 0$, $\mathcal{L}[x(at)](p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[x]\left(\frac{p}{a}\right)$;
5. **Transformée des dérivées** : pour la dérivée première de x , on a

$$\mathcal{L}[\dot{x}](p) = p \mathcal{L}[x](p) - x(0^+)$$

ce qui se généralise comme suit à l'ordre n de dérivation

$$\mathcal{L}[x^{(n)}](p) = p^n \mathcal{L}[x](p) - p^{n-1}x(0^+) - p^{n-2}\dot{x}(0^+) - \dots - x^{(n-1)}(0^+)$$

6. **Transformée de l'intégrale** :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{\mathcal{L}[x](p)}{p}$$

7. **Convolution** : $\mathcal{L}[x * y](p) = \mathcal{L}[x](p) \cdot \mathcal{L}[y](p)$;
8. **Valeur initiale** :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p \mathcal{L}[x](p) = x(0^+)$$

9. **Valeur finale** :

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \mathcal{L}[x](p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$$

1.2. Notions de signal

Un **signal** représente l'aspect mesurable de la variation d'une grandeur physique. Un signal est porteur d'information(s) (il avertit son observateur d'un événement).

Un **capteur** traduit la variation d'une grandeur physique en un signal :

- un thermomètre est un capteur de température,
- un voltmètre est un capteur de tension,
- un baromètre est un capteur de pression atmosphérique, ...

Un signal sera généralement lié au temps, traduisant la variation de la grandeur physique en fonction du temps.

Un **système** est un dispositif élémentaire ou une cascade de dispositifs élémentaires, conçu pour produire une action précise. Dans le contexte du traitement du signal et de l'automatique, on s'intéresse au comportement dynamique de celui-ci, caractérisant la relation entrée / sortie. Par exemple, un amortisseur est un système mécanique, constitué de différents éléments (pistons, ressorts, vérins, ...), dont le but est d'absorber les chocs en exploitant notamment les phénomènes de dissipation d'énergie. On peut parler aussi de systèmes biologiques (par exemple en s'intéressant à la relation de causalité dynamique entre l'injection d'insuline et l'évolution du diabète dans le corps), sociétaux (évolution de la démographie en fonction de différents critères), économiques, ou électroniques.

L'**analyse d'un système** correspond à la caractérisation de ce système au travers **des sorties (réponses)** qu'il produit en réponse à des **entrées (excitations)** et à l'évolution de son comportement en présence de variations de ces dernières.

1.2.1. Classification des signaux

Il faut distinguer **les signaux physiques ou réels**, ceux qui seront réellement appliqués au système en état de fonctionnement, **des signaux test** utilisés lors des phases de conception, caractérisation et validation du système.

Au contraire des signaux test, parfaitement identifiés et dits "déterministes", les signaux réels sont des fonctions aléatoires : seules leurs propriétés statistiques (alphabet de variation, moyenne, densité spectrale de puissance, ...) sont connues.

Les signaux peuvent être à variable continue ($s(t)$, $t \in \mathbb{R}$) ou à variable discrète ($s(t_n)$, $t_n = t_0 + nT$). Ils peuvent prendre leurs valeurs dans un ensemble continu (ensemble infini non dénombrable) ou dans un alphabet discret (fini ou infini dénombrable).

Définition 1.5 (Signal analogique) *Un signal analogique est un signal à variables réelles continues et à valeurs dans un ensemble continu.*

On parle aussi de signal continu.

Définition 1.6 (Signal numérique) *Un signal numérique est un signal à variables réelles discrètes et à valeurs dans un alphabet discret.*

Par exemple, une onde sismique ou un signal audio (cf Fig. 1.2) sont des signaux analogiques. Une image couleur compressée au format JPEG est un signal numérique (256 niveaux de gris) (cf Fig. 1.3).

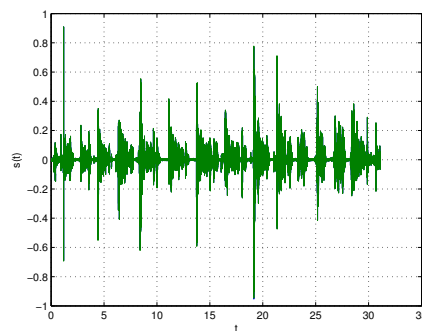


FIGURE 1.2 – Exemple d'un signal analogique : signal audio



FIGURE 1.3 – Exemple d'un signal numérique : image cameraman sous-échantillonnée

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéressons tout d'abord aux signaux analogiques puis aux signaux numériques et verrons comment passer des uns aux autres en utilisant des méthodes de conversion adaptées.

1.2.2. Définition des signaux tests

Les signaux tests sont des distributions ou des fonctions indéfiniment dérivables, dont nous rappelons ci-après la définition (pour une description plus détaillée des propriétés, le lecteur est invité à se reporter au cours d'introduction aux distributions).

Distribution de Dirac (impulsion) : notée δ , elle est définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (1.17)$$

Distribution de Heaviside (échelon unité) : notée Y , la distribution de Heaviside est régulière et associée à la fonction

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Distribution porte : notée Π , la distribution porte est régulière et associée à la fonction

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Distribution peigne de Dirac : notée III , elle est définie par

$$\text{III} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$$

Fonction sinusoïdale : elle est définie comme un signal réel

$$u(x) = A \cos(2\pi\nu_0 x + \theta_0),$$

où $A \in \mathbb{R}_+$ est l'amplitude, ν_0 est la fréquence, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ est la pulsation et θ_0 est la phase initiale. La phase est une fonction de x , notée $\theta(x)$, définie par $\theta(x) = \omega_0 x + \theta_0$.

La représentation complexe sera souvent utilisée : $u(x) = \text{Re} [\underline{u}(x)]$ avec $\underline{u}(x) = \underline{u}_0 \exp(i\omega_0 x)$ et $\underline{u}_0 = A \exp(i\theta_0)$.

1.2.3. Notions de fréquence

Si l'unité de la variable x d'un signal $f(x)$ est le temps (seconde), l'unité de la variable ν de sa transformée de Fourier est alors le Hertz (Hz), soit l'inverse de la seconde (s^{-1}). ν est alors appelée fréquence. De même si la variable x d'un signal $f(x)$ est une distance ou longueur (par exemple en cm), la variable ν de sa transformée de Fourier sera en cm^{-1} (fréquences spatiales)

Dans ce document, nous travaillerons principalement avec des variables temporelles et fréquentielles.

Théorème 1.3 (Transformée de Laplace vers transformée de Fourier (pulsation)) Lorsque la transformée de Fourier de f existe, on peut obtenir \hat{f} en évaluant la transformée de Laplace sur l'axe imaginaire pur, c'est à dire en prenant $p = j\omega$:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{L}[f](j\omega)$$

Dans ce cas, ω est définie comme une pulsation (en rad/s). Pour obtenir une transformée de Fourier en fonction de la fréquence ν en Hz, il suffit de faire le changement de variable $\omega = 2\pi\nu$:

Théorème 1.4 (Transformée de Laplace vers transformée de Fourier (fréquence)) Lorsque la transformée de Fourier de f existe, on peut obtenir \hat{f} en évaluant la transformée de Laplace sur l'axe imaginaire pur, c'est à dire en prenant $p = j2\pi\nu$:

$$\hat{f}(\nu) = \mathcal{L}[f](j2\pi\nu)$$

Lorsque la droite imaginaire pur n'est pas dans le demi-plan complexe de convergence, cela signifie que \hat{f} n'est pas définie. On peut en déduire que \hat{f} est définie ssi $\sigma(x) < 0$.

En fonction des propriétés respectives des représentations temporelles et fréquentielles, il est plus judicieux de manipuler le signal dans l'un ou l'autre des domaines. La représentation du signal dans le domaine fréquentiel est également appelée **spectre du signal**.

Considérons un signal T -périodique tel que sa représentation s vérifie $s(x) \in \mathbb{R}$ et $s(x + T) = s(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Posons $\nu_0 = \frac{1}{T}$ et supposons que s soit décomposable en série de Fourier de telle sorte que

$$s(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(2n\pi\nu_0 x) + b_n \sin(2n\pi\nu_0 x)). \quad (1.18)$$

Le signal peut donc être vu comme une combinaison linéaire de signaux périodiques (sinusoïdes) de période $\frac{1}{nT}$ ou de manière équivalente de **fréquence** $n\nu_0$, $n \in \mathbb{N}$. La fréquence ν_0 est la fréquence fondamentale et $n\nu_0$, $n > 0$ est une fréquence harmonique.

La décomposition en série de Fourier à coefficients complexes $s(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(i2n\pi\nu_0 x)$ permet d'obtenir le spectre $\hat{s} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_{n\nu_0}$. Comme s est à valeurs réelles, $c_n = c_{-n}^*$ (symétrie hermitienne) et le spectre du signal est donné par

$$\hat{s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\delta_{n\nu_0} + \delta_{-n\nu_0}). \quad (1.19)$$

Cette expression mathématique fait apparaître des fréquences négatives. Ces fréquences n'ont aucune signification physique, mais elles sont utiles pour la modélisation mathématique du signal et des traitements qu'il peut subir. Seules les fréquences positives introduites dans l'équation (1.18) ont réellement un sens physique.

Plus généralement, les signaux physiques sont d'énergie totale finie ou de carré sommable (i.e. $\int_{\mathbb{R}} |s(x)|^2 dx$ existe et sa valeur est finie). Dans ce cas, leur transformée de Fourier existe. Par ailleurs, les signaux physiques sont des signaux dont la représentation est à valeurs dans le corps des réels. Nous parlerons donc de signaux réels. Ces signaux possèdent la propriété fondamentale de symétrie hermitienne.

Théorème 1.5 (signal réel et symétrie hermitienne) Soit un signal dont la représentation s est (i) à valeurs réelles ($s(x) \in \mathbb{R}$) et (ii) admet une transformée de Fourier \hat{s} .

Alors $\hat{s}^*(\nu) = \hat{s}(-\nu)$ (symétrie hermitienne).

Le module de \hat{s} est une fonction paire et sa phase est une fonction impaire.

Dans ce cas, la transformée de Fourier inverse fournit

$$s(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu = 2\operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} \hat{s}(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu \right]. \quad (1.20)$$

$\hat{s}(\nu)$, $\nu \geq 0$, s'interprète comme la contribution de la fréquence ν à la définition du signal, autrement dit l'intensité de la fréquence ν dans la décomposition du signal comme une combinaison linéaire de sinusoïdes. L'analyse spectrale du signal (étude de \hat{s}) nous permet d'identifier les fréquences qui concentrent le maximum d'énergie et d'adapter les traitements en conséquence.

La **bande** du signal physique sera par conséquent définie comme la restriction du support de \hat{s} aux fréquences positives (intersection du support avec $[0, +\infty[$).

Considérons une nouvelle interprétation. La symétrie hermitienne implique que le module est une fonction paire et la phase une fonction impaire. Notons $\hat{s}(\nu) = \rho(\nu) \exp(i\phi(\nu))$ où ρ est une fonction réelle paire et ϕ une fonction réelle impaire. Définissons \underline{s} par $\underline{\hat{s}}(\nu) = \rho(\nu) \exp(i\phi(\nu))Y(\nu)$. Le support de $\underline{\hat{s}}$ est inclus dans $[0, +\infty[$ (fréquences positives uniquement). Nous pouvons donc écrire

$$\hat{s}(\nu) = \underline{\hat{s}}(\nu) + \underline{\hat{s}}^*(-\nu), \quad (1.21)$$

c'est-à-dire,

$$s(x) = \underline{s}(x) + \underline{s}^*(x). \quad (1.22)$$

Un signal réel peut donc toujours s'écrire comme la somme d'un signal complexe \underline{s} dont le spectre est de support inclus dans $[0, +\infty[$ (signal analytique) et du conjugué de \underline{s} . La fréquence négative est associée de manière symétrique à la fréquence positive opposée de façon à retrouver le signal réel à partir d'un signal complexe possédant une transformée de Fourier de support comportant des fréquences positives uniquement (fréquences physiques) et de son conjugué (support de sa transformée de Fourier symétrique).

Ainsi le signal sinusoïdal de fréquence ν_0 , $x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$ s'écrit encore $\text{Re}[\exp(2i\pi\nu_0 t)]$ où apparaît clairement la fréquence positive ν_0 .

Exemple 1.1 (Porte modulée) Pour illustrer le propos, considérons une porte de durée T , notée $p_T(t) = \Pi(\frac{2t-T}{2T})$, modulant un signal sinusoïdal $\cos(2\pi at)$ définissant le signal modulé

$$x(t) = p_T(t) \cos(2\pi at). \quad (1.23)$$

Nous supposons $aT \gg 1$.

Les représentations des signaux $p_T(t)$ et $x(t)$ et de leurs transformées de Fourier respectives sont données sur la figure Fig. 1.4. La fréquence du signal sinusoïdal est positive et égale à a Hz. La transformée de Fourier de $\cos(2\pi at)$ introduit deux fréquences de Fourier $+a$ et $-a$. Dans la mesure physique, seules les parties non hachurées des figures Fig. 1.4 b) et Fig. 1.4 d) seront prises en compte (fréquences positives). Un analyseur de spectre déduira que la bande fréquentielle occupée pour la porte sera dans les basses fréquences, de largeur $\Delta\nu = \frac{1}{T}$ (le lobe principal concentre l'essentiel de l'énergie). Pour le signal modulé, l'analyseur de spectre indiquera une bande fréquentielle centrée sur a de largeur $\frac{2}{T}$ pour le signal modulé.

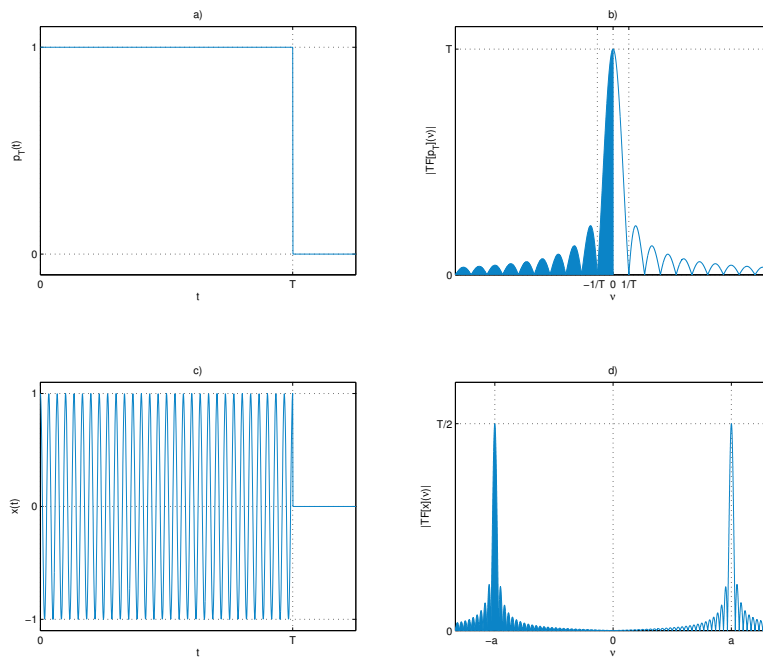


FIGURE 1.4 – Illustration des fréquences négatives

1.3. Signaux à spectre borné

Les signaux de spectre infini correspondent généralement à des modèles mathématiques mais ne traduisent pas la réalité. En pratique, les signaux physiques sont généralement produits par des appareils et sont nécessairement de spectre borné. Chaque appareil de mesure possède une bande de mesure en dehors de laquelle toute fréquence est fortement atténuée. Il est important de caractériser les signaux de spectre borné.

Définition 1.7 (Signal de spectre borné) Un signal s est dit de spectre borné s'il existe B positif tel que \hat{s} est nul en dehors de $[-B, B]$.

En utilisant $s(x) = \int_{-B}^B \hat{s}(\nu) \exp(2i\pi\nu x) d\nu$, on obtient que $|s(x)|$ est majoré par $M = \int_{-B}^B |\hat{s}(\nu)| d\nu$. Par conséquent, un signal de spectre borné est borné et ses variations ne peuvent pas être rapides.

Théorème 1.6 (Théorème de Bernstein) Toutes les dérivées d'un signal de spectre borné sont bornées :

$$|s^{(n)}(x)| \leq (2\pi B)^n M. \quad (1.24)$$

1.4. Signaux causaux

Tout système physique est tel que la cause précède l'effet qu'elle produit : on dit que le système est causal. La notion se généralise aux signaux. Un signal causal est un signal nul jusqu'à une certaine valeur de sa variable. En général nous prendrons zéro comme valeur de l'origine. Les signaux physiques sont causaux puisqu'ils résultent d'un phénomène qui se produit à partir d'un certain instant.

Définition 1.8 (Signal causal) Un signal s est dit causal si $s(x) = 0, \forall x < 0$.

Remarque 1.3 Une fonction ordinaire s pourra toujours être associée à la distribution $s(t)Y$.

Soit un signal réel causal (nul pour $x < 0$). Sous réserve d'existence, sa transformée de Fourier vérifie la propriété de symétrie hermitienne : $\hat{s}(-\nu) = \hat{s}^*(\nu)$. En décomposant $\hat{s}(\nu)$ sous la forme $\hat{s}(\nu) = \text{Re} [\hat{s}](\nu) + i\text{Im} [\hat{s}](\nu)$ ou sous la forme $\hat{s}(\nu) = \rho(\nu) \exp(i\phi(\nu))$, on peut montrer que $\text{Re} [\hat{s}]$ et ρ sont des fonctions paires et $\text{Im} [\hat{s}]$ et ϕ sont des fonctions impaires.

$\text{Re} [\hat{s}]$ et $\text{Im} [\hat{s}]$ ne sont pas indépendants. Ainsi :

1. Sous réserve d'existence, $\int_0^{+\infty} |\text{Re} [\hat{s}](\nu)|^2 d\nu = \int_0^{+\infty} |\text{Im} [\hat{s}](\nu)|^2 d\nu$.
2. La partie réelle et la partie imaginaire de la transformée de Fourier sont reliées.

Théorème 1.7 (Propriétés spectrales d'un signal réel causal) Soit un signal réel causal admettant une transformée de Fourier. Alors la partie réelle et la partie imaginaire de la transformée de Fourier du signal se déduisent l'une de l'autre à partir de leurs transformées de Hilbert respectives :

$$\begin{aligned} \text{Re} [\hat{s}](\nu) &= \frac{1}{\pi} \nu p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im} [\hat{s}](\nu')}{\nu - \nu'} d\nu' \\ \text{Im} [\hat{s}](\nu) &= -\frac{1}{\pi} \nu p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re} [\hat{s}](\nu')}{\nu - \nu'} d\nu' \end{aligned}$$

On rappelle que $\nu p \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} f(x) dx$. Dans le cas des distributions réelles et causales, nous pouvons écrire

$$\text{Re} [\hat{s}] = \frac{1}{\pi} \nu p \frac{1}{\nu} * \text{Im} [\hat{s}] \quad (1.25)$$

$$\text{Im} [\hat{s}] = -\frac{1}{\pi} \nu p \frac{1}{\nu} * \text{Re} [\hat{s}] \quad (1.26)$$

Démonstration 1.1 Nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{s}(\nu) &= \text{Re} [\hat{s}](\nu) + i\text{Im} [\hat{s}](\nu) \\ \hat{s}^*(-\nu) &= \text{Re} [\hat{s}](-\nu) - i\text{Im} [\hat{s}](-\nu) \end{aligned}$$

La transformée de Fourier d'un signal réel est hermitienne : $\text{Re} [\hat{s}]$ et $\text{Im} [\hat{s}]$ sont respectivement paire et impaire.

1 - Nous nous plaçons dans le cas de fonctions ordinaires. Le signal est réel, il admet une décomposition en signal pair et signal impair :

$$s(x) = s_p(x) + s_i(x).$$

Il faut prendre $s_p(x) = \frac{1}{2}(s(x) + s(-x))$ et $s_i(x) = \frac{1}{2}(s(x) - s(-x))$.

La parité de s_p impose $\hat{s}_p(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} s_p(x) \cos(2\pi\nu x) dx$, qui est réel. De même, comme s_i est impaire, $\hat{s}_i(\nu) = 2i \int_0^{+\infty} s_i(x) \sin(2\pi\nu x) dx$, qui est imaginaire pur. Nous en déduisons que

$$\operatorname{Re} [\hat{s}](\nu) = \hat{s}_p(\nu)$$

et

$$i\operatorname{Im} [\hat{s}](\nu) = \hat{s}_i(\nu).$$

Par ailleurs, comme s est causal,

$$s_p(x) = s_i(x), \quad x \geq 0$$

et

$$s_p(x) = -s_i(x), \quad x \leq 0,$$

donc,

$$s(x) = 2s_p(x) = 2s_i(x), \quad x \geq 0.$$

D'où

$$2 \int_0^{+\infty} |s_p(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |s_p(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}_p(\nu)|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re} [\hat{s}](\nu)|^2 d\nu = 2 \int_0^{+\infty} |\operatorname{Re} [\hat{s}](\nu)|^2 d\nu$$

et

$$2 \int_0^{+\infty} |s_i(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |s_i(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}_i(\nu)|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Im} [\hat{s}](\nu)|^2 d\nu = 2 \int_0^{+\infty} |\operatorname{Im} [\hat{s}](\nu)|^2 d\nu.$$

Donc, d'une part

$$\int_0^{+\infty} |s(x)|^2 dx = 4 \int_0^{+\infty} |s_p(x)|^2 dx = 4 \int_0^{+\infty} |\operatorname{Re} [\hat{s}](\nu)|^2 d\nu$$

et d'autre part

$$\int_0^{+\infty} |s(x)|^2 dx = 4 \int_0^{+\infty} |s_i(x)|^2 dx = 4 \int_0^{+\infty} |\operatorname{Im} [\hat{s}](\nu)|^2 d\nu$$

d'où le résultat (cqfd)

2 - Le signal s est causal. Nous pouvons donc écrire l'égalité $s(x) = s(x)Y(x)$.

Sous réserve d'existence, sa transformée de Fourier vérifie la condition

$$\hat{s}(\nu) = \hat{s}(\nu) * \left[\frac{1}{2} \delta(\nu) + \frac{1}{2\pi i} \nu p \frac{1}{\nu} \right],$$

c'est-à-dire,

$$\hat{s}(\nu) = \hat{s}(\nu) * \left[\frac{1}{\pi i} \nu p \frac{1}{\nu} \right],$$

d'où

$$\operatorname{Re} [\hat{s}](\nu) = \operatorname{Im} [\hat{s}](\nu) * \left[\frac{1}{\pi} \nu p \frac{1}{\nu} \right]$$

et

$$\operatorname{Im} [\hat{s}](\nu) = -\operatorname{Re} [\hat{s}](\nu) * \left[\frac{1}{\pi} \nu p \frac{1}{\nu} \right].$$

(cqfd)

Par conséquent, un signal réel et causal est entièrement déterminé par la donnée de la partie réelle ou imaginaire de sa transformée de Fourier

1.5. Propriétés énergétiques

L'énergie totale d'un signal est définie sous réserve d'existence comme le carré de la norme L^2 de s :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(x)|^2 dx. \quad (1.27)$$

La puissance moyenne d'un signal est définie sous réserve d'existence comme

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(x)|^2 dx. \quad (1.28)$$

Nous distinguerons trois classes de signaux :

1. les signaux d'énergie finie pour lesquels l'énergie totale est finie (et la puissance moyenne est donc nulle),
2. les signaux périodiques d'énergie totale infinie et de puissance moyenne calculée sur une période finie,
3. les signaux d'énergie totale infinie et de puissance moyenne finie.

1.5.1. Signaux d'énergie totale finie

Pour un signal d'énergie totale finie, le théorème de Parseval donne une expression équivalente de l'énergie :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{s}(\nu)|^2 d\nu. \quad (1.29)$$

Dès lors, $S_s(\nu) = |\hat{s}(\nu)|^2$ s'interprète comme une densité spectrale d'énergie (i.e., par unité de fréquence). Sa transformée de Fourier inverse est définie comme la fonction d'autocorrélation du signal.

Définition 1.9 (Autocorrélation d'un signal d'énergie finie) Notée R_s , l'autocorrélation d'un signal d'énergie finie est définie par :

$$R_s(\tau) = s(\tau) * s^*(-\tau) = \int s(x) s^*(x - \tau) dx. \quad (1.30)$$

1. L'autocorrélation est à symétrie hermitienne : $R_s(-\tau) = R_s^*(\tau)$.
2. Dans le cas pratique des signaux physiques, le signal est réel, impliquant que R_s est une fonction réelle et paire.
3. L'autocorrélation évaluée en $\tau = 0$ correspond à l'énergie totale : $R_s(0) = E$
4. Le module de l'autocorrélation est majoré par l'énergie totale : $|R_s(\tau)| \leq E$.

Définition 1.10 (Densité spectrale d'énergie d'un signal d'énergie finie) Notée S_s , la densité spectrale d'énergie d'un signal d'énergie finie est définie par :

$$S_s(\nu) = |\hat{s}(\nu)|^2 \quad (1.31)$$

Théorème 1.8 (Relations de Wiener-Khintchine) Etant donné un signal d'énergie finie, l'autocorrélation et la densité spectrale d'énergie du signal sont liées par la transformée de Fourier : $\mathcal{F}[R_s(\tau)] = S_s(\nu)$ et $\mathcal{F}^{-1}[S_s(\nu)] = R_s(\tau)$.

Exemple 1.2 (Porte) $s(x) = \Pi(x - \frac{1}{2}) \rightarrow \hat{s}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \exp(-i\pi\nu)$

$$E_s = 1$$

$$R_s(\tau) = \min(1, 1 + \tau) - \max(0, \tau), \quad -1 \leq \tau \leq 1$$

$$S_s(\nu) = \left[\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \right]^2$$

L'essentiel de l'énergie est concentrée dans le lobe principal.

Exemple 1.3 (Signal réel de spectre étroit) $s(t) = m(t) \sin(2\pi\nu_0 t)$ tel que $\hat{m}(\nu) \neq 0$ si $|\nu| \leq \frac{B}{2}$, $\int_{\mathbb{R}} |m(t)|^2 dt = E < +\infty$ et $B \ll \nu_0$

$$S_s(\nu) = \frac{1}{4} \left(|\hat{m}(\nu - \nu_0)|^2 + |\hat{m}(\nu + \nu_0)|^2 \right)$$

La fonction d'autocorrélation s'obtient soit directement par l'application de la transformée de Fourier inverse de S_s , soit par la définition :

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} s(t)s(t-\tau)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} m(t)m(t-\tau) \sin(2\pi\nu_0 t) \sin(2\pi\nu_0(t-\tau))dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} m(t)m(t-\tau)dt \cos(2\pi\nu_0\tau) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} m(t)m(t-\tau) \cos(2\pi\nu_0(2t-\tau))dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} m(t)m(t-\tau)dt \cos(2\pi\nu_0\tau) = \frac{1}{2} R_m(\tau) \cos(2\pi\nu_0\tau) \end{aligned}$$

L'énergie du signal est alors donnée par

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} S_s(\nu) d\nu \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{m}(\nu - \nu_0)|^2 d\nu + \int_{\mathbb{R}} |\hat{m}(\nu + \nu_0)|^2 d\nu \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\hat{m}(\nu)|^2 d\nu \\ &= \frac{E}{2} \end{aligned}$$

ou par $E_s = R_s(0) = \frac{1}{2} R_m(0) = \frac{E}{2}$.

Etant donné deux signaux d'énergie totale finie s_1 et s_2 , l'intercorrrelation est une extension de l'autocorrrelation. Elle mesure le degré de ressemblance entre deux signaux. Le théorème de Parseval sur la classe des signaux d'énergie finie donne

$$\int s_1(x)s_2^*(x)dx = \int \hat{s}_1(\nu)\hat{s}_2^*(\nu)d\nu \quad (1.32)$$

Ici encore, $\hat{s}_1(\nu)\hat{s}_2^*(\nu)$ peut être interprétée comme une densité d'énergie. On la note $S_{s_1 s_2}(\nu)$ et on l'appelle **densité spectrale d'énergie croisée**. Elle correspond à la transformée de Fourier de l'intercorrrelation.

Définition 1.11 (Intercorrrelation de deux signaux d'énergie finie) Notée $R_{s_1 s_2}$, l'intercorrrelation de s_1 et s_2 est définie par :

$$R_{s_1 s_2}(\tau) = s_1(\tau) * s_2^*(-\tau) = \int s_1(x)s_2^*(x-\tau)dx \quad (1.33)$$

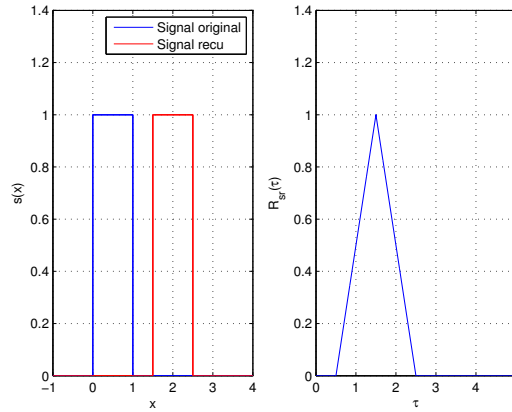
En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient une inégalité fondamentale :

$$|R_{s_1 s_2}(\tau)|^2 \leq R_{s_1}(0)R_{s_2}(0) \quad (1.34)$$

L'intercorrrelation $R_{s_1 s_2}$ est maximale en τ si et seulement si $\exists \alpha > 0, s_2(x) = \alpha s_1(x + \tau)$.

Remarque 1.4 L'intercorrrelation est très utilisée pour "synchroniser" un dispositif de réception par rapport à un signal de référence.

Exemple 1.4 $s(x) = \Pi(x - \frac{1}{2})$, $r(x) = s(x - \frac{3}{2})$. L'intercorrrelation (cf. Fig. 1.5) est maximale pour $\tau = \frac{3}{2}$ ce qui nous permet d'estimer le retard du signal reçu par rapport au signal émis.

FIGURE 1.5 – Illustration de l'intercorrélation entre deux signaux $s(x) = \Pi(x - \frac{1}{2})$ et $r(x) = s(x - \frac{3}{2})$

1.5.2. Signaux de puissance moyenne finie

Les signaux déterministes physiquement observés sont des signaux d'énergie finie. Il existe néanmoins des signaux d'énergie infinie et de puissance moyenne finie tels que les signaux périodiques comme $s(x) = a \cos(2\pi\nu_0 x + \phi)$ qui interviendront dans la modélisation mathématique des systèmes ou certaines réalisations de signaux aléatoires (bruit notamment). Les notions introduites pour les signaux d'énergie finie peuvent être étendues aux signaux de puissance finie et possèdent les mêmes propriétés.

La puissance moyenne d'un signal est définie comme $P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(x)|^2 dx$. Un signal est dit de **puissance moyenne finie** si $P < +\infty$.

Pour déterminer la distribution en puissance du signal, nous avons besoin de définir la transformée de Fourier de s . Or par hypothèse, s est d'énergie infinie et sa transformée de Fourier n'existe pas nécessairement. Pour contourner ce problème, nous allons nous intéresser à la restriction (ou troncature) de s sur un intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Ce signal noté s_T , est défini comme :

$$s_T(x) = s(x) \Pi\left(\frac{x}{T}\right). \quad (1.35)$$

Comme T est fini, s_T admet une transformée de Fourier, notée \hat{s}_T . Nous pouvons donc réécrire P :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_T(x)|^2 dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{s}_T(\nu)|^2 d\nu \quad (1.36)$$

Comme $P < \infty$, le théorème de convergence dominée doit s'appliquer, ce qui impose

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |\hat{s}_T(\nu)|^2 \right) d\nu. \quad (1.37)$$

$\left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |\hat{s}_T(\nu)|^2 \right)$ est définie comme la densité spectrale de puissance du signal s .

Définition 1.12 (Densité spectrale de puissance d'un signal de puissance moyenne finie) Notée S_s , la densité spectrale de puissance d'un signal de puissance moyenne finie est définie par :

$$S_s(\nu) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |\hat{s}_T(\nu)|^2 \quad (1.38)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx \right|^2 \quad (1.39)$$

Définition 1.13 (Autocorrélation d'un signal de puissance moyenne finie) Notée R_s , l'autocorrélation d'un signal de puissance moyenne finie est définie par :

$$R_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(x) s^*(x - \tau) dx \quad (1.40)$$

Remarque 1.5 Avec cette définition, $R_s(0)$ correspond à la puissance moyenne du signal (scalaire réel positif).

Remarque 1.6 La puissance moyenne ne dépend pas de l'origine des temps :

$$R_s(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+\tau}^{\frac{T}{2}+\tau} |s(x)|^2 dx \quad (1.41)$$

Le théorème de Wiener-Khintchine s'applique encore. Il sera également valide dans le cas de signaux aléatoires stationnaires du second ordre.

Théorème 1.9 (Wiener-Khintchine) La fonction d'autocorrélation d'un signal à puissance moyenne finie a pour transformée de Fourier la densité spectrale de puissance du signal.

Définition 1.14 (Intercorrélation de deux signaux de puissance moyenne finie) Notée $R_{s_1 s_2}$, l'intercorrélation de s_1 et s_2 est définie par :

$$R_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(x) s_2^*(x - \tau) dx \quad (1.42)$$

Définition 1.15 (Densité spectrale croisée de deux signaux de puissance moyenne finie) La densité spectrale croisée de s_1 et s_2 est définie par :

$$S_{s_1 s_2}(\nu) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_2^*(x) \exp(2i\pi\nu x) dx \quad (1.43)$$

Remarque 1.7 La densité spectrale croisée est la transformée de Fourier de l'intercorrélation.

Chapitre 2

Filtrage linéaire

Qu'est-ce qu'un filtre ?

Pour une distribution T fixée, sous réserve d'existence, la convolution $T * U$ est une application linéaire, continue et permutable avec les translations. Nous pouvons rappeler le théorème fondamental des filtres vu et démontré dans le cours d'introduction aux distributions :

Théorème 2.1 (Théorème fondamental des filtres) *Les filtres sont des systèmes de convolution.*

Dans ce cours, nous allons étudier les filtres linéaires au sens large, c'est à dire les système de convolution que l'on peut décrire par l'équation de convolution $r = h * s$ où s est le signal d'entrée, r le signal de sortie et h caractérise le système de convolution.

Remarque 2.1 *La notion de filtre ne sera donc pas nécessairement liée à un objectif de filtrage (un moteur à courant continu sera sous certaines hypothèses considéré comme un système de convolution, donc un filtre).*

Les fonctions ordinaires présentent des limitations pour modéliser rigoureusement certains signaux physiques tels que les impulsions électriques. Aussi, nous considérerons r et s comme des distributions. Dans le même esprit, certains filtres ne peuvent être décrits en considérant h comme une fonction usuelle et il est nécessaire de considérer que h est une distribution.

Remarque 2.2 *Nous rappelons que si T est une distribution et α une fonction indéfiniment dérivable, la distribution αT est définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle . \quad (2.1)$$

2.1. Caractérisation d'un système physique linéaire, continu et stationnaire : le filtre

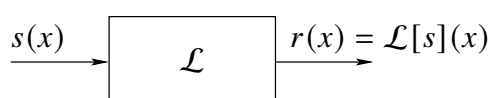


FIGURE 2.1 – Illustration d'un système dont la réponse à l'excitation $s(x)$ est $r(x)$.

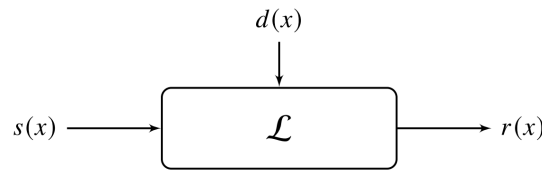


FIGURE 2.2 – Illustration d'un système avec deux entrées et une sortie

2.1.1. Généralités

Les systèmes physiques envisagés dans ce cours font correspondre à un signal d'entrée $s(x)$ une réponse $r(x)$ unique appelée également sortie (c.f. figure 2.1). Il est également possible d'envisager des systèmes ayant plusieurs entrées et plusieurs sorties (c.f. figure 2.2) : de la même façon, les sorties observées pour des entrées fixées seront uniques.

Les entrées d'un système peuvent être de différentes natures : elles peuvent contenir une information que l'on souhaite traiter ou modifier (signal utile), ou bien elles peuvent avoir pour but d'exercer des actions entraînant le fonctionnement souhaité du système (signal de commande), ou encore avoir un comportement qui trouble le fonctionnement désiré (signaux de perturbations).

Par exemple, la réponse produite par un amplificateur idéal, une ligne à retard et un dérivateur sont respectivement $r(x) = As(x)$, avec $A > 0$, $r(x) = s(x - \tau)$, $r(x) = s'(x)$.

Dans ce cours, nous nous restreignons aux systèmes *linéaires, continus et stationnaires*.

Définition 2.1 (Système linéaire) Soient deux signaux d'excitation $s_1(x)$ et $s_2(x)$ tels que $r_1(x)$ (respectivement $r_2(x)$) soit la réponse du système à $s_1(x)$ (respectivement $s_2(x)$).

Le système est linéaire si pour tout couple de coefficients réels (λ_1, λ_2) , la réponse du système à l'excitation $\lambda_1 s_1(x) + \lambda_2 s_2(x)$ est le signal $\lambda_1 r_1(x) + \lambda_2 r_2(x)$.

$$\mathcal{L}[\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2] = \lambda_1 \mathcal{L}[s_1] + \lambda_2 \mathcal{L}[s_2] \quad (2.2)$$

Définition 2.2 (Système continu) Soit une suite d'excitations $s_n(x) \in \mathcal{X}_s$ telles que $r_n(x) \in \mathcal{X}_r$ soit la réponse du système à $s_n(x)$. Supposons que \mathcal{X}_s et \mathcal{X}_r soient des espaces normés et que la suite $s_n(x)$ converge vers un signal $s(x)$ quand n tend vers l'infini.

Alors le système est continu si la suite $r_n(x)$ converge et sa limite $r(x)$ est la réponse du système au signal $s(x)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[s_n] = \mathcal{L}[\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n] = \mathcal{L}[s] = r \quad (2.3)$$

Définition 2.3 (Système stationnaire) Soit un signal d'excitation $s(x) \in \mathcal{X}_s$ tel que $r(x) \in \mathcal{X}_r$ soit la réponse du système. Supposons que \mathcal{X}_s et \mathcal{X}_r soient stables par translation.

Alors le système est stationnaire si $r(x - a)$ est la réponse du système au signal $s(x - a)$.

$$\tau_a \mathcal{L}[s] = \mathcal{L}[\tau_a s] \quad (2.4)$$

Dans la suite de ce cours, nous nous intéresserons donc aux systèmes linéaires, continus et stationnaires (SLIT), et que nous appellerons filtres (linéaires). Un tel système est caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ (c'est à dire la sortie du système lorsque le signal d'entrée est une impulsion). Etant donné un signal d'entrée de représentations temporelle $s(t)$, la réponse du filtre est le résultat de la convolution entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du système. Sa représentation temporelle $r(t)$ vérifie donc :

$$r(t) = (h * s)(t) \quad (2.5)$$

Les signaux sont considérés causaux.

Un filtre physique a nécessairement une réponse impulsionnelle réelle.

Proposition 2.1 (Relation entrée-sortie d'un filtre) Soit un signal d'excitation s et soit r la réponse en sortie du filtre. Alors il existe des coefficients constants $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{0 \leq k \leq m}$ tels que

$$b_0 \frac{d^m r}{dx^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r}{dx^{m-1}} + \dots + b_m r = a_0 \frac{d^n s}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} s}{dx^{n-1}} + \dots + a_n s. \quad (2.6)$$

2.1.2. Considérations énergétiques

Théorème 2.2 (Autocorrélation et filtrage) Soit un signal s d'énergie totale finie appliqué à l'entrée d'un filtre (opérateur de convolution) de réponse impulsionnelle $h(x)$. Alors la réponse du système est un signal d'énergie totale finie y défini par $y(x) = s(x) * h(x)$. Sa fonction d'autocorrélation R_y est donnée par :

$$R_y(\tau) = R_s(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \quad (2.7)$$

Sa densité spectrale d'énergie S_y est donnée par :

$$S_y(\nu) = S_s(\nu) |\hat{h}(\nu)|^2. \quad (2.8)$$

Remarque 2.3 Il est possible de déterminer expérimentalement la densité spectrale d'énergie d'un signal d'énergie finie en mesurant l'énergie totale en sortie d'un filtre sélectif en fréquence de bande $\Delta\nu$ suffisamment étroite autour de la fréquence ν . Sous l'hypothèse d'un filtre idéal de fonction de transfert correspondant à une porte centrée sur ν et de largeur $\Delta\nu$:

$$S_s(\nu) \approx \frac{1}{\Delta\nu} \int |y(x)|^2 dx = \frac{1}{\Delta\nu} \int |\hat{y}(\nu')|^2 d\nu' = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{\nu-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu+\frac{\Delta\nu}{2}} |\hat{s}(\nu')|^2 d\nu' \quad (2.9)$$

Théorème 2.3 (Intercorrélation et filtrage) Soit un signal s_k d'énergie totale finie appliqué à l'entrée d'un filtre (opérateur de convolution) de réponse impulsionnelle h_k . Alors la réponse du système est un signal d'énergie totale finie y_k défini par $y_k(x) = s_k(x) * h_k(x)$. L'intercorrélation de $y_1(x)$ et de $y_2(x)$, notée $R_{y_1 y_2}$ est donnée par :

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = R_{s_1 s_2}(\tau) * h_1(\tau) * h_2^*(-\tau) \quad (2.10)$$

Exemple 2.1 $s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n h(t - nT) \cos(2\pi\nu_0 t)$ avec $a_n \in \{-3A, -A, A, 3A\}$ et $h(t)$ porte de durée $T, \nu_0 T \gg 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2NT} \int_{-NT}^{NT} |s(t)|^2 dt &= \frac{1}{4NT} \sum_{n=-N}^{N-1} |a_n|^2 \int_{nT}^{(n+1)T} |h(t - nT)|^2 dt \\ &= \frac{1}{4NT} \sum_{n=-N}^{N-1} |a_n|^2 \int_0^T |h(t)|^2 dt \end{aligned}$$

En effet $\int_{nT}^{(n+1)T} |h(t - nT)|^2 \cos(4\pi\nu_0 t) dt = 0$.

Démonstration Posons $g(t) = |h(t_0 - t - nT)|^2$ avec t_0 un réel quelconque et calculons la réponse du filtre lorsque le signal $x(t) = \cos(4\pi\nu_0 t)$ est imposé à l'entrée du filtre. Soit y la sortie. Alors

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (2.11)$$

D'après les hypothèses, h est une porte de support $[0, T]$, donc g est une porte de même amplitude et de support $[t_0 - (n+1)T, t_0 - nT]$. Nous pouvons montrer que $|\hat{g}(\nu)| = T \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T}$. D'après l'hypothèse bande étroite, $\nu_0 T \gg 1$ et en considérant les propriétés de la fonction sinus cardinal, nous obtenons que le filtre de réponse impulsionnelle g peut être assimilé à un filtre passe-bas. Comme x correspond à une raie spectrale positionnée en $2\nu_0$, nous en déduisons que $y(t) = 0$.

Enfin, $\int_{nT}^{(n+1)T} |h(t - nT)|^2 \cos(4\pi\nu_0 t) dt = y(t_0)$, ce qui prouve le résultat. ■

Or $A^2 \leq \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} |a_n|^2 \leq 9A^2$.

Donc $P_s = \int_0^T |h(t)|^2 dt \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=-N}^{N-1} |a_n|^2}{4NT} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=-N}^{N-1} |a_n|^2}{4N}$.

Grâce au théorème de Wiener-Khintchine [?], le théorème sur l'autocorrélation et le filtrage reste inchangé pour les signaux à puissance moyenne finie :

Théorème 2.4 (Autocorrélation et filtrage) Soit un signal s de puissance moyenne finie appliqué à l'entrée d'un filtre (opérateur de convolution) de réponse impulsionnelle h . Alors la réponse du système est un signal de puissance moyenne finie $y(x)$ défini par $y(x) = s(x) * h(x)$. Sa fonction d'autocorrélation R_y est donnée par :

$$R_y(\tau) = R_s(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \quad (2.12)$$

Sa densité spectrale de puissance S_y est donnée par :

$$S_y(\nu) = S_s(\nu) |\hat{h}(\nu)|^2. \quad (2.13)$$

2.2. Fonction de transfert

Lorsque la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle est définie $H(\nu) = \hat{h}(\nu)$, ainsi que celle du signal d'entrée $\hat{s}(\nu)$, la représentation fréquentielle de la réponse du système est donnée par :

$$\hat{r}(\nu) = \hat{h}(\nu) \hat{s}(\nu) \quad (2.14)$$

La transformée de Laplace de la réponse du système est quant à elle donnée par :

$$R(p) = H(p)S(p) \quad (2.15)$$

où R , H et S sont les transformées de Laplace respectivement de r , h et s . Ainsi, les équations (2.5) d'une part, et (2.14) et (2.15) d'autre part sont les équations fondamentales qui régissent le fonctionnement d'un filtre dans le domaine temporel pour la première et dans le domaine fréquentiel / Laplace pour les 2 autres.

Définition 2.4 (Fonction de transfert) La fonction de transfert d'un système linéaire, continu et stationnaire est la transformée de Fourier souvent notée $H(\nu)$ ou $\hat{h}(\nu)$ de la réponse impulsionnelle de ce système, ou sa transformée de Laplace notée $H(p)$.

Par l'équation (2.14), on en déduit qu'une fonction de transfert d'un tel système est également le rapport entre la sortie et l'entrée de ce systèmes, exprimées dans le domaine de Fourier ou de Laplace :

$$H(\nu) = \frac{\hat{r}(\nu)}{\hat{s}(\nu)} \text{ ou } H(p) = \frac{R(p)}{S(p)} \quad (2.16)$$

Définition 2.5 (Polynôme caractéristique) Le polynôme caractéristique est le polynôme correspondant au dénominateur de la fonction de transfert.

Définition 2.6 (Ordre d'un filtre) L'ordre d'un filtre est le degré du dénominateur de la fonction de transfert du filtre, c'est à dire le degré du polynôme caractéristique. Il correspond également à l'ordre de dérivation maximal qui apparaît sur la réponse temporelle dans l'équation différentielle liant l'entrée et la sortie d'un filtre noté m dans l'équation (2.6).

Dans le premier chapitre, nous avons défini les filtres comme des systèmes physiques linéaires, continus et stationnaires. Nous rappelons que sous l'angle des distributions, un filtre est un système de convolution.

Leur réponse impulsionnelle h et leur fonction de transfert H (tels que $H(\nu) = \hat{h}(\nu)$) permettent de caractériser le filtre.

Nous rappelons les deux équations fondamentales. Si s est l'excitation à l'entrée du filtre de réponse impulsionnelle h , la réponse est un signal r qui vérifie :

$$r(t) = h(t) * s(t) \quad (2.17)$$

$$\hat{r}(\nu) = H(\nu) \hat{s}(\nu) \quad (2.18)$$

avec $H = \hat{h}$.

Dans ce qui suit, nous supposons que la Transformée de Fourier des signaux existe toujours. Dans le cas contraire, la fonction de transfert du filtre sera caractérisée à partir de la Transformée de Laplace.

2.2.1. Mise en cascade de filtres

Considérons la mise en cascade de filtres illustrée sur la figure Fig. 2.3. Alors la réponse impulsionnelle du système équivalent est égale à $h = h_1 * h_2 * \dots * h_n$ sous réserve que cette opération ait un sens. La fonction de transfert du système équivalent est égale au produit des fonctions de transfert : $\hat{h} = \hat{h}_1 \times \hat{h}_2 \times \dots \times \hat{h}_n$ ou dans le domaine de Laplace $H(p) = H_1(p) \times H_2(p) \times \dots \times H_n(p)$.

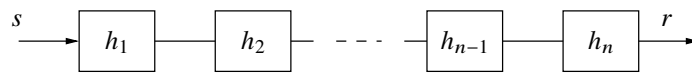


FIGURE 2.3 – Mise en cascade de filtres.

2.2.2. Systèmes bouclés

La notion de système bouclé, ou système en boucle fermée est fondamentale en automatique (cf. Fig.6.7). Afin de contraindre un signal $r(t)$ en sortie d'un processus (ou système), par exemple la température en sortie d'un mélangeur, on associe à ce système à contrôler déjà pourvu d'un actionneur (e.g. une vanne), un régulateur (répondant à la définition génériques des "filtres"). Celui-ci contraint cette sortie considérée à rester au voisinage de sa consigne. A partir de l'écart de consigne, il élabore la commande. On dit du système bouclé qu'il est asservi. Le capteur donne une image utilisable de la grandeur mesurée ou sortie (e.g. le thermocouple délivre une tension électrique proportionnelle à une température). L'actionneur est directement piloté par le régulateur et induit un changement d'état du processus.

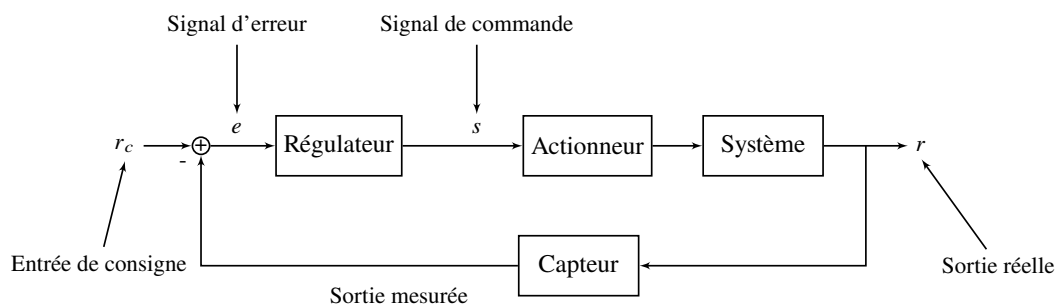


FIGURE 2.4 – Un système asservi : structure de commande en boucle fermée

Etant donné ces considérations pratiques, il est donc nécessaire d'être en mesure de calculer la réponse impulsionnelle, ou les fonctions de transfert avec la transformée de Fourier ou de Laplace entre les différents signaux d'entrée ou de sortie présents sur le système en boucle fermée. On parle de la problématique de simplification de schéma-bloc.

Pour étudier les caractéristiques de la structure de commande en boucle fermée ou contre-réaction nous définissons ci-dessous un schéma-bloc plus complet (Figure 2.5) incluant un signal de perturbation $d(t)$ et un signal de bruit de mesure $b(t)$. Dans ce schéma :

- $r_c(t)$ désigne le signal de référence ou de consigne que devrait suivre la sortie de l'asservissement,
- $r(t)$ est le signal de sortie supposé mesurable,
- $s(t)$ le signal issu du correcteur (régulateur ou contrôleur) appelé signal de commande,
- $d(t)$ le signal de perturbation supposé en entrée du système à régler (ce signal peut également intervenir en sortie du système selon la nature du système considéré et son environnement),
- $e(t)$ le signal d'erreur est la différence entre la sortie mesurée et le signal de référence (il joue à ce titre un rôle important pour l'analyse de la qualité d'un système asservi),
- $b(t)$ le signal de bruits de mesure (ne pas le considérer c'est tout simplement supposé disposer de l'information parfaite du comportement de la sortie du système considéré).

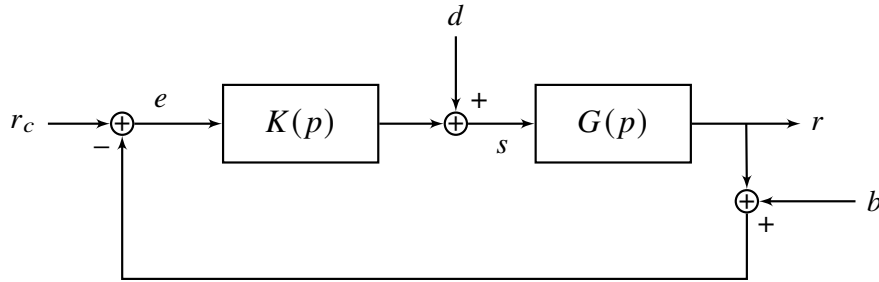


FIGURE 2.5 – Boucle fermée avec une perturbation en entrée et bruit de mesure

A partir de ce schéma en boucle fermée plusieurs fonctions de transfert reliant chacune des entrées à la sortie et à l'erreur seront présentées dans ce qui suit. Pour ce faire, nous définissons le **Transfert de Boucle** ou transfert de boucle ouverte :

$$L(p) = G_{bo}(p) = G(p)K(p) \quad (2.19)$$

Considérons dans un premier temps que les bruits de mesures sont inexistantes. Dans ce cas nous pouvons déterminer les relations en boucle fermée entre la sortie et les entrées de consigne et de perturbation (dites entrées exogènes ¹).

$$R(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} R_c(p) + \frac{1}{1 + L(p)} G(p) D(p) \quad (2.20)$$

$=T_{bf}(p) \quad \quad \quad =S_{bf}(p)$

Définition : Sensibilité et sensibilité complémentaire

Les fonctions de transferts $S_{bf}(p)$ et $T_{bf}(p)$ sont appelées respectivement fonction de sensibilité et fonction de sensibilité complémentaire. $S_{bf}(p) = \frac{1}{1+L(p)}$, $T_{bf}(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}$

La fonction de sensibilité complémentaire $T_{bf} = LS_{bf}$ (on l'appelle ainsi car $S_{bf} + T_{bf} = 1$) n'est autre que la fonction de transfert en boucle fermée usuelle entre la consigne et la sortie du système. Par ailleurs, il faut être capable d'apprécier la précision de l'asservissement, c'est pour cela qu'il s'avère utile de savoir exprimer le signal d'erreur $E(p)$. Il faut également veiller à conserver une certaine maîtrise sur l'amplitude de la commande délivrée au système à régler (éviter de saturer la commande) c'est pourquoi on s'intéresse aux transferts reliant $E(p)$ et $S(p)$ aux entrées exogènes :

$$\begin{aligned} E(p) &= S_{bf}(p)R_c(p) - S_{bf}(p)G(p)D(p) \\ S(p) &= K(p)S_{bf}(p)R_c(p) - S_{bf}(p)D(p) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Exercice : Réécrire tous ces transferts dans le cas où le signal de bruit $b \neq 0$.

1. extérieurs ou faisant partie de l'environnement du système

Dans le cas où les bruits de mesures sont prises en compte, on obtient les relations suivantes :

Remarque Au final, les relations que nous venons de présenter font apparaître plusieurs fonctions de sensibilité : S_{bf} , T_{bf} , $S_{bf}G$ et KS_{bf} . L'importance de ces transferts dans le réglage du système asservi peut être résumée comme suit :

- S_{bf} représente le transfert entre la référence et l'erreur mais aussi le transfert entre la perturbation et l'entrée du système à régler.
- T_{bf} représente l'effet des bruits de mesure sur la sortie et l'erreur.
- $S_{bf}G$ représente l'influence de la perturbation sur la sortie et l'erreur.
- KS_{bf} représente l'influence de la référence et des bruits de mesure sur la commande.

2.2.3. Réponse à un mélange d'ondes monochromatiques

Considérons le mélange d'ondes monochromatiques s défini par

$$s(t) = \sum_n \alpha_n \exp(2i\pi\nu_n t). \quad (2.22)$$

Sa transformée de Fourier est égale à

$$\hat{s} = \sum_n \alpha_n \delta_{\nu_n}. \quad (2.23)$$

La réponse d'un filtre de fonction de transfert \hat{h} à ce signal a pour transformée de Fourier

$$\hat{r} = \sum_n \hat{h}(\nu_n) \alpha_n \delta_{\nu_n} \quad (2.24)$$

c'est-à-dire

$$r(t) = \sum_n \hat{h}(\nu_n) \alpha_n \exp(2i\pi\nu_n t) \quad (2.25)$$

Nous retrouvons un nouveau mélange d'ondes monochromatiques. Chaque onde monochromatique du mélange original conserve sa fréquence mais se retrouve affectée d'une atténuation/gain $|\hat{h}(\nu_n)|^2$ et d'un déphasage ($\arg \hat{h}(\nu_n)$) fonction de sa fréquence. C'est typiquement ce qui se passe dans un milieu dispersif en fréquence, qui laisse passer certaines fréquences mieux que d'autres. Un choix judicieux du filtre permettra de retenir une bande de fréquence et de couper les autres.

2.2.4. Principaux rôles du filtre dans une chaîne de traitement

La notion fondamentale, théorique, de filtre a été introduite au début de ce chapitre. Dans ce contexte, il s'agit d'un objet mathématique qui permet de représenter la relation entrée / sortie d'un système (physique). Nous avons précisé qu'un système peut être de différente nature ; un système dynamique mécanique (e.g. un amortisseur), biologique... ou électronique ; dans ce dernier cas, on retrouvera aussi la terminologie de "filtre", mais qui désigne aussi l'objet électronique qui assure un traitement d'une quelconque nature sur un signal appliqué en entrée.

(1) *Annulation des interférences dans un mélange de signaux de spectres bornés disjoints*

Étant donné un mélange de signaux de spectres bornés disjoints $r = \sum_{k=1}^K s_k$, le filtrage de r permet d'isoler le signal d'intérêt des autres signaux (appelés signaux d'interférence). Supposons que le signal que l'on souhaite intercepter soit s_1 .

Notons W_k la bande de fréquences du signal s_k ($\hat{s}_k(\nu) \neq 0, \nu \in W_k$ ²). Si $W_k \cap W_j = \emptyset$, il suffit de concevoir le filtre de sorte que sa fonction de transfert soit non nulle sur une bande plus large que W_1 mais

2. Nous rappelons que pour un signal de représentation temporelle réelle, la représentation fréquentielle vérifie la symétrie hermitienne et la bande de fréquences correspond aux fréquences positives de son support

soit nulle ou négligeable sur les autres bandes de fréquences. Autrement dit, il doit respecter :

$$h(t) * s_1(t) \approx s_1(t) \quad (2.26)$$

$$h(t) * s_k(t) \approx 0, k \neq 1. \quad (2.27)$$

(2) Augmentation du rapport signal sur bruit

Lorsque le signal observé $r(t)$ est un signal bruité, autrement dit résulte de la superposition d'un signal $x(t)$ et d'un bruit $n(t)$:

$$r(t) = x(t) + n(t), \quad (2.28)$$

tels que $x(t)$ soit de densité spectrale de puissance S_x de support borné W_x et $n(t)$ de densité spectrale de puissance S_n de support W_n bien plus large que W_x , le filtrage judicieux du signal bruité permet de préserver le signal et réduire la puissance du bruit.

A partir de la puissance du signal à l'entrée $P_x^{In} = \int_{\mathbb{R}} S_x(\nu) d\nu$ et de la puissance du bruit à l'entrée $P_n^{In} = \int_{\mathbb{R}} S_n(\nu) d\nu$, on définit et on calcule le rapport signal sur bruit RSB^{In} :

$$RSB^{In} = \frac{P_x^{In}}{P_n^{In}} \quad (2.29)$$

Le filtre sera conçu de telle sorte que $S_{x*h}(\nu) = |\hat{h}(\nu)|^2 S_x(\nu) \approx S_x(\nu)$ (préservation de la puissance du signal) et sa bande de fréquences W_h vérifiera $W_x \subset W_h \subset W_n$ avec une largeur de bande ³ B_h bien inférieure à la largeur de bande B_n . Autrement dit la puissance du bruit en sortie du filtre $P_n^{Out} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\nu)|^2 S_n(\nu) d\nu$ est très inférieure à la puissance du bruit à l'entrée ($P_n^{Out} \ll P_n^{In}$) et le rapport signal à bruit en sortie du filtre est augmenté :

$$RSB^{Out} \gg RSB^{In} \quad (2.30)$$

(3) Traitement différencié des composantes fréquentielles d'un signal

Dans cette catégorie de traitement, on souhaite profiter de la sélectivité en fréquences du filtre pour traiter différemment les composantes fréquentielles du signal. Sous l'hypothèse d'une approximation du signal original par sa décomposition en série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{k \geq 0} a_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k), \quad (2.31)$$

le signal en sortie du filtre sera de la forme

$$r(t) = \sum_{k \geq 0} \gamma_k a_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k - \theta_k). \quad (2.32)$$

En pratique, ce traitement peut être mis en œuvre par un banc de filtres passe-bandes éventuellement suivi d'un additionneur pour reconstituer le signal traité par sous-bandes.

2.3. Filtres réalisables

Les systèmes physiques sont causaux : l'effet ne peut précéder la cause. Par conséquent la réponse impulsionnelle d'un filtre doit être causale : le filtre sera dit **réalisable**.

3. Si $W_h = [\nu_d, \nu_f]$, $B_h = \nu_f - \nu_d$

2.3.1. Propriétés de la réponse impulsionnelle $h(x)$ d'un filtre réalisable (cas des fonctions ordinaires)

Définition 2.7 (filtre réalisable) *Un filtre est dit réalisable si sa réponse impulsionnelle est causale.*

Cette notion ne précise en aucun cas comment réaliser effectivement le filtre.

Soit un filtre **réel réalisable**. Alors les résultats du paragraphe 1.4 s'appliquent. En particulier, en notant $\hat{h} = \text{Re} [\hat{h}] + i\text{Im} [\hat{h}]$, $\text{Re} [\hat{h}]$ et $\text{Im} [\hat{h}]$ sont reliés par les équations (1.25) et (1.26).

$$\text{Re} [\hat{h}] = \frac{1}{\pi} \nu p \frac{1}{\nu} * \text{Im} [\hat{h}] \quad (2.33)$$

$$\text{Im} [\hat{h}] = -\frac{1}{\pi} \nu p \frac{1}{\nu} * \text{Re} [\hat{h}] \quad (2.34)$$

La seule donnée de $\text{Re} [\hat{h}]$ ou de $\text{Im} [\hat{h}]$ suffit à déterminer parfaitement le filtre.

Théorème 2.5 (filtre réalisable réel ordinaire) *Soit un filtre réel réalisable dont la réponse impulsionnelle est une fonction ordinaire alors :*

$$h(x) = 4Y(x) \int_0^{+\infty} \text{Re} [\hat{h}](\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu = -4Y(x) \int_0^{+\infty} \text{Im} [\hat{h}](\nu) \sin(2\pi\nu x) d\nu \quad (2.35)$$

De plus sous réserve d'existence,

$$\int_0^{+\infty} (\text{Re} [\hat{h}](\nu))^2 d\nu = \int_0^{+\infty} (\text{Im} [\hat{h}](\nu))^2 d\nu. \quad (2.36)$$

Démonstration 2.1 Reprenons la démonstration effectuée au chapitre 1 dans le cadre des signaux réels causaux. Nous avons montré que tout signal réel causal peut être décomposé comme la somme d'un signal pair et d'un signal impair égaux sur $[0, +\infty[$. Par ailleurs, le signal pair est relié par transformée de Fourier à la partie réelle du spectre du signal, tandis que le signal impair est relié par transformée de Fourier à la partie imaginaire du spectre du signal.

Dans le cas du filtre réalisable,

$$h = 2h_p Y = 2h_i Y \quad (2.37)$$

avec $\hat{h}_p = \text{Re} [\hat{h}]$ et $\hat{h}_i = i\text{Im} [\hat{h}]$.

Par ailleurs $\text{Re} [\hat{h}]$ et $\text{Im} [\hat{h}]$ sont respectivement paire et impaire. D'où

$$h_p(x) = \int_{\mathbb{R}} \text{Re} [\hat{h}](\nu) \exp(2i\pi\nu x) d\nu = 2 \int_0^{+\infty} \text{Re} [\hat{h}](\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu \quad (2.38)$$

$$h_i(x) = i \int_{\mathbb{R}} \text{Im} [\hat{h}](\nu) \exp(2i\pi\nu x) d\nu = -2 \int_0^{+\infty} \text{Im} [\hat{h}](\nu) \sin(2\pi\nu x) d\nu \quad (2.39)$$

$$(2.40)$$

D'où le résultat.

En particulier, $h(0^+) = 4 \int_0^{+\infty} \text{Re} [\hat{h}](\nu) d\nu$.

Exemple 2.2 Soit un filtre tel que $\text{Re} [\hat{h}] = \delta$. Alors

$$\text{Im} [\hat{h}] = -\frac{1}{\pi} \nu p \frac{1}{\nu} * \text{Re} [\hat{h}] = -\frac{1}{\pi} \nu p \frac{1}{\nu}, \quad (2.41)$$

ce qui donne $\hat{h} = \delta - i\frac{1}{\pi} \nu p \frac{1}{\nu}$ soit $h = 2Y$. Nous obtenons donc un filtre intégrateur.

Exemple 2.3 (filtre passe-bas idéal) Le filtre passe-bas idéal de bande B Hz vérifie $\hat{h}(\nu) = \Pi(\frac{\nu}{2B})$. La réponse impulsionnelle associée est

$$h(x) = 2B \frac{\sin(2\pi Bx)}{2\pi Bx} \quad (2.42)$$

qui n'est pas causale, donc le filtre passe-bas idéal n'est pas réalisable.

Il est possible de rendre la réponse impulsionnelle causale en la multipliant par Y , mais dans ce cas, le filtre ne sera plus passe-bas. La famille de filtres en cosinus sur-élevé, qui seront étudiés dans les petites classes, sont des filtres réalisables qui permettent d'approcher le filtre passe-bas idéal.

2.3.2. Propriétés de la fonction de transfert $L[h](p)$ d'un filtre réalisable (cas des fonctions ordinaires)

Le filtre étant réalisable, sa réponse impulsionnelle est causale, ce qui impose que la fonction de transfert soit définie par

$$L[h](p) = \int_0^{+\infty} h(x) \exp(-px) dx, \quad \operatorname{Re}(p) > \sigma_0 \quad (2.43)$$

$L[h](p)$ est holomorphe dans le demi-plan défini par $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$.

Remarque 2.4 L'existence de $\hat{h}(\nu) = \int_0^{+\infty} h(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx$ (correspondant à $\operatorname{Re}(p) = 0$) impose $\sigma_0 < 0$. Autrement dit le demi-plan d'holomorphie doit contenir l'axe des imaginaires purs.

Exemple 2.4 $L[h](p) = \frac{1}{p+a}$, $a \in \mathbb{R}$, holomorphe sur le demi-plan ouvert $\operatorname{Re}(p) > -a$ est la fonction de transfert du filtre réalisable de réponse impulsionnelle $h(x) = \exp(-ax)Y(x)$.

Exemple 2.5 $L[h](p) = \frac{1}{1-p^2} = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}$, holomorphe sur le demi-plan ouvert $\operatorname{Re}(p) > 1$ est la fonction de transfert du filtre réalisable de réponse impulsionnelle $h(x) = [\exp(-x) - \exp(x)]Y(x)$.

Remarque 2.5 Le demi-plan ouvert d'holomorphie de la fonction de transfert $L[h](p)$ est indispensable pour définir complètement le filtre.

Ainsi $L[h](p) = \frac{1}{1-p^2} = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}$, holomorphe sur $-1 < \operatorname{Re}(p) < 1$ est la fonction de transfert du filtre de réponse impulsionnelle $h(x) = \exp(-|x|)$, qui n'est pas réalisable.

Rappelons certaines relations vues dans le cours d'introduction aux distributions qui peuvent être intéressantes pour caractériser le comportement asymptotique du filtre :

$$\lim_{p \rightarrow 0} pL[h](p) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \quad (2.44)$$

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} pL[h](p) = h(0^+) \quad (2.45)$$

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} [p^2 L[h](p) - ph(0^+)] = h'(0^+) \quad (2.46)$$

2.4. Filtres stables

Nous considérons le cas des fonctions ordinaires. La stabilité d'un filtre est une propriété aussi importante que la réalisabilité.

2.4.1. Stabilité et réponse impulsionnelle

Définition 2.8 Un filtre est stable si la réponse à toute excitation bornée sur \mathbb{R} est elle-même bornée.

La stabilité du filtre est une condition de continuité selon la norme de convergence uniforme.

Si l'excitation est bornée sur \mathbb{R} , il existe un réel M positif tel que $|s(x)| \leq M$. Dans ce cas, sous réserve d'existence des intégrales,

$$|r(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} s(x-x')h(x')dx' \right| \leq M \int_{\mathbb{R}} |h(x')|dx' \quad (2.47)$$

Il en résulte un théorème sur la réponse impulsionnelle d'un filtre stable.

Théorème 2.6 (réponse impulsionnelle d'un filtre stable (cas des fonctions ordinaires)) *Un filtre dont la réponse impulsionnelle est une fonction est stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle est sommable c'est-à-dire*

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)| dx < +\infty \quad (2.48)$$

2.4.2. Stabilité et fonction de transfert

Théorème 2.7 (fonction de transfert d'un filtre stable (cas des fonctions ordinaires)) *Si un filtre est stable, alors $\hat{h}(v)$ existe. De plus $\hat{h}(v)$ est une fonction continue et tendant vers 0 quand v tend vers l'infini.*

Par ailleurs, comme

$$\hat{h}(0) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dx, \quad (2.49)$$

$$|r(x)| \leq M |\hat{h}(0)| \quad (2.50)$$

Si $\hat{h}(v)$ est elle-même sommable, alors $h(x)$ est une fonction continue, tendant vers 0 quand x tend vers l'infini.

Pour que $\hat{h}(v)$ existe, il faut que l'abscisse de sommabilité de $L[h](p)$ soit négative ($\sigma_0 < 0$), c'est-à-dire que $L[h](p)$ soit holomorphe sur un demi-plan contenant l'axe des imaginaires purs : $L[h](p)$ n'a aucun pôle à partie réelle positive ou nulle.

Théorème 2.8 (fonction de transfert d'un filtre stable (cas des fonctions ordinaires)) *Si un filtre est stable, alors les pôles de sa fonction de transfert $L[h](p)$ sont à partie réelle strictement négative.*

Dans le cas d'un filtre réalisable (réponse impulsionnelle causale), la condition est nécessaire et suffisante.

Théorème 2.9 (CNS de stabilité d'un filtre réalisable (fonctions ordinaires)) *Un filtre réalisable est stable, si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert $L[h](p)$ sont à partie réelle strictement négative.*

La démonstration provient directement de la définition de $L[h](p)$.

$$L[h](p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \int_0^{+\infty} h(x) \exp(-px) dx. \quad (2.51)$$

Dès lors

$$|L[h](p)| = \left| \frac{A(p)}{B(p)} \right| \leq \int_0^{+\infty} |h(x)| \exp(-\operatorname{Re}(p)x) dx. \quad (2.52)$$

Si $\operatorname{Re}(p) \geq 0$, $0 < \exp(-\operatorname{Re}(p)x) \leq 1$, alors

$$|L[h](p)| = \left| \frac{A(p)}{B(p)} \right| \leq \int_0^{+\infty} |h(x)| dx. \quad (2.53)$$

La stabilité du filtre nécessite que $\int_0^{+\infty} |h(x)| dx$ soit finie. Or $|L[h](p_k)| = +\infty$. D'où en considérant l'inégalité donnée en (2.53) vérifiée pour tout p tel que $\operatorname{Re}(p) \geq 0$, il est nécessaire que $\operatorname{Re}(p_k) < 0$.

Exemple 2.6 Reprenons l'exemple 2.4 du filtre décrit par sa fonction de transfert $L[h](p) = \frac{1}{p+a}$, $a \in \mathbb{R}$, holomorphe sur le demi-plan ouvert $\operatorname{Re}(p) > -a$.

Le filtre réalisable de réponse impulsionnelle $h(x) = \exp(-ax)Y(x)$ sera stable si $a > 0$.

Exemple 2.7 $L[h](p) = \frac{1}{1-p^2} = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}$, holomorphe sur le demi-plan ouvert $\operatorname{Re}(p) > 1$ est la fonction de transfert du filtre réalisable de réponse impulsionnelle $h(x) = [\exp(-x) - \exp(x)]Y(x)$.

Pour montrer que le filtre n'est pas stable, trois méthodes :

1/ Comme $\sigma_0 = 1 > 0$, \hat{h} n'est pas définie.

2/ $L[h](p)$ admet deux pôles 1 et -1 dont l'un est à partie réelle positive.

3/ Au voisinage de $+\infty$ $|h(x)|$ est équivalente à $\exp(x)$ et $\int_0^{+\infty} \exp(x) dx$ diverge, d'où $\int_0^{+\infty} |h(x)| dx$ diverge.

2.4.3. Critère de Routh-Hurwitz

Ce critère énonce une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme quelconque, de degré n , ait toutes ses racines à partie réelle strictement négative. Il permet plus précisément de calculer le nombre de changement de signe des racines sans calculer les racines en question. Ce critère a été défini par E. Routh en 1875 et par A. Hurwitz en 1895 [2], et une démonstration est disponible par exemple dans l'ouvrage [3].

Supposons que le polynôme caractéristique (dénominateur du transfert de la boucle fermée) est écrit sous la forme suivante :

$$Q(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0. \quad (2.54)$$

avec $a_0 \neq 0$. Si un des coefficients est nul ou négatif alors qu'un autre coefficient au moins est positif, il existe une racine ou des racines imaginaire(s) ou nulle(s) ou à partie réelle positive. Si tous les coefficients sont positifs (s'ils sont tous négatifs, on se ramène sans perte de généralité, au cas où ils sont tous positifs), on forme le tableau de Routh à $n + 2$ lignes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & & \dots \\ a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & & \dots \\ b_1 = a_{n-2} - (a_n a_{n-3}/a_{n-1}) & b_2 = a_{n-4} - (a_n a_{n-5}/a_{n-1}) & b_3 = a_{n-6} - (a_n a_{n-7}/a_{n-1}) & \dots & & & \\ c_1 = a_{n-3} - (b_2 a_{n-1}/b_1) & c_2 = a_{n-5} - (b_3 a_{n-1}/b_1) & c_3 = a_{n-7} - (b_4 a_{n-1}/b_1) & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad (2.55)$$

Nous remarquerons que les coefficients calculés peuvent être représentés autrement :

$$b_1 = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \quad (2.56)$$

Ou encore

$$b_2 = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \quad (2.57)$$

Une fois le tableau calculé on peut appliquer le critère de Routh-Hurwitz (ou de Routh) énoncé ci-après.

Théorème 2.10 (Critère de Routh) *Le nombre de racines du polynôme dont la partie réelle est positive est égal au nombre de changements de signes des coefficients de la première colonne du tableau de Routh. Le filtre est donc stable si et seulement si tous les coefficients de la première colonne sont positifs (cf. énoncé simplifié). Si un élément de la première colonne est nul, on le remplace alors par $\epsilon > 0$ et on continue la construction du tableau. Si l'élément au dessous de ϵ est positif, il existe une racine à partie réelle nulle. Si l'élément au dessous de ϵ est négatif, il y a changement de signe et donc il existe une racine à partie réelle positive.*

Corollaire 2.1 (Critère de Routh simplifié) *Un filtre est stable si et seulement si les éléments de la première colonne du tableau de Routh, associé à son équation caractéristique, sont tous positifs.*

Remarque 2.6 *Un zéro dans la première colonne indique une racine imaginaire pure ($j\omega$). Afin de terminer le tableau, le 0 est remplacé par un ϵ . Une ligne complètement nulle indique que le polynôme caractéristique peut être factorisé de telle manière à faire apparaître un facteur d'ordre pair dont les racines sont symétriques par rapport à 0. La ligne au dessus de cette ligne nulle contient les coefficients du polynôme en question.*

Exemple 2.8 Appliquer le critère de Routh dans le cas d'un second ordre. En déduire qu'un 2nd ordre est stable si tous les coefficients du polynôme dénominateur sont de même signe.

Exemple 2.9 Appliquer le critère de Routh dans le cas d'un système de 3ème ordre. En déduire une condition nécessaire et suffisante de stabilité dans ce cas.

Nous considérons donc le polynôme suivant : $Q(p) = a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0$ avec $a_i > 0, i \in 0, \dots, 3$. Le tableau de Routh dans ce cas est construit comme suit :

$$\begin{array}{c|cc}
 p^3 & a_3 & a_1 \\
 p^2 & a_2 & a_0 \\
 p^1 & b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}}{a_2} & 0 \\
 p^0 & a_0 &
 \end{array} \quad (2.58)$$

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité est donnée par : $a_2a_1 > a_3a_0$.

Exemple 2.10 Un polynôme d'ordre 4 donné par : $Q(p) = p^4 + p^3 + 3p^2 + p + 1$. Le tableau de Routh dans ce cas est construit comme suit :

$$\begin{array}{c|ccc}
 p^4 & 1 & 3 & 1 \\
 p^3 & 1 & 1 & 0 \\
 p^2 & 2 & 1 & 0 \\
 p^1 & 0.5 & 0 & \\
 p^0 & 1 & &
 \end{array} \quad (2.59)$$

Pas de changement de signe sur la première colonne indiquant la stabilité de ce polynôme.

Exemple 2.11 Un polynôme d'ordre 5 donné par : $Q(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 3p + 1$. Le tableau de Routh dans ce cas est construit comme suit :

$$\begin{array}{c|ccc}
 p^5 & 1 & 3 & 3 \\
 p^4 & 2 & 4 & 1 \\
 p^3 & 1 & 2.5 & 0 \\
 p^2 & -1 & 1 & 0 \\
 p^1 & 3.5 & 0 & \\
 p^0 & 1 & &
 \end{array} \quad (2.60)$$

Un changement de signe indiquant la présence d'une racine à partie réelle positive et donc l'instabilité de ce polynôme.

Exemple 2.12 Un polynôme d'ordre 4 admettant deux racines imaginaires pures : $Q(p) = p^4 + p^3 + 5p^2 + 4p + 4$. Le tableau de Routh dans ce cas est construit comme suit :

$$\begin{array}{c|ccc}
 p^4 & 1 & 5 & 4 \\
 p^3 & 1 & 4 & 0 \\
 p^2 & 1 & 4 & 0 \\
 p^1 & \varepsilon & 0 & \\
 p^0 & 4 & &
 \end{array} \quad (2.61)$$

Une ligne de 0 associée à p^1 indiquant que le polynôme peut être factorisé par un polynôme de coefficients se trouvant à la ligne p^2 . Donc le polynôme reconstitué à partir de cette ligne est $p^2 + 4$ admettant $\pm 2j$ comme racines. Effectivement, on peut aisément établir l'égalité suivante : $Q(p) = p^4 + p^3 + 5p^2 + 4p + 4 = (p^2 + 4)(p^2 + p + 1)$.

2.5. Identification d'un filtre

Il s'agit ici de déterminer empiriquement (par la mesure) ou théoriquement la réponse impulsionnelle h ou sa transformée de Fourier $\hat{h}(\nu)$ ou de Laplace $H(p)$. Nous nous intéressons à des systèmes physiques : le signal d'excitation est causal et le filtre est réalisable.

2.5.1. Rappels

Convolution et dérivation

Sous l'hypothèse où s et h sont des distributions causales (la convolution est associative), la réponse est une distribution causale $r = h * s$ et nous avons la relation

$$r^{(n)} = h^{(n-p)} * s^{(p)}, \forall 0 \leq p \leq n \quad (2.62)$$

avec $x^{(0)} = x$.

Dans le cas de fonctions ordinaires causales telles que $\lim_{x \rightarrow 0^+} s(x) \neq 0$ (et $\lim_{x \rightarrow 0^-} s(x) = 0$), en supposant que h ne présente pas de discontinuités à l'origine, la relation requiert la formule des sauts vue dans le cours d'introduction aux distributions et rappelée ci-dessous :

$$(T_f)^{(m)} = \sigma_{m-1} \delta + \dots + \sigma_0 \delta^{(m-1)} + T_{f(m)} \quad (2.63)$$

Dès lors :

$$r^{(n)} = s^{(n-1)}(0^+)h + \dots + s(0^+)h^{(n-1)} + s^{(n)} * h \quad (2.64)$$

Dans le cas où $n = 1$,

$$r' = s(0^+)h + s' * h \quad (2.65)$$

Convolution et intégration

L'intégration est modélisée comme le filtrage du signal par la distribution de Heaviside : $s * Y$.

Remarque 2.7 Nous rappelons que si s est indéfiniment dérivable, $s * Y$ est une fonction indéfiniment dérivable définie par

$$(s * Y)(x) = \langle Y(t), s(x-t) \rangle = \int_{-\infty}^x s(t) dt \quad (2.66)$$

Dès lors la réponse à l'intégrale de l'excitation est l'intégrale de la réponse ou la réponse au filtre intégré :

$$r * Y = h * (s * Y) = (h * Y) * s \quad (2.67)$$

2.5.2. Réponse impulsionnelle

Théoriquement, si l'excitation est la distribution de Dirac (impulsion), la réponse r correspond à h : $r = \delta * h = h$. D'où le nom de **réponse impulsionnelle** pour h .

En pratique, il suffit de considérer une suite d'excitations physiquement réalisables s_k dont la limite au sens des distributions vaut δ . Pour k suffisamment grand, la réponse r_k pourra être considérée comme une bonne approximation de h .

Une autre méthode consiste à appliquer la distribution de Heaviside à l'entrée du dispositif : $r = Y * h$. La dérivation de r fournit : $r' = \delta * h = h$.

Rappelons que pour qu'un système physique décrit par un opérateur de convolution soit réalisable, il faut et il suffit que sa réponse impulsionnelle soit nulle pour les valeurs négatives de la variable : $h \in \mathcal{D}'_+$. Dans ce cas $s * h$ a toujours un sens.

2.5.3. Identification à partir de l'équation différentielle reliant l'excitation et la réponse du système

2.5.3.1. Principe

En notant s et r l'excitation et la réponse au système, il est possible d'exprimer une relation entre s et r sous la forme $D_1 r = D_2 s$ où D_1 et D_2 sont des opérateurs différentiels. L'objectif est de déterminer la réponse impulsionnelle du système à partir de l'équation différentielle régissant le système, c'est-à-dire h tel que $r = h * s$. Il s'agit d'exploiter le fait que lorsque $s = \delta$, $r = h$ et résoudre $D_1 h = D_2 \delta$.

Identifions D_1 et D_2 à partir de l'équation différentielle régissant le système donnée précédemment :

$$\underbrace{b_0 \frac{d^m r}{dx^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r}{dx^{m-1}} + \dots + b_m r}_{D_1 r} = \underbrace{a_0 \frac{d^n s}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} s}{dx^{n-1}} + \dots + a_n s}_{D_2 s}.$$

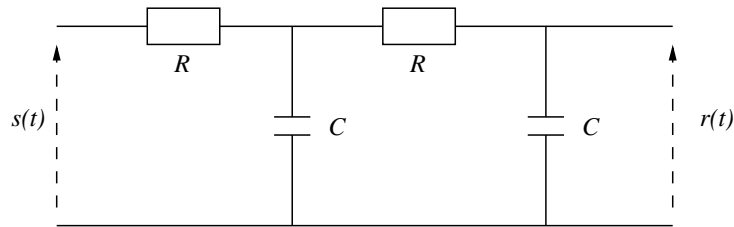


FIGURE 2.6 – Circuit RC

Exemple 2.13 Considérons le circuit électronique représenté en Fig. 2.6. Nous supposons que le signal d'entrée vérifie $s(t) = 0$ pour $t \leq 0$ (signal causal). Après quelques manipulations, nous pouvons montrer une relation entre le signal d'excitation s et la réponse du système r :

$$(RC)^2 \frac{d^2 r}{dt^2}(t) + 3RC \frac{dr}{dt}(t) + r(t) = s(t) \quad (2.68)$$

ce qui se réécrit également sous la forme

$$D\delta * r = s, \quad (2.69)$$

où l'opérateur différentiel qui caractérise la relation entrée/sortie est défini par

$$D = \left((RC)^2 \frac{d^2}{dt^2} + 3RC \frac{d}{dt} + 1 \right). \quad (2.70)$$

2.5.3.2. Obtention de la fonction de transfert par application de la transformée de Fourier

Nous nous limitons au cas où système et signaux sont causaux.

Si D_1 est un opérateur différentiel à coefficients constants, **une méthode d'identification consiste à exploiter la transformée de Fourier.**

L'application de la Transformée de Fourier aux deux membres de l'équation différentielle 2.6 fournit l'équation :

$$\underbrace{\left(b_0 (i2\pi\nu)^m + b_1 (i2\pi\nu)^{m-1} + \dots + b_m \right)}_{B(\nu)} \hat{r}(\nu) = \underbrace{\left(a_0 (i2\pi\nu)^n + a_1 (i2\pi\nu)^{n-1} + \dots + a_n \right)}_{A(\nu)} \hat{s}(\nu)$$

et par conséquent la fonction de transfert du filtre est donnée par

$$H(\nu) = \hat{h}(\nu) = \frac{a_0(i2\pi\nu)^n + a_1(i2\pi\nu)^{n-1} + \dots + a_n}{b_0(i2\pi\nu)^m + b_1(i2\pi\nu)^{m-1} + \dots + b_m} \quad (2.71)$$

Exemple 2.14 Si nous reprenons l'exemple de la Fig. 2.6, $Q(\nu) = (RC)^2((i2\pi\nu)^2 + \frac{3}{RC}(i2\pi\nu) + 1)$. Les racines de l'équation $x^2 + \frac{3}{RC}x + \frac{1}{(RC)^2} = 0$ sont négatives et égales à $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2RC}$ et $x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2RC}$. Nous en déduisons la factorisation de $B(\nu)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{B(\nu)} &= \frac{1}{(RC)^2} \frac{1}{(i2\pi\nu - x_1)(i2\pi\nu - x_2)} \\ &= \frac{1}{(RC)^2(x_1 - x_2)} \left[\frac{1}{i2\pi\nu - x_1} - \frac{1}{i2\pi\nu - x_2} \right], \end{aligned}$$

conduisant à l'expression de la réponse impulsionnelle du système :

$$h = (D\delta)^{\star-1} = \frac{1}{\sqrt{5}RC} (\exp(x_1 t) - \exp(x_2 t)) \Upsilon$$

2.5.4. Réponse à une excitation exponentielle : obtention de la fonction de transfert

Dans ce cas, l'excitation est de la forme $s(t) = \exp(i2\pi\nu_0 t)$. Pour déterminer le signal en sortie du filtre, il suffit de passer par les transformées de Fourier :

$$\hat{r}(\nu) = \hat{h}(\nu) \hat{s}(\nu) \quad (2.72)$$

$$\hat{r} = \hat{h}(\nu) \delta_{\nu_0} \quad (2.73)$$

$$= \hat{h}(\nu_0) \delta_{\nu_0} \quad (2.74)$$

ce qui donne ensuite

$$r(t) = \hat{h}(\nu_0) \exp(i2\pi\nu_0 t) \quad (2.75)$$

En pratique, on peut utiliser un générateur de fréquence et faire varier la fréquence du signal sinusoïdal généré. En imposant ce signal à l'entrée du filtre et en mesurant la puissance en sortie du filtre, on peut en déduire la fonction de transfert du filtre.

2.6. Amplitude et phase de transfert d'un filtre réel réalisable

2.6.1. Réponse à une entrée sinusoïdale

Nous nous plaçons dans le cas de filtres réels réalisables, dont la réponse impulsionnelle est une fonction ordinaire, admettant une transformée de Fourier.

La fonction de transfert du filtre est souvent modélisée sous la forme $\hat{h}(\nu) = A(\nu) \exp(-i\Phi(\nu))$ où $A(\nu)$ est le module et $-\Phi(\nu)$ la phase de la fonction de transfert.

Physiquement $A^2(\nu)$ désigne le gain ($A(\nu) \geq 1$) ou l'affaiblissement ($A(\nu) < 1$) et $\Phi(\nu)$ est le déphasage apporté par le filtre à un signal sinusoïdal pur.

Le filtre est réel et réalisable : sa réponse impulsionnelle est causale, $A(\nu)$ est une fonction paire et $\Phi(\nu)$ est une fonction impaire.

Déterminons la réponse du filtre à une sinusoïde : $s(x) = \cos(2\pi\nu_0 x)$.

Calcul direct avec les distributions $s(x) = \cos(2\pi\nu_0 x) = \frac{1}{2} (\exp(i2\pi\nu_0 x) + \exp(-i2\pi\nu_0 x))$

$$r(x) = \langle h(t), s(x-t) \rangle \quad (2.76)$$

$$= \frac{1}{2} (\langle h(t), \exp(i2\pi\nu_0(x-t)) \rangle + \langle h(t), \exp(-i2\pi\nu_0(x-t)) \rangle) \quad (2.77)$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{h}(\nu_0) \exp(i2\pi\nu_0 x) + \hat{h}(-\nu_0) \exp(-i2\pi\nu_0 x)) \quad (2.78)$$

$$= A(\nu_0) \cos(2\pi\nu_0 x - \Phi(\nu_0)) \quad (2.79)$$

Passage par la transformée de Fourier $\hat{s} = \frac{1}{2}(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0})$ et $\hat{r}(\nu) = \hat{h}(\nu) \hat{s}(\nu)$.

$$\hat{r} = \frac{1}{2} A(\nu_0) (\exp(-i\Phi(\nu_0)) \delta_{\nu_0} + \exp(i\Phi(\nu_0)) \delta_{-\nu_0}) \quad (2.80)$$

ce qui donne

$$r(x) = \frac{1}{2} A(\nu_0) (\exp(-i\Phi(\nu_0)) \exp(2i\pi\nu_0 x) + \exp(i\Phi(\nu_0)) \exp(-2i\pi\nu_0 x)) \quad (2.81)$$

$$= A(\nu_0) \cos(2\pi\nu_0 x - \Phi(\nu_0)) \quad (2.82)$$

Un filtre sans distorsion conserve la forme des signaux : $A(\nu) = a$, $\Phi(\nu) = 2\pi\tau\nu$. La réponse impulsionnelle du filtre sans distorsion est $h = a\delta_\tau$. Sa fonction transfert est $\hat{h}(\nu) = a \exp(-2i\pi\nu\tau)$. τ est le retard constant introduit par le filtre.

Tout filtre dont l'amplitude $A(\nu)$ n'est pas constante introduit une distorsion d'amplitude.

Tout filtre dont le déphasage $\Phi(\nu)$ n'est pas proportionnel à la fréquence introduit une distorsion de phase.

Un filtre sans distorsion de phase vérifie $\hat{h}(\nu) = A(\nu) \exp(-2i\pi\nu\tau)$. En notant $g = \tilde{\mathcal{F}}[A]$, nous obtenons $h(x) = g(x - \tau)$.

Dans le cas où g est la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal de bande B ,

$$h(x) = \frac{\sin(2\pi B(x - \tau))}{\pi(x - \tau)}. \quad (2.83)$$

En fonction de la valeur du retard et du produit $B\tau$ (cf. Fig. 2.7, $a = \tau$, $B\tau = 5$), les valeurs de $h(x)$ correspondant à $x \leq 0$ pourront être considérées comme négligeables et le filtre pourra être assimilé à un filtre réalisable.

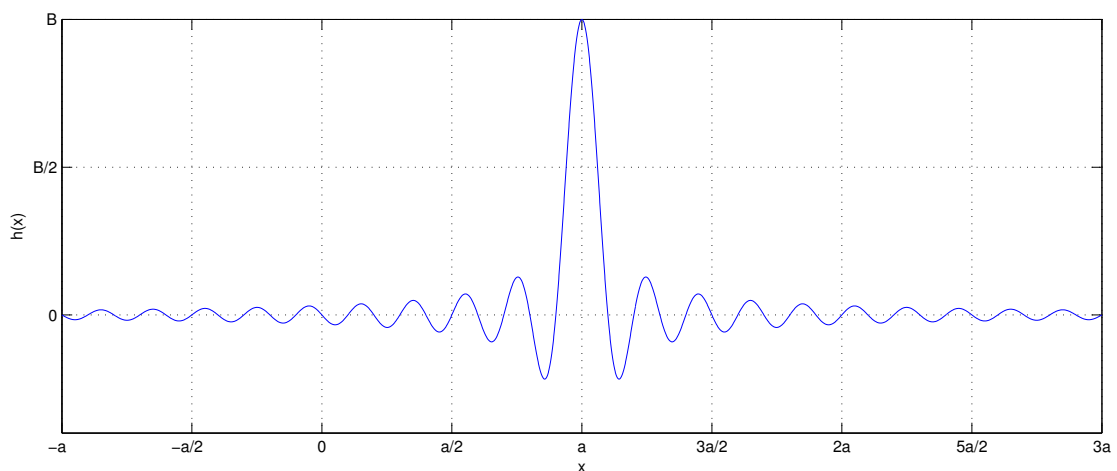


FIGURE 2.7 – Représentation de la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal retardé.

La question qui se pose est la suivante : sous quelles conditions sur $A(\nu)$ pourra-t-on définir un filtre approximativement réalisable ?

2.6.1.1. Théorème de Paley-Wiener

Le théorème de Paley-Wiener permet de répondre à cette question.

Théorème 2.11 (Paley-Wiener) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une réponse impulsionnelle soit causale est que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |\hat{h}(\nu)|}{1 + \nu^2} d\nu \quad (2.84)$$

soit convergente.

Appliqué dans notre contexte, un filtre réel sera réalisable si

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln A(\nu)}{1 + \nu^2} d\nu \quad (2.85)$$

converge. Cette condition est vérifiée si $\ln A(\nu)$ est intégrable et négligeable devant ν : $A(\nu) = o(\nu)$.

Exemple 2.15 Le filtre de Butterworth défini par $A(\nu) = \frac{A_0}{\sqrt{1+(\beta\nu)^{2n}}}$ est réalisable.

2.6.2. Réponse à une entrée à spectre étroit

Soit un signal réel de spectre étroit $s(x) = m(x) \cos(2\pi\nu_0 x)$ tel que $m(x)$ soit pair et admette une transformée de Fourier $\hat{m}(\nu)$ de support inclus dans $[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}]$ avec $W \ll \nu_0$.

Comme $W \ll \nu_0$, nous pouvons supposer que sur le support de $\hat{s}(\nu)$,

$$A(\nu) = A(\nu_0) \quad (2.86)$$

et

$$\Phi(\nu) = \Phi(\nu_0) + (\nu - \nu_0)\Phi'(\nu_0). \quad (2.87)$$

Dès lors, la réponse du filtre au signal $s(x)$ est donnée par

$$r(x) = A(\nu_0)m(x - x'_0) \cos(2\pi\nu_0(x - x_0)), \quad (2.88)$$

avec

$$x_0 = \frac{\Phi(\nu_0)}{2\pi\nu_0} \quad (2.89)$$

le retard de phase introduit par le filtre et

$$x'_0 = \frac{\Phi'(\nu_0)}{2\pi} \quad (2.90)$$

le retard de groupe introduit par le filtre.

Démonstration 2.2 cf. séance de travaux dirigés.

2.7. Classification des filtres et réponse fréquentielle asymptotique (diagrammes de Bode)

2.7.1. Généralités

Les filtres sont généralement caractérisés par leur ordre et par le support fréquentiel associé à une action de très faible atténuation ou de forte atténuation. On distingue ainsi 4 grande classe de filtres :

Le filtre passe-bas laisse passer les fréquences basses et atténue les fréquences hautes. Nécessairement $\hat{h}(0) \neq 0$. Un filtre passe-bas idéal est tel que sa fonction de transfert $\hat{h}(\nu)$ est nulle au-delà d'une certaine fréquence ν_0 appelé fréquence de coupure.

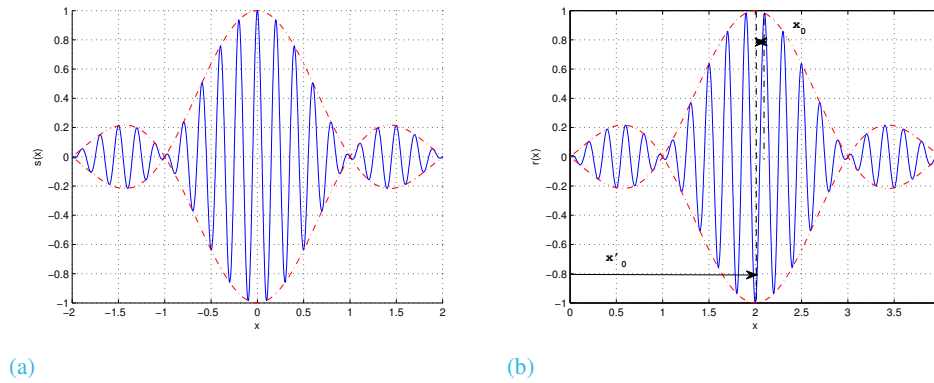


FIGURE 2.8 – Illustration de la dispersion introduite par le filtrage - a) avant filtrage b) après filtrage

Le filtre passe-haut laisse passer les fréquences hautes et atténue les fréquences basses. Un filtre passe-haut idéal est tel qu'il existe une fréquence de coupure $\nu_0 > 0$ telle que sa fonction de transfert $\hat{h}(\nu)$ soit nulle sur $[0, \nu_0]$.

Le filtre passe-bande est la combinaison d'un filtre passe-haut et d'un filtre passe-bas. Un filtre passe-bande idéal est tel qu'il existe deux fréquences $0 < \nu_1 < \nu_2$ telles que sa fonction de transfert $\hat{h}(\nu)$ soit nulle sur $[0, \nu_1] \cup [\nu_2, +\infty[$.

Le filtre coupe-bande Un filtre coupe-bande est la combinaison d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut. Un filtre passe-bande idéal est tel qu'il existe deux fréquences $0 < \nu_1 < \nu_2$ telles que sa fonction de transfert $\hat{h}(\nu)$ soit nulle sur $[\nu_1, \nu_2]$.

En pratique, les filtres idéaux ne sont pas réalisables. Les fréquences de coupures sont alors définies de la façon suivante :

Définition 2.9 (Fréquence de coupure à x dB) La fréquence de coupure à x dB d'un filtre passe-bas est la fréquence ν_c telle que

$$20 \log_{10} \left(\frac{|\hat{h}(\nu_c)|}{|\hat{h}(0)|} \right) = -x \quad (2.91)$$

Ces fréquences de coupure permettent de définir également la bande passante du filtre :

Définition 2.10 (Bande passante à x dB) La bande passante à x dB d'un filtre passe-bas est égale à $[0, \nu_c]$ Hz, où ν_c est la fréquence de coupure à x dB.

La bande atténuée à x dB est alors la bande complémentaire de la bande passante $(\nu_c, +\infty[)$.

La représentation graphique du logarithme de l'atténuation et du déphasage de la fonction de transfert en fonction des fréquences ou des pulsations se fait sur des diagrammes de bode sur une échelle logarithmique :

2.7.2. Diagramme de Bode asymptotique

Soit une fonction de transfert : $H(p) = \frac{\prod_l (p - z_l)}{\prod_k (p - p_k)}$

Son diagramme de Bode asymptotique s'obtient à partir des règles suivantes :

1. Calcul des $n_z + n_p$ pulsations de cassures : $|z_1|, \dots, |z_{n_z}|, |p_1|, \dots, |p_{n_p}|$

2. Tri de ces pulsations de cassures ω_i dans l'ordre croissant ($\omega_{i-1} \leq \omega_i$), avec $i = 1, \dots, n_z + n_p$

3. Calcul de $H(j0)$:

- Cas 1 : $H(p)$ a un ou plusieurs pôles en 0, chacun a à partir de 0 rad/s la contribution suivante :

Valeur de $H(j0)$	Phase	Module
$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega) = +\infty$	-90°	-20 dB/dec
$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega) = -\infty$	$+90^\circ$	-20 dB/dec

- Cas 2 : $H(p)$ a un ou plusieurs zéros en 0, chacun a à partir de 0 rad/s la contribution suivante :

Valeur de $H(j0)$	Phase	Module
$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega) = 0^+$	$+90^\circ$	$+20 \text{ dB/dec}$
$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega) = 0^-$	-90°	$+20 \text{ dB/dec}$

- Cas 3 : $H(p)$ n'a ni zéro, ni pôle en 0 :

Valeur de $H(j0)$	Phase	Module
$H(0) > 0$	0°	$20 \log_{10} H(j0) $
$H(0) < 0$	-180°	$20 \log_{10} H(j0) $

4. Pour chaque pulsation (non nulle) de cassure ω_i (dans l'ordre croissant), on a :

Nature du pôle ou du zéro associé à ω_i $\omega_i = p_i $ ou $\omega_i = z_i $	Contribution au-delà de ω_i	
	Phase	Module
$p_i \in \mathbb{C}^-$ (Pôle stable)	-90°	-20 dB/déc
$p_i \in \mathbb{C}^+$ (Pôle instable)	$+90^\circ$	-20 dB/déc
$z_i \in \mathbb{C}^-$ (Zéro à minimum de phase)	$+90^\circ$	$+20$ dB/déc
$z_i \in \mathbb{C}^+$ (Zéro à non minimum de phase)	-90°	$+20$ dB/déc

Chapitre 3

Signaux numériques

Le traitement de signaux à l'aide de calculateurs numériques offre des nombreux avantages en termes de flexibilité, robustesse, capacité de traitement, etc. Traiter des signaux à l'aide de ce type de calculateurs nécessite au préalable de convertir les signaux analogiques en signaux numériques. Cette conversion s'effectue en deux étapes (cf. Fig. 3.1). Elle consiste tout d'abord à discrétiser la dimension temporelle, en prélevant des échantillons du signal à intervalles réguliers : c'est l'opération d'**échantillonnage**. La deuxième étape consiste à discrétiser les amplitudes en approchant les valeurs prises par un signal continu par des valeurs issues d'un ensemble discret de taille finie et fixé au préalable : c'est l'opération de **quantification**. Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord les grands principes de conversion analogique-numérique (et inversement) et posons ensuite les principales définitions et notations associées aux signaux issus de la conversion.

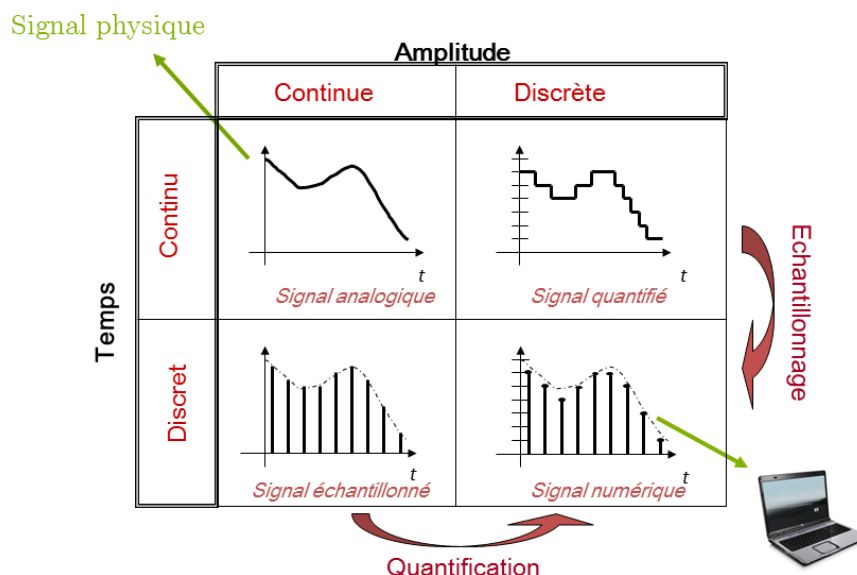


FIGURE 3.1 – Étapes de conversion analogique-numérique.

3.1. Théorème d'échantillonnage

Définition 3.1 (Echantillonnage) Un signal échantillonné est un signal discret obtenu à partir d'un signal continu dont on prélève les valeurs à intervalles réguliers T_e . Cet intervalle T_e est appelé **période d'échantillonnage**.

La modélisation mathématique de l'opération d'échantillonnage utilise le peigne de Dirac noté $\mathbb{I}_{T_e} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{kT_e}$ et défini par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \mathbb{I}_{T_e}, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(kT_e). \quad (3.1)$$

Plus précisément, soit s un signal analogique et s_e sa version échantillonnée à la période T_e , alors ces signaux vérifient les relations suivantes :

$$s_e = s(t) \mathbb{I}_{T_e} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \delta_{kT_e}. \quad (3.2)$$

Remarque 3.1 La fréquence $\nu_e = \frac{1}{T_e}$ est appelée **fréquence d'échantillonnage** et correspond au nombre d'échantillons prélevés par seconde.

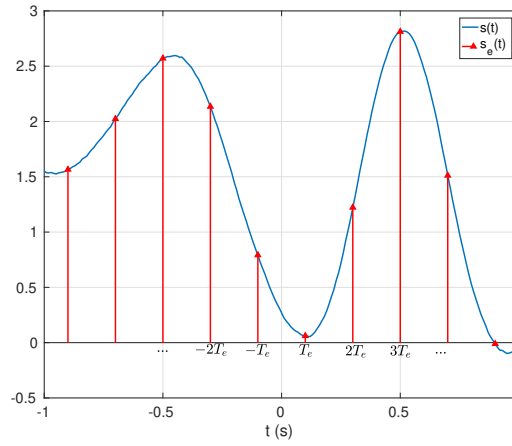


FIGURE 3.2 – Exemple d'un signal échantillonné.

De façon intuitive, on peut penser que l'échantillonnage induit une perte d'information sur le signal à temps continu d'origine puisque l'on ne prélève pas tout le continuum de valeurs prises par ce signal. Dans les faits, nous allons voir que sous certaines conditions, l'échantillonnage est une opération sans perte. Pour déterminer ces conditions, il convient d'étudier le signal échantillonné dans le domaine fréquentiel. Rappelons tout d'abord que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est encore un peigne de Dirac tel que $\widehat{\mathbb{I}_{T_e}} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{\frac{k}{T_e}} = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{k\nu_e}$. Il s'en suit que la transformée de Fourier du signal échantillonné vérifie ¹ :

$$\hat{s}_e(\nu) = \hat{s}(\nu) * \widehat{\mathbb{I}_{T_e}} \quad (3.3)$$

$$= \nu_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\nu - n\nu_e). \quad (3.4)$$

En d'autres termes, l'échantillonnage dans le domaine temporel se traduit par une périodisation du spectre dans le domaine fréquentiel telle que $\hat{s}_e(\nu + \nu_e) = \hat{s}_e(\nu)$. L'exemple de la figure 3.3 illustre la différence entre la transformée de Fourier d'un signal à temps continu et celles de ce même signal échantillonné suivant deux fréquences d'échantillonnage différentes.

1. En décomposant le peigne de Dirac sous la forme d'une série de Fourier, la transformée de Fourier du signal échantillonné vérifie également $\hat{s}_e(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \exp(-2i\pi k\nu T_e)$.

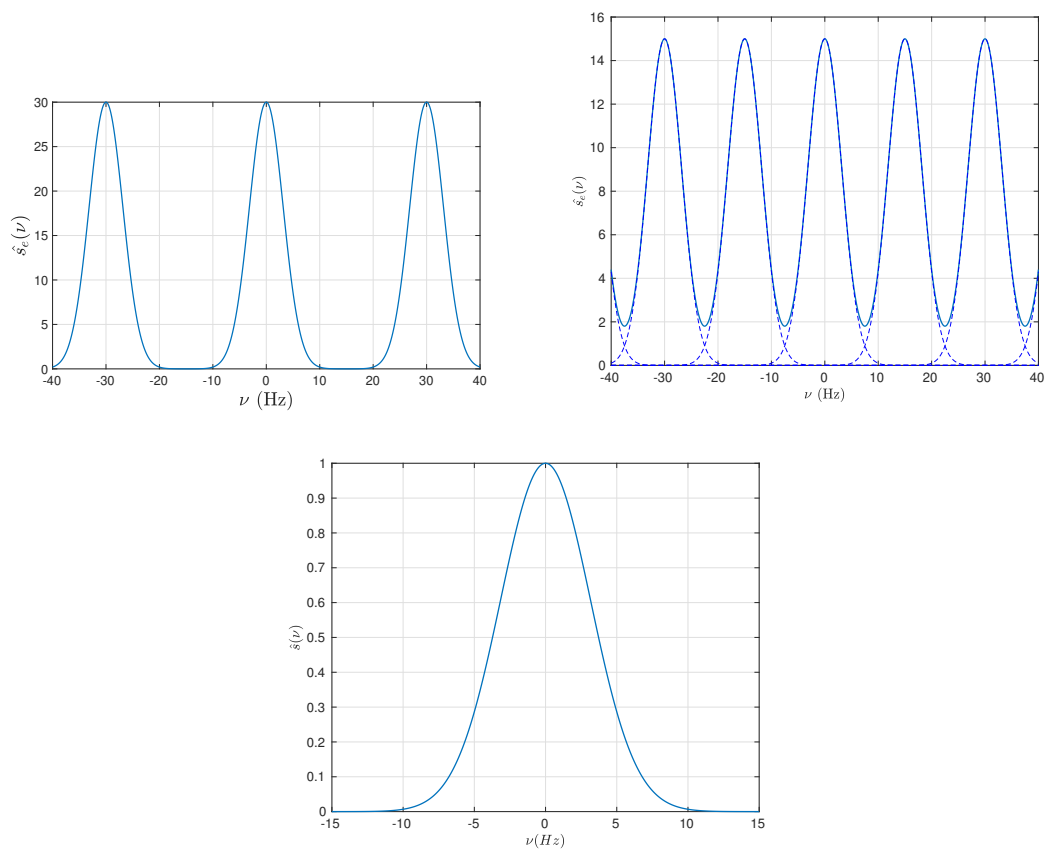


FIGURE 3.3 – Haut : spectre du signal échantillonné, gauche : $\nu_e = 30$ Hz, droite : $\nu_e = 15$ Hz. Bas : spectre du signal à temps continu.

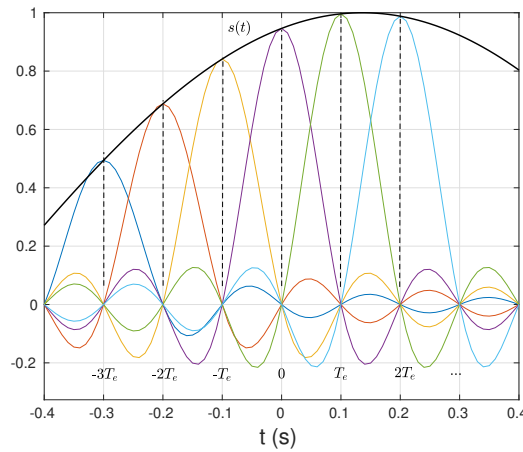


FIGURE 3.4 – Reconstruction de $s(t)$ à partir de $s_e(t)$.

Lorsque la fréquence d'échantillonnage est suffisamment grande, le spectre du signal échantillonné correspond à une périodisation du spectre du signal continu tandis que dans le cas contraire le spectre est différent. Dans ce dernier cas, l'échantillonnage provoque une déformation du spectre appelée **repliement** ou aliasing. On remarque alors que si \hat{s} a un support limité à $[-\nu_M, +\nu_M[$, avec $\nu_M \leq \nu_e/2$, l'échantillonnage n'entraîne pas de déformation du spectre continu, mais seulement une périodisation. Il est donc possible de reconstruire parfaitement le signal à temps continu à partir du signal échantillonné, en appliquant un filtre passe-bas sur ce dernier. Autrement dit, dans ce cas précis, l'opération d'échantillonnage n'induit aucune perte d'information. Ceci est exprimé formellement au travers du théorème de Shannon-Nyquist, appelé aussi théorème d'échantillonnage.

Théorème 3.1 (Théorème d'échantillonnage) *Un signal à temps continu $s(t)$ dont le spectre est à support borné $[-\nu_M, +\nu_M[$ est entièrement connu par une suite infinie d'échantillons $s(kT_e)$, $k \in \mathbb{Z}$, si la période d'échantillonnage T_e vérifie $T_e \leq \frac{1}{2\nu_M}$, ou de façon équivalente si la fréquence d'échantillonnage vérifie $\nu_e \geq 2\nu_M$.*

Si la condition de Shannon-Nyquist est vérifiée, \hat{s} peut être reconstruit à partir de \hat{s}_e en multipliant celui-ci par une porte fréquentielle $\Pi(\frac{\nu}{W})$ de largeur W vérifiant $2\nu_M \leq W < 2(\nu_e - \nu_M)$ et en appliquant un gain de valeur T_e . La transformée de Fourier inverse nous fournira alors s . En regardant de plus près :

$$\hat{s}(\nu) = T_e \hat{s}_e(\nu) \Pi\left(\frac{\nu}{W}\right). \quad (3.5)$$

La transformée de Fourier inverse fournit alors le signal original :

$$s(t) = WT_e s_e(t) * \frac{\sin \pi W t}{\pi W t} \quad (3.6)$$

qui se réécrit encore sous la forme

$$s(t) = WT_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \frac{\sin(\pi W(t - kT_e))}{\pi W(t - kT_e)}. \quad (3.7)$$

La dernière équation modélise l'opération dite d'**interpolation** qui permet alors la reconstruction parfaite du signal observé à partir des mesures. Cette opération est illustrée à la figure 3.4. Pour les paramètres limites $W = 2\nu_M = \nu_e$, l'équation d'interpolation devient :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{k}{2\nu_M}\right) \frac{\sin(2\pi\nu_M t - k\pi)}{2\pi\nu_M t - k\pi}. \quad (3.8)$$

Cette formule est intéressante à double titre.

- Elle se met sous la forme : $s(t) = \sum_k c_k \phi_k(t)$. Il s'agit donc de la décomposition du signal continu $s(t)$ sur une base (de dimension infinie) $\phi_k(t)$, les c_k étant les coordonnées du signal dans l'espace engendré par cette base.
- Les coefficients de cette décomposition sont, dans ce cas, les échantillons du signal $s(t)$.

3.2. Limites pratiques du théorème d'échantillonnage

Le théorème d'échantillonnage repose sur l'hypothèse fondamentale de spectre à support borné. Dans la pratique, cette hypothèse n'est pas naturellement vérifiée puisque l'on traite des signaux à durée finie donc à bande infinie. Dans le cas où le support du spectre du signal à échantillonner n'est pas borné ou n'est pas connu, ou encore lorsque la fréquence d'échantillonnage est imposée, un préfiltrage du signal continu, avant la phase d'échantillonnage est alors indispensable pour éviter le phénomène de repliement. Il s'agit du **filtrage anti-repliement** ou antialiasing qui n'est autre qu'un filtrage passe-bas.

Il faut noter également que l'échantillonnage par un peigne de Dirac n'est pas réalisable pratiquement. On utilise alors des techniques qui s'en approchent le plus possible et qui permettent de réaliser des circuits de complexité limitée. L'échantillonneur moyennneur est l'une de ces techniques. Il s'agit là d'effectuer un échantillonnage à l'aide d'une fenêtre analogique moyennant ou intégrant le signal pendant un court instant τ . Il existe d'autres approches telles que l'échantillonneur bloqueur par exemple.

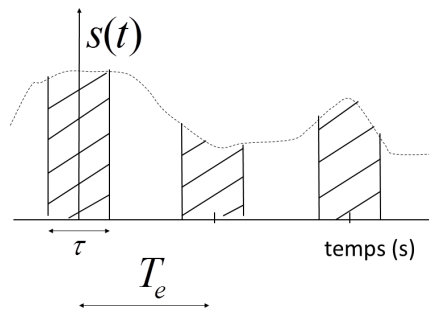


FIGURE 3.5 – Echantillonneur moyennneur.

Enfin, concernant la reconstruction du signal à temps continu à partir d'un signal échantillonné, il faut noter que la porte fréquentielle n'est pas physiquement réalisable. Il existe différentes fenêtres (si la restauration s'effectue dans le domaine fréquentiel) et différents filtres d'interpolation dont l'étude sort du périmètre de ce cours.

3.3. Quantification

Définition 3.2 (Quantification) La quantification est l'approximation de chaque valeur $s(t)$ par un multiple entier d'une quantité élémentaire q , appelée **échelon ou pas de quantification**.

Chaque valeur quantifiée est codée par un mot binaire (une suite de « 0 » et de « 1 »). La figure 3.6 montre un exemple de quantification sur des mots de 2 bits. Lorsque q est constant quelle que soit l'amplitude du signal, la quantification est appelée quantification uniforme.

Exemple 3.1 Le quantificateur de la figure 3.7 applique la transformation suivante sur le signal d'origine,

$$s_q(t) = q \left\lfloor \frac{s(t)}{q} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ dénote l'arrondi à l'entier inférieur. Le pas de quantification est directement fonction de la taille du mot binaire utilisé pour la numérisation. Par exemple, si on utilise des mots de N bits pour quantifier une dynamique de V volts, la valeur du pas sera $q = V/2^N$ volts.

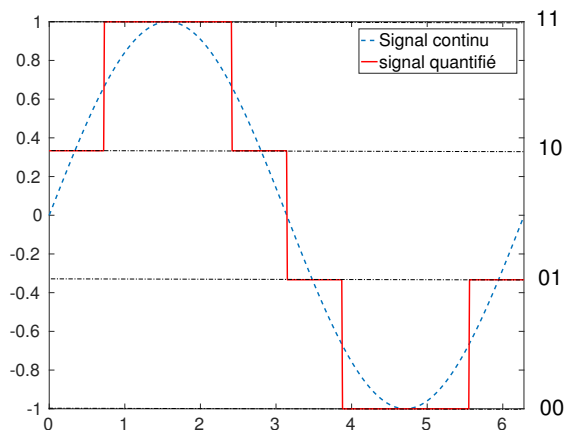


FIGURE 3.6 – Exemple de quantification sur 2 bits.

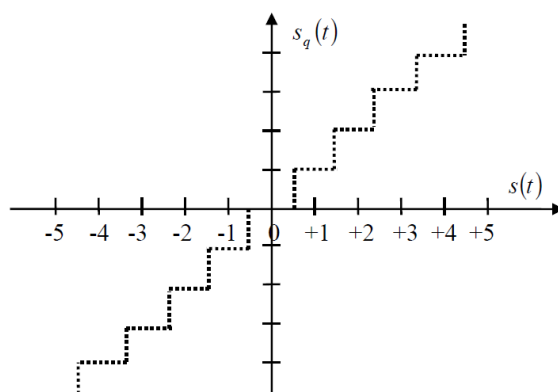


FIGURE 3.7 – Exemple de quantificateur uniforme.

Contrairement à l'opération d'échantillonnage, la quantification déforme le signal d'origine et n'est pas parfaitement inversible. En effet, elle ajoute une **erreur ou un bruit de quantification** noté $b_q(t) = s(t) - s_q(t)$. Celle-ci dépend de la valeur du pas de quantification et donc du nombre de bits de quantification. La figure 3.8 présente un exemple de quantification.

Définition 3.3 (Rapport signal-sur-bruit de quantification) En notant P_s la puissance du signal à quantifier et P_q la puissance du bruit de quantification, on définit le rapport signal-sur-bruit de quantification comme

$$RSBQ = 10 \log \left(\frac{P_s}{P_q} \right). \quad (3.10)$$

Exemple 3.2 Dans le cas où la quantification est faite avec une bonne précision, on peut considérer que le bruit de quantification suit un modèle de bruit blanc additif uniformément distribué dans l'intervalle $[-q/2, q/2[$. La puissance de ce bruit est donc $P_q = q^2/12$. Ainsi, pour le scénario défini à l'exemple 3.1,

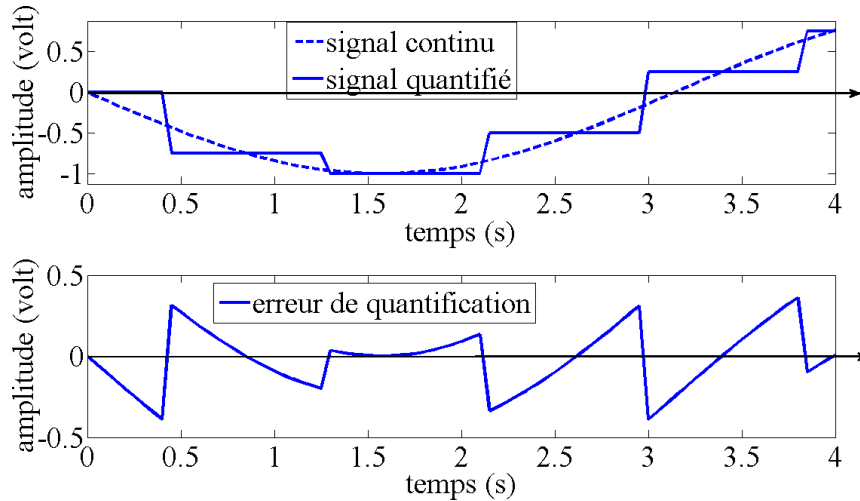


FIGURE 3.8 – Exemple d'erreur ou bruit de quantification.

le rapport signal-sur-bruit de quantification vérifie

$$\begin{aligned}
 RSBQ &= 10 \log \left(12 \frac{P_s}{q^2} \right) \\
 &\approx -20 \log(q) + 10 \log(P_s) + 10.8 \\
 &= 20 \log(2^N) + 10.8 + 10 \log \left(\frac{P_s}{V^2} \right) \\
 &\approx 6N + 10.8 + 10 \log \left(\frac{P_s}{V^2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

On remarque alors qu'à chaque fois qu'un bit supplémentaire est ajouté pour quantifier le signal, le rapport signal-sur-bruit de quantification augmente d'environ 6 dB.

Remarque 3.2 Il existe d'autres méthodes de quantification qui font varier le pas de quantification q . C'est le cas par exemple des quantificateurs de signaux de parole qui utilisent des lois de type logarithmique comme la loi μ ou la loi A.

3.4. De l'acquisition à la reconstruction

Le synoptique de la figure 3.9 illustre une chaîne de traitement à partir d'un signal analogique jusqu'à sa restitution après traitement numérique.

Définition 3.4 (Débit du CAN) En sortie du circuit de conversion analogique-numérique, on définit le *débit binaire* qui est fonction de la période d'échantillonnage T_e et de la taille N des mots binaires :

$$D_{CAN} = \frac{N}{T_e} \text{ bit/s.} \tag{3.12}$$

Exemple 3.3 La numérisation d'un signal de parole de qualité téléphonique se fait sur des mots de 8 bits avec une fréquence d'échantillonnage de 8 kHz. Le débit du convertisseur est donc $D_{CAN} = 64 \text{ kbit/s}$.

Remarque 3.3 Le spectre du signal en sortie du circuit de conversion numérique-analogique est toujours périodique d'où l'utilisation du filtre de lissage (passe-bas) pour effectuer l'interpolation décrite à la fin de la section 3.1.

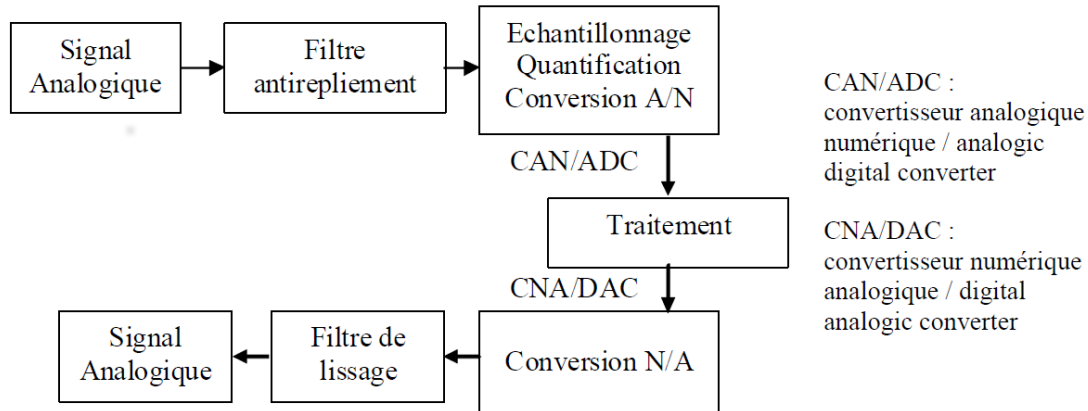


FIGURE 3.9 – Chaîne complète de traitement numérique.

3.5. Signaux discrets

Une fois la conversion analogique-numérique réalisée, les processeurs de calcul manipulent des signaux numériques à temps discret et à amplitudes discrètes. Dans de nombreuses applications, le nombre de bits de quantification est suffisamment important pour que le bruit de quantification soit négligeable et n'apparaisse pas explicitement dans les modèles formulés ou les développements mathématiques. Dans la suite de ce cours, nous nous placerons dans ce cadre et nous limiterons à l'étude des signaux à temps discret d'amplitude quelconque.

Définition 3.5 (Signal discret) *Un signal discret est une séquence ordonnée de valeurs (réelles ou complexes) correspondant à un entier k qui représente l'histoire en fonction du temps d'un signal. Il se représente sous la forme d'une suite $\{s(k)\}_k \in \mathbb{Z}$.*

On notera qu'un signal discret est représenté en fonction de l'indice k et non explicitement en fonction du temps. Cependant, un signal discret correspond généralement à un signal échantillonné, auquel cas il existe la relation suivante :

$$s(k) = \sum_n s_a(nT_e)d(k-n), \quad (3.13)$$

où s_a dénote un signal analogique, T_e la période d'échantillonnage et où $d(k)$ désigne l'**impulsion unité** définie comme

$$d(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

De façon analogue aux signaux ou distributions définis au chapitre 1, il existe des signaux discrets élémentaires très utiles pour la modélisation ou l'analyse.

- **Echelon unité** : noté $u(k)$, il est défini par

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Il sert à décrire les signaux causaux qui sont nuls pour $k < 0$. Il vérifie les relations suivantes : $u(k) = \sum_{n=-\infty}^0 d(k+n)$ et $u(k) - u(k-1) = d(k)$ (dérivation numérique).

- **Signal rectangulaire ou porte** : noté $\text{rect}_K(k)$, il est défini par

$$\text{rect}_K(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq K-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.16)$$

Il vérifie $\text{rect}_K(k) = u(k) - u(k-K)$.

DEFINITION	CONTINU	DISCRET
Energie	$E = \int_{\mathbf{R}} s(t) ^2 dt$	$E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k) ^2$
Puissance moyenne totale	$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) ^2 dt$	$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} s(k) ^2$
Intercorrélation (signaux à énergie finie)	$R_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{\mathbf{R}} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt$	$R_{s_1 s_2}(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(k) s_2^*(k - u)$
Intercorrélation (signaux à puissance moyenne finie)	$R_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt$	$R_{s_1 s_2}(u) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} s_1(k) s_2^*(k - u)$
Intercorrélation (signaux T ou 2N+1 périodiques)	$R_{s_1 s_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt$	$R_{s_1 s_2}(u) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} s_1(k) s_2^*(k - u)$
Convolution	$h_{s_1 s_2}(t) = \int_{\mathbf{R}} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau$	$h_{s_1 s_2}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_1(n) s_2(k - n)$

TABLE 3.1 – Définition de la puissance moyenne, l'énergie, la corrélation et la convolution pour les signaux discrets.

On peut également définir, la puissance, l'énergie de signaux discrets ou calculer l'intercorrélation et la convolution entre deux signaux comme synthétisé dans le tableau 3.1.

Remarque 3.4 Dans le cas où le signal discret $s(k)$ est issu de l'échantillonnage d'un signal à temps continu $s_a(t)$, les sommes exprimées dans la colonne de droite du tableau 3.1 peuvent être interprétées comme des approximations des intégrales de la colonne centrale en utilisant la méthode des rectangles. Par exemple, si l'intervalle de temps $[-T/2, T/2]$ est divisé en $2N + 1$ intervalles élémentaires de largeur $T_e = T/(2N + 1)$, nous pouvons approcher la puissance moyenne à l'aide de la relation suivante

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_a(t)|^2 dt \approx \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^{k=N} |s(k)|^2 T_e \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} |s(k)|^2. \quad (3.18)$$

Dès lors, $P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_a(t)|^2 dt \approx \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} |s(k)|^2$. Il est important de noter que cette approximation est valable que si $s_a(t)$ ne varie pas « beaucoup » pendant l'intervalle de temps T_e . On retrouve ici une interprétation du théorème d'échantillonnage puisque cela revient à dire que la fréquence d'échantillonnage doit être bien supérieure à la fréquence maximale contenue dans le signal $s_a(t)$.

Chapitre 4

Transformées de Fourier de signaux discrets

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes formulations de la transformée de Fourier utiles à l'analyse de signaux et systèmes discrets. Nous traitons tout d'abord de la **transformée de Fourier** et abordons ensuite la **transformée de Fourier discrète** qui est une version adaptée de la transformée de Fourier pour les calculateurs numériques. Pour le lecteur intéressé, une introduction à la **transformée en Z**, qui joue un rôle analogue à celui de la transformée de Laplace pour les signaux et systèmes continus, est proposée dans les chapitres d'approfondissement en fin de poly.

4.1. Transformée de Fourier

Définition 4.1 (Transformée de Fourier d'un signal discret) Si $s(k)$ est absolument sommable, i.e., $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |s(k)| < +\infty$, alors sa transformée de Fourier est définie par

$$\widehat{s}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) e^{-i2\pi k \nu}, \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

et sa transformée de Fourier inverse par

$$s(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{s}(\nu) e^{i2\pi k \nu} d\nu. \quad (4.2)$$

Remarque 4.1 L'expression de la transformée de Fourier d'un signal discret peut se retrouver à partir de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné. En effet, soit $s_e(t)$ un signal échantillonné de la forme $s_e(t) = s_a(t) \text{III}_{T_e}$. Nous rappelons que $\mathcal{F}[\delta_{kT_e}](\nu) = e^{-i2\pi k \frac{\nu}{\nu_e}}$. La transformée de Fourier de s_e vérifie donc

$$\widehat{s}_e(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_a(kT_e) e^{-i2\pi k \frac{\nu}{\nu_e}}. \quad (4.3)$$

On remarque qu'en considérant un signal discret $s(k)$ issu de l'échantillonnage d'un signal analogique ($s(k) = \sum_n s_a(nT_e) \delta(k - n)$), il y a une égalité entre (4.3) et (C.4.3.1) si $\nu_e = 1$. Pour les signaux discrets, on parle alors de **fréquence réduite ou fréquence normalisée**.

Remarque 4.2 La transformée de Fourier de signaux discrets est très souvent dénommée **transformée de Fourier à temps discret (TFTD)**.

Remarque 4.3 Au même titre que la transformée de Fourier d'un signal échantillonné est périodique de période v_e , la transformée de Fourier d'un signal discret est périodique de période 1. Dans la pratique, on étudie donc cette transformée uniquement sur un support fréquentiel de longueur 1. En fonction des conventions, on choisit généralement l'intervalle $[-1/2, 1/2[$ ou $[0, 1[$.

Remarque 4.4 La transformée de Fourier des signaux discrets vérifie les mêmes propriétés que celle des signaux continus comme la linéarité, la relation convolution-multiplication ou la conservation d'énergie.

Exemple 4.1 Calculons la transformée de Fourier de la séquence $s(k) = 0.5^k u(k)$. Cette séquence étant absolument sommable sa transformée de Fourier existe et vérifie

$$\begin{aligned}\widehat{s}(\nu) &= \sum_{k=0}^{+\infty} 0.5^k e^{-i2\pi k\nu} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(0.5e^{-i2\pi\nu}\right)^k \\ &= \frac{e^{i2\pi\nu}}{e^{i2\pi\nu} - 0.5}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

4.2. Densités spectrales

Définition 4.2 (Densité spectrale d'énergie) La densité spectrale d'énergie d'un signal discret à énergie finie est définie par :

$$S_s(\nu) = |\widehat{s}(\nu)|^2\tag{4.5}$$

$$= \sum_{u \in \mathbb{Z}} R_s(u) e^{-i2\pi u\nu}, \forall \nu \in \mathbb{R}\tag{4.6}$$

où $R_s(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) s^*(k - u)$ est la fonction d'autocorrélation.

Définition 4.3 (Densité spectrale de puissance) La densité spectrale de puissance d'un signal discret à puissance moyenne finie est définie par :

$$S_s(\nu) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{|\widehat{s}(\nu, N)|^2}{N}\tag{4.7}$$

$$= \sum_{u \in \mathbb{Z}} R_s(u) e^{-i2\pi u\nu}, \forall \nu \in \mathbb{R}\tag{4.8}$$

où $\widehat{s}(\nu, N) = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} s(k) e^{-i2\pi k\nu}$ et $R_s(u) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N s(k) s^*(k - u)$ est la fonction d'autocorrélation.

Remarque 4.5 La transformée $\frac{|\widehat{s}(\nu, N)|^2}{N}$ est appelée périodogramme du signal $s(k)$. Dans la pratique, ce périodogramme est utilisé pour estimer la densité spectrale de puissance en considérant une valeur finie pour N .

4.3. Transformée de Fourier discrète

La transformée de Fourier de signaux discrets fournit une représentation fréquentielle pour des séquences absolument sommables. Du point de vue du calcul numérique, cette transformée présentent deux caractéristiques problématiques. Premièrement, elle est définie pour des séquences de longueur possiblement infinie. Deuxièmement, elle est fonction d'une variable fréquentielle ν continue. Il faut donc évaluer des sommes infinies pour un nombre infini de fréquences indénombrables. Pour utiliser un calculateur numérique sur des signaux réels, nous n'avons pas d'autres alternatives que de tronquer les séquences et évaluer les expressions des transformées en un nombre fini de points. En d'autres termes, la transformée de Fourier de signaux discrets n'est pas une transformée calculable « numériquement ». Nous allons voir comment approcher cette transformée avec des méthodes implémentables sur des calculateurs numériques.

4.3.1. Discrétisation de la variable fréquentielle

La manière la plus naturelle de contourner le problème des variables continues ν est d'évaluer ces transformées sur un nombre fini de points. L'échantillonnage de la transformée de Fourier sur N points consiste alors à calculer

$$\widehat{s}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}, \quad n \in [0, \dots, N-1]. \quad (4.9)$$

Pour évaluer l'impact de cet échantillonnage, on peut réécrire l'équation (4.9) comme suit

$$\begin{aligned} \widehat{s}(n) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \sum_{k=\ell N}^{\ell N+N-1} s(k) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{N-1} s(k + \ell N) e^{-2i\pi (k + \ell N) \frac{n}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} s(k + \ell N) \right) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Soit encore :

$$\widehat{s}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)_N e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} \quad \text{où} \quad s(k)_N = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} s(k + \ell N). \quad (4.11)$$

On constate que le signal $s(k)_N$ est périodique et que par conséquent il peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$s(k)_N = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{2i\pi n \frac{k}{N}}, \quad (4.12)$$

où

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s(k)_N e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \widehat{s}(n). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Discrétiser la variable fréquentielle ν sur N points revient donc implicitement à calculer les coefficients de Fourier d'un signal périodique construit à partir de la répétition de N échantillons du signal $s(k)$. En d'autres termes, au même titre qu'échantillonner l'axe temporel revient à « périodiser » le spectre d'un signal à temps continu (cf. chapitre 3), l'échantillonnage de la variable fréquentielle a pour conséquence une « périodisation » du signal à temps discret. Par conséquent, si on cherche à inverser la transformée (4.9), on observera potentiellement le problème dual de celui observé lors de la discrétisation de la variable temporelle : les échantillons temporels se recouvreront entre deux séquences consécutives, on sera en présence de **repliement temporel**. Dans ce cas, il sera donc impossible de retrouver $s(k)$ à partir de $\widehat{s}(n)$.

Il existe deux cas particuliers où il n'y a pas de repliement temporel : (i) le signal $s(k)$ est périodique, (ii) il est de longueur finie. Dans le cas des signaux périodiques, l'inversion de la transformée (4.9) s'obtient à partir des relations (4.12) et (4.13), à savoir

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{s}(n) e^{2i\pi n \frac{k}{N}} \quad (4.14)$$

Comme nous allons le voir dans la section suivante, les signaux de longueur finie se traitent de la même manière que les signaux périodiques.

4.3.2. Transformée de Fourier discrète d'un signal de longueur finie

Définition 4.4 (Transformée de Fourier discrète) Soit $s(k)$ une séquence de longueur finie telle que $k \in [0, N - 1]$. La transformée de Fourier Discrète (TFD) est une séquence finie de longueur N définie comme

$$\widehat{s}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}, \quad n \in [0, \dots, N - 1]. \quad (4.15)$$

La transformée de Fourier discrète inverse s'obtient de la façon suivante

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{s}(n) e^{2i\pi k \frac{n}{N}}, \quad k \in [0, \dots, N - 1]. \quad (4.16)$$

Dans le cas des signaux de longueur finie, il n'y a donc pas de repliement temporel puisque la transformée est inversible. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{s}(n) e^{2i\pi k \frac{n}{N}} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} s(\ell) e^{-2i\pi \ell \frac{n}{N}} \right) e^{2i\pi k \frac{n}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} s(\ell) \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi (k-\ell) \frac{n}{N}}}_{=N \cdot d(k-\ell)} \\ &= s(k). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Remarque 4.6 Du point de vue de la terminologie employée, il faut bien différencier la transformée de Fourier à temps discret (TFTD), définie à l'équation (C.4.3.1), de la transformée de Fourier discrète (TFD), définie à l'équation (C.4.3.2). Pour la première transformée, la variable temporelle est discrète mais la variable fréquentielle est continue alors que pour la seconde transformée les deux variables sont discrètes.

Remarque 4.7 La TFD peut s'interpréter physiquement comme l'approximation de l'intégrale d'une transformée de Fourier d'un signal analogique par la méthode des rectangles. En effet, considérons un signal physique $s_a(t)$ issu d'un capteur (donc un signal analogique) observé sur une durée T . Sa transformée de Fourier vérifie $\widehat{s}_a(\nu) = \int_0^T s_a(t) e^{-2i\pi \nu t} dt$. Si on divise l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles élémentaires de durée $T_e = 1/\nu_e$. On peut alors approcher l'intégrale avec la méthode des rectangles

$$\widehat{s}_a(\nu) \approx T_e \sum_{k=0}^{N-1} s_a(kT_e) e^{-2i\pi \nu k T_e}. \quad (4.18)$$

Si on effectue une mesure à la fréquence $\nu = n\nu_e/N$, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{s}_a\left(n \frac{\nu_e}{N}\right) &\approx T_e \sum_{k=0}^{N-1} s_a(kT_e) e^{-2i\pi k \frac{n}{N} T_e \nu_e} \\ &= T_e \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

où $s(k) = \sum_n s_a(nT_e) d(k - n)$. On retrouve bien l'expression de la TFD.

Exemple 4.2 Calculons la TFD d'un signal rectangulaire (ou porte) $s(k) = \text{rect}_N(k)$, $N > 0$.

$$\begin{aligned}
 \widehat{s}(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-2i\pi \frac{n}{N}} \right)^k \\
 &= \begin{cases} N, & \text{si } n = 0 \\ \frac{1 - e^{-2i\pi \frac{n}{N}}}{1 - e^{-2i\pi \frac{1}{N}}}, & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= Nd(n).
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

On notera que la TFD d'une porte discrète est très différente de la transformée de Fourier d'une porte à temps continu qui s'exprime à l'aide d'un sinus cardinal. On verra dans l'exemple 4.3 comment s'en rapprocher un peu à l'aide de la technique dite de « zero-padding ». Cependant, on ne pourra jamais avoir une égalité stricte puisque la porte à temps continu n'a pas un spectre à support borné et ne peut donc pas être échantillonnée sans perte avec le critère de Shannon-Nyquist.

4.3.2.1. Propriétés de la TFD

La TFD possède des propriétés très similaires à celles de la TFTD (ou de la transformée en Z) à l'exception de la propriété associée à la convolution.

Linéarité : TFD $[as_1(k) + bs_2(k)] = a\widehat{s}_1(n) + b\widehat{s}_2(n)$.

Décalage d'échantillons : TFD $[s(k - k_0)] = e^{2i\pi k_0 \frac{n}{N}} \widehat{s}(n)$.

Parseval : $\sum_{k=0}^{N-1} |s(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\widehat{s}(n)|^2$.

Convolution cyclique : La convolution cyclique, notée « $*_N$ » consiste à effectuer une convolution modulo N ou, de façon équivalente, à effectuer une convolution linéaire en « périodisant » un des deux signaux de la convolution :

$$(s_1 *_N s_2)(k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} s_1(\ell) s_2(k - \ell)_N, \tag{4.21}$$

où $s_2(k)_N = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} s_2(k - \ell N)$. Ainsi, on remarque que

$$\begin{aligned}
 \text{TFD}^{-1} [\widehat{s}_1(n) \widehat{s}_2(n)] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{s}_1(n) \widehat{s}_2(n) e^{2i\pi k \frac{n}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} s_1(\ell) e^{-2i\pi \ell \frac{n}{N}} \right) \widehat{s}_2(n) e^{2i\pi k \frac{n}{N}} \\
 &= \sum_{\ell=0}^{N-1} s_1(\ell) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{s}_2(n) e^{2i\pi (k-\ell) \frac{n}{N}} \right) \\
 &= \sum_{\ell=0}^{N-1} s_1(\ell) s_2(k - \ell)_N
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

ou, de façon équivalente : TFD $[(s_1 *_N s_2)(k)] = \widehat{s}_1(n) \widehat{s}_2(n)$.

4.3.3. Cas des signaux de longueur infinie

On ne peut pas définir exactement la TFD d'un signal de longueur infinie. La TFD n'est alors définie qu'approximativement en limitant la longueur du signal par un moyen ad-hoc. La troncature la plus évidente consiste à ne conserver que N points de $s(k)$. Autrement dit, cela revient à multiplier ce signal par une fenêtre rectangulaire. Cette solution présente le désavantage de créer des oscillations importantes dans le domaine fréquentiel. La solution idéale serait donc de multiplier le signal par une fenêtre dont la transformée de Fourier approche une impulsion de Dirac. Plusieurs fenêtres ont été élaborées, dont les oscillations s'atténuent généralement au détriment de la largeur du lobe principal. La figure 4.1 donne les caractéristiques des fenêtres de pondération les plus utilisées.

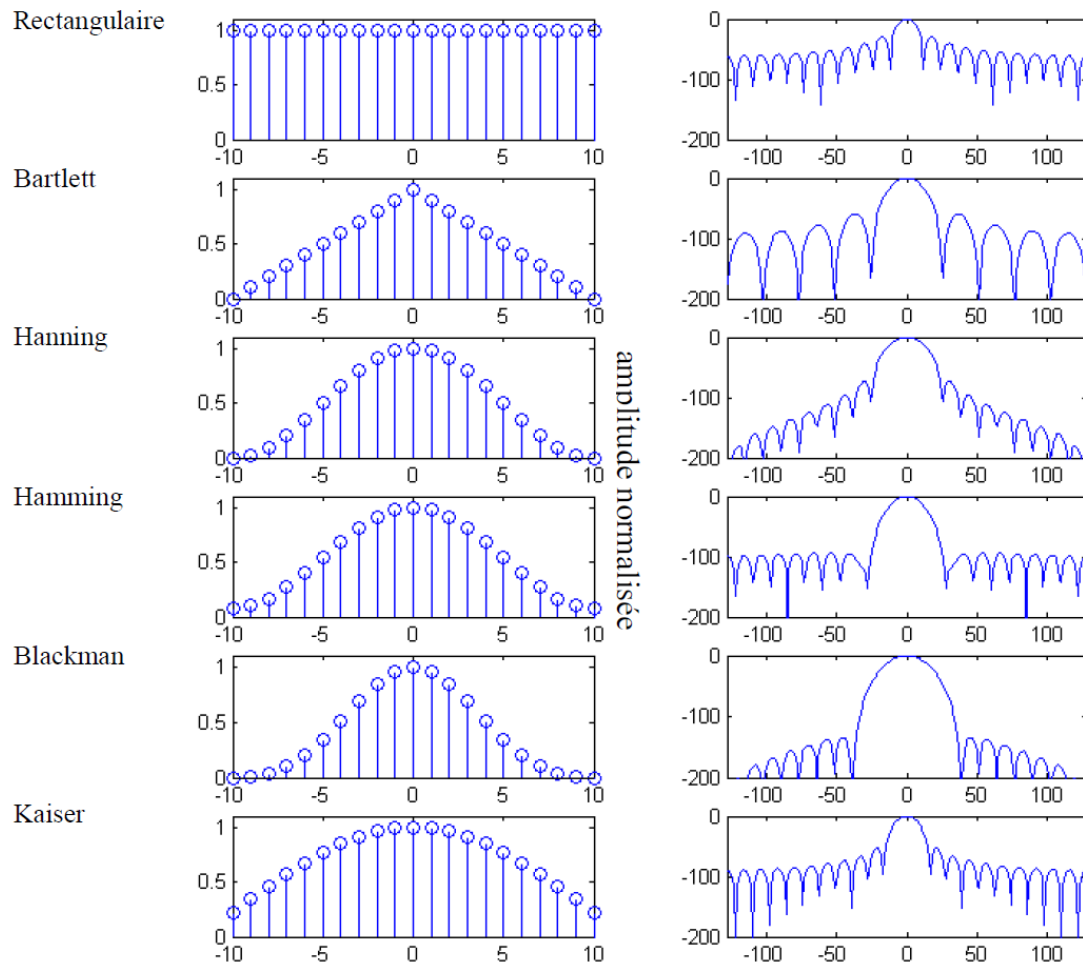


FIGURE 4.1 – Exemple de fenêtres de pondération. Gauche : représentation temporelle (discrète), droite : représentation fréquentielle.

4.3.4. Zero-padding

La TFD $\widehat{s}(n)$ se calcule sur un nombre N d'échantillons $s(k)$ du signal, et contient également N échantillons fréquentiels. Avec l'utilisation des algorithmes rapides de calcul, il peut être intéressant/nécessaire d'augmenter artificiellement le nombre d'échantillons sur lequel on les applique. Pour cela, on ajoute à la fin des N échantillons disponibles un certain nombre de zéros afin d'obtenir un nombre $M > N$ de valeurs traitées. C'est ce qu'on appelle le **zero-padding**. Plus on ajoute de zéros au signal d'entrée, plus on diminue le pas fréquentiel $1/(MT_e)$ de la TFD. La résolution de la TFD s'en trouve ainsi grandement améliorée. Cependant, **l'ajout de zéro n'apporte pas d'information supplémentaire sur le signal.**

Exemple 4.3 Réétudes la TFD du signal rectangulaire défini à l'exemple 4.2 en ajoutant $M - N$, $M > N$, zéros à la fin du signal. La TFD devient alors pour tout $n \in [0, M - 1]$

$$\begin{aligned}
 \widehat{s}(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2i\pi k \frac{n}{M}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-2i\pi \frac{n}{M}} \right)^k \\
 &= \frac{1 - e^{-2i\pi \frac{N}{M}}}{1 - e^{-2i\pi \frac{n}{M}}} \\
 &= e^{i\pi \frac{n-N}{M}} \frac{\sin(\pi \frac{N}{M})}{\sin(\pi \frac{n}{M})}.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Exemple 4.4 Soit $s(k) = \text{rect}_4(k)$ représenté sur la figure 4.2. Avant de calculer la TFD, nous avons ajouté

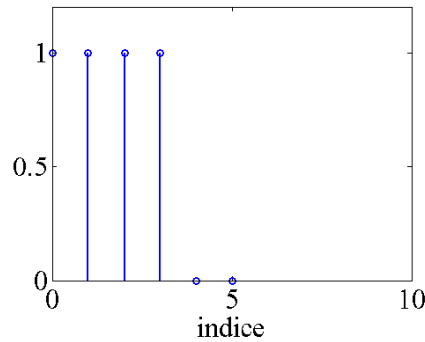


FIGURE 4.2 – Signal rectangulaire $s(k) = \text{rect}_4(k)$.

successivement 2, 10, 26, 58, 122, 250 zéros. La figure 4.3 montre les TFD obtenues pour les différentes valeurs de M ainsi obtenues.

Cet exemple montre qu'en ajoutant des zéros à la suite des échantillons, sa TFD admet une meilleure résolution (mais aucune nouvelle information n'apparaît). Cette opération est souvent utilisée pour atteindre un nombre M de points égal à une puissance de deux comme exigé par certains algorithmes rapides de calcul de TFD.

4.3.5. TFD rapide : FFT

La transformée de Fourier discrète nous permet d'envisager des calculs numériques dans le domaine des fréquences, ce qui permettrait de nombreuses applications d'analyse spectrale. Malheureusement, le calcul direct par la TFD peut demander un temps prohibitif pour des calculateurs. En 1965, Cooley et Tuckey, ont proposé l'algorithme **FFT** (Fast Fourier Transform) qui permet le calcul de la TFD de manière rapide. Cet algorithme a permis de diminuer le temps de calcul en utilisant une approche «diviser pour régner», où on divise récursivement les N points entre paires et impaires et on applique la TFD des tailles réduites. Pour une TFD de N points, le nombre d'opérations est passé de $o(N^2)$ à $o(N \log_2 N)$ ce qui offre un gain de temps considérable pour des valeurs de N élevées.

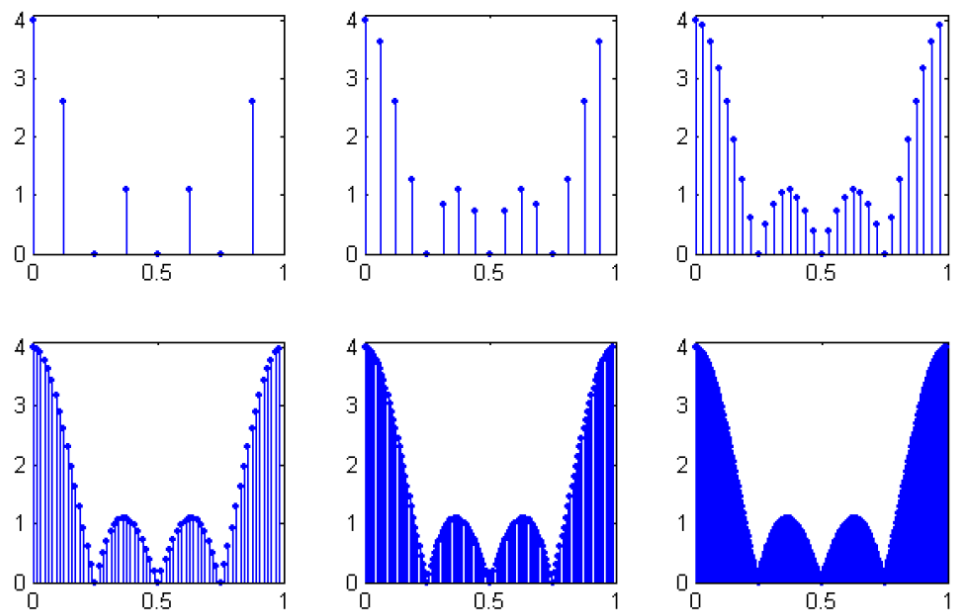


FIGURE 4.3 – TFD de $s(k) = \text{rect}_4(k)$ avec zero-padding.

Chapitre 5

Filtrage discret

5.1. Généralités sur les systèmes discrets

Définition 5.1 (Système discret) *Un système discret est un système, au sens défini au chapitre 1, qui transforme un signal d'entrée discret en un signal de sortie discret.*

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons à l'étude des systèmes discrets, linéaires, stationnaires (ou invariants dans le temps) et continus appelés **filtres discrets ou SLIT discrets**. Ces systèmes constituent une part très importante du traitement numérique du signal. Leurs fonctionnements sont régis par la convolution et l'analyse de leurs propriétés s'effectue à l'aide de la transformée de Fourier (ou plus généralement à l'aide de la transformée en \mathbb{Z} non abordée dans le cadre de ce cours).

5.1.1. Convolution et réponse impulsionnelle

Soit un système linéaire \mathcal{L} qui transforme un signal d'entrée $s(k)$ en un signal de sortie $r(k)$, la relation d'entrée-sortie du système se développe comme suit

$$\begin{aligned} r(k) &= \mathcal{L}[s(k)] \\ &= \mathcal{L}\left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n)d(k-n)\right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}[s(n)d(k-n)] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n)\mathcal{L}[d(k-n)]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Si l'on définit $h(k) = \mathcal{L}[d(k)]$ comme la **réponse impulsionnelle** du système (i.e., la réponse à une impulsion unité), alors la relation d'entrée-sortie vérifie

$$r(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n)h(k-n). \tag{5.2}$$

Il s'agit du produit de convolution linéaire discret, $r(k) = (s * h)(k)$.

Définition 5.2 (Système discret causal) *Un système discret est dit causal si sa réponse impulsionnelle $h(k)$ est un signal causal, autrement dit, si $h(k) = 0$ pour tout $k < 0$.*

Définition 5.3 (Système discret stable) *Un système discret est stable si pour tout entrée d'amplitude bornée il produit une sortie d'amplitude bornée.*

Théorème 5.1 (Conditions de stabilité) *Un système discret est stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle est absolument sommable, i.e., $\sum_k |h(k)| < +\infty$.*

Démonstration 5.1

- *Condition nécessaire :*

A l'entrée bornée $s(k) = \text{signe}(h(-k))$ correspond la sortie $r(k)$ vérifiant

$$r(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{signe}(h(-n))h(k-n).$$

En particulier $r(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(-n)s(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$. Si la condition $\sum_n |h(n)| < +\infty$ n'est pas vérifiée, alors, $r(0)$ n'est pas borné et le système n'est pas stable.

- *Condition suffisante :*

Si le signal d'entrée est d'amplitude bornée, $|s(k)| < M, \in \mathbb{R}_+$ alors

$$|r(k)| \leq \sum_n |h(n)||s(k-n)| \leq M \sum_n |h(n)|.$$

Si $\sum_n |h(n)| < +\infty$ alors $|r(k)| < +\infty \forall k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 5.1 Soit un système discret de réponse impulsionnelle $h(k) = u(k)a^k, \forall k \in \mathbb{Z}$ avec une constante $a \in \mathbb{R}$. Ce système est causal car $h(k) = 0$ si $k < 0$ et il est stable si et seulement si $|a| < 1$. Pour s'en convaincre, injectons en entrée l'échelon unité qui est un signal d'amplitude bornée, i.e., $s(k) = u(k)$. La sortie du système sera donc

$$r(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n)h(k-n) \quad (5.3)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} u(k-n)a^{k-n} \quad (5.4)$$

$$= u(k) \sum_{n=0}^k a^n. \quad (5.5)$$

On notera que, pour $k > 0$, $r(k)$ correspond à une suite géométrique de raison a et vérifie donc $r(k) = u(k) \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$, si $a \neq 1$ et $r(k) = k+1$ si $a = 1$. On remarque alors que si $|a| < 1$ la série est convergente de limite $1/(1-a)$ et que pour tout autre cas elle est divergente.

5.1.2. Equation aux différences finies

Les équations de convolutions développées précédemment font intervenir des sommes infinies de termes. Il est possible, pour certaines familles de réponses impulsionnelles infinies, de développer la convolution sous une forme récursive. Il existe, alors, une relation entre l'entrée et la sortie sous la forme d'une combinaison linéaire. De la même manière qu'un système à temps continu peut être représenté par une équation différentielle, un filtre discret peut être représenté par une **équation aux différences ou équation récurrente** de la forme :

$$r(k) = \sum_{i=0}^M b_i s(k-i) - \sum_{j=1}^N a_j r(k-j). \quad (5.6)$$

Si $N \geq 1$:

- le signal de sortie à l'instant k dépend des signaux d'entrée des instants précédents et des signaux de sortie des instants précédents,

- un tel système est récursif.

Si $N = 0$:

- la sortie ne dépend que de l'entrée courante et des entrées des M instants précédents,
- le système est non-récursif ou transversal.

Exemple 5.2 Soit un filtre causal décrit par l'équation de récurrence suivante :

$$r(k) = s(k) + ar(k-1), \quad |a| < 1. \quad (5.7)$$

Il est alors possible de déterminer la réponse impulsionnelle $h(k)$ du système en posant $s(k) = d(k)$. D'après la définition du système, cette réponse vérifie $h(k) = u(k)(d(k) + ah(k-1))$. On peut trouver une expression explicite de $h(k)$ en développant la relation de récurrence, à savoir :

$$h(0) = d(0) + ah(-1) = 1 \quad (5.8)$$

$$h(1) = d(1) + ah(0) = a \quad (5.9)$$

$$h(2) = d(2) + ah(1) = a^2 \quad (5.10)$$

$$\vdots \quad (5.11)$$

On remarque que alors que $h(k) = u(k)a^k$.

A noter que **la relation de récurrence seule ne permet de définir le système**, il faut connaître les conditions initiales. Si dans l'exemple précédent, on garde la même équation de récurrence mais que l'on suppose que le filtre est non causal, alors la réponse impulsionnelle est de la forme $h(k) = -u(-k-1)a^k$.

5.1.3. Représentation fréquentielle

Les systèmes linéaires invariants ont la propriété de superposition. Cela signifie que si on applique en entrée un signal sinusoïdal, la sortie est également sinusoïdale de même pulsation mais avec une amplitude et une phase qui dépendent du système utilisé.

Définition 5.4 (Réponse fréquentielle) Si elle existe, la réponse fréquentielle d'un système discret est défini comme la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle $h(k)$, à savoir

$$\hat{h}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e^{-i2\pi k\nu}, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}. \quad (5.12)$$

Remarque 5.1 La réponse fréquentielle est aussi parfois notée $\hat{h}(e^{i2\pi\nu})$ ou $\hat{h}(\omega)$.

Exemple 5.3 La réponse en fréquence du filtre défini à l'exemple 5.2 est, pour $|a| < 1$:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\nu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(ae^{-i2\pi\nu} \right)^k \\ &= \frac{1}{1 - ae^{-i2\pi\nu}} \\ &= \frac{1}{1 - a(\cos(2\pi\nu) - i\sin(2\pi\nu))}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

On notera que si $|a| \geq 1$ la réponse fréquentielle n'existe pas.

5.1.4. Synoptique des filtres discrets

La relation de récurrence décrivant les filtres discrets est parfois représentée sous la forme d'un schéma synoptique dont :

- Les noeuds représentent les opérations (un cercle contenant un + pour l'addition, un triangle associés aux coefficients multiplicandes pour la multiplication).
- Les arcs représentent les dépendances. Certains arcs sont pondérés par un coefficient z^{-1} qui permet de représenter un décalage d'un échantillon. Ce coefficient est vu comme un registre à décalage.

La figure 5.1 montre un exemple de schéma synoptique d'un filtre dont la relation de récurrence est :

$$r(k) = 2s(k) - \frac{5}{2}s(k-1) + \frac{5}{2}r(k-1) - r(k-2). \quad (5.14)$$

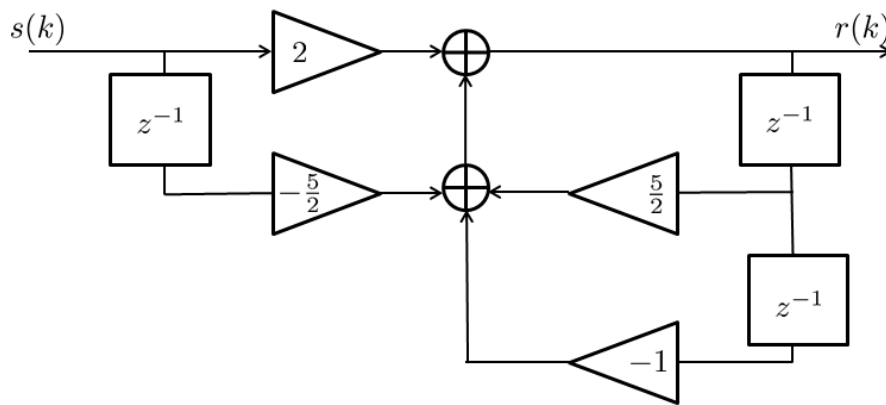


FIGURE 5.1 – Exemple de schéma synoptique d'un filtre discret.

5.2. Filtres à réponse impulsionnelle finie

Définition 5.5 (Filtre à réponse impulsionnelle finie) Un filtre à *réponse impulsionnelle finie*, dit aussi filtre **RIF** (ou **FIR** en anglais), est un filtre dont la réponse impulsionnelle est de longueur finie et s'exprime sous la forme

$$h(k) = \sum_{i=i_0}^{i_0+M} b_i d(k-i), \quad -\infty < i_0 \leq M < +\infty, \quad (5.15)$$

où M est appelé la longueur ou l'**ordre** du filtre.

Dans la suite, on se limitera aux filtres RIF causaux tels que $i_0 = 0$. Un filtre RIF (causal) possède une équation aux différences finies entre l'entrée et la sortie du filtre qui vérifie

$$r(k) = \sum_{i=0}^M b_i s(k-i). \quad (5.16)$$

Les principales propriétés des filtres RIF sont :

- une stabilité garantie ($\sum_{k=0}^M |h(k)| < +\infty$),
- une phase qui peut être exactement linéaire, par conséquent un retard de groupe constant et une absence de distorsion harmonique dans le signal,
- à sélectivité équivalente, ils sont toujours plus coûteux (en temps de calcul) que leur équivalent à réponse impulsionnelle infinie (cf. section suivante).

Exemple 5.4 Considérons le filtre RIF, de réponse impulsionnelle

$$h(k) = 2\nu_c \frac{\sin(2\pi\nu_c(k - M/2))}{2\pi\nu_c(k - M/2)} \text{rect}_{M+1}(k), \quad (5.17)$$

d'ordre M pair. Le filtre étant stable, sa réponse fréquentielle existe et, en exploitant les propriétés de la transformée de Fourier, on peut montrer qu'elle vérifie

$$\hat{h}(\nu) = e^{-\pi i M \nu} \left(\Pi \left(\frac{\nu}{2\nu_c} \right) * \frac{\sin(\pi\nu(M+1))}{\sin(\pi\nu)} \right). \quad (5.18)$$

On observe que ce filtre est un passe-bas de fréquence de coupure ν_c . Plus M sera grand et plus le terme $\frac{\sin(\pi\nu(M+1))}{\sin(\pi\nu)}$ se rapprochera d'une distribution de Dirac et par conséquent plus le filtre sera proche d'un filtre passe-bas idéal (fonction porte en fréquence). On remarque également que la phase est une fonction linéaire de la fréquence, plus précisément :

$$\text{Arg}(\hat{h}(\nu)) = \Phi(\nu) = -\pi M \nu. \quad (5.19)$$

Par conséquent le retard de groupe introduit par le filtre est constant et vaut $-\frac{\Phi'(\nu)}{2\pi} = M/2$. La figure 5.2 représente la réponse impulsionnelle, le spectre d'amplitude et celui de phase, du filtre présenté dans l'exemple.

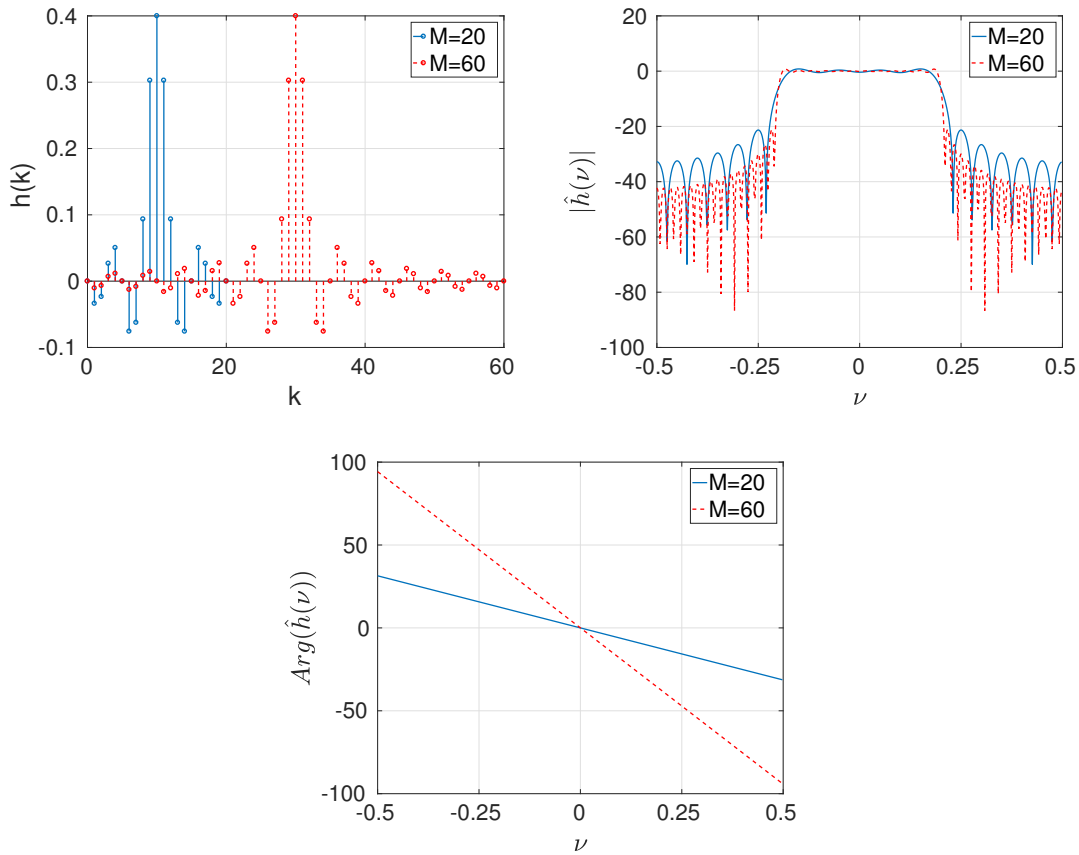


FIGURE 5.2 – De gauche à droite et haut en bas : réponse impulsionnelle, spectre d'amplitude, spectre de phase du filtre RIF de fréquence de coupure $\nu_c = 0.2$ pour $M = 20$ et $M = 60$.

5.3. Filtres à réponse impulsionnelle infinie

Définition 5.6 (Filtre à réponse impulsionnelle infinie) *Un filtre à réponse impulsionnelle infinie, dit aussi filtre **RII** (ou IIR en anglais), est un filtre dont la réponse impulsionnelle est de longueur infinie*

Un filtre RII peut se représenter sous la forme d'une équation aux différences finies entre l'entrée et la sortie du filtre qui vérifie

$$r(k) = \sum_{i=0}^M b_i s(k-i) - \sum_{j=1}^N a_j r(k-j). \quad (5.20)$$

M désigne l'ordre du filtre transverse et N l'ordre du filtre récuratif.

Les principales propriétés des filtres RII sont :

- une stabilité non garantie,
- une sensibilité numérique potentielle due au rebouclage (propagation des erreurs d'arrondi),
- un filtre RII est plus sélectif qu'un filtre RIF du même ordre.

Exemple 5.5 *La figure 5.3 montre les caractéristiques d'un filtre passe-bas RII d'ordres équivalents aux filtres RIF de l'exemple 5.4. On observe que la sélectivité est beaucoup plus importante mais que par contre la phase n'est pas parfaitement linéaire dans la bande passante.*

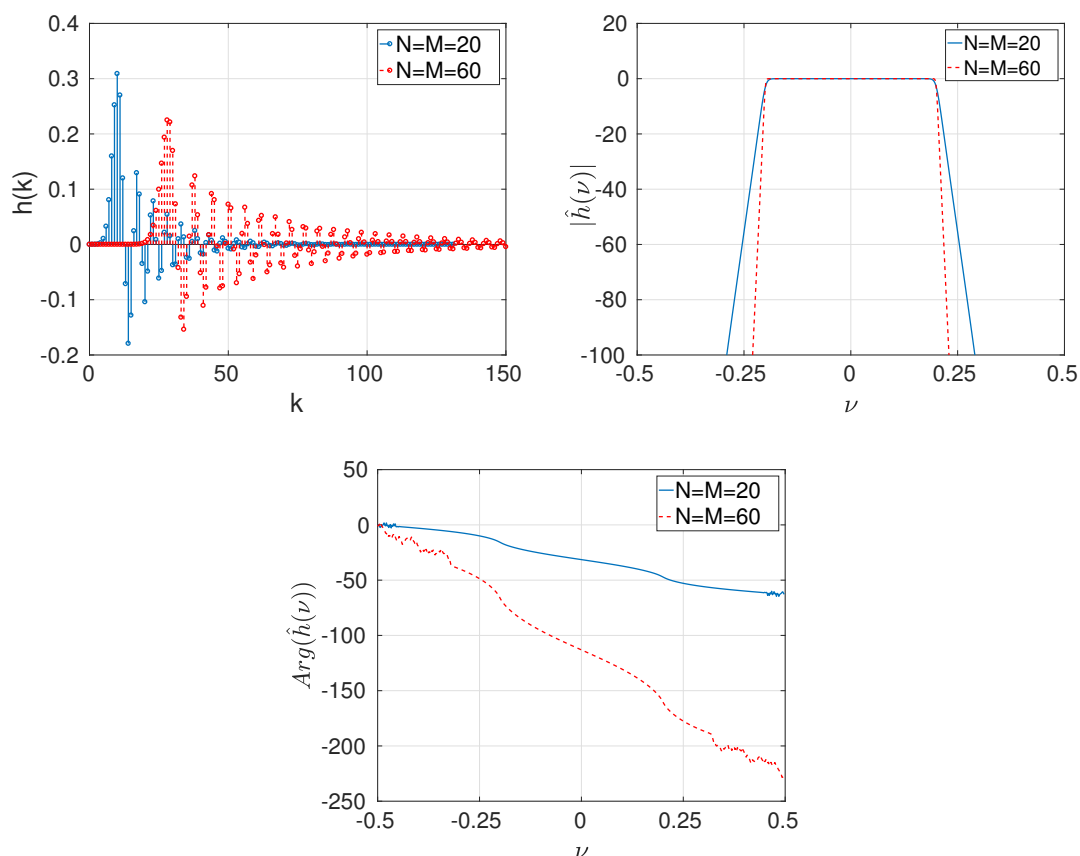


FIGURE 5.3 – De gauche à droite et haut en bas : réponse impulsionnelle, spectre d'amplitude, spectre de phase du filtre RII de fréquence de coupure $\nu_c = 0.2$ pour $N = M = 20$ et $N = M = 60$.

Chapitre 6

Liste d'exercices

6.1. Propriétés énergétiques des signaux

Exercice 1 - Energie d'une porte filtrée passe-bas (à traiter en TD1)

Une impulsion rectangulaire de durée unité et d'amplitude unité est imposée à l'entrée d'un filtre passe-bas idéal de bande passante B . On note $x(t)$ le signal d'entrée, $h(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre et $y(t)$ le signal en sortie du filtre.

- 1) Montrer que le signal d'entrée est d'énergie finie.
- 2) Déterminer l'autocorrélation $R_x(\tau)$ et la densité spectrale d'énergie $S_x(\nu)$ du signal d'entrée.
- 3) Donner l'expression de l'autocorrélation $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et de $h(\tau)$.
- 4) Calculer la densité spectrale d'énergie $S_y(\nu)$ du signal de sortie.
- 5) Calculer l'énergie totale du signal de sortie E_y et tracer en fonction de B le rapport $\frac{E_y}{E_x}$ (utiliser Fig. 6.1). Commenter.

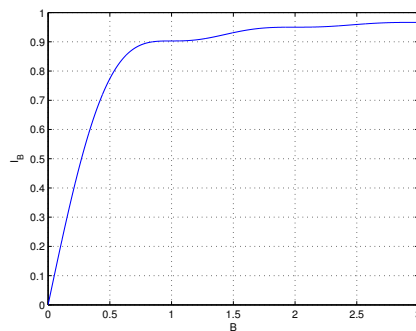


FIGURE 6.1 – Représentation de $I_B = 2 \int_0^B \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx$ en fonction de B

Exercice 2 - Densité spectrale de puissance d'un signal modulé en amplitude (à traiter en TD1)

Soit le signal $x(t) = m(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$ où $m(t)$ est un signal réel de bande limitée à B Hertz et de puissance moyenne finie. On dit que $x(t)$ est un signal modulé dans le sens où l'amplitude du signal sinusoïdal de fréquence porteuse ν_0 varie en fonction de $m(t)$. La condition "bande étroite" est imposée : $B \ll \nu_0$. L'objectif est de déterminer la densité spectrale de puissance du signal modulé.

- 1) En posant m_T (respectivement x_T) la restriction de m (respectivement x) à l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, montrer que x_T et m_T sont d'énergie finie et établir la relation entre leurs densités spectrales d'énergie respectives.
- 2) En déduire que le signal modulé est de puissance moyenne finie et déterminer sa densité spectrale de puissance.

Exercice 3 - Puissance moyenne d'un signal périodique (à traiter en TD1)

Soit le signal réel défini par $s(t) = (\cos(2\pi\nu_0 t))^4$.

- 1) Montrer que $s(t)$ est un signal périodique et préciser sa période.
- 2) Déterminer le développement en série de Fourier à coefficients complexes de $s(t)$.
- 3) En appliquant la théorie des distributions, déterminer $\hat{s}(\nu)$ la transformée de Fourier de $s(t)$. Représenter graphiquement $\hat{s}(\nu)$ (amplitude et phase). Proposer une interprétation physique.
- 4) Déterminer la puissance moyenne du signal.

6.2. FiltrageExercice 1 (à traiter en cours C3)

Soit le signal $s(t) = s_0 |\cos(2\pi\nu_0 t)|$ avec $\nu_0 = 2$ kHz. Le signal $s(t)$ est périodique de période $T_1 = \frac{1}{\nu_1}$ avec $\nu_1 = 2\nu_0$ et les coefficients complexes de son développement en série de Fourier sont

$$c_n = s_0 \frac{(-1)^n 2}{\pi (1 - 4n^2)}$$

- 1) Calculer $\hat{s}(\nu)$ à partir du développement en série de Fourier de $s(t)$.
- 2) Soit le filtre passe-bande caractérisé par sa fonction de transfert

$$\hat{h}_1(\nu) = \Pi\left(\frac{\nu - \nu_c}{B}\right) + \Pi\left(\frac{\nu + \nu_c}{B}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi(\nu) &= 1, \text{ pour } |\nu| \leq \frac{1}{2} \\ &= 0 \text{ ailleurs} \end{aligned}$$

et $\nu_c = 8$ kHz et $B = 2$ kHz.

Déterminer $r(t)$ la sortie du filtre en réponse à l'excitation $s(t)$.

- 3) Soit $h_2(t)$ un filtre passe-bas de Butterworth, d'ordre 2 et de fréquence de coupure ν_c . Quelle est l'atténuation en puissance apportée par ce filtre à la composante $2\nu_c$ du signal $s(t)$.

Quel ordre de filtre devrait-on prendre pour avoir une atténuation en puissance d'au moins 30 dB à cette fréquence ? (Utiliser la figure Fig. 6.2). Déterminer alors le rapport d'amplitude entre les fréquences ν_c et $2\nu_c$ à la sortie de ce filtre d'ordre supérieur à 2.

- 4) Soit $h_3(t)$ un filtre passe-haut de Tchebycheff de fréquence de coupure ν_c . On veut atténuer avec ce filtre les composantes continue et fondamentale ν_1 du signal $s(t)$. L'atténuation en puissance minimale à la fréquence ν_1 doit être d'au moins 20 dB. Quel est l'ordre minimal requis ? (Utiliser la figure Fig. 6.3).

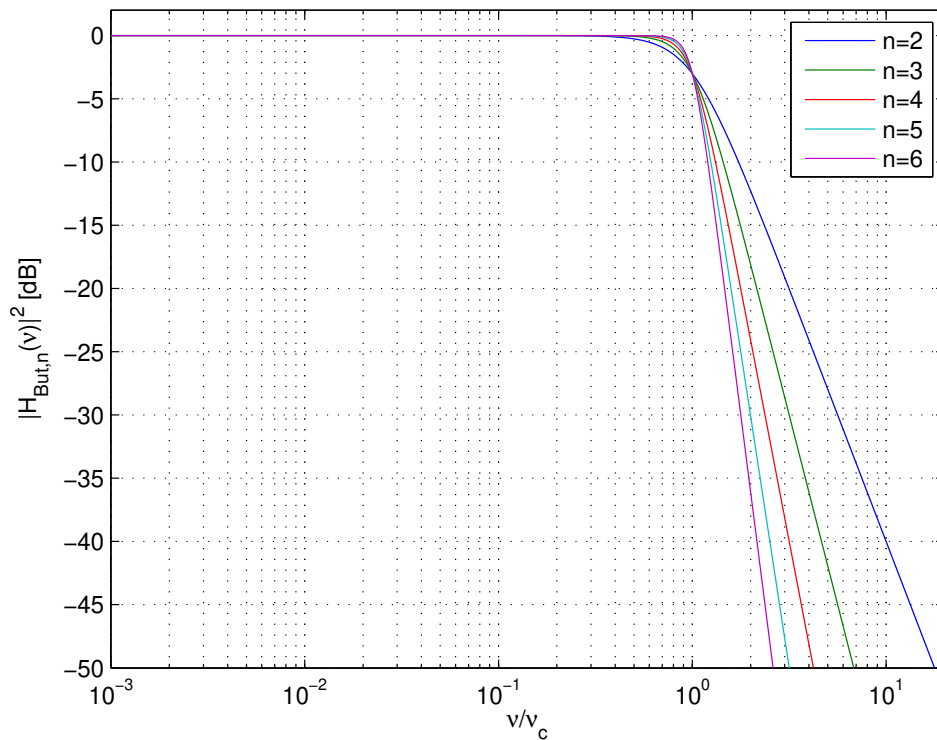


FIGURE 6.2 – Gain des filtres de Butterworth

Exercice 2 - Equation différentielle et Transformée de Laplace (exercice supplémentaire)

Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{r}(t) + 3\dot{r}(t) + 2r(t) = 2s(t)$$

où $r(t)$ et $s(t)$ sont respectivement la sortie et l'entrée du système. Les conditions initiales sont supposées nulles ($\ddot{r}(0) = \dot{r}(0) = r(0) = 0$).

1. Calculer la fonction de transfert du système $G(p) = R(p)/S(p)$.
2. Calculer $R(p)$ si l'entrée est un échelon unitaire.
3. En déduire le signal de sortie $r(t) = \mathcal{L}^{-1}(R(p))$. On pourra utiliser la table des transformées de Laplace.

Exercice 3 - Modélisation d'un moteur à courant continu (exercice supplémentaire)

On considère un moteur à courant continu d'entrée $V(t)$ (tension aux bornes de l'induit) et de sortie $\theta(t)$ (position angulaire du moteur) (Cf. Figure 6.4). Un tel système est régi par les équations de fonctionnement suivantes :

$$\begin{cases} V(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + E(t) & \text{(Équation électrique)} \\ J \frac{d\Omega(t)}{dt} = C_m(t) - f\Omega(t) & \text{(Équation mécanique)} \end{cases}$$

Dans ces expressions, R est une résistance, L une inductance, $i(t)$ est le courant, $E(t) = k_{em}\Omega(t)$ est la force contre-électromotrice, k_{em} est la constante électro-mécanique, $\Omega(t) = \dot{\theta}(t)$ est la vitesse de rotation du moteur, J est le moment d'inertie, $C_m = k_{em} i(t)$ est le couple moteur, et f est le coefficient de frottement.

Déduire de ces équations différentielles la fonction de transfert du moteur $G(p) = \theta(p)/V(p)$. On fera pour cela l'hypothèse de conditions initiales nulles.

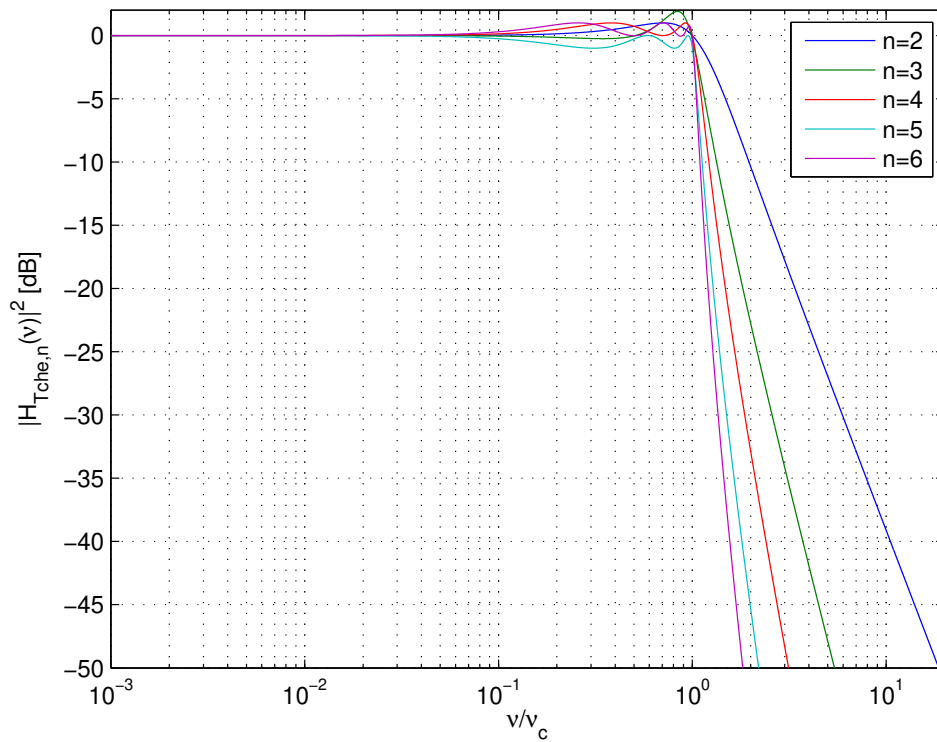


FIGURE 6.3 – Gain des filtres de Tchebycheff

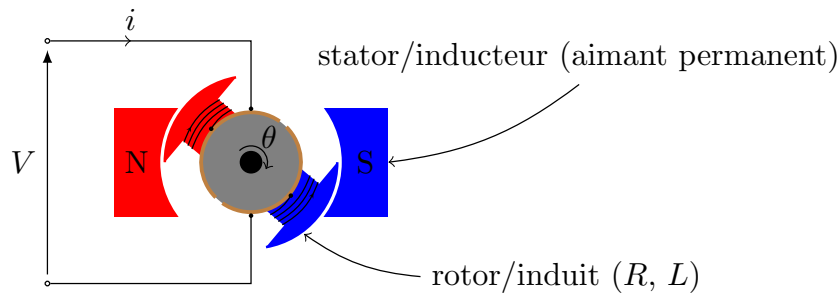


FIGURE 6.4 – Moteur à courant continu

6.3. Filtrage et distorsions

Exercice 1 (à traiter en TD2)

Soit la chaîne de traitement donnée en Figure 6.5. avec les filtres définis par leur réponse impulsionnelle respective :

$$h_1 = \delta_0 + \alpha \delta_{\tau_0}$$

et

$$h_2(t) = p(t_0 - t)$$

On suppose que $p(t)$ est une porte temporelle de durée T et que $\tau_0 \geq 2T$, $t_0 > T$, $\nu_0 T \gg 1$ et $0 \leq \alpha < 1$.

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

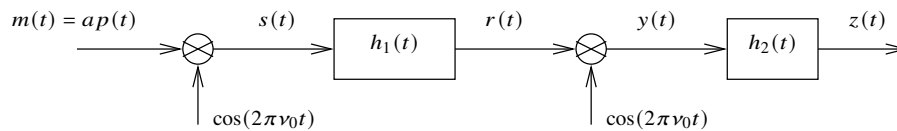


FIGURE 6.5 – Chaîne de traitement

Etude des filtres

1) Filtre de réponse impulsionnelle h_1

1-a) Exprimer la sortie $r(t)$ en fonction de l'entrée $s(t)$. Sous l'hypothèse d'un signal $s(t)$ de durée finie, quel est l'impact sur la durée du signal observé en sortie ?

1-b) Déterminer la fonction de transfert du filtre de réponse impulsionnelle h_1 . Pourquoi dit-on que ce filtre est sélectif en fréquence ?

2) Filtre de réponse impulsionnelle h_2

2-a) Exprimer la fonction de transfert du filtre en fonction de celle d'un filtre de réponse impulsionnelle p .

2-b) En déduire son expression numérique. Pourquoi peut-on considérer que ce filtre est un filtre passe-bas par rapport à la fréquence ν_0 ?

Etude des signaux

3) Déterminer la représentation fréquentielle de $s(t)$ en fonction de la représentation fréquentielle de $m(t)$. Que peut-on dire du signal $s(t)$?

4) Calculer l'expression de $r(t)$ en fonction de $p(t)$, de $\cos(2\pi\nu_0 t)$ et de $\sin(2\pi\nu_0 t)$.

5) Calculer l'expression de $y(t)$ sous la forme $y(t) = u_0(t) + u_1(t) \cos(2\pi\nu_1 t) + u_2(t) \sin(2\pi\nu_1 t)$. Que peut-on dire des signaux u_0 , u_1 et u_2 ? Commenter l'occupation spectrale du signal $y(t)$.

6) Déterminer une approximation de $z(t)$ fonction de u_0 et h_2 , avant de calculer son expression en fonction de T , t_0 et α .

6.4. Stabilité des systèmes linéaires

Exercice 1 - Analyse de stabilité (à traiter en C5)

Dans les trois questions suivantes, utiliser les outils les plus adéquats pour réaliser l'analyse de stabilité des systèmes considérés.

On considère le système du premier ordre exprimé à l'aide de la fonction de transfert (dans le domaine de Laplace) suivante :

$$T_1(p) = \frac{K}{1 + \tau p}, K \in \mathbb{R}.$$

1. Analyser la stabilité de T_1 pour $\tau > 0$ puis pour $\tau < 0$ via 1/ l'analyse des pôles, 2/ le calcul et l'analyse de la réponse impulsionnelle $t_1(t)$ associée à T_1 .

On considère les fonctions de transfert suivantes :

$$T_2(p) = \frac{1}{p^4 + 5p^3 + 3p^2 + 6p + 1}, T_{2bis}(p) = \frac{2}{p^4 + 5p^3 + 3p^2 + 16p + 1}.$$

2. Analyser la stabilité de ces deux fonctions de transfert.

On considère maintenant la fonction de transfert

$$T_3(p) = \frac{1}{p^4 + 4p^3 + ap^2 + 2p + 1}, a \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer la valeur limite de a qui rend le système T_3 stable.

Exercice 2 - Application du critère de Routh (à traiter en C5)

On considère la boucle fermée présentée en figure 6.6.

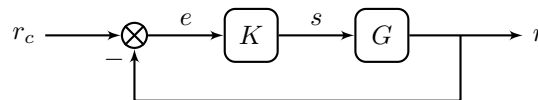


FIGURE 6.6 – Boucle fermée

Le régulateur est un simple gain K , le système à contrôler G a pour fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(p+3)(p+3)}$$

1. Le système G est-il stable en boucle ouverte (au sens entrée bornée, sortie bornée) ?
2. Calculer la fonction de transfert $G_{BF}(p)$ de la boucle fermée.
3. Pour quelles valeurs du gain K le système est-il stable en boucle fermée ?

Exercice 3 - Application du critère de Routh (exercice supplémentaire)

On considère à nouveau la boucle fermée présentée en figure 6.6.

Le régulateur est toujours un simple gain K , mais le système à contrôler G a pour fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

1. Le système G est-il stable en boucle ouverte (au sens entrée bornée, sortie bornée) ?
2. Calculer la fonction de transfert $G_{BF}(p)$ de la boucle fermée.
3. Pour quelles valeurs du gain K le système est-il stable en boucle fermée ?

6.5. Simplifications de Schéma-bloc et Diagrammes de Bode

Exercice 1 - Schéma-bloc (à traiter en C6)

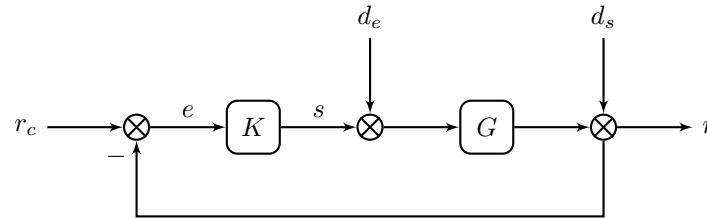


FIGURE 6.7 – Boucle fermée

1. Donner l'expression du transfert de boucle L .
2. Donner l'expression du transfert entre r_c et r (boucle fermée, sensibilité complémentaire).
3. Donner l'expression du transfert entre d_s et r (fonction de sensibilité).
4. Donner l'expression du transfert entre d_e et r .
5. Donner l'expression complète de $R(p)$ en fonction des différentes entrées $R_c(p)$, $D_e(p)$ et $D_s(p)$.
6. Donner l'expression du transfert entre r_c et e .

Exercice 2 - Schéma-bloc (à traiter en C6)

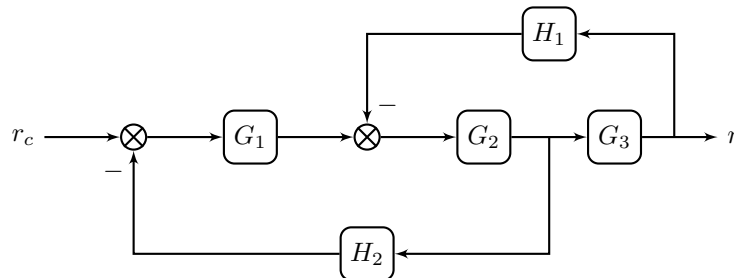


FIGURE 6.8 – Schéma-bloc

1. Donner l'expression du transfert entre r_c et r .
2. Donner l'expression de G (figure 6.9) qui rend la boucle fermée de la figure 6.9 équivalente à celle de la figure 6.8.

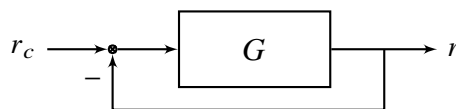


FIGURE 6.9 – Boucle fermée équivalente

Exercice 3 - Schéma-bloc (exercice supplémentaire)

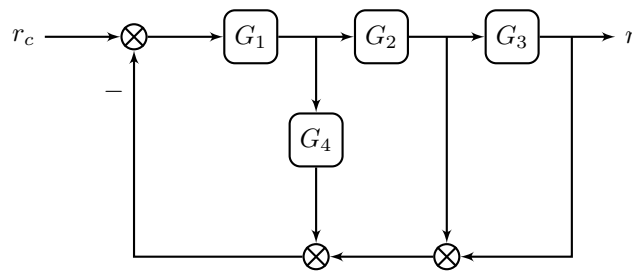


FIGURE 6.10 – Schéma-bloc

1. Donner l'expression du transfert entre r_c et r .
2. Donner l'expression de G (figure 6.9) qui rend la boucle fermée de la figure 6.9 équivalente à celle de la figure 6.10.

Exercice 4 - Tracé des diagrammes de Bode des fonctions de transfert canonique (à traiter en C6)

Système du 1er ordre

Soit le système du 1er ordre défini par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Tracer son diagramme de Bode pour $K = \tau = 0.1$.

Système du 1er ordre (bis)

Soit le système du 1er ordre défini par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{K}{1 - \tau p}$$

Tracer son diagramme de Bode pour $K = \tau = 0.1$.

Intégrateur pur

Soit le système G défini par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p}$$

Tracer son diagramme de Bode.

Système du 2nd ordre

Soit le système du 2nd ordre défini par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

Tracer son diagramme de Bode asymptotique pour $K = \xi = 0.1$ et $\omega_n = 1$.

Exercice 5 - Tracé des diagrammes de Bode asymptotiques (à traiter en C6)

Diagramme de Bode asymptotique

Soit le système G défini par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{(1+p)(1+0.1p)}$$

Tracer son diagramme de Bode.

(Travail personnel) Diagramme de Bode asymptotique (bis)

Soit le système G défini par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1+p}{p(1+0.1p)}$$

Tracer son diagramme de Bode.

6.6. Analyse des performances temporelles d'un système linéaire

Exercice 1 - Erreur de position en suivi de consigne (à traiter en TD3)

Erreur de position en suivi de consigne

On considère la boucle fermée présentée en figure 6.11.

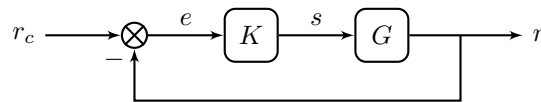


FIGURE 6.11 – Boucle fermée

Le régulateur est un simple gain K , le système à contrôler G a pour fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{(p+3)(p+3)}$$

Déterminer la valeur du gain K qui assure au système en boucle fermée une erreur de position (r_c de type échelon) égale à 5%.

Erreur de position et perturbation en sortie du système

On considère la boucle fermée présentée en figure 6.12.

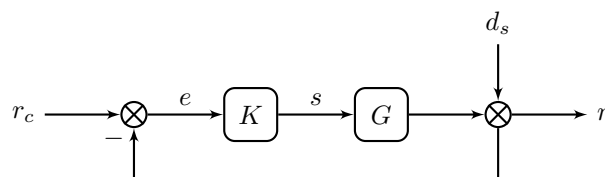


FIGURE 6.12 – Boucle fermée avec une perturbation de sortie

Le régulateur est un simple gain K , le système à contrôler G a pour fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{p + 10}{p(p + 1)(p + 4)}$$

Calculer l'erreur de position en boucle fermée en regard de la perturbation (en échelon) en sortie du système.

Erreur de position et perturbation en entrée du système

On considère la boucle fermée présentée en figure 6.13.

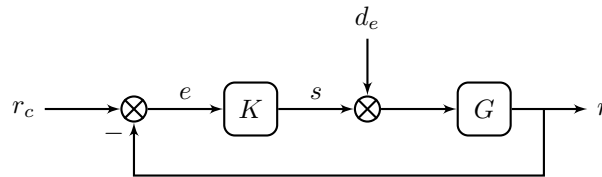


FIGURE 6.13 – Boucle fermée avec une perturbation d'entrée

Le régulateur est un simple gain K , le système à contrôler G a pour fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(p + 10)}$$

1. Calculer l'erreur de position en boucle fermée en regard de la perturbation (en échelon) en entrée du système.
2. Refaire le même calcul pour un régulateur de type PI : $K(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$.

Exercice 2 - Erreur de position en suivi de consigne (bis) (exercice supplémentaire)

On considère de nouveau la boucle fermée présentée en figure 6.11.

Le régulateur est toujours un simple gain K , le système à contrôler G a pour fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{(p + 3)(p + 5)}{p(p + 7)(p + 8)}$$

Calculer l'erreur de position en boucle fermée.

6.7. Exercice de synthèse signal analogique (TD4)

Soit un système de communication entre deux utilisateurs et une station de base. Le signal émis par l'utilisateur k est noté $u_k(t)$ et est égal à

$$u_k(t) = a_k g(t) \cos(2\pi\nu_k t), \quad (6.1)$$

où a_k est le symbole d'information à valeur réelle ($a_k \in \mathbb{R}$) et $g(t)$ une forme d'onde.

La station de base observe le signal $x(t)$ égal à la superposition des deux signaux émis :

$$x(t) = u_1(t) + u_2(t). \quad (6.2)$$

Pour détecter le signal u_1 , elle multiplie $x(t)$ par $\cos(2\pi\nu_1 t)$:

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi\nu_1 t) \quad (6.3)$$

Un filtrage est ensuite appliqué à $y(t)$. On note $h(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre et $z(t)$ la sortie du filtre.

Hypothèses numériques

$\beta = 0.5$, $\nu_0 = 1$ kHz, $\nu_1 = 100$ kHz, $\nu_2 = 150$ kHz et

$$\hat{g}(\nu) = \mathcal{F}[g](\nu) = \begin{cases} 1 & |\nu| \leq (1 - \beta)\nu_0 \\ \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\pi \frac{|\nu| - (1 - \beta)\nu_0}{2\beta\nu_0} \right) \right]} & (1 - \beta)\nu_0 \leq |\nu| \leq (1 + \beta)\nu_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.4)$$

6.7.1. Etude des signaux u_k , x et y

- 1) Montrez que u_k définit un signal d'énergie finie et donnez l'expression de son énergie sous la forme d'une intégrale que nous ne vous demandons pas de calculer.
- 2) En utilisant les hypothèses numériques, donnez l'expression de la densité spectrale d'énergie de u_k en fonction de a_k , \hat{g} et de ν_k .
- 3) En utilisant les hypothèses numériques, donnez l'expression de la densité spectrale d'énergie de x en fonction des densités spectrales d'énergie de u_1 et de u_2 .
- 4) Expression de \hat{y} :
 - 4-a) Donnez l'expression de \hat{y} en fonction de \hat{x} ,
 - 4-b) Déduisez-en l'expression de \hat{y} en fonction de \hat{u}_1 et de \hat{u}_2
 - 4-c) Déduisez-en l'expression de \hat{y} en fonction de a_1 , a_2 , ν_1 , ν_2 et \hat{g} .

6.7.2. Etude du filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$

Le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ est un filtre réalisable, défini par sa fonction de transfert $H(p)$ donnée par :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\alpha p + \alpha^2 p^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad (6.5)$$

- 1) Montrez que le filtre est stable.
- 2) Déterminez la fonction de transfert harmonique du filtre $\hat{h}(\nu)$.
- 3) Déduisez-en le gain en puissance du filtre et la fréquence de coupure à -3 dB (notée ν_c).
- 4) Tracez le diagramme de Bode du filtre.

6.7.3. Etude du signal z

- 1) Déterminez la densité spectrale d'énergie de z en fonction de celle de y et de \hat{h} .
- 2) Choisissez la valeur de ν_c de sorte à assurer une atténuation d'au moins 40 dB à la fréquence $\nu_2 - \nu_1$.
- 3) Déterminez dans ce cas la sortie du filtre $z(t)$ et une approximation de $z(t)$.

6.8. Signaux numériques

Exercice 1 - Analyse vibratoire (à traiter en TD5)

Un capteur de vibrations placé sur un logement de roulement enregistre ses vibrations. Le spectre fourni par un analyseur de spectre a l'allure donnée à la figure 6.14.

- 1) Pour traiter et stocker ce signal à valeurs réelles, on l'envoie sur un système d'acquisition (échantillonneur + quantificateur) relié à un PC. Quelle fréquence d'échantillonnage doit choisir l'opérateur pour se situer à 10 Hz au-dessus de la limite donnée par le théorème de Shannon ?

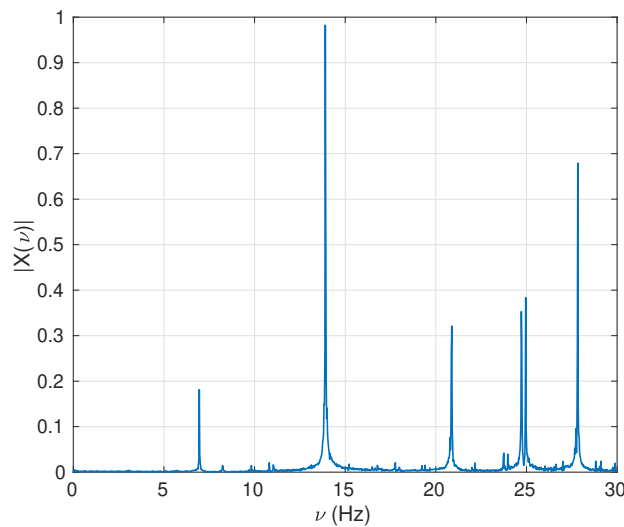


FIGURE 6.14 – Partie positive du spectre d’amplitude issu de l’analyse vibratoire d’un logement de roulement en rotation à 7 tours/sec.

- 2) Tracer l’allure du spectre du signal échantillonné pour la plage $] - 130, +130]$ Hz.
- 3) Suite à un défaut de câblage, le signal de vibration se trouve parasité par le 50 Hz du secteur. Comment est modifié le spectre du signal échantillonné ? Quel est le problème qui est apparu ?
- 4) Dessiner la structure de la chaîne d’acquisition allant du capteur au convertisseur analogique-numérique permettant de faire une acquisition correcte du signal.

Exercice 2 - Chaîne de conversion analogique-numérique (à traiter en TD5)

Un laboratoire scientifique souhaite déployer dans l’océan Indien un système d’enregistrement numérique autonome des sons émis par les grandes baleines dans la bande $[0, 100[$ Hz. Le système doit être capable d’enregistrer les sons avec la meilleure qualité possible. Le système de stockage de données (disques durs) utilisé par le laboratoire est dimensionné tel que le convertisseur analogique-numérique (CAN) ne doit pas générer plus de 40 kilo-octets par minute d’enregistrement.

Le laboratoire dispose d’un CAN paramétrable qui présente les caractéristiques suivantes :

- Fréquence d’échantillonnage : 125, 250 ou 500 Hz (au choix).
- Quantification : 8, 16 ou 24 bits (au choix).

- 1) Déterminer la configuration du CAN la mieux adaptée aux besoins du laboratoire.
- 2) Soit $y(k)$ le signal discret issu de la numérisation à la fréquence ν_e déterminée précédemment (on néglige le bruit de quantification). Après avoir traité ce signal discret, les ingénieurs du laboratoire souhaiteraient le reconvertir en signal analogique. Ils suggèrent la méthode de conversion suivante :

$$z(t) = h_{\text{CNA}}(t) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} y(k) \delta_{\frac{k}{\nu_e}}, \quad (6.6)$$

avec

$$h_{\text{CNA}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1/\nu_e, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.7)$$

En supposant que $y(k)$ est le signal discret obtenu après échantillonnage d'un sinus oscillant à $f_0 = 62.5$ Hz, tracer $z(t)$.

3) A partir de l'expression de la transformée de Fourier du signal $z(t)$ reconstruit, montrer que $h_{CNA}(t)$ n'est pas un très bon filtre de reconstruction. Que suggèreriez-vous pour améliorer la conversion numérique-analogique ?

Exercice 3 - Repliement ou perte d'information ? (à traiter en TD5)

Soit le signal suivant :

$$s(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante telle que $0 < |\alpha| < 1$.

1) Le spectre de $s(t)$ est-il à support borné ?

2) Peut-on appliquer directement le théorème de Shannon-Nyquist ?

3) On souhaite numériser le signal à une fréquence d'échantillonnage ν_e imposée en supprimant le repliement de spectre à l'aide d'un filtre anti-repliement. Quelle est la perte d'énergie de signal imposée par le filtre anti-repliement (on rappelle que la primitive de $1/(1+x^2)$ est $\arctan(x)$) ?

Exercice 4 - Echantillonneur-moyenneur (à traiter en cours C7)

L'échantillonnage par un peigne de Dirac n'est pas réalisable pratiquement. On utilise alors des techniques qui s'en approchent le plus possible et qui permettent de réaliser des circuits de complexité limitée. L'échantillonneur moyenneur est l'une de ces techniques. Il s'agit là d'effectuer un échantillonnage à l'aide d'une fenêtre analogique moyennant ou intégrant le signal pendant un court instant τ . Plus précisément, chaque échantillon obtenu à partir d'un signal analogique $s_a(t)$ vérifie :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{kT_e - \frac{\tau}{2}}^{kT_e + \frac{\tau}{2}} s_a(t) dt.$$

1) Pour déterminer l'impact de cet échantillonnage non-idéal, calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné s_e .

6.9. Transformées usuelles de signaux discrets

Exercice 1 - Transformées de Fourier de signaux discrets (à traiter en TD6)

Soit $s(t) = e^{i2\pi f_0 t} \Pi(t/T - 1/2)$, $T \in \mathbb{R}_+$, $f_0 \in \mathbb{R}_+$.

1) Déterminer et tracer le module de la transformée de Fourier de s avec $f_0 = 16$ et $T = 1$.

- 2) Le signal s est maintenant échantillonné à une fréquence $\nu_e = 4f_0$. Calculer et tracer le module de la transformée de Fourier de ce signal et comparer son expression avec le résultat précédent.
- 3) Calculer et tracer le module de la transformée de Fourier discrète du signal échantillonné sur une longueur de $N = \nu_e$ échantillons.
- 4) On considère toujours le même signal discret de $N = \nu_e$ échantillons mais on calcule cette fois-ci la transformée de Fourier discrète sur $M = 2N$ points. Comment appelle-t-on cette technique ? Tracer le module de cette transformée de Fourier discrète.

Exercice 2 - Corrélation et densité spectrale d'énergie (à traiter en TD6)

Soit $x(k) = u(k)\alpha^k$, $0 < |\alpha| < 1$ où $u(k)$ désigne l'échelon unité.

- 1) Déterminer l'expression de la fonction d'autocorrélation de $x(k)$.
- 2) En déduire l'expression de la densité spectrale d'énergie.
- 3) Donner une condition sur α pour que l'énergie soit uniformément répartie en fréquence.
- 4) Dans le cadre de l'identification de systèmes linéaires, comment peut-on exploiter la propriété précédente ?

6.10. Filtrage de signaux discrets

Exercice 1 - Intérêts composés (à traiter en cours C10)

On s'intéresse à la rémunération d'un placement financier considéré comme un système à temps discret, rémunéré au taux mensuel $\tau < 1$. Le nombre k quantifie le temps en nombre entier de fois la période d'échantillonnage, ici le mois. On considère que les nouveaux versements et les intérêts acquis du mois écoulé sont versés au capital accumulé au premier jour de chaque mois.

- 1) Donnez, sous forme de schéma bloc, la structure du système. Quelle est l'équation de récurrence du placement ? On notera $r(k)$ la série discrète correspondant au capital accumulé, et $s(k)$ la série discrète correspondant aux versements.
- 2) Donnez l'expression de la réponse impulsionnelle $h(k)$ du placement en utilisant dans le résultat la fonction échelon discrète $u(k)$.
- 3) En déduire l'expression de $r(k)$ pour un versement initial unique $s(k) = P\delta(k)$. Le système est-il stable ?
- 4) Quel est le capital accumulé au bout de 3 ans pour un placement initial unique de 1000 euros, placé à un taux de 0,27% mensuel.
- 5) Soient maintenant des versements mensuels $s(k) = P \times u(k)$. Donner l'expression de $r(k)$.

Exercice 2 - Filtre moyenneur (à traiter en cours C10)

On considère un filtre dont la relation entre le signal d'entrée du filtre $s(k)$ et sa sortie $r(k)$ est :

$$r(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} a^m s(k-m) \text{ avec } 0 \leq a < +\infty \text{ et } 0 < M < +\infty.$$

- 1) Déterminer la réponse impulsionnelle $h(k)$ de ce filtre.
- 2) Le filtre est-il stable ?
- 3) Si elle existe, déterminer la réponse fréquentielle du filtre. En déduire le gain en fréquence du filtre.
- 4) Dans le cas où $M = 2$, en déduire la nature du filtre (passe-haut, passe-bas, etc.) pour $a = 0$ puis pour $a = 1$.

Pour M grand, le filtrage par convolution est très coûteux en temps. Un ingénieur du laboratoire propose de filtrer le signal à l'aide du code Matlab suivant :

```
>> NFFT=max( length ( h ) , length ( x ) );  
>> y=ifft ( fft ( x , NFFT ) .* fft ( h , NFFT ) );
```

- 5) Est-ce une bonne méthode de filtrage ? Justifier.

Annexes

Annexe A

Filtres passe-bas du 1er ordre

A.1. Analyse temporelle

Les systèmes du 1er ordre sont décrits par une équation différentielle du type :

$$r'(t) + \frac{1}{T}r = \frac{K}{T}s(t) \Rightarrow G(p) = \frac{K}{1 + Tp} \quad (\text{A.1})$$

K est appelé gain statique ($G(0) = K$)¹ et T est la constante de temps.

A.1.1. La réponse impulsionnelle

Sachant que $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ on en déduit l'expression de la réponse impulsionnelle suivante :

$$R(p) = G(p).1 = \frac{K}{1 + Tp} \Rightarrow r(t) = \mathcal{L}^{-1}(R(p)) = \frac{K}{T}e^{-t/T}, \quad t \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

représentée par la Figure A.1.

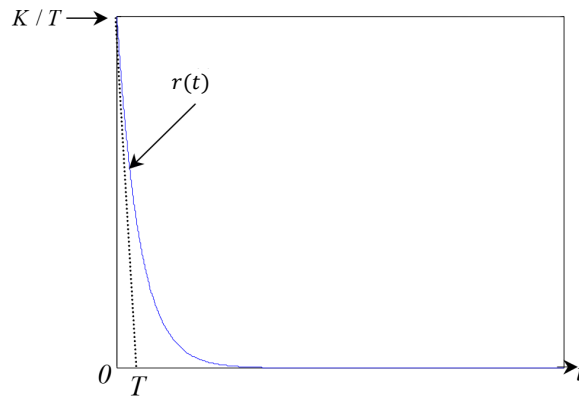


FIGURE A.1 – Réponse impulsionnelle d'un 1er ordre

La pente de la tangente à l'origine (pour $t = 0$) :

$$r'(t = 0) = -\frac{K}{T^2}e^{-t/T}|_{t=0} = -\frac{K}{T^2}. \quad (\text{A.3})$$

1. le gain total qu'apporte le système une fois le régime permanent établi donc à fréquence nulle

A.1.2. La réponse indicielle

La réponse à un échelon d'entrée $\mathcal{L}(s(t)) = \frac{1}{p}$ est donnée par :

$$R(p) = \frac{K}{(1 + Tp)p} = \frac{K}{p} - \frac{KT}{1 + Tp} \quad (\text{A.4})$$

La décomposition en éléments simples permet de déduire la réponse temporelle suivante :

$$r(t) = K(1 - e^{-t/T}), \quad t \geq 0, \quad (\text{A.5})$$

représentée en Figure A.2.

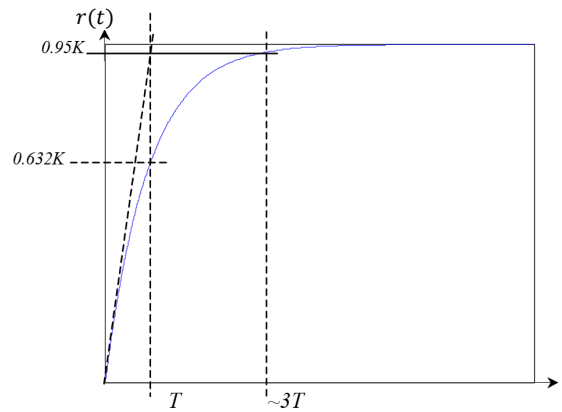


FIGURE A.2 – Réponse indicielle d'un 1er ordre

La pente de la tangente à l'origine (pour $t = 0$) est non nulle et est donnée par :

$$r'(t = 0) = \frac{K}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{K}{T}. \quad (\text{A.6})$$

Notons également que le temps de réponse à 95% est approximé par : $t_r \approx 3T$ et 63% de la réponse finale est atteint à $t = T$. On notera bien évidemment que plus la constante de temps du système est faible plus le système est rapide (temps de réponse plus faible) (cf. Figure A.3).

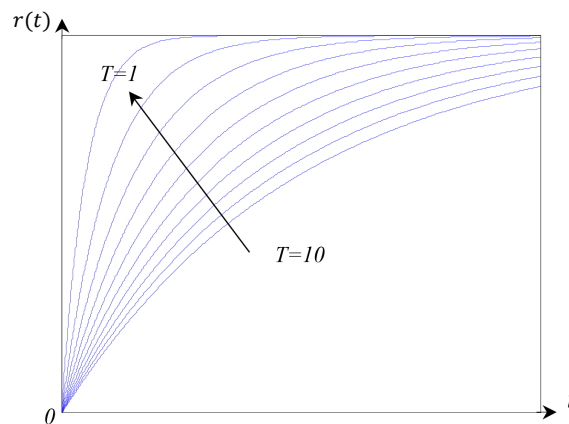


FIGURE A.3 – Réponses indicielles d'un 1er ordre pour différentes constantes de temps

A.1.3. La réponse à une rampe

La réponse à une rampe est obtenue pour une entrée $u(t) = t$. Dans ce cas : $\mathcal{L}(s(t)) = \frac{1}{p^2}$ ce qui conduit à :

$$R(p) = \frac{K}{(1 + Tp)p^2} = \frac{K}{p^2} - \frac{KT}{p} - \frac{KT^2}{1 + Tp}. \quad (\text{A.7})$$

Cette décomposition en éléments simples permet par utilisation de Transformée de Laplace inverse d'obtenir la réponse temporelle suivante :

$$r(t) = K(t - T + Te^{-t/T}) \quad t \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

En calculant le signal d'erreur pour $K = 1$:

$$e(t) = u(t) - y(t) = T(1 - e^{-t/T}) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = T. \quad (\text{A.9})$$

Ce qui est observable sur la Figure A.4. On notera qu'en régime permanent la pente est égale à K .

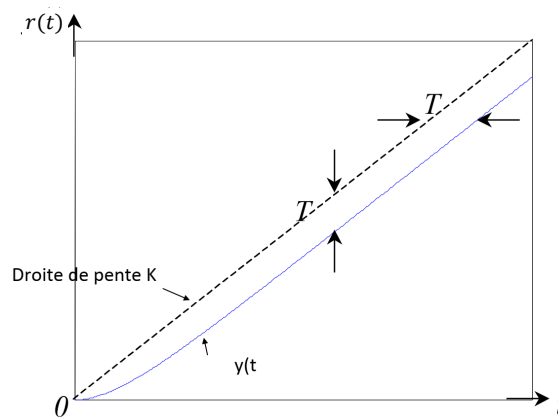


FIGURE A.4 – Réponse à une rampe d'un système de 1er ordre

A.2. Analyse fréquentielle (diagrammes de Bode)

Nous détaillons ici la représentation fréquentielle (Tracé de Bode) d'un système de premier ordre donné par sa fonction de transfert :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \quad (\text{A.10})$$

- $\omega_c = \frac{1}{T}$ est appelée pulsation de cassure (ou de coupure). Elle sépare les pulsations en deux domaines ; "basses fréquences" pour :

$$\omega \ll \omega_c \quad (\text{A.11})$$

et "hautes fréquences" pour :

$$\omega \gg \omega_c. \quad (\text{A.12})$$

- l'amplitude en dB :

$$20\log_{10} |H(j\omega)| = 20\log_{10} \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 20\log_{10}(K) - 20\log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T^2}, \quad (\text{A.13})$$

- et la phase en deg :

$$\Phi = \arg(H(j\omega)) \frac{180}{\pi} = -\text{Arctg}(\omega T) \frac{180}{\pi}. \quad (\text{A.14})$$

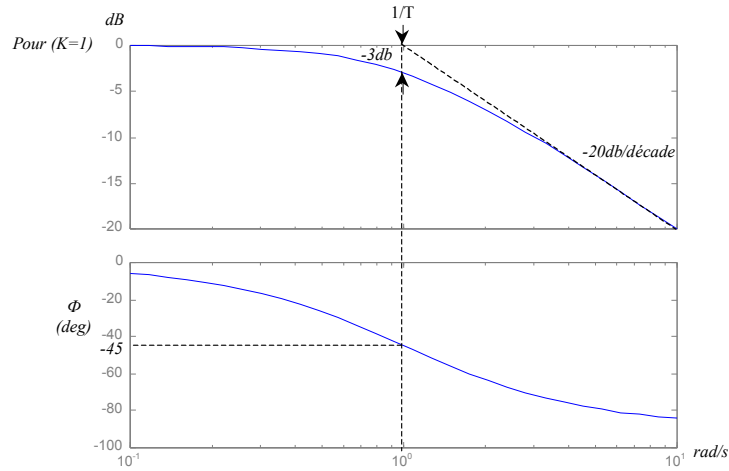


FIGURE A.5 – Tracé de Bode d'un 1er ordre

Le tracé de Bode (échelle semi-logarithmique) est donné par la Figure A.5.

Ci-après, on calcule quelques points particuliers supplémentaires sur les diagrammes de Bode.

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log \left| \frac{K}{1+jT\omega} \right| \\
 &= 20 \log |K| - 20 \log |1+jT\omega| \\
 &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1+(T\omega)^2} \right) \\
 &= K_{dB} - 20 \log \left(\sqrt{1+(T\omega)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

On évalue cette expression en plusieurs valeurs de ω :

- $|G(0)|_{dB} = 20 \log(K) = K_{dB}$
- $\left| G\left(\frac{1}{T}\right) \right|_{dB} = |G(\omega_c)|_{dB} = K_{dB} - 20 \log(\sqrt{2}) \simeq K_{dB} - 3dB$
- $\left| G\left(\frac{10}{T}\right) \right|_{dB} = |G(10\omega_c)|_{dB} = K_{dB} - 20 \log(\sqrt{1+(10)^2}) \simeq K_{dB} - 20dB$
- $\left| G\left(\frac{100}{T}\right) \right|_{dB} = |G(100\omega_c)|_{dB} = K_{dB} - 20 \log(\sqrt{1+(100)^2}) \simeq K_{dB} - 40dB$

On appelle $\omega_c = 1/T$ la pulsation de coupure, et on note que la pente au-delà de cette pulsation est de -20dB/dec (en effet $-10 \log(10\omega_c) = -20dB$).

Pour le calcul de l'argument on rappelle que l'argument $\arg(c)$ d'un nombre complexe c vérifie la relation :

$$\arg(c) = \arctan \left(\frac{\text{Im}(c)}{\text{Re}(c)} \right) \tag{A.16}$$

Il convient donc de calculer la partie réelle et imaginaire de $G(j\omega)$.

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+jT\omega} = \frac{K}{1+(T\omega)^2} (1-jT\omega) \tag{A.17}$$

$$\arg(G(j\omega)) = \arg(1-jT\omega) = \arctan \left(\frac{-T\omega}{1} \right) = -\arctan(T\omega) \tag{A.18}$$

Pour le tracé, on considère trois valeurs :

- $\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg(G(j\omega)) = -\arctan(0) = 0$
- $\arg\left(G\left(j\frac{1}{T}\right)\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$
- $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(G(j\omega)) = -\frac{\pi}{2}$

Annexe B

Passe-bas du 2nd ordre

B.1. Analyse temporelle

Les systèmes de 2nd ordre sont décrits par une équation différentielle du type :

$$b_2 r''(t) + b_1 r'(t) + b_0 r(t) = a_0 s(t) \quad (\text{B.1})$$

Il en découle une fonction de transfert du type :

$$G(p) = \frac{a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \quad (\text{B.2})$$

que nous pouvons réécrire sous la forme canonique suivante :

$$G(j\omega) = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} \quad (\text{B.3})$$

où $K = \frac{a_0}{b_0}$ est le gain statique, $\omega_n = \sqrt{\frac{b_0}{b_2}}$ est la pulsation propre et $\xi = \frac{b_1}{2\sqrt{b_0 b_2}}$ est le coefficient d'amortissement.

L'équation caractéristique $p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2 = 0$ a pour discriminant

$$\Delta' = (\xi^2 - 1) \omega_n^2. \quad (\text{B.4})$$

Le signe du discriminant et par conséquent la nature des pôles, est déterminé par le coefficient d'amortissement ξ .

Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{r}(t) + 2\xi \omega_n \dot{r}(t) + r(t) = K \omega_n^2 s(t) \quad (\text{B.5})$$

$r(t)$ et $s(t)$ sont respectivement la sortie et l'entrée du système.

Pour étudier les différents régimes d'un système du second ordre on passe par la fonction de transfert. On applique pour cela la transformée de Laplace (en considérant des conditions initiales nulles) :

$$R(s) \left(p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2 \right) = K \omega_n^2 S(p) \quad (\text{B.6})$$

D'où :

$$F(p) = \frac{R(p)}{S(p)} = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} \quad (\text{B.7})$$

Étudions les pôles de cette fonction de transfert. Ce sont les racines d'un polynôme d'ordre 2, ils s'obtiennent par le calcul du discriminant :

$$\Delta = 4\xi^2 \omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 4\omega_n^2 (\xi^2 - 1) \quad (\text{B.8})$$

Suivant le signe du discriminant, qui dépend de la valeur de ξ , plusieurs cas sont à considérer :

Remarque B.1 Dans la suite on ne considère que les cas pour lesquels $\xi \geq 0$, dans le cas contraire le système est instable (pôles à partie réelle positive).

B.1.1. Cas $\Delta > 0$ ($\xi > 1$) : système hyper-amorti

Les pôles de la fonction de transfert, p_1 et p_2 , sont réels négatifs.

$$p_1 = \frac{-2\xi\omega_n + \sqrt{4\omega_n^2(\xi^2 - 1)}}{2} = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (\text{B.9})$$

$$p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (\text{B.10})$$

La fonction de transfert peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$F(p) = \frac{R(p)}{S(p)} = \frac{K\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \quad (\text{B.11})$$

Décomposition en éléments simples :

$$F(p) = \frac{R(p)}{S(p)} = K\omega_n^2 \left(\frac{\frac{1}{p_1 - p_2}}{(p - p_1)} + \frac{\frac{1}{p_2 - p_1}}{(p - p_2)} \right) = \frac{K\omega_n^2}{p_1 - p_2} \left(\frac{1}{(p - p_1)} - \frac{1}{(p - p_2)} \right) \quad (\text{B.12})$$

La réponse à une impulsion de dirac s'obtient en appliquant la transformée de Laplace inverse :

$$r_\delta(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{K\omega_n^2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (\text{B.13})$$

De même on obtient la réponse à un échelon :

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{K\omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)} \quad (\text{B.14})$$

Décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \frac{F(p)}{p} &= K\omega_n^2 \left(\frac{\frac{1}{p_1 p_2}}{p} + \frac{\frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}}{p - p_1} + \frac{\frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}}{p - p_2} \right) \\ &= \frac{K\omega_n^2}{p_1 p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p_2}{p_1 - p_2} \frac{1}{p - p_1} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \frac{1}{p - p_2} \right) \\ &= K \left[\frac{1}{p} + \frac{p_2}{p_1 - p_2} \frac{1}{p - p_1} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \frac{1}{p - p_2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Remarque B.2 On obtient la dernière ligne en remarquant que $\omega_n^2 = p_1 p_2$ (par identification des termes des fonctions de transferts (B.7) et (B.11)).

Application de la transformée de Laplace inverse :

$$r_\Gamma(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(p)}{p} \right] = K \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right] \quad (\text{B.16})$$

Quand t tend vers l'infini, la réponse à un échelon unité tend vers K sans oscillation. C'est le régime aperiodique (ou sur-amorti).

B.1.2. Cas $\Delta = 0$ ($\xi = 1$) : système à amortissement critique

Dans ce cas on a deux pôles réels (négatifs) confondus :

$$p_1 = p_2 = -\xi\omega_n = -\omega_n \quad (\text{B.17})$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$F(p) = \frac{\omega_n^2}{(p + \xi\omega_n)^2} \quad (\text{B.18})$$

Calcul de la réponse indicielle :

$$\Gamma(p) = \frac{F(p)}{p} = \frac{K\omega_n^2}{p(p + \omega_n)^2} \quad (\text{B.19})$$

Décomposition en éléments simples :

$$\Gamma(p) = \frac{K\omega_n^2}{p(p + \omega_n)^2} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p + \omega_n} + \frac{\gamma}{(p + \omega_n)^2} \quad (\text{B.20})$$

$$\alpha = [\Gamma(p) \cdot p]_{p=0} = \frac{K\omega_n^2}{(\omega_n)^2} = K \quad (\text{B.21})$$

$$\gamma = [\Gamma(p) (p + \omega_n)^2]_{p=-\omega_n} = \frac{K\omega_n^2}{-\omega_n} = -K\omega_n \quad (\text{B.22})$$

Pour le calcul de β on a d'après (B.18) :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \Gamma(p) = 0 \quad (\text{B.23})$$

Dans le même temps d'après (B.20) :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \Gamma(p) = \alpha + \beta \quad (\text{B.24})$$

Donc :

$$\beta = -\alpha = -K \quad (\text{B.25})$$

Ainsi,

$$\Gamma(p) = \left[\frac{1}{p} + \frac{-1}{p + \omega_n} + \frac{-\omega_n}{(p + \omega_n)^2} \right] K \quad (\text{B.26})$$

L'application de la transformée de Laplace inverse permet d'obtenir la réponse souhaitée :

$$r_\Gamma(t) = \mathcal{L}^{-1} [\Gamma(p)] = \alpha + \beta e^{-\xi \omega_n t} + \gamma t e^{-\xi \omega_n t} = K [1 - (1 + t\omega_n)e^{-\omega_n t}] \quad (\text{B.27})$$

Remarque B.3 Notons également que la dérivée à l'origine de la réponse indicielle est nulle :

$$r'(t) = \frac{K}{T} t e^{-t/T} \Rightarrow r'(0) = 0. \quad (\text{B.28})$$

Ceci est une des caractéristiques différenciant un système de 2nd ordre à amortissement critique et un système de 1er ordre.

Remarque B.4

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(p + a)^2} \right] = t e^{-at} \quad (\text{B.29})$$

Le régime considéré est appelé régime critique.

La Figure B.1 représente la réponse indicielle pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement $\xi \geq 1$.

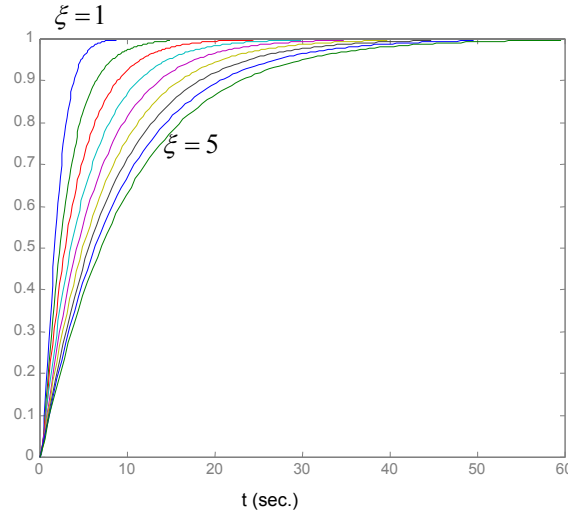


FIGURE B.1 – Réponses indicielles d'un système de second ordre hyper-amortis ou à amortissement critique

B.1.3. Cas $\Delta < 0$ ($0 < \xi < 1$) : système sous-amorti

Dans ce cas les pôles sont complexes conjugués :

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = -\alpha \pm j \omega_p \quad (\text{B.30})$$

où $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ est appelée pseudo-pulsation.

Fonction de transfert du système :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{K \omega_n^2}{(p + \alpha + j \omega_p)(p + \alpha - j \omega_p)} \\ &= \frac{K \omega_n^2}{p^2 + p \alpha - p j \omega_p + \alpha p + \alpha^2 - \alpha j \omega_p + p j \omega_p + \alpha j \omega_p + \omega_p^2} \\ &= \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2 p \alpha + \alpha^2 + \omega_p^2} \\ &= \frac{K \omega_n^2}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} \\ &= K \frac{\omega_p}{1 - \xi^2} \frac{\omega_p}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Pour obtenir la dernière ligne on remarque que :

$$\omega_n^2 = \frac{\omega_p^2}{1 - \xi^2} \quad (\text{B.32})$$

La réponse impulsionnelle est donc la suivante :

$$r_\delta(t) = \left[\frac{\omega_p}{1 - \xi^2} e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t) \right] K \quad (\text{B.33})$$

Calcul de la réponse indicielle :

$$\Gamma(p) = \frac{K \omega_n^2}{p (p + \alpha + j \omega_p)(p + \alpha - j \omega_p)} \quad (\text{B.34})$$

Décomposition en éléments simples :

$$\Gamma(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \alpha + j\omega_p} + \frac{c}{p + \alpha - j\omega_p} \quad (\text{B.35})$$

$$a = [\Gamma(p) \cdot p]_{p=0} = \frac{K\omega_n^2}{\alpha^2 + \omega_p^2} \quad (\text{B.36})$$

$$b = [\Gamma(p) (p + \alpha + j\omega_p)]_{p=-\alpha-j\omega_p} = \frac{K\omega_n^2}{(-\alpha - j\omega_p)(-2j\omega_p)} = \frac{1}{2} \frac{K\omega_n^2}{j\alpha\omega_p - \omega_p^2} \quad (\text{B.37})$$

$$c = [\Gamma(p) (p + \alpha - j\omega_p)]_{p=-\alpha+j\omega_p} = \frac{K\omega_n^2}{(-\alpha + j\omega_p)2j\omega_p} = -\frac{1}{2} \frac{K\omega_n^2}{j\alpha\omega_p + \omega_p^2} \quad (\text{B.38})$$

$$\Gamma(p) = \left[\frac{\omega_n^2}{\alpha^2 + \omega_p^2} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{j\alpha\omega_p - \omega_p^2} \frac{1}{p + \alpha + j\omega_p} - \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{j\alpha\omega_p + \omega_p^2} \frac{1}{p + \alpha - j\omega_p} \right] K \quad (\text{B.39})$$

$$\Gamma(p) = \left[\frac{\omega_n^2}{\alpha^2 + \omega_p^2} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{j\alpha\omega_p - \omega_p^2} \frac{p + \alpha - j\omega_p}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} - \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{j\alpha\omega_p + \omega_p^2} \frac{p + \alpha + j\omega_p}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} \right] K$$

$$\Gamma(p) = \left[\frac{\omega_n^2}{\alpha^2 + \omega_p^2} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{\omega_p(-\omega_p + j\alpha)} \frac{p + \alpha - j\omega_p}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} - \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{\omega_p(\omega_p + j\alpha)} \frac{p + \alpha + j\omega_p}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} \right] K$$

$$\Gamma(p) = \left[\frac{\omega_n^2}{\alpha^2 + \omega_p^2} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2(-\omega_p - j\alpha)}{\omega_p(\omega_p^2 + \alpha^2)} \frac{p + \alpha - j\omega_p}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} - \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2(\omega_p - j\alpha)}{\omega_p(\omega_p^2 + \alpha^2)} \frac{p + \alpha + j\omega_p}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} \right] K$$

$$\Gamma(p) = \frac{K\omega_n^2}{\alpha^2 + \omega_p^2} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_p((p + \alpha)^2 + \omega_p^2)} \left[-\omega_p(p + \alpha) - j\omega_p^2 - j\alpha(p + \alpha) - \alpha\omega_p \right. \right. \\ \left. \left. - [\omega_p(p + \alpha) + j\omega_p^2 - j\alpha(p + \alpha) + \alpha\omega_p] \right] \right]$$

$$\Gamma(p) = \frac{K\omega_n^2}{\alpha^2 + \omega_p^2} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_p((p + \alpha)^2 + \omega_p^2)} 2[-\omega_p(p + \alpha) - \alpha\omega_p] \right]$$

$$\Gamma(p) = \frac{K\omega_n^2}{\alpha^2 + \omega_p^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{(p + \alpha) + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} \right]$$

$$\Gamma(p) = \frac{K\omega_n^2}{\alpha^2 + \omega_p^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} - \frac{\alpha}{\omega_p} \frac{\omega_p}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} \right]$$

On remarque que $\omega_n^2 = \alpha^2 + \omega_p^2$ (par identification des termes des fonctions de transferts (B.7) et (B.31)).

$$\Gamma(p) = \left[\frac{1}{p} - \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} - \frac{\alpha}{\omega_p} \frac{\omega_p}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right] K \quad (\text{B.40})$$

On remarque également que :

$$\frac{\alpha}{\omega_p} = \frac{\xi \omega_n}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\Gamma(p) = \frac{K}{p} - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[\sqrt{1 - \xi^2} \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} - \xi \frac{\omega_p}{(p + \alpha)^2 + \omega_p^2} \right] K \quad (\text{B.41})$$

Réponse indicielle (application de la transformée de Laplace inverse)

$$r_\Gamma(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[\sqrt{1 - \xi^2} e^{-\alpha t} \cos(\omega_p t) - \xi e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t) \right] \right] K \quad (\text{B.42})$$

$$r_\Gamma(t) = \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[\sqrt{1 - \xi^2} \cos(\omega_p t) - \xi \sin(\omega_p t) \right] \right] K \quad (\text{B.43})$$

On rappelle la relation trigonométrique :

$$\sin(\omega_p t + \psi) = \sin(\omega_p t) \cos(\psi) + \cos(\omega_p t) \sin(\psi) \quad (\text{B.44})$$

Si on pose $\cos \psi = \xi$, on a bien $\sin \psi = \sqrt{1 - \xi^2}$ (Cf. la propriété : $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$). On peut donc écrire :

$$r_\Gamma(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_p t + \psi) \right] \quad (\text{B.45})$$

Où $\psi = \arccos \xi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$

En effet, on a :

$$\tan \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \arctan \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \quad (\text{B.46})$$

On peut également écrire la réponse indicielle sous la forme suivante :

$$r_\Gamma(t) = K \left[1 - \frac{\omega_n}{\omega_p} e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t + \psi) \right] \quad (\text{B.47})$$

On appelle ce régime pseudo-périodique ou oscillatoire. Et on remarquera que la dérivée est également nulle à l'origine.

Les dépassements successifs sont définis par :

$$D_k = \frac{r(kT/2) - r(\infty)}{r(\infty)} = -(-D_1)^k, \quad (\text{B.48})$$

où D_1 est le premier dépassement.

Notons que le dépassement dépend uniquement du coefficient d'amortissement :

$$D_1 = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \Leftrightarrow \xi = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\ln^2(D_1)}}. \quad (\text{B.49})$$

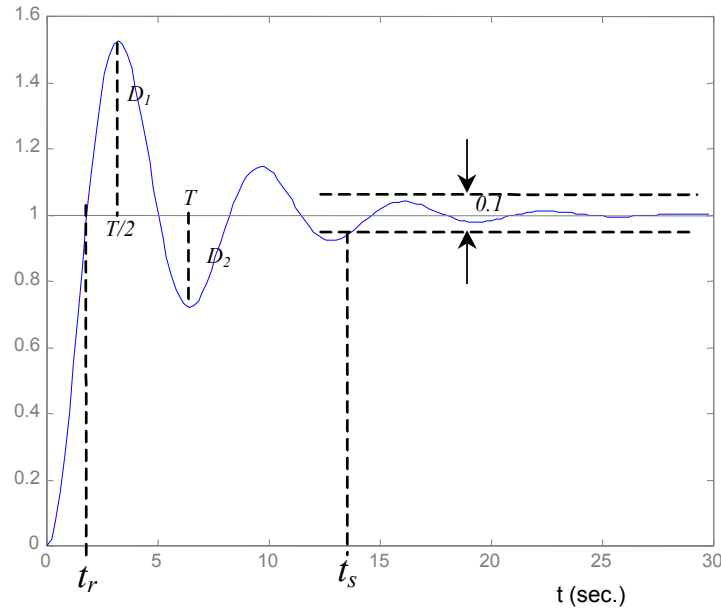


FIGURE B.2 – Réponse indicielle d'un système de second ordre sous-amortis

Cette relation est donc fondamentale pour l'identification d'un modèle de second ordre à partir de la donnée de sa réponse indicielle (obtenue expérimentalement).

Deux autres caractéristiques de ce genre de réponse sont données dans ce qui suit (cf. Figure B.2) :

- le temps de montée (rise-time) t_r : $t_r = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$. Notons que la notation t_m est également utilisée pour cette constante.
- et le temps d'établissement (steady state time) t_s (à 5%) : $t_s = \frac{3}{\xi \omega_n}$. La notation $t_{95\%}$ (pour temps de réponse à 95%) est également utilisée.

La Figure B.3 représente la réponse indicielle pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement $\xi < 1$.

B.2. Analyse fréquentielle

Le transfert de 2nd ordre considéré peut également être présenté de la manière suivante :

$$F(j\omega) = \frac{K}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} + (j \frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (\text{B.50})$$

En posant $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ la **pulsation réduite**, ce transfert s'écrit :

$$F(u) = \frac{K}{1 - u^2 + 2j\xi u} \quad (\text{B.51})$$

dont le module est donné par :

$$A^2(u) = |F(u)|^2 = \frac{K^2}{(1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2} \quad (\text{B.52})$$

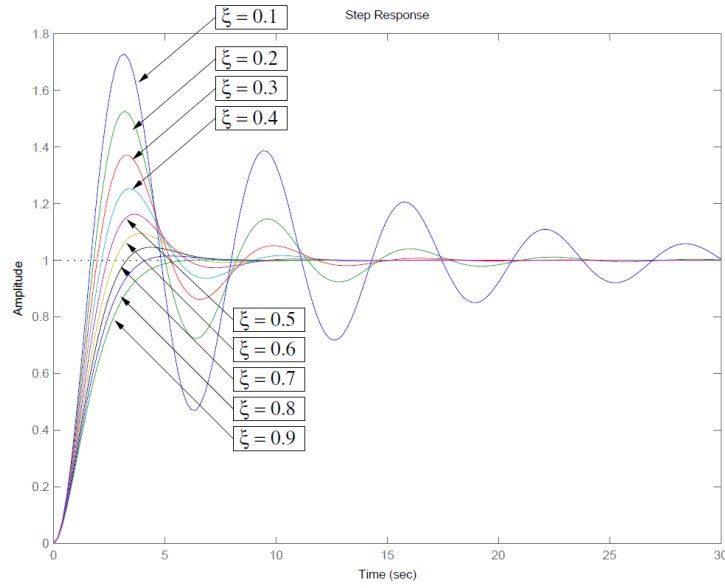


FIGURE B.3 – Réponses indicielles d'un système de second ordre sous-amortis avec différents coefficients d'amortissement

et la phase est exprimée comme suit :

$$\varphi(u) = \begin{cases} -\text{Arctg}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right); & u \leq 1 \\ -\pi - \text{Arctg}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right); & u \geq 1 \end{cases} \quad (\text{B.53})$$

Remarque B.5 Notez que $\varphi(u)$ est symétrique par rapport au point $(u = 1; -90)$.

Nous calculons dans ce qui suit la valeur de la pulsation réduite à laquelle le module $A(u)$ passe par un maximum.

$$\frac{dA^2(u)}{du} = \frac{K^2(-8\xi^2 u - 4(1-u^2)u)}{D(u)} = \frac{K^2(-4u(2\xi^2 - 1 + u^2))}{D(u)} \quad (\text{B.54})$$

Ainsi, il y a résonance (le module passe par un maximum) si $u^2 = 1 - 2\xi^2$. Dans ce cas, $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $u_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ dite pulsation réduite de résonance.

On notera :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (\text{B.55})$$

la **pulsation de résonance**.

A cette valeur le module vaut :

$$A^2(u_r) = \frac{K^2}{(1 - u_r^2)^2 + 4\xi^2 u_r^2} = \frac{K^2}{4\xi^2(1 - \xi^2)}. \quad (\text{B.56})$$

Ceci implique donc une augmentation du module, à la pulsation de résonance, de la valeur suivante :

$$Q = A(u_r) = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (\text{B.57})$$

Q est appelé **facteur de résonance ou surtension** et s'exprime uniquement en fonction de ξ .
L'expression inverse est donnée par :

$$\xi = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}{2}} \quad (\text{B.58})$$

Par ailleurs, le tracé de Bode du second ordre change de pente à la pulsation de coupure correspondant à :

$$|F(j\omega_c)| = \frac{|F(0)|}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.59})$$

Autrement dit à la pulsation réduite de coupure u_c avec :

$$A(u_c) = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.60})$$

ce qui implique :

$$u_c = \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\xi^2)^2}}. \quad (\text{B.61})$$

On notera que, dans ce cas, la pulsation de coupure s'écrit :

$$\omega_c = \omega_n u_c = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\xi^2)^2}}. \quad (\text{B.62})$$

L'expression de u_c ne dépendant que de ξ , nous pouvons en déduire l'expression de ξ en fonction de u_c :

$$\xi = \sqrt{\frac{1 - 2u_c^2 + u_c^4}{4u_c^2}}. \quad (\text{B.63})$$

Nous détaillons ici le tracé de Bode d'un système de second ordre.

L'amplitude en dB :

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(K) - 20\log_{10}\left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \quad (\text{B.64})$$

admet une asymptote horizontale :

$$\text{pour } \omega_n \ll \omega, \quad |H(j\omega)| \approx 20\log_{10}(K) \quad (\text{B.65})$$

et une asymptote de pente -40dB/décade :

$$|H(j\omega)|_{dB} \approx -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \quad \text{pour } \omega_n \gg \omega. \quad (\text{B.66})$$

Les deux asymptotes ont une intersection à la pulsation ω_n .

Si il y a résonance ($\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$), le pic de résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ est d'amplitude $M_r = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$ (cf. Figure B.4). Notons ici que la notation $Q = M_r$ est également utilisée pour la surtension ou résonance.

La phase est donnée par :

$$\Phi = -\arctg\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) \frac{180}{\pi}. \quad (\text{B.67})$$

On notera que pour $\omega = 0$ la phase vaut 0deg , pour $\omega = \omega_n$ la phase vaut $\Phi = -\arctg\left(\frac{2\xi}{0}\right) \frac{180}{\pi} = -90\text{deg}$ et pour $\omega \rightarrow \infty$ la phase tend vers -180deg .

Le tracé de Bode pour différentes valeurs d'amortissement est donné par la Figure B.5.

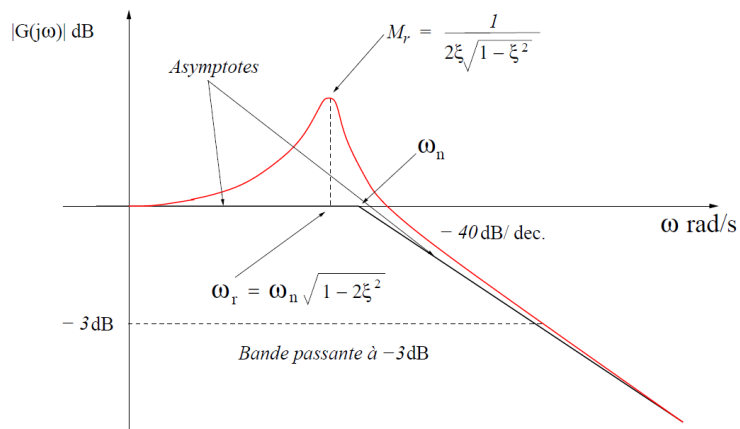


FIGURE B.4 – Le gain en dB dans le plan de Bode d'un second ordre avec résonance

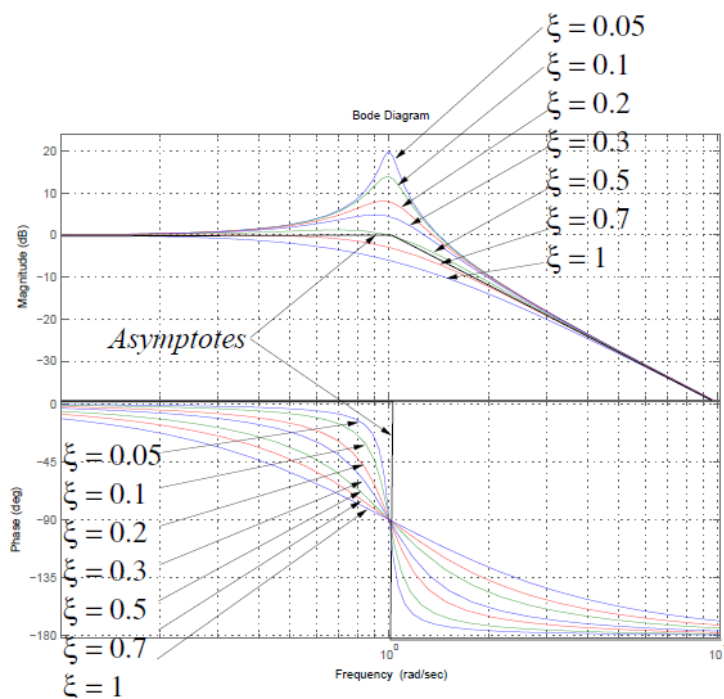


FIGURE B.5 – Tracé de Bode d'un second ordre pour ξ variant

Annexe C

Formulaire et savoir-faire minimum

C.1. Rappels de formules d'analyse essentielles en traitement du signal

Nous supposons ici que les conditions d'existence des transformées de Fourier et des produits de convolution sont vérifiées. $a \in \mathbb{R}$, $\nu_0 \in \mathbb{R}$.

- 1 - $f(x) * \delta_a = f(x - a)$
- 2 - $f(x)\delta_a = f(a)\delta_a$
- 3 - $f(x) * \delta^{(n)} = f^{(n)}(x)$
- 4 - $Y' = \delta$
- 5 - $\mathcal{F}[\delta_a](\nu) = \exp(-i2\pi\nu a)$ (donc $\mathcal{F}[\delta] = 1$)
- 6 - $\mathcal{F}[\exp(i2\pi\nu_0 t)] = \delta_{\nu_0}$ (donc $\mathcal{F}[1] = \delta$)
- 7 - $\mathcal{F}[f * g](\nu) = \mathcal{F}[f](\nu)\mathcal{F}[g](\nu) = \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu)$
- 8 - $\mathcal{F}[fg](\nu) = \mathcal{F}[f](\nu) * \mathcal{F}[g](\nu) = \hat{f}(\nu) * \hat{g}(\nu)$
- 9 - $\mathcal{F}[f(at)](\nu) = \frac{1}{a}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\nu}{a}\right)$
- 10 - $\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi}\nu p \frac{1}{t}\right](\nu) = -i \operatorname{sign}(\nu)$

Munis de ces 10 formules, vous pouvez démontrer de nombreuses formules. Par exemple :

- $\mathcal{F}[f(t - a)](\nu) = \mathcal{F}[f(t) * \delta_a](\nu) = \exp(-i2\pi\nu a)\hat{f}(\nu)$
- $\mathcal{F}[f(t) \exp(-i2\pi\nu_0 t)](\nu) = \hat{f}(\nu) * \delta_{\nu_0} = \hat{f}(\nu - \nu_0)$
- $\mathcal{F}[\cos(2\pi\nu_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(\exp(2i\pi\nu_0 t) + \exp(-2i\pi\nu_0 t))\right] = \frac{1}{2}(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0})$
- $\mathcal{F}[\sin(2\pi\nu_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2i}(\exp(2i\pi\nu_0 t) - \exp(-2i\pi\nu_0 t))\right] = \frac{1}{2i}(\delta_{\nu_0} - \delta_{-\nu_0})$

C.2. Signaux et systèmes à temps continu

C.2.1. Éléments fondamentaux sur les signaux

Dans la suite, un signal est défini par sa représentation temporelle x (variable : temps $t \in \mathbb{R}$) et sa représentation fréquentielle \hat{x} (variable : fréquence ν). Nous supposons que x est tel que \hat{x} existe et que :

$$\mathcal{F}[x] = \hat{x} \leftrightarrow \bar{\mathcal{F}}[\hat{x}] = x. \quad (\text{C.1})$$

Signal causal : $x(t) = 0$, $t \leq 0$.

Signal analytique : $\hat{x}(\nu) = 0$, $\nu \leq 0$.

Signal réel : $x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \hat{x}(-\nu) = \hat{x}^*(\nu)$ (module pair, phase impaire)

C.2.1.1. Signal réel de spectre étroit (ou à bande étroite)

Signal de spectre étroit :

$\exists(\nu_0, B) \in \mathbb{R}^2, \nu_0 \gg B$ tels que $\hat{x}(\nu) = 0$ si $\nu \notin [-\nu_0 - \frac{B}{2}, -\nu_0 + \frac{B}{2}] \cup [\nu_0 - \frac{B}{2}, \nu_0 + \frac{B}{2}]$

Signal analytique d'un signal réel de spectre étroit

$$x_a(t) = x(t) + i\tilde{x}(t) \leftrightarrow \hat{x}_a(\nu) = 2\hat{x}(\nu)Y(\nu),$$

avec $\tilde{x} = \mathcal{H}[x] = \text{vp}\left(\frac{1}{\pi t}\right) \star x$ défini comme la transformée de Hilbert de x .

Enveloppe complexe d'un signal réel de spectre étroit

$$x_e(t) = x_a(t) \exp(-i2\pi\nu_0 t) \leftrightarrow \hat{x}_e(\nu) = \hat{x}_a(\nu + \nu_0)$$

THÉORÈME - Tout signal réel de spectre étroit se décompose sous la forme

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi\nu_0 t) - x_s(t) \sin(2\pi\nu_0 t),$$

avec x_c et x_s réels, passe-bas tels que les supports de \hat{x}_c et \hat{x}_s soient égaux à $[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$ et $x_e = x_c + ix_s$.

C.2.2. Signaux mesurés - Echantillonnage

Signal original $x_0(t)$ et signal mesuré $x(t)$ de spectre borné (fréquence maximale ν_{max}).

$$x = \sum_n x_0(nT_e) \delta_{nT_e}$$

$$\hat{x}(\nu) = \sum_n x_0(nT_e) \exp(-i2\pi n\nu T_e) = \frac{1}{T_e} \sum_n \hat{x}_0\left(\nu - \frac{n}{T_e}\right)$$

Reconstruction sans repliement de spectre si $\nu_e = \frac{1}{T_e} > 2\nu_{max}$

C.2.3. Filtrage linéaire

Un filtre linéaire est défini par sa réponse impulsionnelle h et sa fonction de transfert en Laplace $L[h]$ ou en fréquence \hat{h} .

La réponse du filtre à un signal d'excitation s est le signal r vérifiant

$$r = h \star s \Leftrightarrow L[r] = L[h] L[s], \hat{r} = \hat{h} \hat{s}$$

Propriétés :

- a) Si $s = \delta, r = h$.
- b) Si $s = Y, r' = h$.
- c) Si $s(t) = \exp(i2\pi\nu_0 t), r(t) = \hat{h}(\nu_0) \exp(i2\pi\nu_0 t)$.

Identification Hypothèse : s, r causaux de même que les signaux dérivés.

Notons s le signal d'excitation et r la réponse du système. Le système peut être modélisé par l'équation différentielle

$$\sum_{k=0}^m b_k \frac{d^{m-k} r}{dt^{m-k}} = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^{n-k} s}{dt^{n-k}}.$$

Identification par la réponse impulsionnelle :

$$h(t)Y = \left(\sum_{k=0}^n a_k \delta^{(n-k)} \right) \star \left(\sum_{k=0}^m b_k \delta^{(m-k)} \right)^{\star-1}$$

Identification par la fonction de transfert :

$$\mathcal{L}[h](p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k p^{n-k}}{\sum_{k=0}^m b_k p^{m-k}}.$$

$$\hat{h}(\nu) = \frac{A(\nu)}{B(\nu)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k (i2\pi\nu)^{n-k}}{\sum_{k=0}^m b_k (i2\pi\nu)^{m-k}}.$$

Filtre réalisable la réponse impulsionnelle est causale

Filtre stable la réponse du système à un signal d'excitation borné est bornée.

- a) CNS stabilité : h est sommable, c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < +\infty$
- b) CNS stabilité d'un filtre réalisable : les pôles de la fonction de transfert (i.e. racines de $B(p)$) sont de partie réelle strictement négative :

$$p_k \in \mathbb{C}, B(p_k) = 0 : \operatorname{Re}(p_k) < 0$$

- c) Si le filtre est stable, \hat{h} est défini.

C.2.3.1. Distorsions - Filtres de réponse impulsionnelle réelle

Hypothèse : $h(t) \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(\nu) = A(\nu) \exp(-i\Phi(\nu))$ existe.

Alors A fonction paire, Φ fonction impaire.

Filtre sans distorsion $h = A_0 \delta_{t_0} \leftrightarrow \hat{h}(\nu) = A_0 \exp(-i2\pi\nu t_0)$

Filtre sans distorsion d'amplitude $\hat{h}(\nu) = A_0 \exp(-i\Phi(\nu))$

Filtre sans distorsion de phase $\hat{h}(\nu) = A(\nu) \exp(-i2\pi\nu t_0)$

Savoir calculer la sortie y lorsque

- a. l'entrée x est un signal sinusoïdal
 - Si $x(t) = x_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$, alors $y(t) = x_0 A(\nu_0) \cos(2\pi\nu_0 t - \Phi(\nu_0))$.
 - Si $x(t) = x_0 \sin(2\pi\nu_0 t)$, alors $y(t) = x_0 A(\nu_0) \sin(2\pi\nu_0 t - \Phi(\nu_0))$.
- b. l'entrée x est un signal de spectre étroit
 - 1. $x(t) = m(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$ avec $\hat{m}(\nu) = 0$, $|\nu| > \Delta\nu$, $\nu_0 \gg \Delta\nu$,
 - 2. Approximation : $\hat{h}(\nu) \approx A(\nu_0) \exp(-i\Phi(\nu_0)) \exp(-i(\nu - \nu_0)\Phi'(\nu_0))$, $|\nu - \nu_0| \leq \Delta\nu$
 alors $y(t) = A(\nu_0) m \left(t - \frac{\Phi'(\nu_0)}{2\pi} \right) \cos(2\pi\nu_0 t - \Phi(\nu_0))$.
 Le retard de groupe est égal à $t_g = \frac{\Phi'(\nu_0)}{2\pi}$ et le retard de phase est égal à $t_p = \frac{\Phi(\nu_0)}{2\pi\nu_0}$.

C.2.3.2. Classification des filtres

Connaître la définition de passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande, fréquence de coupure à 3dB, bande passante à 3 dB.

C.3. Signaux aléatoires réels

Moyenne stochastique $m_X(t) = E[X(t)]$

Signal centré $E[X(t)] = 0$

Fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$.

C.3.1. Signaux aléatoires stationnaires du second ordre au sens large

Processus aléatoire stationnaire du second ordre au sens large

- 1 - $E[(X(t))^2]$ existe et ne dépend pas de t ,
- 2 - $E[X(t)]$ ne dépend pas de t : $E[X(t)] = m$,
- 3 - $E[X(t_1)X(t_2)]$ ne dépend que de $t_2 - t_1$.

On note $R_X(\tau) = E[X(t)X(t - \tau)]$ la fonction d'autocorrélation et $S_X = \mathcal{F}[R_X]$ la densité spectrale de puissance.

$$P = R_X(0) = \int_{\mathbb{R}} S_X(\nu) d\nu$$

Bruit additif blanc gaussien $b(t)$: processus aléatoire stationnaire du second ordre au sens large, centré vérifiant

- 1 - additif : il se superpose au signal ($y(t) = x(t) + b(t)$)
- 2 - blanc : $E[b(t)b(t - \tau)] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ ($S_b(\nu) = \frac{N_0}{2}$),
- 3 - gaussien : $\forall K \in \mathbb{N}, \forall t_1 < t_2 < \dots < t_K, [b(t_1) \ b(t_2) \ \dots \ b(t_K)]^T$ est un vecteur gaussien.

C.3.2. Propriétés énergétiques

Signal réel déterministe d'énergie totale finie

- 1 - $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{x}(\nu)|^2 d\nu$
- 2 - Densité spectrale d'énergie : $S_x(\nu) = |\hat{x}(\nu)|^2$,
- 3 - Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x(t - \tau)dt$.
- 4 - $E = R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} S_x(\nu) d\nu$
- 5 - Fonction d'intercorrélation $R_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t - \tau)dt$.

Signal réel déterministe de puissance moyenne finie

- 1 - $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$
- 2 - Densité spectrale de puissance : $S_x(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt \right|^2$,
- 3 - Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t - \tau)dt$.
- 4 - $P = R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} S_x(\nu) d\nu$
- 5 - Fonction d'intercorrélation $R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t - \tau)dt$.

Propriétés

a) $S_x = \mathcal{F}[R_x]$

b) Si $y(t) = h(t) \star x(t)$ avec x signal déterministe d'énergie totale finie, alors y signal déterministe d'énergie totale finie et

$$S_y(\nu) = |\hat{h}(\nu)|^2 S_x(\nu)$$

c) Si $y(t) = h(t) \star x(t)$ avec x signal déterministe de puissance moyenne finie, alors y signal déterministe de puissance moyenne finie et

$$S_y(\nu) = |\hat{h}(\nu)|^2 S_x(\nu)$$

C.4. Signaux et systèmes discrets

C.4.1. Conversion analogique-numérique

Shannon-Nyquist : Un signal à temps continu $s(t)$ dont le spectre est à support borné $[-\nu_M, +\nu_M]$ est entièrement connu par une suite infinie d'échantillons $s(kT_e)$, $k \in \mathbb{Z}$, si la période d'échantillonnage T_e vérifie $T_e \leq \frac{1}{2\nu_M}$, ou de façon équivalente si la fréquence d'échantillonnage vérifie $\nu_e \geq 2\nu_M$.

Reconstruction : Si la condition de Shannon-Nyquist est vérifiée, \hat{s} peut être reconstruit à partir de \hat{s}_e :

$$\hat{s}(\nu) = T_e \hat{s}_e(\nu) \Pi\left(\frac{\nu}{W}\right),$$

avec $2\nu_M \leq W < 2(\nu_e - \nu_M)$. La transformée de Fourier inverse fournit alors le signal original :

$$s(t) = WT_e s_e(t) * \frac{\sin \pi W t}{\pi W t}$$

Débit d'un CAN : $D_{\text{CAN}} = \frac{N}{T_e} \text{ bit/s}$ où N est le nombre de bits de quantification.

C.4.2. Propriétés énergétiques des signaux discrets

Energie : $E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2$

Puissance moyenne totale : $P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} |s(k)|^2$

Intercorrélation (signaux à énergie finie) :

$$R_{s_1 s_2}(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(k) s_2^*(k-u)$$

Intercorrélation (signaux à puissance moyenne finie) :

$$R_{s_1 s_2}(u) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} s_1(k) s_2^*(k-u)$$

C.4.3. Transformées de signaux discrets

C.4.3.1. Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

Si $s(k)$ est absolument sommable, i.e. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |s(k)| < +\infty$, alors sa transformée de Fourier est définie par

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) e^{-i2\pi k \nu}, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$$

et sa transformée de Fourier inverse par

$$s(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{s}(\nu) e^{i2\pi k \nu} d\nu.$$

La transformée de Fourier des signaux discrets vérifie les mêmes propriétés que celles des signaux continus comme la linéarité, la relation convolution-multiplication ou la conservation d'énergie.

C.4.3.2. Transformée de Fourier discrète (TFD)

Soit $s(k)$ une séquence de longueur finie telle que $k \in [0, N-1]$. La transformée de Fourier Discrète (TFD) est une séquence finie de longueur N définie comme

$$\widehat{s}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}, \quad n \in [0, \dots, N-1].$$

La transformée de Fourier discrète inverse s'obtient de la façon suivante

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{s}(n) e^{2i\pi k \frac{n}{N}}, \quad k \in [0, \dots, N-1].$$

Attention, pour la TFD, le théorème de convolution s'écrit avec une convolution cyclique, à savoir :

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} s_1(\ell) s_2(k-\ell)_N = \text{TFD}^{-1} [\widehat{s}_1(n) \widehat{s}_2(n)]$$

C.4.3.3. Transformée en Z

La transformée en Z d'une séquence $s(k)$ est définie comme

$$\mathcal{Z}[s(k)] = S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k) z^{-k},$$

avec $z \in \mathbb{C}$. L'ensemble des valeurs de z pour lesquelles $S(z)$ existe est appelé **région de convergence** (RDC) et est exprimé sous la forme :

$$\text{RDC} = \left\{ z : 0 \leq R_- = \lim_{k \rightarrow \infty} |s(k)|^{1/k} < |z| < R_+ = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} |s(-k)|^{1/k}} \leq +\infty \right\}$$

Quelques propriétés importantes :

Linéarité : $\mathcal{Z}[a s_1(k) + b s_2(k)] = a S_1(z) + b S_2(z)$; $\text{RDC} = R_1 \cap R_2$.

Décalage d'échantillons : $\mathcal{Z}[s(k - k_0)] = z^{-k_0} S(z)$. La RDC est la même que celle de $S(z)$ sauf peut être en $z = 0$ ou en $z = \infty$.

Facteur d'échelle : $\mathcal{Z}[a^k s(k)] = S\left(\frac{z}{a}\right)$, $\text{RDC} = \{z : |a|R_- < |z| < |a|R_+\}$.

Convolution : $\mathcal{Z}[s_1(k) * s_2(k)] = S_1(z) S_2(z)$, $\text{RDC} = R_1 \cap R_2$.

Valeur initiale : pour $s(k)$ causal, $\lim_{z \rightarrow \infty} S(z) = s(0)$.

Valeur finale : pour $s(k)$ causal, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} (z-1) S(z)$.

C.4.4. Systèmes discrets

Convolution : $r(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n) h(k-n)$, s et r sont respectivement l'entrée et la sortie du système. h désigne la réponse impulsionnelle.

Réponse en fréquence (si elle existe) : $\widehat{h}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-i2\pi k \nu}$.

Fonction de transfert : $H(z) = \mathcal{Z}[h(k)]$.

Quelques propriétés importantes associées à la fonction de transfert :

- Un filtre est stable si et seulement si le cercle unité appartient à la RDC de sa fonction de transfert.
- La RDC de la fonction de transfert d'un filtre causal s'étend au-delà des pôles de plus grand module.
- La RDC de la fonction de transfert d'un filtre anti-causal est à l'intérieur du cercle de rayon égal au plus petit module des pôles.

Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) : pour $M < \infty$,

- $h(k) = \sum_{i=0}^M b_i d(k-i),$
- $r(k) = \sum_{i=0}^M b_i s(k-i),$
- $H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k},$

Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) : pour $M < \infty$ et $N < \infty$,

- $h(k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i d(k-i),$
- $r(k) = \sum_{i=0}^M b_i s(k-i) - \sum_{j=1}^N a_j r(k-j),$
- $H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}} = \frac{N(z)}{D(z)},$

Bibliographie

- [1] V. Burdin, *Analyse harmonique et distributions, polycopiés de l'UE Mathématique IMT Atlantique S5*, 2024.
- [2] E. J. Routh, *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion*. London : MacMillan, 1877.
- [3] J.-Y. Fabert, *Automatismes et automatique : sciences industrielles cours et exercices corrigés / Jean-Yves Fabert,...*, nouvelle édition ed., ser. Classes prépas sciences. Paris : Ellipses, 2005, <http://jyfabert.free.fr/ellipses/index.html>.
- [4] E. Roubine, *Introduction à la théorie de la communication : Signaux non aléatoires*, ser. Collection de monographies d'électronique. Masson, 1970.
- [5] F. Roddier, *Distributions et transformées de Fourier*. Mac Graw Hill, 1978.
- [6] R. Arnal, *Signaux et circuits*. Dunod, 1970.
- [7] G. Cazuguel, *Signaux déterministes et systèmes linéaires continus stationnaires à temps continu, polycopiés de Télécom Bretagne*, 1995.
- [8] B. Fracasso and A. Peden, *Télécommunications - Physique des communications - Signaux, fonctions et systèmes*. Ellipses, 2015.
- [9] V. Ingle and J. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB : A Problem Solving Companion*. Cengage Learning, 2016.

OUR WORLDWIDE PARTNERS UNIVERSITIES - DOUBLE DEGREE AGREEMENTS



3 CAMPUS



IMT Atlantique Bretagne-Pays de la Loire – <http://www.imt-atlantique.fr/>

Campus de Brest

Technopôle Brest-Iroise
CS 83818
29238 Brest Cedex 3
France
T +33 (0)2 29 00 11 11
F +33 (0)2 29 00 10 00

Campus de Nantes

4, rue Alfred Kastler
CS 20722
44307 Nantes Cedex 3
France
T +33 (0)2 51 85 81 00
F +33 (0)2 99 12 70 08

Campus de Rennes

2, rue de la Châtaigneraie
CS 17607
35576 Cesson Sévigné Cedex
France
T +33 (0)2 99 12 70 00
F +33 (0)2 51 85 81 99



IMT Atlantique

Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

[Choisir une licence Creative Commons
<https://creativecommons.org/choose/>
et l'apposer ici à la place de cette phrase en
enlevant les crochets]